

ERRORES EN
LA APROXIMACIÓN

Mi desconocido amigo

La misiva parecía urgente y el general Pernety, al que le unía una profunda amistad con Sophie Germain, dejó a un lado sus despachos y ordenó a su ayudante que hiciera pasar a su amiga. Tras tomar ambos asiento, el general comenzó a hablar:

—Ahora, Sophie, cuéntame qué es eso tan importante.

La agitación volvió a la mujer que, con voz nerviosa, comenzó a hablar de manera atropellada:

—¡No permitas que le pase lo mismo que a Arquímedes!
La guerra no respeta nadie y él no ha hecho ningún mal;
su pérdida sería irreparable.

—¿De qué hablas? —la interrumpió el general—.
No entiendo nada.

—¡La guerra con Prusia! El ejército imperial invadirá
la ciudad de Brunswick y allí vive un sabio
que nada sabe de guerras, se llama Gauss.
¡Protégelo cuando tus tropas entren en la ciudad!

—Tranquila, me encargaré de que ningún mal
le suceda a tu amigo.

Tiempo después, tras la campaña, de vuelta en París
el general Pernety volvió a reunirse con Sophie:

—Estarás contenta, cumplí tu encargo; sin embargo,
hubo algo muy extraño, pues cuando le dije quién
era su benefactora, él aseguró no conocerte.

¡Los matemáticos son muy raros!

Sophie sonrió, le dio las gracias y le explicó que solo
conocía a Gauss por correspondencia y que ella
firmaba sus cartas con otro nombre: Le Blanc.

*En una de esas cartas aparecen los números primos
de Germain, son los números primos tales que su doble
más una unidad también es un número primo.*

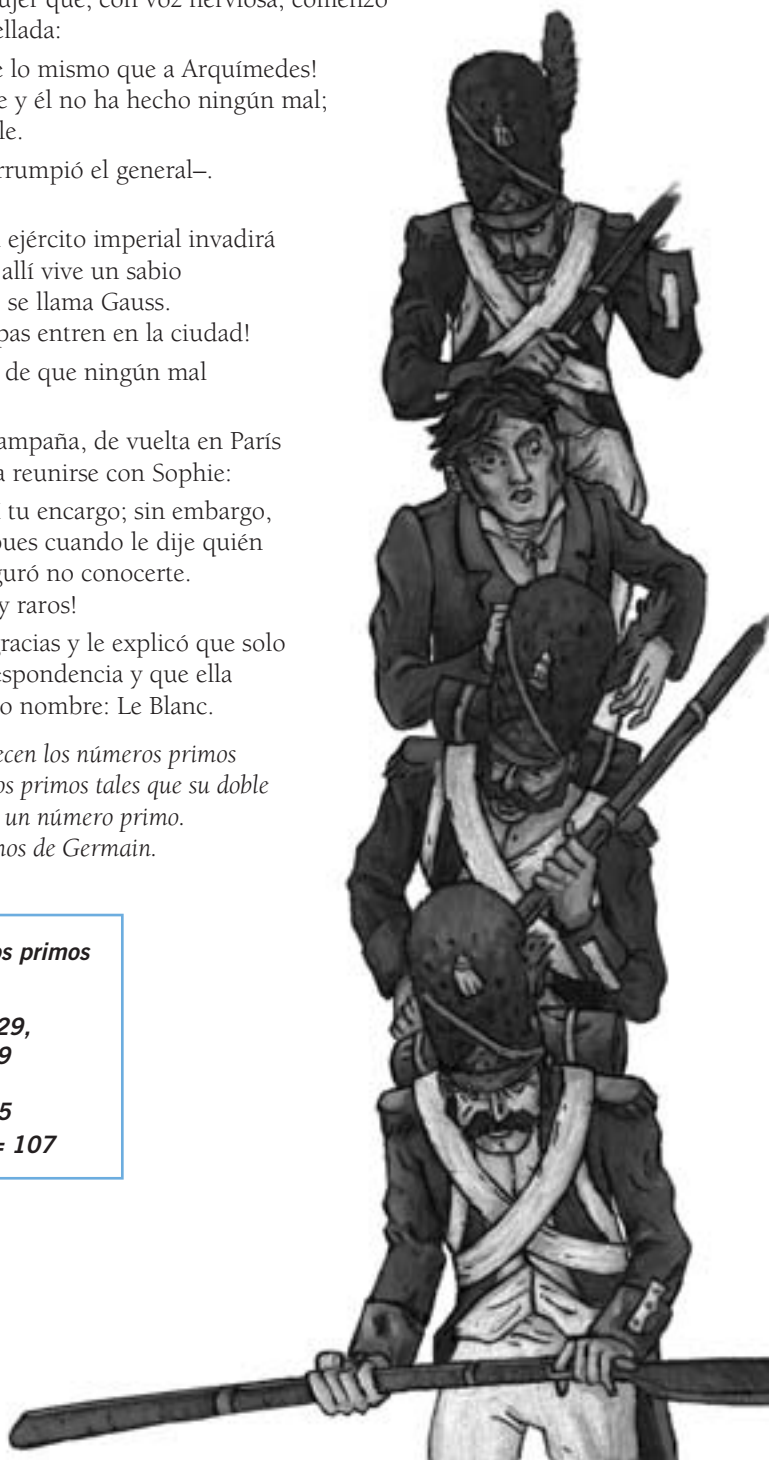
Encuentra 10 números primos de Germain.

**Los primeros 10 números primos
de Germain son:**

**2, 3, 5, 11, 23, 29,
41, 53, 83 y 89**

$$2 \rightarrow 2 \cdot 2 + 1 = 5$$

$$53 \rightarrow 53 \cdot 2 + 1 = 107$$



Números reales

EJERCICIOS

001 Indica, sin realizar las operaciones, qué tipo de expresión decimal tienen estos números.

a) $\frac{3}{5}$

c) $\frac{14}{30}$

e) $\frac{21}{60}$

b) $\frac{11}{3}$

d) $\frac{20}{36}$

f) $\frac{11}{6}$

a) Decimal exacto

d) Periódico puro

b) Periódico puro

e) Decimal exacto

c) Periódico mixto

f) Periódico mixto

002 Escribe dos fracciones que expresen:

a) Un número decimal exacto.

b) Un número decimal periódico mixto.

a) $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{5}$

b) $\frac{5}{6}$ y $\frac{2}{15}$

003 ¿Son racionales todos los números decimales periódicos?

Sí porque se pueden poner en forma de fracción.

004 Expresa en forma de fracción los siguientes decimales.

a) 3,75

c) $3,\overline{75}$

e) $3,\overline{675}$

b) 0,96

d) $0,\overline{96}$

f) $0,\overline{196}$

Simplifica al máximo las fracciones obtenidas para llegar a la fracción generatriz.

a) $3,75 = \frac{375}{100} = \frac{15}{4}$

d) $0,\overline{96} = \frac{96}{99} = \frac{32}{33}$

b) $0,96 = \frac{96}{100} = \frac{24}{25}$

e) $3,\overline{675} = \frac{3.672}{999} = \frac{136}{37}$

c) $3,\overline{75} = \frac{372}{99} = \frac{124}{33}$

f) $0,\overline{196} = \frac{196}{999}$

005 Expresa en forma de fracción.

a) $3,\hat{9}$

b) $1,\hat{9}$

c) $0,\hat{9}$

¿A qué equivale el período formado por 9?

a) $3,\hat{9} = \frac{36}{9} = 4$

b) $1,\hat{9} = \frac{18}{9} = 2$

c) $0,\hat{9} = \frac{9}{9} = 1$

El período formado por 9 equivale a una unidad entera.

006 Completa.

a) $5,6 = \frac{\square}{5}$

b) $5,36 = \frac{\square}{25}$

a) $5,6 = \frac{28}{5}$

b) $5,36 = \frac{134}{25}$

007 Encuentra la fracción generatriz de los números decimales.

a) $1,265555\dots$

c) $0,\overline{225}$

e) $0,\overline{225}$

b) $3,333\hat{1}$

d) $1,26565\dots$

f) $0,\overline{225}$

a) $1,265555\dots = 1,26\overline{5} = \frac{1.139}{900}$

d) $1,26565\dots = 1,26\overline{5} = \frac{1.253}{990}$

b) $3,333\hat{1} = \frac{29.998}{9.000} = \frac{14.999}{4.500}$

e) $0,\overline{225} = \frac{225}{999} = \frac{25}{111}$

c) $0,\overline{225} = \frac{223}{990}$

f) $0,\overline{225} = \frac{203}{900}$

008 Sin realizar las operaciones, deduce cuál de estas igualdades es cierta.

a) $3,\overline{456} = \frac{3.422}{99}$

c) $3,\overline{456} = \frac{3.422}{990}$

b) $3,\overline{456} = \frac{3.422}{999}$

d) $3,\overline{456} = \frac{3.422}{909}$

El denominador está formado por dos 9 seguidos de un 0; luego es el apartado c).

009 Indica, sin realizar las operaciones, cuál de las igualdades es cierta.

a) $0,\overline{020} = \frac{20}{99}$

b) $0,\overline{020} = \frac{4}{198}$

c) $0,\overline{020} = \frac{2}{9}$

d) $0,\overline{020} = \frac{2}{99}$

Son ciertas las igualdades de los apartados b) y d).

010 Realiza las siguientes operaciones, ayudándote de la fracción generatriz.

a) $(1,\overline{2})^2$

c) $3,\overline{2} - 0,\overline{27}$

b) $1,\overline{75} + 0,57$

d) $3,2 : 0,\overline{2}$

a) $(1,\overline{2})^2 = \left(\frac{11}{9}\right)^2 = \frac{121}{81}$

b) $1,\overline{75} + 0,57 = \frac{58}{33} + \frac{57}{100} = \frac{7.681}{3.300} = 2,32\overline{75}$

c) $3,\overline{2} - 0,\overline{27} = \frac{29}{9} - \frac{27}{99} = \frac{292}{99}$

d) $3,2 : 0,\overline{2} = \frac{16}{5} : \frac{2}{9} = \frac{72}{5}$

Números reales

- 011** Considera las raíces cuadradas de los números naturales desde 1 hasta 20, indica cuáles de ellas son números racionales y cuáles son números irracionales.

Son racionales: $\sqrt{1} = 1$, $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt{16} = 4$.

El resto son números irracionales porque no son cuadrados perfectos.

- 012** Escribe cuatro números irracionales, explicando por qué lo son.

$\sqrt{3}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{5}$ y $\sqrt{17}$ son irracionales porque no son cuadrados perfectos.

- 013** Indica de qué tipo son los números.

a) 1,232323... b) -0,246810 c) $\sqrt{13}$

a) Racional, periódico puro.

b) Racional, decimal exacto.

c) Irracional.

- 014** Razona si estas afirmaciones son ciertas.

a) La suma de dos números irracionales es siempre un número irracional.

b) La raíz cuadrada de una fracción es un número irracional.

a) Es falso, por ejemplo:

$$3 + \sqrt{2} \text{ y } 5 - \sqrt{2}$$

$$3 + \sqrt{2} + 5 - \sqrt{2} = 8$$

b) Es falso, cuando el numerador y el denominador son cuadrados perfectos.

$$\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$$

- 015** Compara los siguientes pares de números.

a) $\frac{17}{25}$ y $\frac{29}{27}$ c) $-\frac{1}{3}$ y $-\frac{1}{2}$

b) $\sqrt{3}$ y $1,7\overline{32}$ d) $\sqrt{5}$ y $2,23\overline{60}$

a) $\frac{17}{25} < \frac{29}{27}$

c) $-\frac{1}{2} < -\frac{1}{3}$

b) $\sqrt{3} < 1,7\overline{32}$

d) $2,23\overline{60} < \sqrt{5}$

- 016** Indica el conjunto numérico al que pertenece cada número.

a) 8,0999... d) $-\frac{1}{5}$ g) $\sqrt{15}$

b) -11 e) $6,1\overline{26}$ h) $\frac{8}{7}$

c) 2,5 f) 1,223334444... i) π

- a) Racional, periódico mixto.
- b) Entero.
- c) Racional, decimal exacto.
- d) Racional, decimal exacto.
- e) Racional, periódico mixto.
- f) Irracional.
- g) Irracional.
- h) Racional, periódico puro.
- i) Irracional.

017 Escribe dos números racionales y otros dos irracionales comprendidos entre 1 y $\sqrt{2}$.

Racionales: 1,2 y $1, \hat{1}$

Irracionales: 1,1010010001... y 1,12345678...

018 Observa lo que sucede en la desigualdad $3 < 5$ si:

a) Restamos 5 a los dos números.

b) Multiplicamos ambos números por -2 .

- a) La desigualdad es cierta: $-2 < 0$.
- b) La desigualdad cambia de signo: $-6 > -10$.

019 ¿Puedes encontrar un número racional entre dos números racionales cualesquiera? ¿Y un número irracional? Justifica tu respuesta.

Entre dos números racionales siempre existe un número racional; por ejemplo, el punto medio de ambos.

Entre dos números racionales siempre podemos encontrar un número irracional; por ejemplo, el número resultante de sumar al menor de los dos cualquier número irracional que sea menor que la diferencia entre ambos números.

020 Sacar factor común, operar y simplificar la expresión resultante.

a) $\frac{17}{2} \cdot \left(-\frac{2}{11}\right) + \frac{4}{7} \cdot \left(-\frac{2}{11}\right)$

b) $\frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) + \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{5} - \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{3}$

c) $\frac{3}{4} \cdot 205 + \frac{1}{4} \cdot 325 + \frac{5}{4} \cdot 190$

a) $\frac{17}{2} \cdot \left(-\frac{2}{11}\right) + \frac{4}{7} \cdot \left(-\frac{2}{11}\right) = \left(\frac{17}{2} + \frac{4}{7}\right) \cdot \left(-\frac{2}{11}\right) = \frac{127}{14} \cdot \left(-\frac{2}{11}\right) = \frac{-127}{77}$

b) $\frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) + \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{5} - \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{3}{4} + \frac{7}{5} - \frac{4}{7}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{11}{140} = \frac{11}{420}$

c) $\frac{3}{4} \cdot 205 + \frac{1}{4} \cdot 325 + \frac{5}{4} \cdot 190 = \frac{1}{4} \cdot (615 + 325 + 950) = \frac{1.890}{4} = \frac{945}{2}$

Números reales

021 Calcula el opuesto y el inverso de los siguientes números reales.

a) 1

c) 0,3

e) $\sqrt{5}$

b) $\frac{3}{5}$

d) $\frac{13}{8}$

f) $\frac{\pi}{2}$

a) Opuesto: -1 Inverso: 1

d) Opuesto: $-\frac{13}{8}$ Inverso: $\frac{8}{13}$

b) Opuesto: $-\frac{3}{5}$ Inverso: $\frac{5}{3}$

e) Opuesto: $-\sqrt{5}$ Inverso: $\frac{\sqrt{5}}{5}$

c) Opuesto: $-0,3$ Inverso: $\frac{10}{3} = 3,\hat{3}$

f) Opuesto: $-\frac{\pi}{2}$ Inverso: $\frac{2}{\pi}$

022 Calcula el inverso de $0,4\overline{07}$.

$$0,4\overline{07} = \frac{403}{990} \rightarrow \frac{1}{0,4\overline{07}} = \frac{990}{403}$$

023 Representa los siguientes números reales.

a) $\frac{11}{7}$

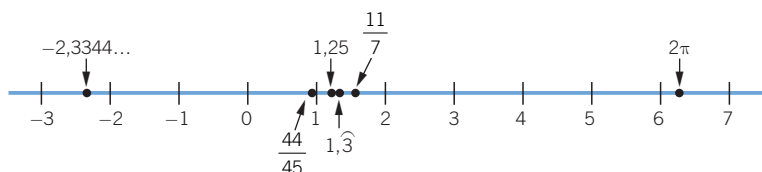
b) $1,\hat{3}$

c) $\frac{44}{45}$

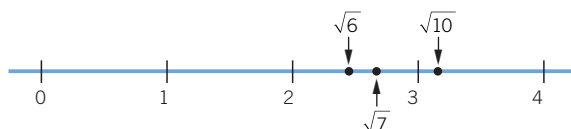
d) $-2,334445555\dots$

e) 2π

f) $1,25$



024  Halla con la calculadora los números $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$ y $\sqrt{10}$, y represéntalos de manera aproximada en la recta.



025 Observa esta recta real y escribe.



a) Dos números enteros entre A y C.

b) Tres números racionales no enteros entre B y C.

c) Tres números irracionales entre C y D.

a) 0 y -1

b) $-0,3$; $\frac{3}{4}$ y $0,\hat{1}$

c) $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ y $\sqrt{5}$

026 Expresa mediante intervalos el conjunto de números reales que verifican que:

a) Son menores que $\frac{3}{4}$.

c) Son mayores que 0.

b) Son menores o iguales que $-\frac{2}{5}$.

d) Son mayores o iguales que $-\frac{2}{5}$.

a) $\left(-\infty, \frac{3}{4}\right)$

b) $\left(-\infty, -\frac{2}{5}\right]$

c) $(0, +\infty)$

d) $\left[-\frac{2}{5}, +\infty\right)$

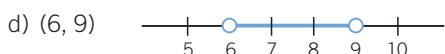
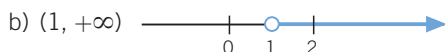
027 Representa sobre la recta real y usando la notación matemática.

a) $\{x \in \mathbb{R}, x \leq 3\}$

c) $\{x \in \mathbb{R}, 4 \leq x < 7\}$

b) $\{x \in \mathbb{R}, x > 1\}$

d) $\{x \in \mathbb{R}, 6 < x < 9\}$



028 Expresa como intervalo estos conjuntos numéricos.

a) $|x| < 3$

b) $|x| < -3$

c) $|x| \geq -3$

a) $(-3, 3)$

b) No tiene solución.

c) $(-\infty, +\infty)$

029 Halla las aproximaciones de 5,24619 a las centésimas y las milésimas, por defecto y por exceso. Decide cuál de ellas es el redondeo.

	Centésimas	Milésimas
Defecto	5,24	5,246 (redondeo)
Exceso	5,25 (redondeo)	5,247

030 Aproxima a las centésimas por truncamiento y por redondeo.

a) 24,1587

c) 24,9215

e) 24,1617

b) 24,1507

d) 24,1582

f) 24,1627

	Redondeo	Truncamiento
a) 24,1587	24,16	24,15
b) 24,1507	24,15	24,15
c) 24,9215	24,92	24,92
d) 24,1582	24,16	24,15
e) 24,1617	24,16	24,16
f) 24,1627	24,16	24,16

Números reales

- 031** Una profesora decide redondear las notas de 10 alumnos.
¿Qué notas les pondrá?

3,8 6,4 9,7 4,3 5,8 8,4 9,7 2,3 3,8 6,4

Les pondrá estas notas: 4, 6, 10, 4, 6, 8, 10, 2, 4 y 6.

- 032** Calcula la diagonal de un rectángulo cuyos lados miden 8 cm y 10 cm.
¿Qué clase de número se obtiene? Redondea el resultado a las milésimas.

Es un número irracional. $d = \sqrt{8^2 + 10^2} = \sqrt{164} \simeq 12,806$

- 033** Obtén el error absoluto y relativo cometido:

a) Al redondear 3,125 a las milésimas.

b) Al truncar $1,\widehat{65}$ a las diezmilésimas.

c) Al redondear $\sqrt{13}$ a las centésimas.

d) Al truncar $\frac{2}{3}$ a las décimas.

e) Al aproximar por defecto 1,3476 a las milésimas.

$$a) E_a = |3,125 - 3,125| = 0$$

$$E_r = \left| \frac{3,125 - 3,125}{3,125} \right| = 0 \rightarrow 0 \%$$

$$b) E_a = |1,\widehat{65} - 1,6565| = 0,0000\widehat{65}$$

$$E_r = \left| \frac{1,\widehat{65} - 1,6565}{1,\widehat{65}} \right| = 0,000039633 \rightarrow 0,0039 \%$$

$$c) E_a = |\sqrt{13} - 3,61| = 0,0044487$$

$$E_r = \left| \frac{\sqrt{13} - 3,61}{\sqrt{13}} \right| = 0,00123385... \rightarrow 0,12 \%$$

$$d) E_a = \left| \frac{2}{3} - 0,66 \right| = 0,00\widehat{6}$$

$$E_r = \left| \frac{\frac{2}{3} - 0,66}{\frac{2}{3}} \right| = 0,00\widehat{9} \rightarrow 0,99 \%$$

$$e) E_a = |1,3476 - 1,347| = 0,0006$$

$$E_r = \left| \frac{1,3476 - 1,347}{1,3476} \right| = 0,000445235975 \rightarrow 0,044 \%$$

034 La cantidad de antibiótico en una cápsula es de $1,5 \text{ g} \pm 0,2 \%$.

a) ¿Qué significa esta afirmación?

b) ¿Entre qué valores oscila la cantidad de antibiótico en cada cápsula?

a) Significa que una cápsula contiene 1,5 gramos, con un error relativo del 0,2 %.

$$\text{b) } 0,2 \% \text{ de } 1,5 = \frac{0,2 \cdot 1,5}{100} = \frac{0,3}{100} = 0,003$$

La cantidad oscila entre: $(1,5 - 0,003; 1,5 + 0,003) = (1,497; 1,503)$

035 Escribe dos aproximaciones de 1,45 que tengan el mismo error relativo.

Por ejemplo, las aproximaciones 1,5 y 1,4.

ACTIVIDADES

036 Utiliza la expresión numérica adecuada a cada situación.

- a) Reparto 15 golosinas entre 8 niños.
- b) He gastado 2 € y 37 céntimos.
- c) En esta tienda hacen un 25 por ciento de descuento.
- d) Llevo un cuarto de hora esperando el autobús.
- e) He pagado 2 de las 5 cuotas del coche.
- f) El 10 por ciento de los estudiantes asegura que no come verduras.
- g) El viaje ha durado 3 horas y media.

a) $\frac{15}{8}$ b) 2,37 € c) $\frac{25}{100}$ d) $\frac{1}{4}$ hora e) $\frac{2}{5}$ f) $\frac{10}{100}$ g) 3,5 horas

037 ¿Cuántos números racionales hay en esta serie? ¿Hay algún número entero? ¿Y natural?

$$\frac{1}{4}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{5}, \frac{12}{8}, -\frac{24}{4}, \frac{4}{24}, \frac{6}{8}, \frac{100}{25}, \frac{150}{200}, -\frac{2}{10}$$

Racionales: todos. Enteros: $-\frac{24}{4} = -6$ y $\frac{100}{25} = 4$. Natural: $\frac{100}{25} = 4$.

038 Transforma las siguientes fracciones en números decimales, e indica el tipo de decimal.

a) $\frac{1}{5}$	d) $\frac{2}{45}$	g) $\frac{2}{9}$
b) $\frac{111}{90}$	e) $\frac{5}{6}$	h) $\frac{2}{1.000}$
c) $\frac{3}{4}$	f) $\frac{12}{7}$	i) $\frac{17}{24}$

- a) 0,2 → Decimal exacto
- b) $1,2\overline{3}$ → Periódico mixto
- c) 0,75 → Decimal exacto
- d) $0,0\overline{4}$ → Periódico mixto
- e) $0,8\overline{3}$ → Periódico mixto
- f) $1,71428\overline{5}$ → Periódico puro
- g) $0,2\overline{2}$ → Periódico puro
- h) 0,002 → Decimal exacto
- i) $0,708\overline{3}$ → Periódico mixto

Números reales

039 Escribe dos fracciones cuya expresión decimal sea un número:

- a) Decimal exacto.
- b) Decimal periódico puro.
- c) Decimal periódico mixto.

$$a) \frac{3}{5} \text{ y } \frac{7}{2}$$

$$b) \frac{4}{3} \text{ y } \frac{7}{11}$$

$$c) \frac{5}{6} \text{ y } \frac{3}{35}$$

040 Escribe un número decimal que cumpla las siguientes características.

- a) Periódico puro, de período 5.
- b) Exacto, con tres cifras decimales.
- c) Periódico mixto, de anteperíodo 28.
- d) Periódico puro, con período de 4 cifras.
- e) Periódico mixto, con período 37.
- f) Exacto, con parte entera 2.

$$a) 1,\widehat{5}$$

$$c) 2,\widehat{2834}$$

$$e) 6,\widehat{837}$$

$$b) 1,234$$

$$d) 5,\widehat{2468}$$

$$f) 2,65$$

041 Halla la fracción generatriz.

- a) 0,2 c) 95,7 e) 0,01 g) 342,12
- b) 5,25 d) 8,0002 f) 37,875 h) 0,0000003

$$a) \frac{1}{5}$$

$$c) \frac{957}{10}$$

$$e) \frac{1}{100}$$

$$g) \frac{8.553}{25}$$

$$b) \frac{21}{4}$$

$$d) \frac{40.001}{5.000}$$

$$f) \frac{303}{8}$$

$$h) \frac{3}{10.000.000}$$

042 Calcula la fracción generatriz de los siguientes números decimales periódicos.

- a) $3,\widehat{5}$ e) $0,01\widehat{57}$ i) $1,\widehat{256}$
- b) $5,\widehat{902}$ f) $42,00\widehat{4}$ j) $10,\widehat{523}$
- c) $12,\widehat{99}$ g) $42,\widehat{78}$ k) $0,000\widehat{97}$
- d) $2,\widehat{37}$ h) $0,\widehat{8}$ l) $3,\widehat{2572}$

$$a) \frac{32}{9}$$

$$e) \frac{156}{9.900} = \frac{43}{4.950}$$

$$i) \frac{1.255}{999}$$

$$b) \frac{5.897}{999}$$

$$f) \frac{41.962}{900} = \frac{20.981}{450}$$

$$j) \frac{10.418}{990} = \frac{5.209}{495}$$

$$c) \frac{117}{9}$$

$$g) \frac{4.236}{99} = \frac{1.412}{33}$$

$$k) \frac{97}{99.000}$$

$$d) \frac{235}{90} = \frac{47}{18}$$

$$h) \frac{8}{9}$$

$$l) \frac{32.540}{9.990} = \frac{3.254}{999}$$

043 Indica el tipo de decimal y calcula, si es posible, su fracción generatriz.

- a) 15,3222... c) 15,233444... e) 15,333
 b) 15,323232... d) 15,32 f) 15

a) Periódico mixto $\rightarrow \frac{1.379}{90}$

d) Decimal exacto $\rightarrow \frac{383}{25}$

b) Periódico puro $\rightarrow \frac{1.515}{99} = \frac{505}{33}$

e) Periódico puro $\rightarrow \frac{138}{9} = \frac{46}{3}$

c) Irracional

f) Decimal exacto $\rightarrow \frac{15}{1}$

044 Escribe la fracción generatriz de estos números decimales.

- a) 2,25 c) $22,\overline{5}$ e) 0,334334334...
 b) $2,\overline{25}$ d) $2,\overline{25}$ f) 8,57111...

a) $\frac{9}{4}$

c) $\frac{203}{9}$

e) $\frac{334}{999}$

b) $\frac{223}{99}$

d) $\frac{203}{90}$

f) $\frac{7.714}{900} = \frac{3.857}{450}$

045 Los siguientes números decimales tienen de período 9. Averigua a qué números equivalen, expresándolos en forma de fracción.

- a) $1,\overline{9}$ b) $4,\overline{59}$ c) $0,\overline{19}$

a) $\frac{18}{9} = 2$

b) $\frac{414}{90} = 4,6$

c) $\frac{18}{90} = 0,2$

046 Ordena los números decimales, de menor a mayor.

2,999 2,95 2,955 2,59 2,599 2,559

$$2,559 < 2,59 < 2,599 < 2,95 < 2,955 < 2,999$$

047 Ordena los siguientes números decimales, de menor a mayor.

$2,\overline{995}$ $2,\overline{9}$ $2,\overline{95}$ $2,\overline{959}$ $2,\overline{95}$

$$2,\overline{95} < 2,\overline{95} = 2,\overline{959} < 2,\overline{995} < 2,\overline{9}$$

048 Ordena estos números decimales, de mayor a menor.

4,75 $4,\overline{75}$ $4,\overline{75}$ 4,775 4,757 $4,\overline{757}$

$$4,775 > 4,\overline{757} = 4,\overline{75} > 4,757 > 4,\overline{75} > 4,75$$

Números reales

049

Ordena, de menor a mayor, los siguientes números decimales.

a)	$7,5\overline{12}$	$7,512$	$7,5\overline{1}$	$7,5\overline{12}$	$7,51\overline{2}$
b)	$3,\overline{6}$	$3,\overline{61}$	$3,\overline{61}$	$3,\overline{615}$	
c)	$8,\overline{24}$	$8,\overline{24}$	$8,\overline{243}$	$8,\overline{243}$	
d)	$7,\overline{14}$	$7,\overline{141}$	$7,\overline{1412}$		

- a) $7,512 < 7,5\overline{12} < 7,51\overline{2} < 7,\overline{512} < 7,\overline{51}$
b) $3,\overline{61} < 3,\overline{615} < 3,\overline{61} < 3,\overline{6}$
c) $8,\overline{24} < 8,\overline{243} < 8,\overline{243} < 8,\overline{24}$
d) $7,\overline{1412} < 7,\overline{141} < 7,\overline{14}$

050

Escribe un número racional comprendido entre:

- a) 3,4 y $3,400\overline{23}$
b) 5,6 y $5,\overline{68}$
c) $2,5\overline{2}$ y $2,\overline{52}$
a) 3,4001
b) 5,62
c) 2,523

051

HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE OPERA CON NÚMEROS DECIMALES PERIÓDICOS?

Haz esta operación: $12,7 + 7,\overline{2}$

PRIMERO. Se calculan las fracciones generatrices de cada uno de los números decimales.

$$12,7 = \frac{127}{10}$$
$$7,\overline{2} = \frac{72 - 7}{9} = \frac{65}{9}$$

SEGUNDO. Se realizan las operaciones indicadas, sustituyendo los decimales por sus fracciones generatrices.

$$12,7 + 7,\overline{2} = \frac{127}{10} + \frac{65}{9} = \frac{127 \cdot 9 + 65 \cdot 10}{90} =$$
$$= \frac{1.143 + 650}{90} = \frac{1.793}{90} = 19,9\overline{2}$$

052 Opera, utilizando las fracciones generatrices.

a) $1,\widehat{3} + 3,4$

c) $1,\widehat{36} + 8,\widehat{25}$

e) $3,\widehat{46} + 4,\widehat{295}$

b) $10,\widehat{25} - 5,\widehat{7}$

d) $4,\widehat{5} + 6,\widehat{7}$

f) $3,\widehat{21} + 4,\widehat{312}$

$$a) 1,\widehat{3} + 3,4 = \frac{4}{3} + \frac{17}{5} = \frac{71}{15}$$

$$b) 10,\widehat{25} - 5,\widehat{7} = \frac{923}{90} - \frac{52}{9} = \frac{403}{90}$$

$$c) 1,\widehat{36} + 8,\widehat{25} = \frac{135}{99} + \frac{817}{99} = \frac{952}{99}$$

$$d) 4,\widehat{5} + 6,\widehat{7} = \frac{41}{9} + \frac{61}{9} = \frac{102}{9} = \frac{34}{3}$$

$$e) 3,\widehat{46} + 4,\widehat{295} = \frac{343}{99} + \frac{4.253}{990} = \frac{7.686}{990} = \frac{2.561}{330}$$

$$f) 3,\widehat{21} + 4,\widehat{312} = \frac{318}{99} + \frac{4.269}{990} = \frac{7.449}{990} = \frac{2.483}{330}$$

053 Realiza las operaciones.

a) $1,25 \cdot 2,\widehat{5}$

c) $3,\widehat{76} \cdot 4,\widehat{8}$

b) $0,0\widehat{3} : 2,9\widehat{2}$

d) $1,25 : 2,2\widehat{5}$

$$a) 1,25 \cdot 2,\widehat{5} = \frac{5}{4} \cdot \frac{23}{9} = \frac{115}{36}$$

$$c) 3,\widehat{76} \cdot 4,\widehat{8} = \frac{339}{90} \cdot \frac{44}{9} = \frac{2.486}{135}$$

$$b) 0,0\widehat{3} : 2,9\widehat{2} = \frac{3}{90} : \frac{263}{90} = \frac{3}{263}$$

$$d) 1,25 : 2,2\widehat{5} = \frac{5}{4} : \frac{203}{90} = \frac{225}{406}$$

054 Utilizando las fracciones generatrices, comprueba si son verdaderas o falsas las siguientes igualdades.

a) $1,\widehat{9} = 2$

c) $1,8\widehat{9} + 0,1\widehat{1} = 2$

e) $0,\widehat{3} + 0,\widehat{6} = 1$

b) $1,\widehat{3} : 3 = 0,\widehat{4}$

d) $0,1\widehat{1} - 0,\widehat{1} = 0$

$$a) 1,\widehat{9} = \frac{18}{9} = 2 \longrightarrow \text{Verdadera}$$

$$b) 1,\widehat{3} : 3 = \frac{12}{9} : 3 = \frac{4}{9} = 0,\widehat{4} \longrightarrow \text{Verdadera}$$

$$c) 1,8\widehat{9} + 0,1\widehat{1} = \frac{171}{90} + \frac{10}{90} = \frac{181}{90} \neq 2 \rightarrow \text{Falsa}$$

$$d) 0,1\widehat{1} - 0,\widehat{1} = \frac{1}{9} - \frac{1}{9} = 0 \longrightarrow \text{Verdadera}$$

$$e) 0,\widehat{3} + 0,\widehat{6} = \frac{3}{9} + \frac{6}{9} = 1 \longrightarrow \text{Verdadera}$$

Números reales

055

Escribe 6,8 como suma de dos números decimales periódicos.

$$6,8 = \frac{34}{5} = \frac{7}{3} + \frac{67}{15} = 2,\widehat{3} + 4,4\widehat{6}$$

056

¿Cuál es la vigésimo sexta cifra decimal que obtenemos al expresar $\frac{128}{9.999}$ en forma decimal? Razona tu respuesta.

$\frac{128}{9.999} = 0,0128$. Como el período tiene cuatro cifras, la vigésimo sexta cifra decimal es la segunda cifra del período, 1.

057

¿Qué tipo de decimal se obtiene de la fracción $\frac{a}{2^2 \cdot 5^3}$, si a es un número entero?

Se obtiene un número entero o decimal exacto, ya que el cociente es producto de potencias de 2 y de 5.

058

Razona cuáles de los siguientes números decimales son racionales y cuáles son irracionales.

a) 2,555...

e) 2,5255555...

b) 2,55

f) 2,525252...

c) 2,525522555222...

g) 2,5522222222...

d) 2,525225222...

h) 2,525

a) Racional, periódico puro.

e) Racional, periódico mixto.

b) Racional, decimal exacto.

f) Racional, periódico puro.

c) Irracional.

g) Racional, periódico mixto.

d) Irracional.

h) Racional, decimal exacto.

059

Indica cuáles de los números son racionales y cuáles son irracionales.

a) $\sqrt{2}$

d) $\sqrt{10}$

g) $\sqrt{6}$

b) $\sqrt{9}$

e) $\sqrt{5}$

h) $\sqrt{16}$

c) $\sqrt{3}$

f) $\sqrt{15}$

i) $\sqrt{7}$

Son racionales los números de los apartados b) y h), y el resto son irracionales.

060

Averigua cuáles de los siguientes números son racionales y cuáles son irracionales.

a) $1 + \sqrt{2}$

c) $5 - \sqrt{9}$

e) $3 \cdot \sqrt{16}$

b) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

d) $8 + \sqrt{10}$

f) $\frac{\sqrt{16}}{5}$

Son racionales los números de los apartados c), e) y f).

Son irracionales los números de los apartados a), b) y d).

061 Escribe tres números racionales y otros tres irracionales.

● Explica cómo lo realizas.

Los números racionales son el resultado de fracciones de números enteros.
2,1; 3,45 y 7,09

Los números irracionales son números cuya parte decimal no tiene período.
1,12345...; 1,2121121112...; 1,1223334444...

062 Escribe un número irracional comprendido entre:

● ●

a) 1 y 2

b) 0,2 y 0,25

c) $0,\widehat{47}$ y $0,\widehat{475}$

d) $2,\widehat{3}$ y $2,\widehat{35}$

a) 1,2121121112...

b) 0,2233344445555...

c) 0,4732101243...

d) 2,301001000100001...

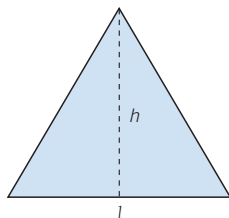
063 Calcula y determina qué tipo de número es, en un triángulo equilátero:

● ●

a) La altura, si el lado mide 10 cm.

b) El área, si el lado mide 3 cm.

c) La altura y el área si el lado mide $\sqrt{3}$ cm.



a) $h = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75}$ cm → Es irracional.

b) $h = \sqrt{3^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{27}}{2}$ cm → $A = \frac{3 \cdot \frac{\sqrt{27}}{2}}{2} = \frac{3\sqrt{27}}{4}$ cm²
→ Es irracional.

c) $h = \sqrt{3 - \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$ cm → $A = \frac{\frac{3}{2} \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ cm²
→ Son irracionales.

064  Ordena, de menor a mayor, ayudándote de la calculadora.

●

$$\sqrt{5}$$

$$1 + \sqrt{2}$$

$$\sqrt{7}$$

$$2 + \sqrt{2}$$

$$1 + \sqrt{5}$$

$$\sqrt{8}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{\sqrt{5}}{3} < \sqrt{5} < 1 + \sqrt{2} < \sqrt{7} < \sqrt{8} < 1 + \sqrt{5} < 2 + \sqrt{2}$$

Números reales

065 HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE DEMUESTRA QUE UN NÚMERO ES IRRACIONAL?

Demuestra que $\sqrt{7}$ es un número irracional.

PRIMERO. Se supone que es un número racional, por lo que se puede expresar como una fracción irreducible.

$$\sqrt{7} = \frac{a}{b}, \text{ con } \frac{a}{b} \text{ irreducible}$$

SEGUNDO. Se eleva al cuadrado en ambos miembros.

$$\sqrt{7} = \frac{a}{b} \rightarrow 7 = \frac{a^2}{b^2}$$

Es decir, a^2 es divisible por b^2 , lo cual es imposible porque a y b son primos entre sí. Por tanto, $\sqrt{7}$ no se puede expresar como una fracción.

066 Demuestra que $\sqrt{10}$ es un número irracional.

Si $\sqrt{10} = \frac{a}{b}$, con $\frac{a}{b}$ irreducible, elevando al cuadrado, tenemos

que $10 = \frac{a^2}{b^2}$, por lo que a^2 es divisible por b^2 , siendo esto imposible porque a y b son números primos entre sí.

067 Clasifica los siguientes números reales en naturales, enteros, racionales o irracionales. Di de qué tipo es su expresión decimal.

- | | |
|--------------------|-------------------|
| a) 25,37 | e) π |
| b) $\frac{-6}{17}$ | f) $\frac{7}{90}$ |
| c) $\frac{2}{5}$ | g) $\sqrt{64}$ |
| d) $-\sqrt{12}$ | h) -5 |

- a) Racional, decimal exacto.
- b) Racional, periódico puro.
- c) Racional, decimal exacto.
- d) Irracional.
- e) Irracional.
- f) Racional, periódico mixto.
- g) Entero.
- h) Entero.

068 Compara estos pares de números.

- a) $2,\widehat{1}$ y 2,111 b) 9 y $(-3)^2$ c) $3,\widehat{4}$ y $\frac{32}{9}$ d) $\sqrt{3}$ y $\sqrt[3]{4}$
- a) $2,\widehat{1} > 2,111$ b) $9 = (-3)^2$ c) $3,\widehat{4} < \frac{32}{9}$ d) $\sqrt{3} > \sqrt[3]{4}$

069 Ordena, de menor a mayor, los siguientes conjuntos de números reales.

- a) $7,5\widehat{12}$ 7,51234... $7,5\widehat{12}$ 7,5112233...
- b) $3,\widehat{6}$ 3,667788... 3,666777... $3,\widehat{67}$
- c) $8,\widehat{24}$ 8,244666... $8,2\widehat{43}$ $8,2\widehat{4}$
- a) $7,5112233... < 7,5\widehat{12} < 7,5\widehat{12} < 7,51234...$
- b) $3,\widehat{6} < 3,667788... < 3,666777... < 3,\widehat{67}$
- c) $8,\widehat{24} < 8,2\widehat{43} < 8,2\widehat{4} < 8,244666...$

070  Calcula el inverso y el opuesto de:

- a) 3 d) $-\frac{11}{4}$ g) $\sqrt{3}$
- b) -2 e) π h) $1,\widehat{4}$
- c) $\frac{4}{3}$ f) 1,4 i) $0,\widehat{12}$
- a) Inverso: $\frac{1}{3} = 0,\widehat{3}$ Opuesto: -3
- b) Inverso: $\frac{-1}{2} = -0,5$ Opuesto: 2
- c) Inverso: $\frac{3}{4} = 0,75$ Opuesto: $-\frac{4}{3} = -1,\widehat{3}$
- d) Inverso: $\frac{-4}{11} = -0,\widehat{36}$ Opuesto: $\frac{11}{4} = 2,75$
- e) Inverso: $\frac{1}{\pi} = 0,318309886$ Opuesto: $-\pi = -3,141592654$
- f) Inverso: $\frac{5}{7} = 0,\widehat{714285}$ Opuesto: -1,4
- g) Inverso: $\frac{\sqrt{3}}{3} = 0,577350269$ Opuesto: $-\sqrt{3} = -1,732050808$
- h) Inverso: $\frac{9}{13} = 0,\widehat{692307}$ Opuesto: $-1,\widehat{4}$
- i) Inverso: $\frac{90}{11} = 8,\widehat{18}$ Opuesto: $-0,\widehat{12}$

Números reales

071

Razona si las afirmaciones son verdaderas o falsas.

- a) Hay números enteros que no son racionales.
 - b) Existen números irracionales que no son números reales.
 - c) Un número real es racional o irracional.
 - d) Cualquier número decimal es un número real.
- a) Falsa, ya que cualquier número entero se puede expresar en forma de fracción de números enteros: el mismo número dividido entre la unidad.
- b) Falsa, pues los números irracionales están incluidos en el conjunto de los números reales.
- c) Verdadera.
- d) Verdadera, porque los números decimales son racionales o irracionales, y todos son números reales.

072

Indica si son verdaderas o falsas las afirmaciones. Razona tu respuesta.

- a) Todos los números decimales se pueden escribir en forma de fracción.
 - b) Todos los números reales son racionales.
 - c) Un número irracional es real.
 - d) Existen números enteros que son irracionales.
 - e) Hay números reales que son racionales.
 - f) Cualquier número decimal es racional.
 - g) Un número racional es entero.
 - h) Los números irracionales tienen infinitas cifras decimales.
 - i) Todos los números racionales tienen infinitas cifras decimales que se repiten.
 - j) Todos los números racionales se pueden escribir mediante fracciones.
- a) Falsa, pues solo se pueden escribir como fracción los números racionales.
- b) Falsa, ya que los números irracionales no son racionales.
- c) Verdadera.
- d) Falsa.
- e) Verdadera.
- f) Falsa, porque los números irracionales no son racionales.
- g) Falsa, ya que es el cociente de dos números enteros.
- h) Verdadera.
- i) Falsa, pues los decimales exactos tienen un número finito de cifras.
- j) Verdadera.

073 Realiza las operaciones, sacando factor común.

a) $11 + 22 + 33 + 44 + 55 + 66 + 77 + 88$

b) $111 + 222 + 333 + 444 + 555$

c) $\frac{1}{3} \cdot 5 - 5 \cdot 4 + 5 \cdot \frac{2}{7}$

d) $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{9} - \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2}$

a) $11 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8) = 11 \cdot 36 = 396$

b) $111 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 111 \cdot 15 = 1.665$

c) $5 \cdot \left(\frac{1}{3} - 4 + \frac{2}{7} \right) = 5 \cdot \frac{-35}{21} = \frac{-25}{3}$

d) $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{5} - 3 + \frac{2}{9} - \frac{3}{5} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{-134}{45} = \frac{-67}{45}$

074 Si a y b son dos números reales y $a < b$, ¿qué sucede con sus opuestos? ¿Y con sus inversos? Contesta razonadamente.

Inversos: $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

Opuestos: $-a > -b$

075 Opera e indica qué tipo de número real resulta.

a) $\sqrt{2,7}$

b) $4,09 - 1,39$

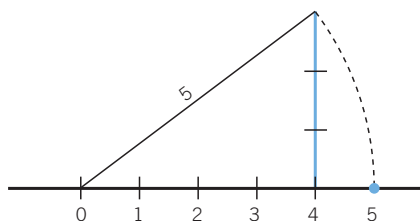
c) $\sqrt{\frac{1,3}{3}}$

a) $\sqrt{2,7} = \sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3} \rightarrow \text{Racional}$

b) $4,09 - 1,39 = \frac{369}{90} - \frac{126}{90} = \frac{243}{90} = \frac{27}{10} = 2,7 \rightarrow \text{Racional}$

c) $\sqrt{\frac{4}{3}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3} \rightarrow \text{Racional}$

076 ¿A qué número corresponde esta representación?



$$\sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$$

Números reales

077



Representa de forma exacta en la recta numérica, utilizando el teorema de Pitágoras, estos números irracionales.

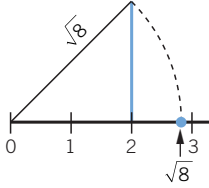
a) $\sqrt{8}$

b) $\sqrt{11}$

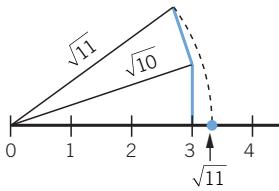
c) $\sqrt{15}$

d) $\sqrt{29}$

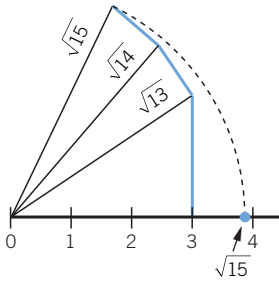
a)



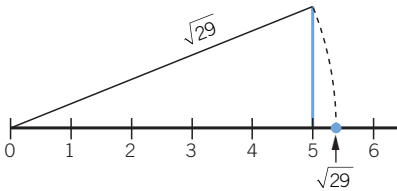
b)



c)



d)



078



Ordena, de menor a mayor, y representa estos números.

$-\frac{3}{2}$

0,5

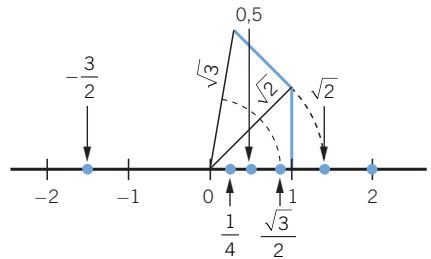
$\sqrt{2}$

$\frac{1}{4}$

$\frac{\sqrt{3}}{2}$

2

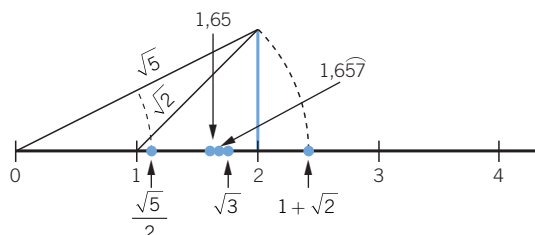
$$-\frac{3}{2} < \frac{1}{4} < 0,5 < \frac{\sqrt{3}}{2} < \sqrt{2} < 2$$



- 079** Ordena, de menor a mayor, y representa, de forma exacta o aproximada, justificando tu elección.

$$1,65 \quad \sqrt{3} \quad \frac{\sqrt{5}}{2} \quad 1 + \sqrt{2} \quad 1,6\overline{57}$$

$$\frac{\sqrt{5}}{2} < 1,65 < 1,6\overline{57} < \sqrt{3} < 1 + \sqrt{2}$$



- 080** Existen relaciones métricas, tanto en la naturaleza, como en construcciones o en la vida cotidiana, donde aparece

el número áureo, $\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

¿Se puede representar este número de forma exacta en la recta numérica?

Razona tu respuesta.



Sí, es posible. Se representa $\sqrt{5}$ (diagonal de rectángulo 2×1), luego se le suma 1 (se añade con el compás una unidad al segmento $\sqrt{5}$), y se halla el punto medio del segmento resultante.

- 081** Describe y representa los siguientes intervalos en la recta real.

a) $(0, 10)$

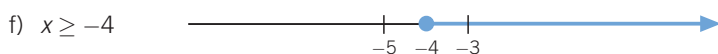
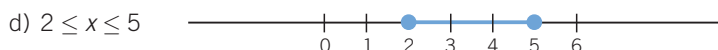
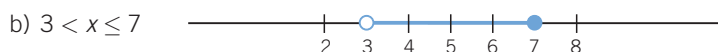
c) $(-\infty, -2)$

e) $[5, 10)$

b) $(3, 7]$

d) $[2, 5]$

f) $[-4, +\infty)$



Números reales

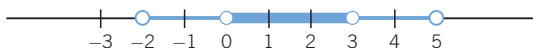
082 Escribe el intervalo que corresponde a los valores de x .

- a) $1 < x < 3$ c) $x \leq -2$ e) $x > -3$ g) $5 \leq x < 9$
b) $6 < x \leq 7$ d) $x < 5$ f) $x \geq 7$ h) $10 \leq x \leq 12$
- a) (1, 3) c) $(-\infty, -2]$ e) $(-3, +\infty)$ g) [5, 9)
b) (6, 7] d) $(-\infty, 5)$ f) [7, $+\infty$) h) [10, 12]

083 Expresa mediante intervalos estas situaciones.

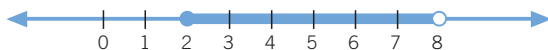
- a) La altura de las casas es menor que 8 m.
b) El descuento se aplica a niños con edades comprendidas entre 2 y 12 años, ambos incluidos.
c) La tarjeta sirve para menores de 26 años.
d) La entrada es gratuita para menores de 5 años o mayores de 65 años.
e) La temperatura osciló entre 7 °C y 23 °C.
- a) (0, 8)
b) [2, 12]
c) (0, 26)
d) $(0, 5) \cup (65, +\infty)$
e) [7, 23]

084 Representa los intervalos (0, 5) y (-2, 3) en la misma recta, y señala el intervalo intersección.



El intervalo intersección es (0, 3).

085 Representa los intervalos $(-\infty, 8)$ y $[2, +\infty)$ en la misma recta, y señala mediante un intervalo los puntos que pertenecen a ambos.



El intervalo intersección es [2, 8).

086 Escribe dos intervalos cuya intersección sea $[-1, 1]$.

Por ejemplo: $[-1, 5) \cap (-8, 1] = [-1, 1]$

087 Escribe dos números racionales y otros dos irracionales contenidos en el intervalo [0, 4].

Racionales: 2,3 y 3,45

Irracionales: $\sqrt{3}$ y $\sqrt{2}$

088 HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE CALCULA EL INTERVALO QUE CONTIENE EL RESULTADO DE UNA OPERACIÓN?

Si x pertenece al intervalo $(1, 2)$ e y pertenece a $(2, 4)$, indica a qué intervalo pertenece el resultado de estas operaciones.

- a) $x + y$ b) $x - y$

PRIMERO. Se toman los extremos de los intervalos y se opera como se indica en cada caso.

Extremos inferiores	Extremos superiores
a) $x + y \rightarrow 1 + 2 = 3$	$x + y \rightarrow 2 + 4 = 6$
b) $x - y \rightarrow 1 - 4 = -3$	$x - y \rightarrow 2 - 2 = 0$

SEGUNDO. Se toman los resultados como los extremos de los nuevos intervalos.

- a) $x + y$ pertenecerá al intervalo $(3, 6)$.
 b) $x - y$ pertenecerá al intervalo $(-3, 0)$.

089 Si dos números reales, x e y , pertenecen a los intervalos $(-1, 3)$ y $[0, 2]$, respectivamente, ¿a qué intervalo pertenece el resultado de las operaciones?

- a) $x + y$ b) $x - y$ c) $y - x$ d) $x \cdot y$
 a) $(-1, 5)$ b) $(-3, 3)$ c) $(-3, 3)$ d) $(-2, 6)$

090 Con ayuda de la calculadora, escribe $\sqrt{3}$ en forma decimal y sus aproximaciones por exceso y por defecto a las diezmilésimas.

$$\sqrt{3} = 1,7320508075688772935274463415059\dots$$

Aproximación por exceso: 1,7321

Aproximación por defecto: 1,7320

091 Redondea a las milésimas el número $\sqrt{7}$. Calcula sus aproximaciones por exceso y por defecto. ¿Qué observas?

Aproximación por exceso: 2,646

Aproximación por defecto: 2,645

092 Aproxima por exceso y por defecto con dos cifras decimales.

- a) $\frac{5}{7}$ b) $\frac{34}{11}$ c) $\sqrt{5}$ d) $23,6\overline{5}$
 a) Aproximación por exceso: 0,72 c) Aproximación por exceso: 2,24
 Aproximación por defecto: 0,71 Aproximación por defecto: 2,23
 b) Aproximación por exceso: 3,10 d) Aproximación por exceso: 23,66
 Aproximación por defecto: 3,09 Aproximación por defecto: 23,65

Números reales

093



¿Qué aparecerá en la pantalla de la calculadora científica, al introducir cada uno de estos números, si previamente pulsamos la secuencia de teclas necesaria para fijar 4 decimales? ¿Y si fijamos 5?

- a) 11,87967575 d) 25,6543678
b) 0,666663 e) 18,010109
c) 8,987656 f) 15,908009



	4 decimales	5 decimales
a) 11,87967575	11,8797	11,87968
b) 0,666663	0,6666	0,66666
c) 8,987656	8,9877	8,98766
d) 25,6543678	25,6544	25,65437
e) 18,010109	18,0101	18,01011
f) 15,908009	15,9080	15,90801

094



Escribe un número:

- a) Decimal periódico puro, cuyo redondeo a las milésimas es 5,677.
b) Decimal periódico mixto, con truncamiento a las centésimas 0,97.
c) Irracional, cuyo redondeo a las diezmilésimas sea 0,0023.
a) $5,\overline{67}$
b) $0,9\overline{7}$
c) 0,002345678...

095



¿Existe algún caso en el que las aproximaciones por exceso y por defecto coincidan? Y si consideramos el redondeo, ¿puede coincidir con la aproximación por exceso y por defecto?

Las aproximaciones por exceso y por defecto coinciden cuando aproximamos a un orden y todas las cifras, distintas de cero, del número son de órdenes superiores.

El redondeo siempre coincide con uno de los anteriores; luego puede coincidir con uno o con los dos.

096



Obtén el error absoluto y relativo cometido al redondear y truncar:

- a) $\frac{17}{9}$ a las centésimas.
b) 7,3568 a las milésimas.
c) 20,5556 a las décimas.

	Redondear	Truncar
Error absoluto	$0,00\overline{1}$	0,008
Error relativo	0,00058823...	0,0047058823...

b)		Redondear	Truncar
	Error absoluto	0,0002	0,0008
	Error relativo	0,000027185...	0,000108742...

c)		Redondear	Truncar
	Error absoluto	0,0444	0,0556
	Error relativo	0,002159995...	0,00270485...

097 Si aproximamos 10,469 por 10,5, ¿qué error se comete? ¿Y si lo aproximamos por 10,4? ¿Cuál es la mejor aproximación? ¿Por qué?

Al aproximar por 10,5; el error absoluto es de 0,031.

Al aproximar por 10,4; el error absoluto es de 0,069.

Es mejor aproximación 10,5; ya que se comete un error menor.

098 Una aproximación por defecto de 8,56792 es 8,56. Halla el error absoluto y el error relativo.

Error absoluto: 0,00792

Error relativo: 0,0009243783...

099 Escribe el número $\frac{1}{7}$ en forma decimal con la mínima cantidad de cifras para que el error sea menor que 1 centésima.

$$\frac{1}{7} \simeq 0,14 \rightarrow \frac{1}{7} - 0,14 < 0,003$$

100 Aproxima el número 12,3456, de forma que el error absoluto sea menor que 0,001.

Valen cualquiera de estas aproximaciones: 12,345 o 12,346

101 Considera el número de oro o número áureo:

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,61803...$$

Aproxímalo por redondeo hasta las centésimas, y halla el error absoluto y relativo.

$$\Phi \simeq 1,62$$

$$\text{Error absoluto: } \left| \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - 1,62 \right| = 0,0019660112501...$$

$$\text{Error relativo: } \left| \frac{\frac{1 + \sqrt{5}}{2} - 1,62}{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}} \right| = 0,001215061774829...$$

Números reales

102

Realiza estas operaciones y redondea los resultados a las décimas.
Después, redondea cada número a las décimas y resuelve la operación.
¿Por qué procedimiento se comete menor error?

a) $3,253 + 8,45$

b) $53,32 - 18,93$

c) $13,5 \cdot 2,7$

d) $40,92 : 5,3$

a) $3,253 + 8,45 = 11,703 \simeq 11,7$

$3,3 + 8,5 = 11,8$

Se comete mayor error redondeando cada sumando.

b) $53,32 - 18,93 = 34,39 \simeq 34,4$

$53,3 - 18,9 = 34,4$

Se comete el mismo error.

c) $13,5 \cdot 2,7 = 36,45 \simeq 36,5$

$13,5 \cdot 2,7 = 36,45$

Se comete mayor error redondeando el resultado.

d) $40,92 : 5,3 = 7,72075... \simeq 7,7$

$40,9 : 5,3 = 7,71698...$

Se comete mayor error redondeando el resultado.

103

Siguiendo los pasos de la actividad anterior, halla una aproximación por defecto.

a) $4,72 + 153,879$

b) $7,8 \cdot 12,9$

c) $62,3 - 24,95$

d) $100,45 : 8,3$

a) $4,72 + 153,879 = 158,599 \simeq 158,5$

$4,7 + 153,8 = 158,5$

Se comete el mismo error.

b) $7,8 \cdot 12,9 = 100,62 \simeq 100,6$

$7,8 \cdot 12,9 = 100,62$

Se comete mayor error aproximando el resultado.

c) $62,3 - 24,95 = 37,35 \simeq 37,3$

$62,3 - 24,9 = 37,4$

Se comete el mismo error.

d) $100,45 : 8,3 = 12,1024... \simeq 12,1$

$100,4 : 8,3 = 12,0963...$

Se comete mayor error aproximando los factores.

104 Obtén la aproximación por redondeo hasta las diezmilésimas.

a) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ b) $\frac{6}{7} + \sqrt{7}$ c) $\sqrt{5} - \sqrt{3}$ d) $\frac{4}{15} + \sqrt{8}$

a) $\sqrt{2} + \sqrt{3} = 3,14626436... \simeq 3,1463$

b) $\frac{6}{7} + \sqrt{7} = 3,5028941... \simeq 3,5029$

c) $\sqrt{5} - \sqrt{3} = 0,5040171... \simeq 0,5040$

d) $\frac{4}{15} + \sqrt{8} = 3,0950937... \simeq 3,0951$

105 ¿Qué error se comete al aproximar el resultado de $45,96 + 203,7 + 0,823$ por el número 250,49?

$$45,96 + 203,7 + 0,823 = 250,483$$

$$E_a = |250,483 - 250,49| = 0,007$$

106 ¿Para qué número sería 5.432,723 una aproximación a las milésimas por defecto? ¿Es única la respuesta? ¿Cuántas hay?

La aproximación es del número 5.432,7232.

La solución no es única; hay infinitas soluciones, tantas como números decimales que empiezan por 5.432,723...

107 ¿Se puede escribir $\pi = \frac{355}{113}$? Justifica la respuesta y calcula el orden del error cometido.

$$\pi = 3,141592654...$$

$$\frac{355}{113} = 3,14159292...$$

Es posible escribirlo, ya que el error que se comete es menor que 1 millonésima.

$$E_a = \left| \pi - \frac{355}{113} \right| = |3,141592654... - 3,14159292...| = 0,0000002667...$$

108 Razona si es verdadero o falso.

- a) Si el lado de un cuadrado es un número racional, la diagonal es irracional.
- b) Si el lado de un cuadrado es un número irracional, el área es racional.
- c) Si la diagonal de un cuadrado es racional, el área es racional.

a) Verdadero, por ejemplo: Lado = $a \rightarrow$ Diagonal = $a\sqrt{2}$

b) Falso, por ejemplo: Lado = $\pi \rightarrow$ Área = π^2

c) Verdadero, por ejemplo: Diagonal = $a \rightarrow$ Lado = $\frac{a}{\sqrt{2}} \rightarrow$ Área = $\frac{a^2}{2}$

Números reales

109 HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE CALCULA UNA COTA DEL ERROR ABSOLUTO?

Escribe una aproximación por defecto y por exceso, hasta las milésimas, del número π . Indica, en cada caso, una cota del error absoluto cometido.

PRIMERO. Se calcula la expresión decimal del número irracional, $\pi = 3,141592\dots$, y la aproximación por exceso y por defecto.

$$\begin{array}{ccc} \text{Por exceso} & \rightarrow & 3,142 \\ \text{Por defecto} & \rightarrow & 3,141 \end{array}$$

SEGUNDO. El error absoluto exacto no se puede calcular por ser un número irracional. Por eso, se toma una aproximación por exceso de los errores absolutos de un orden inferior al de la aproximación. En este caso, se aproxima a las diezmilésimas, pues las aproximaciones de π son a las milésimas.

$$|3,141592\dots - 3,142| = 0,000408\dots < 0,0005$$

La cota de error es menor que 5 diezmilésimas.

$$|3,141592\dots - 3,141| = 0,000592\dots < 0,0006$$

La cota de error es menor que 6 diezmilésimas.

110

Escribe una aproximación por defecto y por exceso del número $e = 2,718281\dots$. Indica, en cada caso, una cota del error absoluto.

Por defecto: 2,718. Error: $0,000281\dots < 0,0003$

Como hemos aproximado a las milésimas, la cota de error es menor que 5 diezmilésimas.

Por exceso: 2,719. Error: $0,000719\dots < 0,0008$

La cota de error es menor que 8 diezmilésimas.

111

Calcula el lado de un cuadrado inscrito en una circunferencia de radio 5 cm. El número obtenido, ¿es racional o irracional?

La diagonal del cuadrado coincide con el diámetro.

$$\text{Lado} = x \rightarrow \text{Diagonal} = x\sqrt{2}$$

$$x \cdot \sqrt{2} = 10 \rightarrow x = 5 \cdot \sqrt{2}$$

El lado mide $5\sqrt{2}$ cm, que es un número irracional.

112

Halla la diagonal de un cuadrado de lado 8 cm. Si construimos un cuadrado cuyo lado es esa diagonal, ¿cuál es el área del segundo cuadrado?

$$\text{Diagonal} = 8\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$\text{Área} = (8\sqrt{2})^2 = 128 \text{ cm}^2$$

- 113** La base de un rectángulo mide $b = 8$ cm y su altura es $a = \frac{3}{4}b$.

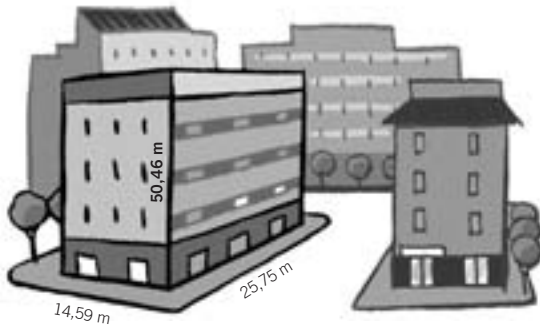
Calcula la longitud de la circunferencia circunscrita a este rectángulo y expresa el resultado con tres decimales.

El diámetro de la circunferencia es la diagonal del rectángulo.

$$\text{Diagonal} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10 \text{ cm, radio} = 5 \text{ cm}$$

La longitud de la circunferencia es 31,415 cm.

- 114** Calcula el volumen del edificio y redondea el resultado a las milésimas.



- a) Redondea sus dimensiones a las décimas, y calcula el volumen de nuevo. ¿Qué relación tiene con el resultado anterior?
- b) Halla el error absoluto y relativo cometido en cada caso.

El valor exacto del volumen es:

$$\text{Volumen} = 14,59 \cdot 25,75 \cdot 50,46 = 18.957,44355 \text{ m}^3$$

Si redondeamos el resultado a las milésimas:

$$\text{Volumen} = 18.957,444 \text{ m}^3$$

$$\text{a) Volumen} = 14,6 \cdot 25,8 \cdot 50,4 = 18.984,672 \text{ m}^3$$

El resultado es mayor que el resultado anterior.

$$\text{b) Volumen} = 14,59 \cdot 25,75 \cdot 50,46 = 18.957,444 \text{ m}^3$$

$$E_a = |18.957,44355 - 18.957,444| = 0,00045$$

$$E_r = \left| \frac{18.957,44355 - 18.957,444}{18.957,44355} \right| = 0,00000002373...$$

$$\text{Volumen} = 14,6 \cdot 25,8 \cdot 50,4 = 18.984,672 \text{ m}^3$$

$$E_a = |18.957,44355 - 18.984,672| = 27,22845$$

$$E_r = \left| \frac{18.957,44355 - 18.984,672}{18.957,44355} \right| = 0,0014362...$$

Números reales

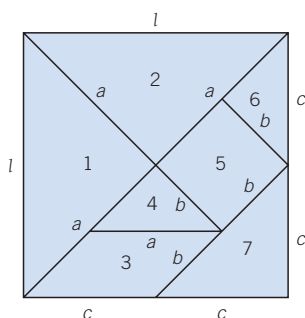
115



Halla la longitud de los lados y el área de cada una de las piezas del *tangram*.



Suponemos que el lado del cuadrado es l .



a es la mitad de la diagonal del cuadrado:

$$a = \frac{\sqrt{l^2 + l^2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}l$$

$$b \text{ es la mitad de } a: b = \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}l$$

$$c \text{ es la mitad de } l: c = \frac{l}{2}$$

Vamos a calcular ahora el perímetro y el área de cada figura.

$$\text{Figura 1: } \begin{cases} P = 2a + l = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}l + l = (\sqrt{2} + 1)l \\ A = \frac{a \cdot a}{2} = \frac{2l^2}{4} = \frac{l^2}{2} \end{cases}$$

$$\text{Figura 2: } \begin{cases} P = 2a + l = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}l + l = (\sqrt{2} + 1)l \\ A = \frac{a \cdot a}{2} = \frac{2l^2}{4} = \frac{l^2}{2} \end{cases}$$

$$\text{Figura 3: } \begin{cases} P = 2b + 2c = \frac{\sqrt{2}}{2}l + l = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)l \\ A = c \cdot \frac{l}{4} = \frac{l^2}{8} \end{cases}$$

$$\text{Figura 4: } \begin{cases} P = 2b + c = \frac{\sqrt{2}}{2}l + \frac{l}{2} = \left(\frac{1 + \sqrt{2}}{2}\right)l \\ A = \frac{b \cdot b}{2} = \frac{l^2}{16} \end{cases}$$

$$\text{Figura 5: } \begin{cases} P = 4b = \sqrt{2}l \\ A = b^2 = \frac{l^2}{8} \end{cases}$$

Figura 6:
$$\begin{cases} P = 2b + c = \frac{\sqrt{2}}{2}l + \frac{l}{2} = \left(\frac{1 + \sqrt{2}}{2}\right)l \\ A = \frac{b \cdot b}{2} = \frac{l^2}{16} \end{cases}$$

Figura 7:
$$\begin{cases} P = 2b + 2c = \frac{\sqrt{2}}{2}l + l = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)l \\ A = \frac{c \cdot c}{2} = \frac{l^2}{8} \end{cases}$$

116

Considera que A , B , C y D son cuatro localidades. La distancia entre A y B es 48 km, con un error de 200 m, y la distancia entre C y D es 300 m, con un error de 2,5 m. ¿Qué medida es más adecuada? ¿Por qué?

Comparamos los errores relativos: $\frac{200}{48.000} = 0,0041\hat{6} < \frac{2,5}{300} = 0,008\hat{3}$

Es más adecuada la medida de la distancia entre C y D por tener menor error relativo.

117

Si $\frac{a}{b}$ es irreducible, razona si $\frac{a+b}{a \cdot b}$ y $\frac{a-b}{a \cdot b}$ también lo son.

Compruébalo con números y, después, intenta extraer una regla general.

Supongamos que $\frac{a+b}{a \cdot b}$ es reducible:

$$\frac{a+b}{a \cdot b} = \frac{y}{x}, \text{ con } x < a \cdot b$$

$$(a+b) \cdot x = a \cdot b \cdot y \xrightarrow{:a} x + \frac{b}{a} \cdot x = b \cdot y$$

Como a , b , x e y son números enteros y $\frac{a}{b}$ es irreducible:

$$x = a \cdot z \rightarrow \frac{a+b}{a \cdot b} = \frac{y}{a \cdot z}, \text{ con } z < b$$

$$\begin{aligned} x + \frac{b}{a} \cdot x = b \cdot y &\xrightarrow{x=a \cdot z} a \cdot z + b \cdot z = b \cdot y \\ &\rightarrow a \cdot z = b \cdot (y - z) \rightarrow \frac{a}{b} = \frac{y-z}{z}, \text{ con } z < b \end{aligned}$$

Esto no es posible por ser $\frac{a}{b}$ irreducible.

Por tanto, $\frac{a+b}{a \cdot b}$ es irreducible.

De manera similar se prueba que $\frac{a-b}{a \cdot b}$ es también irreducible.

Números reales

118

Comprueba las siguientes igualdades.

a) $2,\widehat{3} = 2,3\widehat{3}$

b) $0,\widehat{325} = 0,32\widehat{532}$

¿Por qué opinas que se produce este resultado? ¿Crees que es correcto?

$$\left. \begin{array}{l} \text{a) } 2,\widehat{3} = \frac{21}{9} = \frac{7}{3} \\ 2,3\widehat{3} = \frac{210}{90} = \frac{7}{3} \end{array} \right\} \rightarrow \text{Son iguales.}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{b) } 0,\widehat{325} = \frac{325}{999} \\ 0,32\widehat{532} = \frac{32.500}{99.900} = \frac{325}{999} \end{array} \right\} \rightarrow \text{Son iguales.}$$

Son iguales porque el anteperíodo puede integrarse en el período.

119

Escribe aproximaciones decimales del número 6,325612, con las siguientes cotas del error absoluto.

a) 0,001

b) 0,0005

c) 0,01

d) 0,5

a) 6,347

b) 6,3252

c) 6,316

d) 6,83

120

Justifica de qué orden tendríamos que tomar el redondeo de un número irracional para que la cota del error absoluto fuera menor que una millonésima.

El orden del redondeo sería a las diezmillonésimas.

EN LA VIDA COTIDIANA

121

En un campamento, los monitores han pedido a los chicos que se agrupen, pinten un mural y, después, lo enmarquen.

El grupo de Juan ha hecho un mural cuya área mide 2 m^2 y quiere enmarcarlo. Necesitan calcular la longitud del lado, pero no disponen de reglas para medir ni calculadoras.

Vamos a relacionarlo con $\sqrt{2}$, que es la longitud de la diagonal de un cuadrado cuyo lado mide 1 m.

¿Y cómo medimos $\sqrt{2}$?



El monitor les pide que den la longitud con precisión de milímetros, por lo que deben determinar los tres primeros decimales de $\sqrt{2}$.

Los chicos piensan en rectángulos cuya área coincida con el área del mural y en dimensiones cada vez más parecidas entre sí.

Empezamos con un rectángulo de 2 m de base y 1 m de altura.



A continuación, toman un rectángulo cuya base es la media entre la base y la altura del anterior: $\frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$; así, la altura debe ser $2 : \frac{3}{2} = \frac{4}{3}$, y tenemos que: $\frac{4}{3} < \sqrt{2} < \frac{3}{2}$.

Continuando este proceso, como la diferencia entre la base y la altura de estos rectángulos es cada vez menor y $\sqrt{2}$ siempre está comprendido entre ellas, Juan procede así hasta que las tres primeras cifras de la base y la altura del rectángulo sean iguales.

¿Cuántos pasos debe dar Juan para lograrlo?

PRIMER PASO:

$$\frac{4}{3} < \sqrt{2} < \frac{3}{2} \rightarrow \text{Cota de error: } \frac{1}{6}$$

SEGUNDO PASO:

$$\frac{\frac{4}{3} + \frac{3}{2}}{2} = \frac{17}{12} \rightarrow 2 : \frac{17}{12} = \frac{24}{17}$$

$$\frac{24}{17} < \sqrt{2} < \frac{17}{12} \rightarrow \text{Cota de error: } \frac{1}{204}$$

TERCER PASO:

$$\frac{\frac{17}{12} + \frac{24}{17}}{2} = \frac{577}{408} \rightarrow 2 : \frac{577}{408} = \frac{816}{577}$$

$$\frac{816}{577} < \sqrt{2} < \frac{577}{408} \rightarrow \text{Cota de error: } \frac{1}{235.416}$$

La cota es ya menor que 1 milímetro.

$$\sqrt{2} \simeq \frac{577}{408} = 1,41421$$

Números reales

122

Los alumnos de 4.º ESO han visitado un observatorio astronómico.

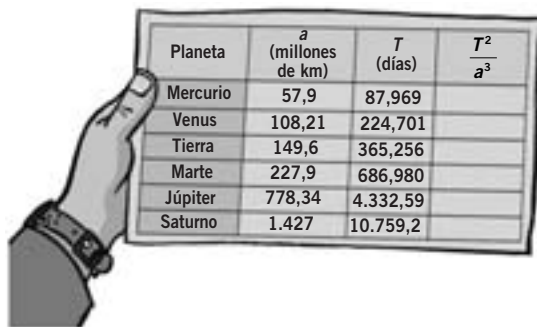


Johannes Kepler publicó en 1619 su libro *La armonía del Universo*, en el que exponía su descubrimiento, que hoy denominamos la tercera ley de Kepler.



Esta ley relaciona el tiempo, T , que un planeta tarda en dar una vuelta completa alrededor del Sol y la distancia, a , que lo separa de él.

El guía les da una tabla con datos sobre los seis planetas conocidos en la época de Kepler.



Planeta	a (millones de km)	T (días)	$\frac{T^2}{a^3}$
Mercurio	57,9	87,969	
Venus	108,21	224,701	
Tierra	149,6	365,256	
Marte	227,9	686,980	
Júpiter	778,34	4.332,59	
Saturno	1.427	10.759,2	

Les cuenta que en 1781 se descubrió Urano, con un período de 84,01 años; y en 1846, Neptuno, con 164,79 años de período.

Con esta información, escribe el período (en días) y calcula la distancia de Urano y Neptuno al Sol.

Teniendo en cuenta que la ley de Kepler indica que $\frac{T^2}{a^3} = 0,04$:

URANO

Período: 30.664 días

Distancia al Sol:

$$a = \sqrt[3]{\frac{T^2}{0,04}} = \sqrt[3]{\frac{30.664^2}{0,04}} = 2.864,61 \text{ millones de kilómetros}$$

NEPTUNO

Período: 60.148 días

Distancia al Sol:

$$a = \sqrt[3]{\frac{T^2}{0,04}} = \sqrt[3]{\frac{60.148^2}{0,04}} = 4.488,77 \text{ millones de kilómetros}$$

POTENCIAS
DE EXPONENTE ENTERO

NOTACIÓN CIENTÍFICA

RADICALES

EQUIVALENTES

SEMEJANTES

OPERACIONES
CON RADICALES

SUMA Y RESTA

PRODUCTO
Y COCIENTE

POTENCIA Y RAÍZ

RACIONALIZACIÓN

DENOMINADOR
CON RADICAL

DENOMINADOR
CON BINOMIO RADICAL

Prueba de valor

No eran buenos tiempos para la gente corriente, las ciudades estado italianas se hundían en un río de intrigas, traiciones y violentas guerras, del que no se salvaban ni siquiera los Estados Pontificios.

En una de estas ciudades, Brescia, Nicolo Fontana se dispuso a contar la historia de su herida, una fea cicatriz que surcaba su mandíbula.

—Fue hace dos años, en 1512, la ciudad había caído y grupos de soldados descontrolados campaban a sus anchas por todas partes.

—Mi madre corría delante de mí en dirección a la iglesia. —La narración se detuvo mientras aconsejaba a los más pequeños—. No lo olvidéis nunca: ¡en caso de peligro el único sitio seguro es la iglesia!

Tras la obligada pausa, Nicolo continuó con su dramática escena.

—De repente, mi madre tropezó y un soldado se acercó a ella blandiendo la espada. La tragedia parecía irremediable. En ese momento, sin dudarlo ni un instante, salté sobre él para defenderla y rodamos por el suelo. —Nicolo hacía aspavientos luchando con el imaginario enemigo—. Pero era más fuerte que yo, se revolvió y de un golpe de espada tajó mi cara como aquí veis. La herida tardó tiempo en curarse y me dejó tartamudo, pero lo doy por bien empleado.

El muchacho, Nicolo Fontana, apodado *Tartaglia*, se convirtió en uno de los matemáticos más importantes del siglo xvi.

Tartaglia encontró la solución de una ecuación cúbica mediante radicales. Discute el valor numérico de estos radicales según el valor de a : $\sqrt[3]{a}$ y $\sqrt{a}$.

Para $a < 0$:

$\sqrt{a}$ **no existe.**

$\sqrt[3]{a}$ **tiene un único valor.**

Para $a = 0$:

$$\sqrt{a} = \sqrt[3]{a} = 0$$

Para $a > 0$:

$\sqrt{a}$ **tiene dos valores, que son opuestos.**

$\sqrt[3]{a}$ **tiene un único valor.**



Potencias y radicales

EJERCICIOS

001 Simplifica y calcula.

a) $\underbrace{z \cdot z \cdot \dots \cdot z}_{60 \text{ veces}}$

60 veces

a) z^{60}

b) $\underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{150 \text{ veces}}$

150 veces

b) x^{150}

c) $(-3)^{-2}$

d) -3^{-2}

c) $\frac{1}{3^2}$

d) $-\frac{1}{3^2}$

002 Escribe el inverso de los siguientes números como potencia de exponente entero.

a) 2

b) -3

c) 2^2

d) -2^{-2}

a) $\frac{1}{2}$

b) $-\frac{1}{3}$

c) $\frac{1}{2^2}$

d) -2^2

003 Expresa estas fracciones como potencias de exponentes enteros.

a) $\frac{225}{64}$

b) $\frac{22}{121}$

c) $-\frac{56}{125}$

a) $\frac{3^2 \cdot 5^2}{2^6} = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 2^{-6}$

b) $\frac{2 \cdot 11}{11^2} = \frac{2}{11} = 2^1 \cdot 11^{-1}$

c) $\frac{2^3 \cdot 7}{5^3} = 2^3 \cdot 7^1 \cdot 5^{-3}$

004 Indica cuánto vale $(-1)^n$ para los valores positivos y negativos de n .
Para ello, comienza dando valores pequeños y obtén una regla general.

Independientemente de si n es positivo o negativo, $(-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es par} \\ -1 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$

005 Aplica las propiedades de las potencias, y expresa el resultado como potencia de exponente positivo.

a) $8^{-3} \cdot 8^{-6}$

c) $(8 \cdot 4)^{-4}$

e) $\left(-\frac{5}{2}\right)^{-1}$

b) $\left(\frac{5^{-8}}{5^{-2}}\right)^{-2}$

d) $\left(\frac{15}{72}\right)^{-3}$

f) $(24^{-21})^2$

Indica qué propiedad has utilizado en cada caso.

a) $8^{-9} = \frac{1}{8^9}$

d) $\left(\frac{72}{15}\right)^3 = \left(\frac{24}{5}\right)^3$

b) $(5^{-8-(-2)})^{-2} = (5^{-6})^{-2} = 5^{12}$

e) $-\frac{2}{5}$

c) $(2^3 \cdot 2^2)^{-4} = (2^5)^{-4} = 2^{-20} = \frac{1}{2^{20}}$

f) $24^{-42} = \frac{1}{24^{42}}$

006 Calcula.

a) $(x^5 y^{-2}) : (x^6 y^{-1})$

b) $(6x^4 y^2) : (3x^2 y^{-2})$

a) $x^{5-6} y^{-2-(-1)} = x^{-1} y^{-1} = \frac{1}{xy}$

b) $2x^{4-2} y^{2-(-2)} = 2x^2 y^4$

007 Simplifica y expresa el resultado como potencia.

a) $\frac{5^7 \cdot 3^3 \cdot 6^{-4}}{6^{-2} \cdot 3^{-3} \cdot 5^{-14}}$

c) $9^2 \cdot 3^{-2} \cdot 27$

b) $2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2^{-3}}{3^2} \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^2$

d) $\left(\left(\frac{1}{5}\right)^3\right)^{-2} \cdot 25$

a) $5^{7-(-14)} \cdot 3^{3-(-3)} \cdot (2 \cdot 3)^{-4-(-2)} = 5^{21} \cdot 3^6 \cdot 2^{-2} \cdot 3^{-2} = 5^{21} \cdot 3^4 \cdot 2^{-2} = \frac{5^{21} \cdot 3^4}{2^2}$

b) $2 \cdot \frac{3}{2^2} \cdot \frac{1}{2^3 \cdot 3^2} \cdot \frac{3^3}{2^6} = \frac{3^2}{2^{10}}$

c) $3^4 \cdot 3^{-2} \cdot 3^3 = 3^5$

d) $\frac{1}{5^{-6}} \cdot 5^2 = 5^8$

008 Expresa en notación científica.

a) 9.340.000

g) 0,0089

b) 0,000125

h) 137

c) 789.200

i) 1 diezmilésima

d) 1 billón

j) 5 centésimas

e) Media decena

k) 9 milésimas

f) 4

l) 6 trillones

a) $9,34 \cdot 10^6$

g) $8,9 \cdot 10^{-3}$

b) $1,25 \cdot 10^{-4}$

h) $1,37 \cdot 10^2$

c) $7,892 \cdot 10^5$

i) $1 \cdot 10^{-4}$

d) $1 \cdot 10^6$

j) $5 \cdot 10^{-2}$

e) $5 \cdot 10^0$

k) $9 \cdot 10^{-3}$

f) 4

l) $6 \cdot 10^{18}$

009 Estos números no están correctamente escritos en notación científica. Corrégelos.

a) $0,7 \cdot 10^6$

b) $11,2 \cdot 10^{-3}$

a) $7 \cdot 10^5$

b) $1,12 \cdot 10^{-2}$

Potencias y radicales

010



Calcula.

a) $2,3 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3$

b) $(5 \cdot 10^{-2}) \cdot (3,1 \cdot 10^{-4})$

a) $2,8 \cdot 10^4 = 28.000$

b) $1,55 \cdot 10^{-5} = 0,0000155$

011

Realiza las siguientes operaciones, y expresa el resultado en notación científica.

a) $9,34 \cdot 10^4 + 7,6 \cdot 10^2$

e) $(5,2 \cdot 10^{-4}) \cdot (8 \cdot 10^{-5})$

b) $7,8 \cdot 10^{-3} + 8 \cdot 10^{-5}$

f) $(4 \cdot 10^{-6}) : (2 \cdot 10^{-8})$

c) $3 \cdot 10^{-7} - 7 \cdot 10^{-4}$

g) $(7 \cdot 10^4) : (1,4 \cdot 10^5)$

d) $(9 \cdot 10^4) \cdot (8,5 \cdot 10^2)$

h) $(4 \cdot 10^5) \cdot (2 \cdot 10^3) : (8 \cdot 10^{-2})$

a) $9,416 \cdot 10^4$

e) $4,16 \cdot 10^{-8}$

b) $7,88 \cdot 10^{-3}$

f) $2 \cdot 10^2$

c) $6,997 \cdot 10^{-4}$

g) $5 \cdot 10^{-1}$

d) $7,65 \cdot 10^7$

h) $1 \cdot 10^{10}$

012

Un microorganismo mide 3,5 micras. Sabiendo que 1 micra es la millonésima parte de 1 metro, expresa, en metros y en notación científica, la longitud de 4 millones de microorganismos dispuestos en fila.

$$(4 \cdot 10^6) \cdot (3,5 \cdot 10^{-6}) = 1,4 \cdot 10^1 = 14 \text{ metros}$$

013



Realiza, utilizando la calculadora y también sin ella, esta suma:

$9,23 \cdot 10^{99} + 1,78 \cdot 10^{99}$. ¿Qué diferencias observas entre las dos formas de realizar la suma?

En el caso de que la calculadora solo admita dos cifras en el exponente, no será capaz de hacerlo e indicará un error.

Si se realiza manualmente, el resultado es $1,101 \cdot 10^{100}$.

014

Transforma las potencias en raíces.

a) $16^3 = 4.096$

c) $(-2)^5 = -32$

b) $4^3 = 64$

d) $(-2)^8 = 256$

a) $16 = \sqrt[3]{4.096}$

c) $-2 = \sqrt[5]{-32}$

b) $4 = \sqrt[3]{64}$

d) $-2 = \sqrt[8]{256}$

015

Calcula el valor numérico, si existe, de los siguientes radicales.

a) $\sqrt[4]{16}$

b) $\sqrt[3]{-8}$

c) $\sqrt[4]{-100}$

d) $\sqrt[5]{243}$

a) 2 y -2

c) No existe

b) -2

d) 3

016  **Halla, con la calculadora, el valor numérico de estas expresiones.**

a) $1 + \sqrt{6}$ b) $\sqrt[5]{15} - 7$ c) $(-2) \cdot \sqrt[4]{-16}$

a) $1 + 2,4494897 = 3,4494897$

b) $1,7187719 - 7 = -5,2812281$

c) No existe

017 **Pon dos ejemplos de radicales cuyas raíces sean 3 y -3. ¿Existe un radical con raíces 3 y -5?**

Ejemplos: $\sqrt{9}$ y $\sqrt[4]{81}$

No es posible que un radical tenga como raíces 3 y -5, ya que en el caso de tener dos raíces, estas deben ser opuestas.

018 **Expresa las siguientes potencias como radicales y halla su valor numérico.**

a) $5^{\frac{3}{2}}$

c) $3^{\frac{4}{7}}$

e) $4^{\frac{3}{4}}$

b) $(-2)^{\frac{1}{3}}$

d) $(-7)^{\frac{1}{6}}$

f) $(-6)^{\frac{4}{5}}$

a) $\sqrt{5^3} = 11,18033989$

d) $\sqrt[6]{-7}$ no existe.

b) $\sqrt[3]{-2} = -1,2599210$

e) $\sqrt[4]{4^3} = 2,8284271$

c) $\sqrt[7]{3^4} = 1,8734440$

f) $\sqrt[5]{(-6)^4} = 4,1929627$

019 **Da dos radicales equivalentes a cada uno.**

a) $\sqrt[4]{3^2}$

b) $\sqrt[5]{6^3}$

c) $\sqrt[7]{5^{10}}$

a) $\sqrt{3}$ y $\sqrt[8]{3^4}$

b) $\sqrt[10]{6^6}$ y $\sqrt[15]{6^9}$

c) $\sqrt[14]{5^{20}}$ y $\sqrt[21]{5^{30}}$

020 **Razona si son equivalentes estos radicales.**

a) $\sqrt[4]{3^6}$ y $\sqrt{3^3}$

c) $\sqrt[4]{5^{10}}$ y $\sqrt{5^4}$

b) $\sqrt[5]{2^{10}}$ y $\sqrt{2}$

d) $\sqrt[4]{4}$ y $\sqrt{2}$

a) $3^{\frac{6}{4}} = 3^{\frac{3}{2}} \rightarrow$ Equivalentes

c) $5^{\frac{10}{4}} \neq 5^{\frac{4}{2}} \rightarrow$ No equivalentes

b) $2^{\frac{10}{5}} \neq 2^{\frac{1}{2}} \rightarrow$ No equivalentes

d) $4^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{2}{4}} = 2^{\frac{1}{2}} \rightarrow$ Equivalentes

021 **Expresa en forma de potencia.**

a) $\sqrt[3]{x}$

b) $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

c) $\sqrt[3]{6xy}$

d) $4\sqrt[3]{x^2}$

a) $x^{\frac{1}{3}}$

b) $x^{-\frac{1}{3}}$

c) $(6xy)^{\frac{1}{3}}$

d) $4x^{\frac{2}{3}} = (8x)^{\frac{2}{3}}$

Potencias y radicales

022 Compara los siguientes radicales.

$$\sqrt{2}, \sqrt[3]{3} \text{ y } \sqrt[5]{5}$$

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{2} = \sqrt[30]{2^{15}} \\ \sqrt[3]{3} = \sqrt[30]{3^{10}} \\ \sqrt[5]{5} = \sqrt[30]{5^6} \end{array} \right\} \rightarrow \sqrt[5]{5} < \sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$$

023 Simplifica estos radicales.

a) $\sqrt[5]{5^{12}}$

b) $\sqrt[4]{3^{11}}$

c) $\sqrt[7]{a^{47}}$

d) $\sqrt[6]{b^{35}}$

a) $5^2 \sqrt[5]{5^2}$

c) $a^6 \sqrt[7]{a^5}$

b) $3^2 \sqrt[4]{3^3}$

d) $b^5 \sqrt[6]{b^5}$

024 Introduce factores dentro del radical.

a) $6\sqrt{2}$

b) $2\sqrt[3]{6}$

c) $4\sqrt[4]{7}$

d) $2\sqrt[5]{5}$

a) $\sqrt{6^2 \cdot 2} = \sqrt{72}$

c) $\sqrt[4]{4^4 \cdot 7} = \sqrt[4]{1.792}$

b) $\sqrt[3]{2^3 \cdot 6} = \sqrt[3]{48}$

d) $\sqrt[5]{2^5 \cdot 5} = \sqrt[5]{160}$

025 Simplifica, si es posible.

a) $\sqrt[4]{7.776}$

b) $\sqrt[6]{1.024}$

a) $\sqrt[4]{6^5} = 6\sqrt[4]{6}$

b) $\sqrt[6]{2^{10}} = \sqrt[3]{2^5} = 2\sqrt[3]{2^2}$

026 Opera y simplifica.

a) $4\sqrt[6]{3} + 3\sqrt[6]{3} - \frac{1}{2}\sqrt[6]{3}$

c) $\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[3]{4}$

b) $\frac{3}{2}\sqrt[4]{7} - \frac{5}{3}\sqrt[4]{7} + \sqrt[4]{7}$

d) $\frac{\sqrt[5]{1.568}}{\sqrt[4]{36}}$

a) $\left(4 + 3 - \frac{1}{2}\right) \cdot \sqrt[6]{3} = \frac{13}{2}\sqrt[6]{3}$

b) $\left(\frac{3}{2} - \frac{5}{3} + 1\right) \cdot \sqrt[4]{7} = \frac{5}{6}\sqrt[4]{7}$

c) $\sqrt[12]{3^3} \cdot \sqrt[12]{4^4} = \sqrt[12]{3^3 \cdot 4^4}$

d) $\frac{\sqrt[5]{2^5 \cdot 7^2}}{\sqrt[4]{3^2 \cdot 2^2}} = \frac{2\sqrt[5]{7^2}}{\sqrt{3 \cdot 2}} = 2 \cdot \sqrt[10]{\frac{7^4}{2^5 \cdot 3^5}}$

027 Calcula.

a) $3^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[5]{9}$

b) $(2\sqrt[4]{7})^5$

c) $\sqrt[5]{22} \cdot \sqrt[3]{11}$

d) $\sqrt[5]{3\sqrt[7]{4}}$

a) $3^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{5}} = 3^{\frac{16}{15}} = \sqrt[15]{3^{16}}$

b) $2^5 \cdot \sqrt[4]{7^5} = 32 \cdot 7 \cdot \sqrt[4]{7} = 224\sqrt[4]{7}$

c) $(2 \cdot 11)^{\frac{1}{5}} \cdot 11^{\frac{1}{3}} = (2 \cdot 11)^{\frac{3}{15}} \cdot 11^{\frac{5}{15}} = \sqrt[15]{2^3 \cdot 11^8}$

d) $\sqrt[5]{\sqrt[7]{4 \cdot 3^7}} = \sqrt[35]{4 \cdot 3^7} = \sqrt[35]{8.748}$

028 Haz esta operación.

$$2\sqrt[5]{9} - (7\sqrt[5]{3})^2 + \sqrt[5]{9}$$

$$2\sqrt[5]{9} - (7\sqrt[5]{3})^2 + \sqrt[5]{9} = 2 \cdot 3^{\frac{2}{5}} - 7 \cdot 3^{\frac{2}{5}} + 3^{\frac{2}{5}} = -4 \cdot 3^{\frac{2}{5}} = -4\sqrt[5]{3^2} = -4\sqrt[5]{9}$$

029 Transforma estas fracciones en otras equivalentes sin radicales en el denominador.

a) $\frac{1}{\sqrt[3]{5}}$

b) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[5]{9}}$

c) $\frac{2}{\sqrt{2}}$

d) $\frac{2}{\sqrt[5]{2}}$

e) $\frac{4}{\sqrt[4]{64}}$

f) $\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

a) $\frac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{5^2}} = \frac{\sqrt[3]{5^2}}{5}$

b) $\frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^2} \cdot \sqrt[5]{3^3}} = \frac{\sqrt[10]{3^5 \cdot 3^6}}{3} = \frac{3\sqrt[10]{3}}{3} = \sqrt[10]{3}$

c) $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

d) $\frac{2\sqrt[5]{2^4}}{\sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[5]{2^4}} = \frac{2\sqrt[5]{2^4}}{2} = \sqrt[5]{2^4}$

e) $\frac{4}{\sqrt[4]{2^6}} = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

f) $\frac{5\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{6}}{3}$

030 Racionaliza.

a) $\frac{3}{\sqrt[3]{3}}$

b) $\frac{7}{\sqrt[4]{6^3}}$

a) $\frac{3}{\sqrt[3]{3}} = \frac{3\sqrt[6]{3^5}}{\sqrt[6]{3} \cdot \sqrt[6]{3^5}} = \frac{3\sqrt[6]{3^5}}{3} = \sqrt[6]{3^5}$

b) $\frac{7\sqrt[4]{6}}{\sqrt[4]{6^3} \cdot \sqrt[4]{6}} = \frac{7\sqrt[4]{6}}{6}$

Potencias y radicales

031 Resuelve y racionaliza.

a) $\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{2}{\sqrt{125}}$

b) $\frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

a) $\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{2}{5\sqrt{5}} = \frac{5 \cdot 2}{5\sqrt{5}} - \frac{2}{5\sqrt{5}} = \frac{8}{5\sqrt{5}} = \frac{8\sqrt{5}}{5\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{8\sqrt{5}}{25}$

b) $\frac{(1 + \sqrt{2}) \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} + 2}{2}$

032 Calcula el conjugado de estos números, y efectúa el producto de cada número por su conjugado.

a) $1 + \sqrt{5}$

c) $\frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{5}$

b) $\sqrt{\frac{5}{6}} - \sqrt{2}$

d) $\sqrt{33} - \sqrt{11}$

a) Conjugado $\rightarrow 1 - \sqrt{5}$

$(1 + \sqrt{5}) \cdot (1 - \sqrt{5}) = 1 - 5 = -4$

b) Conjugado $\rightarrow \sqrt{\frac{5}{6}} + \sqrt{2}$

$\left(\sqrt{\frac{5}{6}} - \sqrt{2}\right) \cdot \left(\sqrt{\frac{5}{6}} + \sqrt{2}\right) = \frac{5}{6} - 2 = \frac{-7}{6}$

c) Conjugado $\rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{5}$

$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{5}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{5}\right) = \frac{2}{4} - 5 = \frac{-18}{4} = \frac{-9}{2}$

d) Conjugado $\rightarrow \sqrt{33} + \sqrt{11}$

$(\sqrt{33} - \sqrt{11}) \cdot (\sqrt{33} + \sqrt{11}) = 33 - 11 = 22$

033 Racionaliza las siguientes expresiones.

a) $\frac{-3}{4 - \sqrt{3}}$

b) $\frac{-3}{4 + \sqrt{3}}$

a) $\frac{-3 \cdot (4 + \sqrt{3})}{(4 - \sqrt{3}) \cdot (4 + \sqrt{3})} = \frac{-3 \cdot (4 + \sqrt{3})}{13}$

b) $\frac{-3 \cdot (4 - \sqrt{3})}{(4 + \sqrt{3}) \cdot (4 - \sqrt{3})} = \frac{-3 \cdot (4 - \sqrt{3})}{13}$

034 Efectúa estas operaciones y racionaliza el resultado, si fuera preciso.

a) $\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{3}{\sqrt{2}}$

b) $\frac{1 + \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}}$

a) $\frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{3\sqrt{2}} + \frac{9}{3\sqrt{2}} = \frac{13}{3\sqrt{2}} = \frac{13\sqrt{2}}{3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{13\sqrt{2}}{6}$

b) $\frac{(1 + \sqrt{2}) \cdot (1 + \sqrt{2})}{(1 - \sqrt{2}) \cdot (1 + \sqrt{2})} = \frac{1 + 2\sqrt{2} + 2}{1 - 2} = -3 - 2\sqrt{2}$

035 Calcula el inverso de estos números.

a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

b) $\sqrt{6} + \sqrt{3}$

c) $\sqrt[3]{100}$

d) $100 + \sqrt{555}$

a) $\sqrt{2}$

b) $\frac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{3}}{(\sqrt{6} + \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{6} - \sqrt{3})} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{3}}{3}$

c) $\frac{1}{\sqrt[3]{100}} = \frac{\sqrt[3]{10}}{\sqrt[3]{100} \cdot \sqrt[3]{10}} = \frac{\sqrt[3]{10}}{10}$

d) $\frac{1}{100 + \sqrt{555}} = \frac{100 - \sqrt{555}}{(100 + \sqrt{555}) \cdot (100 - \sqrt{555})} = \frac{100 - \sqrt{555}}{9.445}$

ACTIVIDADES

036 Calcula las siguientes potencias.

a) 2^{-3}

c) 10^5

e) $(-3)^{-4}$

g) $(-12)^{-2}$

i) $(-1)^{-3}$

b) 7^{-4}

d) 8^{-2}

f) $(-2)^{-5}$

h) $(-6)^3$

a) $\frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

d) $\frac{1}{8^2} = \frac{1}{64}$

g) $\frac{1}{(-12)^2} = \frac{1}{144}$

b) $\frac{1}{7^4} = \frac{1}{2.401}$

e) $\frac{1}{(-3)^4} = \frac{1}{81}$

h) $-6^3 = -216$

c) 100.000

f) $\frac{1}{(-2)^5} = -\frac{1}{32}$

i) -1

037 Halla el inverso de estos números.

a) 3

b) $-\frac{1}{3}$

c) -3

d) 3^3

e) $\frac{1}{3}$

f) -3^{-3}

a) $\frac{1}{3}$

b) -3

c) $-\frac{1}{3}$

d) $\frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$

e) 3

f) -3^3

Potencias y radicales

038 Expresa estas fracciones como potencias de números enteros, empleando exponentes negativos, si es preciso.

a) $\frac{12}{5}$

c) $\frac{-3}{4}$

e) $\frac{2}{-5}$

b) $\frac{11}{65}$

d) $-\frac{5}{9}$

f) $\frac{-33}{-55}$

a) $2^2 \cdot 3 \cdot 5^{-1}$

c) $-3 \cdot 4^{-1}$

e) $-2 \cdot 5^{-1}$

b) $11 \cdot 13^{-1} \cdot 5^{-1}$

d) $-5 \cdot 3^{-2}$

f) $3 \cdot 5^{-1}$

039 Simplifica, expresando como única potencia.

a) $2^{-5} \cdot 2^3 \cdot 2^{-4}$

c) $(-4)^{-4} : (-4)^5 : (-4)^{-6}$

b) $(-3)^{-6} : (-3)^5 \cdot (-3)^{-7}$

d) $7^{-2} \cdot 7^{-3} : 7^{-5}$

a) $2^{-5+3-4} = 2^{-6}$

c) $(-4)^{-4-5-(-6)} = (-4)^{-3}$

b) $(-3)^{-6-5-7} = (-3)^{-18}$

d) $7^{-2-3-(-5)} = 7^0 = 1$

040 Opera y expresa el resultado en forma de una sola potencia.

a) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-5}$

b) $\left(\frac{3}{10}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^{-5} : \left(\frac{3}{10}\right)^0$

c) $\left(\frac{5}{4}\right)^{-1} : \left(\frac{5}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^8$

d) $\left(\frac{-1}{5}\right)^{-5} : \left(\frac{-1}{5}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{-1}{5}\right)^7$

a) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}$

c) $\left(\frac{5}{4}\right)^9$

b) $\left(\frac{3}{10}\right)^{-8}$

d) $\left(\frac{-1}{5}\right)^6$

041 Efectúa las operaciones.

a) $4^6 : 2^4$

e) $2^{-3} : (-2^{-3})$

b) $(-3)^4 \cdot (-3^4)$

f) $[(-5)^3]^2 \cdot 5^{-4}$

c) $(-2^6) : (-2^{-6})$

g) $[(2^4 \cdot 2^{-8})^{-1}]^{-4}$

d) $(-2^3)^4 \cdot (-2^4)^{-3}$

h) $-(-2^3) : (-2^4)$

a) $2^{12} : 2^4 = 2^8$

e) $2^{-3} : [(-1) \cdot 2^{-3}] = -1$

b) $(-3)^8$

f) $(-5)^6 \cdot 5^{-4} = 5^6 \cdot 5^{-4} = 5^2$

c) $-2^6 : (-2^{-6}) = 2^{6-(-6)} = 2^{12}$

g) $[(2^{-4})^{-1}]^{-4} = 2^{-16}$

d) $(-1)^4 \cdot 2^{12} \cdot (-1)^{-3} \cdot 2^{-12} = -1$

h) $-(-2^3) : [(-1) \cdot 2^4] = -2^{-1}$

042 HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE RESUELVEN OPERACIONES CON POTENCIAS FACTORIZANDO LAS BASES?

Resuelve esta operación con potencias, simplificando todo lo que puedas.

$$44^{-3} \cdot 22^5$$

PRIMERO. Se descomponen las bases de las potencias en factores primos.

$$44 = 2^2 \cdot 11 \quad 22 = 2 \cdot 11$$

SEGUNDO. Se aplica esa descomposición a la operación.

$$44^{-3} \cdot 22^5 = (2^2 \cdot 11)^{-3} \cdot (2 \cdot 11)^5 = (2^{-6} \cdot 11^{-3}) \cdot (2^5 \cdot 11^5)$$

TERCERO. Se resuelve la operación.

$$(2^{-6} \cdot 11^{-3}) \cdot (2^5 \cdot 11^5) = 2^{-6+5} \cdot 11^{-3+5} = 2^{-1} \cdot 11^2 = \frac{121}{2}$$

043 Opera y simplifica el resultado.

a) $(30^{-5} : 10^{-5})^3$

c) $(9^0 : 9^{-3})^2$

e) $(12^3 : 2^3)^{-4}$

b) $(6^{-2} \cdot 3^{-2})^{-1}$

d) $(10^{-10} \cdot 10^{-6})^{-2}$

f) $(20^{-5} : 10^{-5})^{-3}$

a) $(3^{-5})^3 = 3^{-15}$

d) $(10^{-16})^{-2} = 10^{32}$

b) $(2^{-2})^{-1} = 2^2$

e) $(3^3 \cdot 2^6 : 2^3)^{-4} = (3^3 \cdot 2^3)^{-4} = 6^{-12}$

c) $(9^3)^2 = 9^6$

f) $(2^{-5})^{-3} = 2^{15}$

044 Calcula y simplifica el resultado.

a) $\left(\frac{-2}{5}\right)^2 : \left(\frac{-4}{8}\right)^3$

c) $\left(\frac{-3}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^{-2}$

b) $\left(\frac{9}{4}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{6}{10}\right)^{-3}$

d) $\left(\frac{-7}{2}\right)^3 : \left(\frac{5}{-2}\right)^{-2}$

a) $\left(\frac{-2}{5}\right)^2 : \left(\frac{-1}{2}\right)^3 = [(-2)^2 \cdot 5^{-2}] : [(-2)^{-3}] = (-2)^5 \cdot 5^{-2}$

b) $(3^{-8} \cdot 2^8) \cdot (2^{-3} \cdot 3^{-3} \cdot 2^3 \cdot 5^3) = 2^8 \cdot 3^{-11} \cdot 5^3$

c) $[(-3)^3 : 2^3] \cdot (5^{-2} : 2^{-4}) = (-3)^3 \cdot 2^1 \cdot 5^{-2}$

d) $[(-7)^3 : 2^3] : [5^{-2} : (-2)^{-2}] = (-7)^3 \cdot 2^{-5} \cdot 5^2$

045 Efectúa y simplifica.

a) $\left(\frac{16}{25}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{125}{32}\right)^3 : \left(\frac{10}{8}\right)^4$

b) $\left(\frac{64}{27}\right)^{-3} : \left(\frac{9}{16}\right)^2 : \left(\frac{6}{18}\right)^{-2}$

a) $\left(\frac{2^4}{5^2}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{5^3}{2^6}\right)^3 : \left(\frac{5}{2^2}\right)^4 = \frac{5^9}{2^{18}}$

b) $\left(\frac{2^6}{3^3}\right)^{-3} : \left(\frac{3^2}{2^4}\right)^2 : \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 2^{-12} \cdot 3^3$

Potencias y radicales

046 Simplifica.

$$a) \frac{3^6 \cdot 2^8 \cdot 5^3}{9^3 \cdot 25^2 \cdot 4^4}$$

$$b) \frac{3^{-4} \cdot 16 \cdot 9^{-1}}{8^2 \cdot 3^{-5} \cdot 2^{-3}}$$

$$a) 3^{6-6} \cdot 2^{8-8} \cdot 5^{3-4} = 5^{-1}$$

$$b) 3^{-4+5-2} \cdot 2^{4-6+3} = 3^{-1} \cdot 2^1$$

$$c) -5^{3-10} \cdot 2^{12-7} \cdot 3^{-4-(-4)} = -5^{-7} \cdot 2^5$$

$$d) \frac{2^{-5} \cdot 2^{-4} \cdot 3^{-4} \cdot 2^{-2} \cdot 3^{-4}}{2^{-15} \cdot 2^{-3} \cdot 3^{-3} \cdot 3^{-8}} = 2^7 \cdot 3^3$$

$$c) \frac{(-5)^3 \cdot (-8)^4 \cdot 9^{-2}}{(-3)^{-4} \cdot 2^7 \cdot 25^5}$$

$$d) \frac{32^{-1} \cdot 36^{-2} \cdot 18^{-2}}{8^{-5} \cdot 6^{-3} \cdot 9^4}$$

047 Realiza estas operaciones con potencias, efectuando primero las operaciones dentro del corchete. Comprueba que si lo haces al revés, el resultado no varía.

$$a) [2^4 \cdot (-5)]^{-2}$$

$$b) [(-3) \cdot 8]^{-3}$$

$$c) [4 : (-2)^3]^{-4}$$

$$d) [(-10)^2 : (-5)]^{-5}$$

$$e) [10^3 : (-2)]^{-3}$$

$$f) [9^2 : (-3)^5]^{-1}$$

$$g) [25^{-1} \cdot 10^3]^{-2}$$

$$h) [36^{-2} \cdot 2^5]^{-4}$$

$$a) [-80]^{-2} = \frac{1}{80^2}$$

$$b) [-24]^{-3} = -\frac{1}{24^3}$$

$$c) [-2^{-1}]^{-4} = 2^4$$

$$d) [-20]^{-5} = -\frac{1}{20^5}$$

$$e) [-500]^{-3} = -\frac{1}{500^3}$$

$$f) [-3^{-1}]^{-1} = -3$$

$$g) [40]^{-2} = \frac{1}{40^2}$$

$$h) [9^{-2} \cdot 2]^{-4} = \frac{9^8}{2^4}$$

048 Opera y expresa el resultado en forma de potencia de exponente entero.

$$a) \left[\left(\frac{3}{2} \right)^{-4} \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^6 \right]^{-1}$$

$$b) \left[\left(\frac{-1}{4} \right)^{-4} : 4^3 : \left(\frac{1}{4} \right)^{-5} \right]^{-2}$$

$$c) \left[2^{-2} : \left(\frac{1}{2} \right)^{2^7} \right]$$

$$d) \left[\left(\frac{5}{6} \right)^{-1} \cdot \left(\frac{5}{6} \right)^{-3} \cdot \left(\frac{6}{5} \right)^{5^3} \right]$$

$$e) \left[\left(\frac{25}{2} \right)^{-2} : \left(\frac{25}{2} \right)^{-6} \cdot \left(\frac{2}{25} \right)^8 \right]^2$$

$$f) \left[9^2 \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^2 : 2 \right]^{-2}$$

$$a) \left[\left(\frac{2}{3} \right)^{4+3+6} \right]^{-1} = \left(\frac{3}{2} \right)^{13}$$

$$b) [4^{4-3-5}]^{-2} = (4^{-4})^{-2} = 4^8$$

$$c) [2^{-2-(-2)}]^7 = 2^0 = 1$$

$$d) \left[\left(\frac{5}{6} \right)^{-1-3-5} \right]^3 = \left(\frac{6}{5} \right)^{27}$$

$$e) \left[\left(\frac{25}{2} \right)^{-2-(-6)-8} \right]^2 = \left(\frac{2}{25} \right)^8$$

$$f) [3^{4-2} \cdot 2^{-1}]^{-2} = \frac{2^2}{3^4} = \left(\frac{2}{9} \right)^2$$

049 HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE EFECTÚAN OPERACIONES COMBINADAS CON POTENCIAS?

Efectúa esta operación.

$$\left(\frac{5}{2} - \frac{3}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{-3}{5}\right)^{-1} - \left(\frac{17}{8} - 2\right)^{-2}$$

PRIMERO. Se realizan las operaciones que están dentro de los paréntesis.

$$\left(\frac{5}{2} - \frac{3}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{-3}{5}\right)^{-1} - \left(\frac{17}{8} - 2\right)^{-2} = \left(\frac{7}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{-3}{5}\right)^{-1} - \left(\frac{1}{8}\right)^{-2}$$

SEGUNDO. Se calculan las potencias.

$$\left(\frac{7}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{-3}{5}\right)^{-1} - \left(\frac{1}{8}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{7}\right)^2 \cdot \left(\frac{-5}{3}\right)^1 - 8^2 = \frac{16}{49} \cdot \left(\frac{-5}{3}\right) - 64$$

TERCERO. Se efectúan las operaciones, respetando la jerarquía.

$$\frac{16}{49} \cdot \left(\frac{-5}{3}\right) - 64 = \frac{-80}{147} - 64 = \frac{9.488}{147}$$

050 Realiza las siguientes operaciones.

$$\text{a) } \left(\frac{3}{5} + \frac{1}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{-7}{2}\right)^{-1} + 2 : \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{6}\right)^{-2}$$

$$\text{b) } \left(\frac{3}{2} - \frac{5}{4}\right)^{-2} - \left(\frac{1}{3} - 1\right)^{-1}$$

$$\text{c) } \left(\frac{1}{5} - \frac{3}{10}\right)^{-1} : \left(1 - \frac{2}{5}\right) - \left(\frac{-3}{2}\right)^{-2}$$

$$\begin{aligned} \text{a) } \left(\frac{14}{15}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{-7}{2}\right)^{-1} + 2 : \left(\frac{7}{3}\right)^{-2} &= \left(-\frac{3^2 \cdot 5^2 \cdot 2}{2^2 \cdot 7^2 \cdot 7}\right) + \left(\frac{2 \cdot 7^2}{3^2}\right) = \\ &= -\frac{3^2 \cdot 5^2}{2 \cdot 7^3} + \frac{2 \cdot 7^2}{3^2} = \frac{-3^4 \cdot 5^2 + 2^2 \cdot 7^5}{2 \cdot 7^3 \cdot 3^2} = \frac{31.589}{6.174} \end{aligned}$$

$$\text{b) } \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} - \left(-\frac{2}{3}\right)^{-1} = 8 + \frac{3}{2} = \frac{19}{2}$$

$$\text{c) } \left(-\frac{1}{10}\right)^{-1} : \left(\frac{3}{5}\right) - \left(\frac{2^2}{3^2}\right) = -\frac{50}{3} - \frac{4}{9} = \frac{-154}{9}$$

Potencias y radicales

051

Indica qué igualdades son verdaderas, y escribe el resultado correcto en las falsas.

a) $\frac{a^3 \cdot b^{-4} \cdot c^4}{a^{-3} \cdot b^4 \cdot c^{-4}} = 1$

c) $\frac{3^{-3} \cdot 2^{-4} \cdot 5^{-2}}{3^{-4} \cdot 2^{-5} \cdot 5^{-3}} = \frac{1}{3 \cdot 2 \cdot 5}$

b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \cdot 3^{-3} \cdot \left(\frac{-1}{3}\right)^5 = 1$

d) $\left[\left(\frac{-2}{3}\right)^{-2}\right]^{-3} = \left[\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]^3$

a) Falsa $\rightarrow a^6 \cdot b^{-8} \cdot c^8 \neq 1$

b) Falsa $\rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \cdot 3^{-3} \cdot \left(\frac{-1}{3}\right)^5 = -3^{2-3+5} = -3^4 \neq 1$

c) Falsa $\rightarrow 3 \cdot 2 \cdot 5 \neq \frac{1}{3 \cdot 2 \cdot 5}$

d) Verdadera $\rightarrow \left(\frac{-2}{3}\right)^6 = \left(\frac{2}{3}\right)^6$

052

Escribe en notación científica los siguientes números, e indica su orden de magnitud.

a) 15.000.000.000

e) 4.598.000.000

b) 0,00000051

f) 0,0967254

c) 31.940.000

g) 329.000.000

d) 0,0000000009

h) 111.000

a) $1,5 \cdot 10^{10} \longrightarrow$ Orden de magnitud: 10

b) $5,1 \cdot 10^{-7} \longrightarrow$ Orden de magnitud: -7

c) $3,194 \cdot 10^7 \longrightarrow$ Orden de magnitud: 7

d) $9 \cdot 10^{-10} \longrightarrow$ Orden de magnitud: -10

e) $4,598 \cdot 10^9 \longrightarrow$ Orden de magnitud: 9

f) $9,67254 \cdot 10^{-2} \rightarrow$ Orden de magnitud: -2

g) $3,29 \cdot 10^8 \longrightarrow$ Orden de magnitud: 8

h) $1,11 \cdot 10^5 \longrightarrow$ Orden de magnitud: 5

053

Desarrolla estos números escritos en notación científica.

a) $4,8 \cdot 10^8$

e) $6,23 \cdot 10^{-18}$

b) $8,32 \cdot 10^{-11}$

f) $3,5 \cdot 10^{-12}$

c) $5,659 \cdot 10^{-6}$

g) $2,478 \cdot 10^{15}$

d) $7,925 \cdot 10^9$

h) $1,9385 \cdot 10^{-7}$

a) 480.000.000

e) 0,000000000000000000623

b) 0,0000000000832

f) 0,0000000000035

c) 0,000005659

g) 2.478.000.000.000.000

d) 7.925.000.000

h) 0,00000019385

054 Indica cuáles de los siguientes números están escritos en notación científica.



- a) $54 \cdot 10^{12}$ e) $7,2 \cdot 10^{-2}$
 b) $0,75 \cdot 10^{-11}$ f) $0,5 \cdot 10^{14}$
 c) $243.000.000$ g) $0,01 \cdot 10^{-30}$
 d) $0,00001$ h) $18,32 \cdot 10^4$

Solo está escrito en notación científica el número del apartado e) $7,2 \cdot 10^{-2}$.

055 Efectúa las operaciones.



- a) $1,32 \cdot 10^4 + 2,57 \cdot 10^4$
 b) $8,75 \cdot 10^2 + 9,46 \cdot 10^3$
 c) $3,62 \cdot 10^4 + 5,85 \cdot 10^{-3}$
 d) $2,3 \cdot 10^2 + 3,5 \cdot 10^{-1} + 4,75 \cdot 10^{-2}$
 e) $3,46 \cdot 10^{-2} + 5,9 \cdot 10^4 + 3,83 \cdot 10^2$
 a) $3,89 \cdot 10^4$ d) $2,303975 \cdot 10^2$
 b) $1,0335 \cdot 10^4$ e) $5,93830346 \cdot 10^4$
 c) $3,620000585 \cdot 10^4$

056 Calcula.



- a) $9,5 \cdot 10^4 - 3,72 \cdot 10^4$
 b) $8,6 \cdot 10^3 - 5,45 \cdot 10^2$
 c) $7,9 \cdot 10^{-4} - 1,3 \cdot 10^{-6}$
 d) $4,6 \cdot 10^6 + 5,3 \cdot 10^4 - 3,9 \cdot 10^2$
 e) $5 \cdot 10^2 - 3 \cdot 10^{-1} + 7 \cdot 10^{-2}$
 a) $5,78 \cdot 10^4$ d) $4,65261 \cdot 10^6$
 b) $8,055 \cdot 10^3$ e) $4,9977 \cdot 10^2$
 c) $7,887 \cdot 10^{-4}$

057 Haz las operaciones.



- a) $7,3 \cdot 10^4 \cdot 5,25 \cdot 10^{-3}$ c) $8,3 \cdot 10^6 : 5,37 \cdot 10^2$
 b) $8,91 \cdot 10^{-5} \cdot 5,7 \cdot 10^{14}$ d) $9,5 \cdot 10^{-6} : 3,2 \cdot 10^3$
 a) $3,8325 \cdot 10^2$ c) $1,5456 \cdot 10^4$
 b) $5,0787 \cdot 10^{10}$ d) $2,9688 \cdot 10^{-9}$

058 Simplifica.



- a) $\frac{6,147 \cdot 10^{-2} \cdot 4,6 \cdot 10^3}{7,9 \cdot 10^8 \cdot 6,57 \cdot 10^{-5}}$ b) $\frac{3,92 \cdot 10^4 \cdot 5,86 \cdot 10^{-6}}{7 \cdot 10^{-8} \cdot 9,2 \cdot 10^{13}}$
 a) $5,448 \cdot 10^{-3}$
 b) $5,567 \cdot 10^{-8}$

Potencias y radicales

059 Calcula, si es posible, el valor numérico de los siguientes radicales.

- | | | |
|--------------------|-------------------------|----------------------|
| a) $\sqrt[4]{81}$ | d) $\sqrt[5]{-100.000}$ | g) $\sqrt[4]{625}$ |
| b) $\sqrt[5]{32}$ | e) $\sqrt[4]{-256}$ | h) $\sqrt[4]{1.296}$ |
| c) $\sqrt[3]{-27}$ | f) $\sqrt[3]{-216}$ | i) $\sqrt[7]{-128}$ |
| a) ± 3 | d) -10 | g) ± 5 |
| b) 2 | e) No es posible | h) ± 6 |
| c) -3 | f) -6 | i) -2 |

060 Indica en estos radicales cuáles son el índice y el radicando. Después, exprésalos como potencia de exponente fraccionario.

- | | | |
|-------------------|-------------------|-------------------|
| a) $\sqrt[6]{3}$ | c) $\sqrt[9]{5}$ | e) $\sqrt{33}$ |
| b) $\sqrt[7]{-3}$ | d) $\sqrt[5]{-2}$ | f) $\sqrt[4]{25}$ |

- a) Índice: 6, radicando: 3 $\rightarrow 3^{\frac{1}{6}}$
 b) Índice: 7, radicando: $-3 \rightarrow (-3)^{\frac{1}{7}}$
 c) Índice: 9, radicando: 5 $\rightarrow 5^{\frac{1}{9}}$
 d) Índice: 5, radicando: $-2 \rightarrow (-2)^{\frac{1}{5}}$
 e) Índice: 2, radicando: 33 $\rightarrow 33^{\frac{1}{2}}$
 f) Índice: 4, radicando: 25 $\rightarrow 25^{\frac{1}{4}}$

061 Transforma los radicales en potencias y las potencias en radicales.

- | | | |
|----------------------|-----------------------|----------------------|
| a) $3^{\frac{1}{4}}$ | d) $7^{\frac{3}{5}}$ | g) $\sqrt[3]{2^5}$ |
| b) $5^{\frac{2}{3}}$ | e) $10^{\frac{2}{7}}$ | h) $\sqrt[5]{3^2}$ |
| c) $2^{\frac{1}{6}}$ | f) $\sqrt[4]{5^7}$ | i) $\sqrt[6]{7^5}$ |
| a) $\sqrt[4]{3}$ | d) $\sqrt[5]{7^3}$ | g) $2^{\frac{5}{3}}$ |
| b) $\sqrt[3]{5^2}$ | e) $\sqrt[7]{10^2}$ | h) $3^{\frac{2}{5}}$ |
| c) $\sqrt[6]{2}$ | f) $5^{\frac{7}{4}}$ | i) $7^{\frac{5}{6}}$ |

062 De estos radicales, ¿cuáles son equivalentes?

$$\sqrt[4]{2^3}, \sqrt[5]{3^2}, \sqrt[3]{7^2}, \sqrt[8]{2^6}, \sqrt[12]{7^4}, \sqrt[10]{3^4}, \sqrt[12]{2^9}, \sqrt[20]{2^{15}} \text{ y } \sqrt[10]{3^2}$$

Son equivalentes:

$$\sqrt[4]{2^3} = \sqrt[8]{2^6} = \sqrt[12]{2^9} = \sqrt[20]{2^{15}}$$

$$\sqrt[5]{3^2} = \sqrt[10]{3^4}$$

063 Extrae factores de los siguientes radicales.

- a) $\sqrt[3]{2^3 a^5}$ d) $\sqrt[5]{a^6 b^{10}}$
 b) $\sqrt[3]{a^3 b^5 c^6}$ e) $\sqrt{2^6 a^4 b^8}$
 c) $\sqrt[4]{2^4 a^7}$ f) $\sqrt{2^2 a^2 b^4}$
- a) $2a\sqrt[3]{a^2}$ d) $ab^2\sqrt[5]{a}$
 b) $abc^2\sqrt[3]{b^2}$ e) $2^3 a^2 b^4$
 c) $2a^4\sqrt[4]{a^3}$ f) $2ab^2$

064 HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE EXTRAEN FACTORES DE UN RADICAL DESCOMPONRIENDO EL RADICANDO EN FACTORES PRIMOS?

Simplifica el radical $\sqrt[3]{10.800}$.

PRIMERO. Se factoriza el radicando.

$$10.800 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2$$

SEGUNDO. Se expresa el radical como potencia de exponente fraccionario.

$$\sqrt[3]{10.800} = (2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{4}{3}} \cdot 3^{\frac{3}{3}} \cdot 5^{\frac{2}{3}}$$

TERCERO. Si alguna de las fracciones de los exponentes es impropia, se pone como la suma de un número entero y una fracción.

$$2^{\frac{4}{3}} \cdot 3^{\frac{3}{3}} \cdot 5^{\frac{2}{3}} = 2^{\left(1+\frac{1}{3}\right)} \cdot 3^1 \cdot 5^{\frac{2}{3}}$$

CUARTO. Se expresa como producto de potencias y se vuelve a transformar en radical.

$$2^{\left(1+\frac{1}{3}\right)} \cdot 3 \cdot 5^{\frac{2}{3}} = 2 \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot 3 \cdot 5^{\frac{2}{3}} = 2 \cdot \sqrt[3]{2} \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{5^2} = 6 \cdot \sqrt[3]{2 \cdot 5^2} = 6\sqrt[3]{50}$$

065 Extrae factores de las raíces.

- a) $\sqrt{8}$ d) $\sqrt{98}$ g) $\sqrt[3]{1.000}$
 b) $\sqrt{18}$ e) $\sqrt{12}$ h) $\sqrt[3]{40}$
 c) $\sqrt{50}$ f) $\sqrt{75}$ i) $\sqrt[3]{320}$
- a) $2\sqrt{2}$ d) $7\sqrt{2}$ g) 10
 b) $3\sqrt{2}$ e) $2\sqrt{3}$ h) $2\sqrt[3]{5}$
 c) $5\sqrt{2}$ f) $5\sqrt{3}$ i) $4\sqrt[3]{5}$

Potencias y radicales

066 Simplifica estos radicales.

- | | | |
|---------------------|---------------------|--------------------|
| a) $\sqrt[3]{16}$ | d) $\sqrt{27}$ | g) $\sqrt[6]{27}$ |
| b) $\sqrt[3]{54}$ | e) $\sqrt[5]{128}$ | h) $\sqrt[8]{625}$ |
| c) $\sqrt[4]{128}$ | f) $\sqrt[3]{32}$ | i) $\sqrt[12]{4}$ |
| a) $2\sqrt[3]{2}$ | d) $3\sqrt{3}$ | g) $\sqrt{3}$ |
| b) $3\sqrt[3]{2}$ | e) $2\sqrt[5]{2}$ | h) $\sqrt{5}$ |
| c) $2\sqrt[4]{2^2}$ | f) $2\sqrt[3]{2^2}$ | i) $\sqrt[6]{2}$ |

067 Introduce factores en el radical.

- | | | |
|----------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|
| a) $2\sqrt[3]{5}$ | d) $\frac{3}{5}\sqrt{2}$ | g) $2\sqrt[3]{7}$ |
| b) $4\sqrt[4]{20}$ | e) $\frac{1}{2}\sqrt[4]{6}$ | h) $5\sqrt[3]{\frac{1}{5}}$ |
| c) $3\sqrt[5]{15}$ | f) $\frac{1}{2}\sqrt[4]{\frac{1}{2}}$ | i) $\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$ |
| a) $\sqrt[3]{40}$ | d) $\sqrt{\frac{18}{25}}$ | g) $\sqrt[3]{56}$ |
| b) $\sqrt[4]{1.280}$ | e) $\sqrt[4]{\frac{3}{8}}$ | h) $\sqrt[3]{5^2}$ |
| c) $\sqrt[5]{3.645}$ | f) $\sqrt[4]{\frac{1}{32}}$ | i) $\sqrt[3]{\frac{18}{125}}$ |

068 Introduce factores en el radical, si es posible.

- | | | |
|--------------------------------|-------------------------------------|---|
| a) $a\sqrt{\frac{4a-1}{2a}}$ | c) $\frac{2}{a}\sqrt{\frac{3a}{8}}$ | e) $\frac{4ab}{c}\sqrt[4]{\frac{c^2b}{8a}}$ |
| b) $5 + \sqrt{2}$ | d) $-a^2\sqrt[3]{a}$ | f) $-2ab^2\sqrt[3]{ab}$ |
| a) $\sqrt{\frac{4a^2 - a}{2}}$ | c) $\sqrt{\frac{3}{2a}}$ | e) $\sqrt[4]{\frac{32a^3b^5}{c^2}}$ |
| b) No es posible | d) $-\sqrt[3]{a^7}$ | f) $-\sqrt[3]{8a^4b^7}$ |

069 Efectúa las siguientes operaciones.

- | | | | |
|-----------------------------|-----------------------------|---------------|-----------------|
| a) $-4\sqrt{5} + 5\sqrt{5}$ | c) $3\sqrt{5} - \sqrt{20}$ | | |
| b) $17\sqrt{2} - 9\sqrt{8}$ | d) $4\sqrt{2} + 3\sqrt{18}$ | | |
| a) $\sqrt{5}$ | b) $-\sqrt{2}$ | c) $\sqrt{5}$ | d) $13\sqrt{2}$ |

070 Realiza estas operaciones.

a) $5\sqrt{12} + 7\sqrt{27} - \sqrt{243} - \frac{1}{2}\sqrt{75}$

b) $4\sqrt{8} - 7\sqrt{50} + \frac{8}{3}\sqrt{18} + 4\sqrt{98}$

c) $12\sqrt[3]{16} - \frac{3}{5}\sqrt[3]{128} + 7\sqrt[3]{54}$

a) $10\sqrt{3} + 21\sqrt{3} - 9\sqrt{3} - \frac{5}{2}\sqrt{3} = \frac{39}{2}\sqrt{3}$

b) $8\sqrt{2} - 35\sqrt{2} + 8\sqrt{2} + 28\sqrt{2} = 9\sqrt{2}$

c) $24\sqrt[3]{2} - \frac{14}{5}\sqrt[3]{2} + 21\sqrt[3]{2} = \frac{211}{5}\sqrt[3]{2}$

071 Opera y simplifica.

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$

c) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{3}$

e) $\sqrt[3]{3} : \sqrt{3}$

g) $\sqrt[6]{5} : \sqrt{5}$

b) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{8}$

d) $\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt{5}$

f) $\sqrt[5]{4} : \sqrt[4]{7}$

h) $\sqrt[4]{2} : \sqrt[3]{2}$

a) $\sqrt{6}$

c) $\sqrt[12]{2^4 \cdot 3^3}$

e) $\sqrt[6]{\frac{1}{3}}$

g) $\sqrt[6]{\frac{1}{5^2}}$

b) $2\sqrt{6}$

d) $\sqrt[4]{75}$

f) $\sqrt[20]{\frac{2^8}{7^5}}$

h) $\sqrt[12]{\frac{1}{2}}$

072 Calcula.

a) $2 \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{3})$

d) $(5\sqrt{3} - 8\sqrt{2}) \cdot (-7)$

b) $3 \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{7})$

e) $(-3\sqrt{5} - 9\sqrt{7}) \cdot 4$

c) $-5 \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{2})$

f) $(8\sqrt{5} - 7\sqrt{2}) \cdot 2\sqrt{3}$

a) $2\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$

d) $-35\sqrt{3} + 56\sqrt{2}$

b) $3\sqrt{5} - 3\sqrt{7}$

e) $-12\sqrt{5} - 36\sqrt{7}$

c) $-5\sqrt{3} + 5\sqrt{2}$

f) $16\sqrt{15} - 14\sqrt{6}$

073 Opera y simplifica.

a) $(\sqrt{3} + \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{2})$

c) $(6\sqrt{7} + \sqrt{5}) \cdot (6\sqrt{7} - \sqrt{5})$

b) $(5\sqrt{2} - 3) \cdot (5\sqrt{2} + 3)$

d) $(2\sqrt{5} - \sqrt{10}) \cdot (2\sqrt{5} + \sqrt{10})$

a) $3 - 2 = 1$

c) $36 \cdot 7 - 5 = 247$

b) $50 - 9 = 41$

d) $4 \cdot 5 - 10 = 10$

Potencias y radicales

074 Calcula y simplifica.

a) $(2\sqrt{5} - 3\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{5} + 3\sqrt{2})^2$

b) $(3\sqrt{2} + 1)^2 - (3\sqrt{2} - 1)^2$

c) $(4\sqrt{6} - \sqrt{2})^2 - (4\sqrt{6} + \sqrt{2})^2$

a) $(4 \cdot 5 + 9 \cdot 2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{5 \cdot 2}) + (4 \cdot 5 + 9 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{5 \cdot 2}) = 146$

b) $(9 \cdot 2 + 1 + 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{2}) - (9 \cdot 2 + 1 - 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{2}) = 12\sqrt{2}$

c) $(16 \cdot 6 + 4 - 2 \cdot 4 \cdot \sqrt{6 \cdot 2}) - (16 \cdot 6 + 4 + 2 \cdot 4 \cdot \sqrt{6 \cdot 2}) = -32\sqrt{3}$

075 Haz las operaciones y simplifica.

a) $(3\sqrt{2} - 5) \cdot (4\sqrt{2} - 3)$

b) $(2\sqrt{7} + 3\sqrt{2}) \cdot (5 - 2\sqrt{2})$

c) $(7\sqrt{5} + 4) \cdot (5\sqrt{5} - 3\sqrt{6})$

d) $(7\sqrt{2} - 3) \cdot (5\sqrt{3} + 2)$

a) $3 \cdot 4 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} - 3 \cdot 3 \cdot \sqrt{2} - 5 \cdot 4 \cdot \sqrt{2} + 3 \cdot 5 = 39 - 29\sqrt{2}$

b) $2 \cdot 5 \cdot \sqrt{7} - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{2} + 3 \cdot 5 \cdot \sqrt{2} - 3 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} =$
 $= 10\sqrt{7} - 4\sqrt{14} + 15\sqrt{2} - 12$

c) $7 \cdot 5 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} - 7 \cdot 3 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{6} + 4 \cdot 5 \cdot \sqrt{5} - 4 \cdot 3 \cdot \sqrt{6} =$
 $= 175 - 21\sqrt{30} + 20\sqrt{5} - 12\sqrt{6}$

d) $7 \cdot 5 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} + 7 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} - 3 \cdot 5 \cdot \sqrt{3} - 3 \cdot 2 =$
 $= 35\sqrt{6} + 14\sqrt{2} - 15\sqrt{3} - 6$

076 Calcula.

a) $\sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt[3]{a^5} \cdot \sqrt[6]{a^4}$

b) $\sqrt[3]{3a^2b} \cdot \sqrt{2ab^3}$

c) $\sqrt[5]{2a^3b^4} : \sqrt[3]{4ab^2}$

d) $\sqrt[3]{\sqrt{ab}} \cdot \sqrt{a^3b}$

a) $a^{\frac{3}{4} + \frac{5}{3} + \frac{4}{6}} = a^{\frac{37}{12}} = \sqrt[12]{a^{37}}$

b) $\sqrt[6]{3^2a^4b^2} \cdot \sqrt[6]{2^3a^3b^9} = \sqrt[6]{72a^7b^{11}} = ab\sqrt[6]{72ab^5}$

c) $\sqrt[15]{2^3a^9b^{12}} : \sqrt[15]{2^{10}a^{-5}b^{10}} = \sqrt[15]{2^{-7}a^4b^2}$

d) $\sqrt[6]{ab} \cdot \sqrt[6]{a^3b} = \sqrt[6]{a^4b^2} = \sqrt[3]{a^2b}$

077 Efectúa y simplifica.

a) $(5\sqrt{2} + \sqrt{3}) \cdot \sqrt{2} \cdot (3\sqrt{2} - \sqrt{3})$

b) $(2 + \sqrt{3})^2 - (2 + \sqrt{3}) \cdot (2 - \sqrt{3})$

c) $(3 + \sqrt{5}) \cdot (3 - \sqrt{5}) + (2 - 4\sqrt{5}) \cdot (2 + 4\sqrt{5})$

d) $(\sqrt{3} + \sqrt{5} - 4\sqrt{7}) \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{5} + 4\sqrt{7})$

a) $(10 + \sqrt{6}) \cdot (3\sqrt{2} - \sqrt{3}) = 30\sqrt{2} - 10\sqrt{3} + 3\sqrt{12} - \sqrt{18} =$
 $= 27\sqrt{2} - 4\sqrt{3}$

b) $(4 + 4\sqrt{3} + 3) - (4 - 3) = 4\sqrt{3} - 6$

c) $(9 - 5) + (4 - 80) = -72$

d) $3 - 5 + 16 \cdot 7 - \sqrt{3}\sqrt{5} + \sqrt{3}\sqrt{5} + 4\sqrt{21} - 4\sqrt{21} - 4\sqrt{35} - 4\sqrt{35} =$
 $= 110 - 8\sqrt{35}$

078 Efectúa y expresa el resultado como potencia.

a) $(\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt{5})^6$

c) $\sqrt{\sqrt[3]{2^2}} \cdot \sqrt{\sqrt{2}}$

b) $\sqrt[5]{3} \cdot \sqrt[5]{3^2\sqrt{3}}$

d) $\sqrt[3]{8^5\sqrt{81}}$

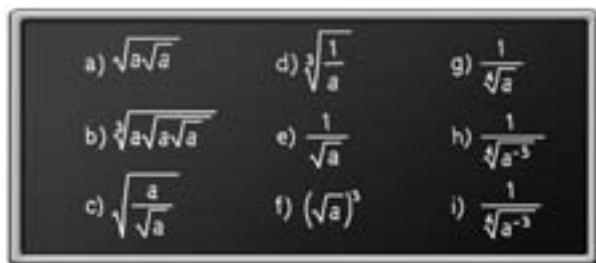
a) $(\sqrt[6]{5^2} \cdot \sqrt[6]{5^3})^6 = 5^5$

b) $\sqrt[10]{3^2} \cdot \sqrt[10]{3^5} = 3^{\frac{7}{10}}$

c) $\sqrt[6]{2^2} \cdot \sqrt[8]{2} = \sqrt[24]{2^{8+3}} = 2^{\frac{11}{24}}$

d) $2^{\frac{15}{\sqrt{3^4}}} = 2 \cdot 3^{\frac{4}{15}}$

079 Escribe los siguientes radicales como potencias de exponente fraccionario.



a) $a^{\frac{3}{4}}$

d) $a^{-\frac{1}{3}}$

g) $a^{-\frac{1}{4}}$

b) $\sqrt[3]{a^4\sqrt{a^3}} = \sqrt[12]{a^7} = a^{\frac{7}{12}}$

e) $a^{-\frac{1}{2}}$

h) $a^{\frac{5}{4}}$

c) $\sqrt[4]{\frac{a^2}{a}} = a^{\frac{1}{4}}$

f) $a^{\frac{3}{2}}$

i) $a^{\frac{3}{4}}$

Potencias y radicales

080

Expresa mediante un solo radical.

a) $\sqrt[5]{3\sqrt{5}}$

c) $\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}}}$

e) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}}$

b) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}}$

d) $\sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}}}$

f) $\frac{1}{\sqrt{\sqrt{5}}}$

a) $\sqrt[10]{3^2 \cdot 5} = \sqrt[10]{45}$

c) $\sqrt[6]{\frac{2^3}{2^2}} = \sqrt[12]{2}$

e) $\sqrt[12]{2}$

b) $\sqrt[8]{3}$

d) $\sqrt[4]{\frac{1}{2}}$

f) $\sqrt[4]{\frac{1}{5}}$

081

Razona si son verdaderas o falsas estas igualdades.

a) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[n \cdot m]{ab}$

e) $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$

b) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[n+m]{a \cdot b}$

f) $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = a\sqrt{a \cdot b}$

c) $\sqrt[n]{a + b} = \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$

g) $\sqrt[4]{a^8 b^2} = a\sqrt{b}$

d) $a\sqrt[n]{b^m} = \sqrt[n]{(a \cdot b)^m}$

h) $a\sqrt{b + c} = \sqrt{ab + ac}$

a) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[n \cdot m]{a^m \cdot b^n} = \sqrt[n \cdot m]{a^m \cdot b^n} \neq \sqrt[n \cdot m]{ab} \rightarrow$ Falsa

b) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[n \cdot m]{a^m \cdot b^n} = \sqrt[n \cdot m]{a^m \cdot b^n} \neq \sqrt[n+m]{ab} \rightarrow$ Falsa

c) Falsa, excepto cuando $n = 1$. Y se comprueba probando con cualquier valor de a , b y n .

d) $a\sqrt[n]{b^m} = \sqrt[n]{a^n b^m} \neq \sqrt[n]{a^m b^m} \rightarrow$ Falsa, excepto si $n = m$.

e) Falsa, ya que si elevamos al cuadrado los términos:

$$(\sqrt{a^2 + b^2})^2 = a^2 + b^2 \neq a^2 + b^2 + 2ab = (a + b)^2$$

f) $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = a\sqrt{ab} \rightarrow$ Verdadera

g) $\sqrt[4]{a^8 b^2} = \sqrt{a^4 b} = a^2 \sqrt{b} \neq a\sqrt{b} \rightarrow$ Falsa

h) $a\sqrt{b + c} = \sqrt{a^2 b + a^2 c} \neq \sqrt{ab + ac} \rightarrow$ Falsa, excepto para $a = 1$.

082

Racionaliza los denominadores y simplifica.

a) $\frac{1}{\sqrt{6}}$

b) $\frac{-5}{2\sqrt{5}}$

c) $\frac{4}{\sqrt[5]{3^2}}$

d) $\frac{-6}{2\sqrt[4]{7}}$

a) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$

c) $\frac{4\sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^2} \cdot \sqrt[5]{3^3}} = \frac{4\sqrt[5]{3^3}}{3}$

b) $\frac{-5\sqrt{5}}{2\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{-5\sqrt{5}}{2 \cdot 5} = \frac{-\sqrt{5}}{2}$

d) $\frac{-3\sqrt[4]{7^3}}{\sqrt[4]{7} \cdot \sqrt[4]{7^3}} = \frac{-3\sqrt[4]{7^3}}{7}$

083 Racionaliza los denominadores y simplifica.

a) $\frac{1 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

c) $\frac{7 + \sqrt{5}}{\sqrt[4]{3}}$

b) $\frac{5\sqrt{3} - 4}{\sqrt[3]{3^2}}$

d) $\frac{6\sqrt{6} - 6}{\sqrt{6}}$

a) $\frac{(1 - \sqrt{2}) \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} - 2}{2}$

b) $\frac{(5\sqrt{3} - 4) \cdot \sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3^2} \cdot \sqrt[3]{3}} = \frac{5\sqrt[6]{3^5} - 4\sqrt[3]{3}}{3}$

c) $\frac{(7 + \sqrt{5}) \cdot \sqrt[4]{3^3}}{\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{3^3}} = \frac{7\sqrt[4]{3^3} + \sqrt[4]{5^2 \cdot 3^3}}{3}$

d) $\frac{(6\sqrt{6} - 6) \cdot \sqrt{6}}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{36 - 6\sqrt{6}}{6} = 6 - \sqrt{6}$

084 Racionaliza los denominadores y simplifica.

a) $\frac{1}{\sqrt{2} + 1}$

d) $\frac{7}{\sqrt{11} - 3}$

b) $\frac{-5}{\sqrt{3} - 2}$

e) $\frac{-5}{\sqrt{6} + \sqrt{7}}$

c) $\frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{2} - \sqrt{5}}$

f) $\frac{8}{5(\sqrt{10} - \sqrt{6})}$

a) $\frac{\sqrt{2} - 1}{(\sqrt{2} + 1) \cdot (\sqrt{2} - 1)} = \sqrt{2} - 1$

b) $\frac{-5 \cdot (\sqrt{3} + 2)}{(\sqrt{3} - 2) \cdot (\sqrt{3} + 2)} = \frac{-5\sqrt{3} - 10}{-1} = 5\sqrt{3} + 10$

c) $\frac{4\sqrt{2} \cdot (3\sqrt{2} + \sqrt{5})}{(3\sqrt{2} - \sqrt{5}) \cdot (3\sqrt{2} + \sqrt{5})} = \frac{24 + 4\sqrt{10}}{13}$

d) $\frac{7 \cdot (\sqrt{11} + 3)}{(\sqrt{11} - 3) \cdot (\sqrt{11} + 3)} = \frac{7\sqrt{11} + 21}{2}$

e) $\frac{-5 \cdot (\sqrt{6} - \sqrt{7})}{(\sqrt{6} + \sqrt{7}) \cdot (\sqrt{6} - \sqrt{7})} = \frac{-5\sqrt{6} + 5\sqrt{7}}{-1} = 5\sqrt{6} - 5\sqrt{7}$

f) $\frac{8 \cdot (\sqrt{10} + \sqrt{6})}{5 \cdot (\sqrt{10} - \sqrt{6}) \cdot (\sqrt{10} + \sqrt{6})} = \frac{8\sqrt{10} + 8\sqrt{6}}{20} = \frac{2\sqrt{10} + 2\sqrt{6}}{5}$

Potencias y radicales

085 Racionaliza.

a) $\frac{1}{\sqrt{3+6}}$

b) $\frac{4\sqrt{3} + \sqrt{7}}{\sqrt{12}}$

c) $\frac{5\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{18}}$

d) $\frac{3\sqrt{6} + 2\sqrt{2}}{2 + 3\sqrt{3}}$

a) $\frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$

b) $\frac{(4\sqrt{3} + \sqrt{7}) \cdot \sqrt{3}}{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{12 + \sqrt{21}}{6}$

c) $\frac{(5\sqrt{6} - \sqrt{2}) \cdot \sqrt{2}}{3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{10\sqrt{3} - 2}{6} = \frac{5\sqrt{3} - 1}{3}$

d) $\frac{(3\sqrt{6} + 2\sqrt{2}) \cdot (2 - 3\sqrt{3})}{(2 + 3\sqrt{3}) \cdot (2 - 3\sqrt{3})} = \frac{6\sqrt{6} - 27\sqrt{2} + 4\sqrt{2} - 6\sqrt{6}}{-23} =$
 $= \frac{-23\sqrt{2}}{-23} = \sqrt{2}$

086 HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE RESUELVEN OPERACIONES DE FRACCIONES CON DENOMINADORES EN FORMA DE RADICAL?

Resuelve: $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$

PRIMERO. Se racionalizan las fracciones.

$$\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{10} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{30}}{3}$$

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{12}}{2} = \frac{\sqrt{4 \cdot 3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

SEGUNDO. Se resuelve la operación.

$$\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{30}}{3} - \sqrt{3} = \frac{\sqrt{30} - 3\sqrt{3}}{3}$$

087 Racionaliza y opera.

a) $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}}$ b) $\frac{3}{\sqrt{3}} - \frac{5}{\sqrt{2}}$ c) $\frac{9}{\sqrt{7}} - \frac{6}{\sqrt{8}}$ d) $\frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{2}{\sqrt{12}}$

$$a) \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{5\sqrt{2} + 2\sqrt{5}}{10}$$

$$b) \frac{3\sqrt{3}}{3} - \frac{5\sqrt{2}}{2} = \sqrt{3} - \frac{5\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{3} - 5\sqrt{2}}{2}$$

$$c) \frac{9\sqrt{7}}{7} - \frac{6\sqrt{8}}{8} = \frac{9\sqrt{7}}{7} - \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{18\sqrt{7} - 21\sqrt{2}}{14}$$

$$d) \frac{\sqrt{10}}{10} + \frac{2\sqrt{3}}{2 \cdot 3} = \frac{3\sqrt{10} + 10\sqrt{3}}{30}$$

088 Racionaliza y efectúa las operaciones.

a) $\frac{3}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$ b) $\frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{8} - \sqrt{6}} + \frac{9}{5 - \sqrt{3}}$

$$a) \frac{3 \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{2})}{(\sqrt{3} - \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{2})} - \frac{2 \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{2})}{(\sqrt{3} + \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{2})} =$$

$$= 3\sqrt{3} + 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{2} = \sqrt{3} + 5\sqrt{2}$$

$$b) \frac{5\sqrt{5} \cdot (\sqrt{8} + \sqrt{6})}{(\sqrt{8} - \sqrt{6}) \cdot (\sqrt{8} + \sqrt{6})} + \frac{9 \cdot (5 + \sqrt{3})}{(5 - \sqrt{3}) \cdot (5 + \sqrt{3})} =$$

$$= \frac{10\sqrt{10} + 5\sqrt{30}}{2} + \frac{45 + 9\sqrt{3}}{22} = \frac{110\sqrt{10} + 55\sqrt{30} + 45 + 9\sqrt{3}}{22}$$

089 Racionaliza y opera.

a) $\frac{\sqrt{32}}{5} - \frac{3\sqrt{50}}{2} + \frac{5}{\sqrt{18}}$ c) $\frac{-\sqrt{27} + \sqrt{48} + 5\sqrt{75}}{2\sqrt{75} - \sqrt{3}}$

b) $\frac{3\sqrt{8} + \sqrt{18} - 2\sqrt{72}}{4\sqrt{8} + \sqrt{2}}$

$$a) \frac{4\sqrt{2}}{5} - \frac{15\sqrt{2}}{2} + \frac{5\sqrt{2}}{3 \cdot 2} = \frac{24\sqrt{2} - 225\sqrt{2} + 25\sqrt{2}}{30} = \frac{-38\sqrt{2}}{15}$$

$$b) \frac{6\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 12\sqrt{2}}{8\sqrt{2} + \sqrt{2}} = \frac{-3\sqrt{2}}{9\sqrt{2}} = \frac{-1}{3}$$

$$c) \frac{-3\sqrt{3} + 4\sqrt{3} + 25\sqrt{3}}{10\sqrt{3} - \sqrt{3}} = \frac{26\sqrt{3}}{9\sqrt{3}} = \frac{26}{9}$$

Potencias y radicales

090 HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE RACIONALIZAN FRACCIONES CON DENOMINADORES DEL TIPO $\sqrt[n]{a}(b + \sqrt{c})$?

Racionaliza: $\frac{2}{\sqrt[3]{2}(2 - \sqrt{3})}$

PRIMERO. Se multiplica por $\sqrt[n]{a^{n-1}}$.

$$\frac{2}{\sqrt[3]{2}(2 - \sqrt{3})} = \frac{2 \cdot \sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2}(2 - \sqrt{3}) \cdot \sqrt[3]{2^2}} = \frac{2 \cdot \sqrt[3]{2^2}}{2(2 - \sqrt{3})} = \frac{\sqrt[3]{2^2}}{2 - \sqrt{3}}$$

SEGUNDO. Se multiplica por el conjugado del denominador resultante.

$$\frac{\sqrt[3]{2^2}}{2 - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt[3]{2^2} \cdot (2 + \sqrt{3})}{(2 - \sqrt{3}) \cdot (2 + \sqrt{3})} = \frac{\sqrt[3]{2^2} \cdot (2 + \sqrt{3})}{2^2 - 3} = \sqrt[3]{2^2} \cdot (2 + \sqrt{3})$$

091 Racionaliza las siguientes expresiones.

a) $\frac{4}{\sqrt[3]{3} \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{3})}$ b) $\frac{4}{\sqrt[4]{5} \cdot (3 + \sqrt{3})}$

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{4 \cdot \sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{3^2} \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{3})} &= \frac{4 \cdot \sqrt[3]{3^2}}{3 \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{3})} = \\ &= \frac{4 \cdot \sqrt[3]{3^2} \cdot (\sqrt{2} - \sqrt{3})}{3 \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{2} - \sqrt{3})} = \frac{4\sqrt[6]{3^4} \cdot 2^3 - 4\sqrt[6]{3^7}}{-3} = \\ &= \frac{-4\sqrt[6]{3^4} \cdot 2^3 + 12\sqrt[6]{3}}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{4\sqrt[4]{5^3}}{\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[4]{5^3} \cdot (3 + \sqrt{3})} &= \frac{4\sqrt[4]{5^3}}{5 \cdot (3 + \sqrt{3})} = \frac{4\sqrt[4]{5^3} \cdot (3 - \sqrt{3})}{5 \cdot (3 + \sqrt{3}) \cdot (3 - \sqrt{3})} = \\ &= \frac{12\sqrt[4]{5^3} - 4\sqrt[4]{5^3} \cdot 3^2}{30} = \frac{6\sqrt[4]{5^3} - 2\sqrt[4]{5^3} \cdot 3^2}{15} \end{aligned}$$

092 Escribe en notación científica.

- a) Distancia Tierra-Luna: 384.000 km.
- b) Distancia Tierra-Neptuno: 4.308.000.000 km.
- c) Diámetro de un electrón: 0,0000000003 m.
- d) Superficie de la Tierra: 150.000.000 km².
- e) Longitud de un virus (gripe): 0,0000000022 m.
- f) Radio del protón: 0,0000000005 m.
- g) Peso de un estafilococo: 0,0000001 g.
- h) Un año luz: 9.460.000.000.000 km.
- i) Distancia del universo observable:
25.000 millones de años luz.



- | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|---------------------------------|
| a) $3,84 \cdot 10^5$ km | d) $1,5 \cdot 10^8$ km ² | g) $1 \cdot 10^{-7}$ g |
| b) $4,308 \cdot 10^9$ km | e) $2,2 \cdot 10^{-9}$ m | h) $9,4 \cdot 10^{12}$ km |
| c) $3 \cdot 10^{-10}$ m | f) $5 \cdot 10^{-11}$ m | i) $2,5 \cdot 10^{10}$ años luz |

093

Las unidades de medida con las que medimos la cantidad de información son:

Byte = 2^3 bits

Kilobyte = 2^{10} bytes

Megabyte = 2^{10} Kilobytes

Gigabyte = 2^{10} Megabytes



Expresa, en forma de potencia y en notación científica, estas cantidades de información en bits y bytes.

- | | |
|--------------------------------------|----------------------------|
| a) Un disco duro de 120 Gb. | c) Un disquete de 1,44 Mb. |
| b) Una tarjeta de memoria de 512 Mb. | d) Un CD-Rom de 650 Mb. |

- a) $120 \text{ Gb} = 120 \cdot 2^{30} \text{ bytes} = 1,2884901888 \cdot 10^{10} \text{ bytes} = 1,03079215104 \cdot 10^{11} \text{ bits}$
- b) $512 \text{ Mb} = 512 \cdot 2^{20} \text{ bytes} = 5,36870912 \cdot 10^8 \text{ bytes} = 4,294967296 \cdot 10^9 \text{ bits}$
- c) $1,44 \text{ Mb} = 1,44 \cdot 2^{20} \text{ bytes} = 1,509949 \cdot 10^6 \text{ bytes} = 1,2079595 \cdot 10^7 \text{ bits}$
- d) $650 \text{ Mb} = 650 \cdot 2^{20} \text{ bytes} = 6,815744 \text{ bytes} \cdot 10^8 = 5,4525952 \cdot 10^9 \text{ bits}$

094

La masa de Plutón es $6,6 \cdot 10^{-9}$ veces la masa del Sol, y esta, a su vez, es $3,3 \cdot 10^6$ veces la masa de la Tierra. Si la masa de la Tierra es $6 \cdot 10^{24}$ kg, halla la masa de Plutón y del Sol.

$$\text{Masa del Sol: } 6 \cdot 10^{24} \cdot 3,3 \cdot 10^6 = 1,98 \cdot 10^{31} \text{ kg}$$

$$\text{Masa de Plutón: } 1,98 \cdot 10^{31} \cdot 6,6 \cdot 10^{-9} = 1,3068 \cdot 10^{23} \text{ kg}$$

095

Se ha observado que la población de ciertas bacterias se duplica cada hora.

Si el número inicial es de $8 \cdot 10^{12}$ bacterias:

- a) ¿Cuántas bacterias habrá a las 3 horas?
- b) ¿Y a las 6 horas?
- c) ¿Cuántas horas tendrán que pasar para que sean $1,024 \cdot 10^{15}$ bacterias?

- a) $8 \cdot 10^{12} \cdot 2^3 = 6,4 \cdot 10^{13}$ bacterias
- b) $8 \cdot 10^{12} \cdot 2^6 = 5,12 \cdot 10^{14}$ bacterias
- c) $1,024 \cdot 10^{15} : 8 \cdot 10^{12} = 128$,
por lo que $2^n = 128 \rightarrow n = 7$.
Tendrán que pasar 7 horas.



Potencias y radicales

- 096** ●● ¿Cuánto mide la arista de un cubo cuyo volumen es 6 m^3 ? Expresa el resultado en forma de radicales.

$$\text{Arista}^3 = 6 \text{ m}^3 \rightarrow \text{Arista} = \sqrt[3]{6} \text{ m}$$

- 097** ●● ¿Cuánto mide el área de la cara de un cubo cuyo volumen es 9 cm^3 ? Expresa el resultado como radical y como potencia.

$$\text{Arista}^3 = 9 \text{ m}^3 \rightarrow \text{Arista} = \sqrt[3]{9} \text{ m}$$

$$\text{Área de la cara} = \sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{9^2} = \sqrt[3]{81} \text{ m}^2 = 3^{\frac{4}{3}} \text{ m}^2$$

- 098** ●● Si el volumen de un cubo es 20 cm^3 , halla el valor de la suma de sus aristas.

$$\text{Arista}^3 = 20 \text{ cm}^3 \rightarrow \text{Arista} = \sqrt[3]{20} \text{ cm}$$

$$\text{Suma de aristas} = 12 \cdot \sqrt[3]{20} \text{ cm}$$

- 099** ●● Con los datos de la actividad anterior, calcula la superficie lateral del cubo.

$$\text{Arista}^3 = 20 \text{ cm}^3 \rightarrow \text{Arista} = \sqrt[3]{20} \text{ cm}$$

$$\text{Área de la cara} = \sqrt[3]{20^2} \text{ cm}^2$$

$$\text{Área lateral} = 6\sqrt[3]{20^2} = 12\sqrt[3]{50} \text{ cm}^2$$

- 100** ●●● Generaliza los resultados de las actividades anteriores, dando el valor de la arista y la superficie lateral de un cubo en función de su volumen.

$$\text{Arista}^3 = \text{Volumen} \rightarrow \text{Arista} = \sqrt[3]{\text{Volumen}}$$

$$\text{Área de la cara} = \sqrt[3]{\text{Volumen}^2}$$

$$\text{Área lateral} = 6\sqrt[3]{\text{Volumen}^2}$$

- 101** ●●● Expresa en notación científica.

a) 2^{-30}

b) 5^{-10}

c) 3^{-20}

d) 7^{-15}

$$\begin{aligned} \text{a) } 2^{-30} &= 0,000000000931322574615478515625 = \\ &= 9,31322574615478515625 \cdot 10^{-10} \end{aligned}$$

$$\text{b) } 5^{-10} = 0,0000001024 = 1,024 \cdot 10^{-7}$$

$$\text{c) } 3^{-20} = 2,8679719907924413133222572312408 \cdot 10^{-10}$$

$$\text{d) } 7^{-15} = 2,1063444842276644111559866596517 \cdot 10^{-13}$$

- 102** ●●● Reflexiona y responde.

a) ¿En qué casos ocurre que $\sqrt{a} < a$?

b) ¿Y en qué casos ocurre que $\sqrt{a} > a$?

a) $\sqrt{a} < a$, cuando $0 < a < 1$.

b) $\sqrt{a} > a$, cuando $a > 1$.

103

Racionaliza.

a) $\frac{1}{1 + \sqrt[3]{a}}$

b) $\frac{1}{1 - \sqrt[3]{a}}$

a)
$$\frac{1}{1 + \sqrt[3]{a}} = \frac{1 - \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a^2}}{(1 + \sqrt[3]{a}) \cdot (1 - \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a^2})} = \frac{1 - \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a^2}}{1 + a}$$

b)
$$\frac{1}{1 - \sqrt[3]{a}} = \frac{1 + \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a^2}}{(1 - \sqrt[3]{a}) \cdot (1 + \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a^2})} = \frac{1 + \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a^2}}{1 - a}$$

104

Explica cómo se racionalizan las fracciones del tipo $\frac{1}{\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}}$.

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}} = \frac{(\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b})}{(\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}) \cdot (\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b})} = \frac{(\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b})}{\sqrt[n]{a}^n - \sqrt[n]{b}^n}$$

Volvemos a racionalizar hasta que eliminamos totalmente las raíces del denominador

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}} &= \frac{(\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b})}{\sqrt[n]{a}^n - \sqrt[n]{b}^n} = \frac{(\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}) \cdot (\sqrt[n]{a}^{n-2} + \sqrt[n]{a}^{n-4} + \dots + \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b})}{\sqrt[n]{a}^n - \sqrt[n]{b}^n} = \dots \\ &= \frac{(\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}) \cdot (\sqrt[n]{a}^{n-2} + \sqrt[n]{a}^{n-4} + \dots + \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b})}{a - b} \end{aligned}$$

EN LA VIDA COTIDIANA

105

Un equipo de ingenieros aeronáuticos va a presentar un proyecto para la construcción de un nuevo avión. Por ello quieren construir una maqueta. Sin embargo, se han encontrado con un problema.

¿Te has fijado en esta pieza?
Es un rectángulo de 6 cm
de largo, pero su ancho...

Sí, es cierto; debe
medir $\sqrt{5}$ cm.



Potencias y radicales

Para no cometer errores en la construcción, se plantean cómo trazar un segmento que mida exactamente $\sqrt{5}$ cm.

Así, el equipo ha resuelto el problema para poder realizar la maqueta.

Otra de las piezas va a ser un rectángulo que mida

$\frac{7 + \sqrt{7}}{2}$ cm de largo

y $4\sqrt{2}$ cm de ancho.

¿Cómo conseguirán dibujarlo con precisión?

Podemos trazar un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 1 cm y 2 cm, y utilizar el teorema de Pitágoras.



Una vez conocido el segmento de $\sqrt{5}$ cm, trazamos el segmento de $\sqrt{6}$ cm mediante un triángulo rectángulo, de catetos 1 cm y $\sqrt{5}$ cm, y se hace lo mismo con el segmento de $\sqrt{7}$ cm con un triángulo de catetos 1 cm y $\sqrt{6}$ cm.

Teniendo el segmento de $\sqrt{7}$ cm, le añadimos 7 cm prolongando la recta, con lo que resulta un segmento de $7 + \sqrt{7}$ cm.

Trazamos la mediatriz del segmento y conseguimos un segmento de $\frac{7 + \sqrt{7}}{2}$ cm.

Para el otro lado del rectángulo, trazamos primero un segmento de $\sqrt{2}$ cm, mediante un triángulo rectángulo de catetos 1 cm, y proyectamos cuatro veces el segmento utilizando un compás, por lo que conseguimos un segmento de $4\sqrt{2}$ cm.

106

Para motivar a los alumnos de un centro escolar sobre el excesivo consumo que se hace del agua, los profesores han organizado una visita al embalse de su región.

Para que os hagáis una idea precisa de la capacidad del embalse, imaginad que es la misma que la de un cubo de 210 metros de arista... ¡El doble del largo de un campo de fútbol!



Los alumnos miran sorprendidos el panel con los datos del embalse.



- Justifica si el guía ha hecho bien los cálculos.
- Al final de la visita, el profesor decide entregarles este folleto.



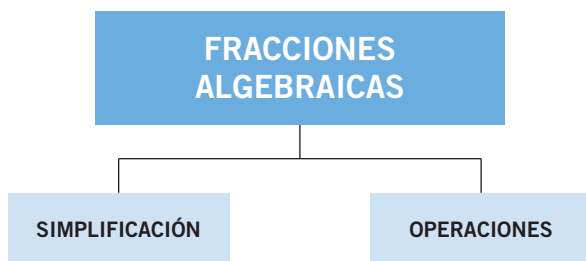
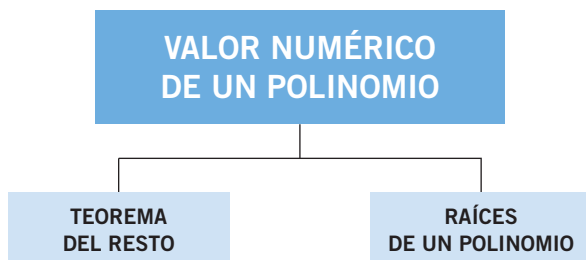
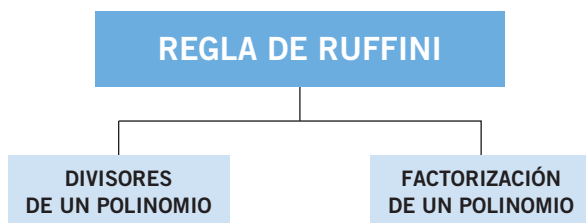
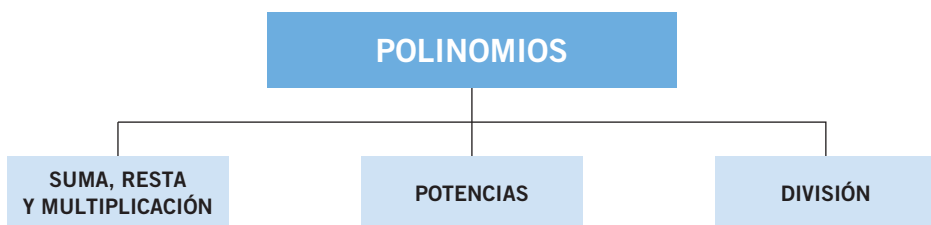
¿Cuántos metros medirá el lado de un cubo con esta capacidad?

- Si el cubo tiene 210 m de arista, su capacidad es de $210^3 \text{ m}^3 = 9.261.000 \text{ m}^3 = 9,261 \text{ hm}^3$.
Por tanto, el guía no ha realizado bien el cálculo de la arista.

- $1.452.000 \text{ litros} = 1.452.000 \text{ dm}^3 = 1.452 \text{ m}^3$

La arista del cubo mide $\sqrt[3]{1.452} = 11,324 \text{ m}$.

Polinomios y fracciones algebraicas



Un hombre de principios

Días negros y noches largas, estas últimas semanas habían sido especialmente difíciles para Paolo Ruffini.

Mientras caminaba en dirección a su casa, pensaba en lo duro que le había sido tomar la decisión de no jurar fidelidad a la bandera de los invasores franceses.

Un golpecito en el hombro y la voz amiga de Luigi lo devolvieron a la realidad:

—¡Paolo! ¿Qué has hecho? En la universidad no se comenta otra cosa. El responsable político ha asegurado que nunca volverás a sentarte en tu cátedra y que has marcado tu destino; se le veía terriblemente enfadado.

—Lo pensé durante mucho tiempo y cuando comuniqué mi decisión me he sentido aliviado —argumentó Ruffini, plenamente convencido.

—Pero ¿no has pensado en tu familia o en tu posición? —Luigi mostró la preocupación que parecía haber abandonado a Ruffini.

—Luigi, ¿cuánto darías por un puesto de funcionario? —Estaban llegando al mercado y Ruffini se paró en seco—. Yo no estoy dispuesto a pagar tanto por la cátedra; si hiciera el juramento, habría traicionado mis principios y mutilado mi alma, mantendría mi cátedra pero el Paolo Ruffini que conoces habría muerto.

Ruffini se dedicó por entero a su oficio de médico en los años en que estuvo alejado de la docencia.

En la división de polinomios $P(x) : (x - a)$, calcula el grado del cociente y del resto.

El grado del cociente es un grado menor que el grado del polinomio $P(x)$, y el grado del resto es cero, pues es siempre un número (un número es un polinomio de grado cero).



Polinomios y fracciones algebraicas

EJERCICIOS

001 Efectúa la siguiente operación.

$$\begin{aligned} & (-2x^3 + x^2 + x - 1) - (x^3 + x^2 - x - 1) \\ & (-2x^3 + x^2 + x - 1) - (x^3 + x^2 - x - 1) = -3x^3 + 2x \end{aligned}$$

002 Multiplica estos polinomios.

$$\begin{aligned} & P(x) = x^3 - x^2 + 3x - 1 \quad Q(x) = x - 1 \\ & P(x) \cdot Q(x) = x^4 - x^3 - x^3 + x^2 + 3x^2 - 3x - x + 1 = \\ & = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 4x + 1 \end{aligned}$$

003 Si $P(x) = x^2 - x + 2$ y $Q(x) = x^3 - x^2 + 1$, calcula:

a) $P(1) + P(-1)$

b) $P(0) + Q(-1)$

$$a) P(1) + P(-1) = (1 - 1 + 2) + (1 + 1 + 2) = 2 + 4 = 6$$

$$b) P(0) + Q(-1) = 2 + (4 + 2 + 8) = 2 + 12 = 14$$

004 ¿Cuánto tiene que valer a para que $P(a) = 0$ si $P(x) = 2x^2 - 3x + 1$?

$$\text{Son las soluciones de la ecuación } 2x^2 - 3x + 1 = 0 \rightarrow x = 1 \text{ y } x = \frac{1}{2}$$

005 Realiza las siguientes divisiones de polinomios. Comprueba, en cada una de ellas, el resultado que obtienes.

a) $(2x^3 - 3x^2 - 5x - 5) : (x^2 - 2x - 1)$

b) $(2x^3 - 3x^2 + 4x - 3) : (x^2 - 1)$

c) $(x^4 + 1) : (x^2 + 1)$

d) $(x^5 + 2x^3 - 1) : (x^2 - 3)$

$$a) (2x^3 - 3x^2 - 5x - 5) : (x^2 - 2x - 1) \rightarrow \begin{cases} \text{Cociente} = 2x + 1 \\ \text{Resto} = -x - 4 \end{cases}$$

$$b) (2x^3 - 3x^2 + 4x - 3) : (x^2 - 1) \longrightarrow \begin{cases} \text{Cociente} = 2x - 3 \\ \text{Resto} = 6x - 6 \end{cases}$$

$$c) (x^4 + 1) : (x^2 + 1) \longrightarrow \begin{cases} \text{Cociente} = x^2 - 1 \\ \text{Resto} = 2 \end{cases}$$

$$d) (x^5 + 2x^3 - 1) : (x^2 - 3) \longrightarrow \begin{cases} \text{Cociente} = x^3 + 5x \\ \text{Resto} = 15x - 1 \end{cases}$$

006 El divisor de una división de polinomios es $Q(x) = 2x^2 - 7$, el cociente es $C(x) = x^3 - 2x$ y el resto es $R(x) = x - 2$. Calcula el dividendo.

$$\begin{aligned} P(x) &= Q(x) \cdot C(x) + R(x) = (2x^2 - 7) \cdot (x^3 - 2x) + (x - 2) = \\ &= (2x^5 - 11x^3 + 14x) + (x - 2) = 2x^5 - 11x^3 + 15x - 2 \end{aligned}$$

- 007** El dividendo de una división de polinomios es $P(x) = x^5 - 2x^3 - x^2$, el cociente es $C(x) = x^2 - 2$ y el resto es $R(x) = -2$. ¿Cuál es el divisor?

$$P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)$$

$$x^5 - 2x^3 - x^2 = Q(x) \cdot (x^2 - 2) - 2 \rightarrow$$

$$\rightarrow x^5 - 2x^3 - x^2 + 2 = Q(x) \cdot (x^2 - 2) \rightarrow$$

$$\rightarrow Q(x) = (x^5 - 2x^3 - x^2 + 2) : (x^2 - 2) = x^3 - 1$$

- 008** Determina el cociente y el resto, aplicando la regla de Ruffini.

a) $(x^3 - x^2 + x - 3) : (x - 1)$

b) $(x^4 - x^3 - x + 9) : (x - 2)$

c) $(x^4 + x^2 - 10) : (x - 5)$

d) $(x^5 - 2x^3 + x - 7) : (x + 3)$

e) $(x^7 + x^4 - 7x^2) : (x + 4)$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ & & 1 & 0 & 1 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & -2 \end{array} \rightarrow C(x) = x^2 + 1; R(x) = -2$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 1 & -1 & 0 & -1 & 9 \\ & & 2 & 2 & 4 & 6 \\ \hline & 1 & 1 & 2 & 3 & 15 \end{array} \rightarrow C(x) = x^3 + x^2 + 2x + 3; R(x) = 15$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 5 & 1 & 0 & 1 & 0 & -10 \\ & & 5 & 25 & 130 & 650 \\ \hline & 1 & 5 & 26 & 130 & 640 \end{array}$$

$$C(x) = x^3 + 5x^2 + 26x + 130; R(x) = 640$$

$$\begin{array}{r|rrrrrr} -3 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & -7 \\ & & -3 & 9 & -21 & 63 & -192 \\ \hline & 1 & -3 & 7 & -21 & 64 & -199 \end{array}$$

$$C(x) = x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 21x + 64; R(x) = -199$$

$$\begin{array}{r|rrrrrrrr} -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -7 & 0 & 0 \\ & & -4 & 16 & -64 & 252 & -1.008 & 4.060 & -16.240 \\ \hline & 1 & -4 & 16 & -63 & 252 & -1.015 & 4.060 & -16.240 \end{array}$$

$$C(x) = x^6 - 4x^5 + 16x^4 - 63x^3 + 252x^2 - 1.015x + 4.060; R(x) = -16.240$$

- 009** Si dividimos $4x^5 - 3x^4 + 2x^3 - x^2 - x + 1$ entre $x + 2$, ¿cuáles serán el resto y el cociente? ¿Podemos aplicar la regla de Ruffini?

$$\begin{array}{r|rrrrrr} -2 & 4 & -3 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ & & -8 & 22 & -48 & 98 & -194 \\ \hline & 4 & -11 & 24 & -49 & 97 & -193 \end{array}$$

$$\text{Cociente: } 4x^4 - 11x^3 + 24x^2 - 49x + 97; \text{ Resto: } -193$$

Polinomios y fracciones algebraicas

010 Calcula el valor de m para que la división sea exacta.

$$(x^5 - 2x^3 - 8x^2 + mx + 3) : (x - 3)$$

$$\begin{array}{r|rrrrrr} 3 & 1 & 0 & -2 & -8 & m & 3 \\ & & 3 & 9 & 21 & 39 & 117 + 3m \\ \hline & 1 & 3 & 7 & 13 & 39 + m & 120 + 3m \end{array}$$

$$120 + 3m = 0 \rightarrow m = -40$$

011 Considerando el polinomio:

$$P(x) = x^3 - 7x^2 + x - 7$$

calcula, mediante el teorema del resto, su valor numérico para:

a) $x = 1$

c) $x = -1$

e) $x = 3$

b) $x = 5$

d) $x = 7$

f) $x = -5$

a) $\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -7 & 1 & -7 \\ & & 1 & -6 & -5 \\ \hline & 1 & -6 & -5 & -12 \end{array} \rightarrow \text{Como el resto es } -12, \text{ entonces } P(1) = -12.$

b) $\begin{array}{r|rrrr} 5 & 1 & -7 & 1 & -7 \\ & & 5 & -10 & -45 \\ \hline & 1 & -2 & -9 & -52 \end{array} \rightarrow \text{Como el resto es } -52, \text{ entonces } P(5) = -52.$

c) $\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -7 & 1 & -7 \\ & & -1 & 8 & -9 \\ \hline & 1 & -8 & 9 & -16 \end{array} \rightarrow \text{Como el resto es } -16, \text{ entonces } P(-1) = -16.$

d) $\begin{array}{r|rrrr} 7 & 1 & -7 & 1 & -7 \\ & & 7 & 0 & 7 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \rightarrow \text{Como el resto es } 0, \text{ entonces } P(7) = 0.$

e) $\begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & -7 & 1 & -7 \\ & & 3 & -12 & -33 \\ \hline & 1 & -4 & -11 & -40 \end{array} \rightarrow \text{Como el resto es } -40, \text{ entonces } P(3) = -40.$

f) $\begin{array}{r|rrrr} -5 & 1 & -7 & 1 & -7 \\ & & -5 & 60 & -305 \\ \hline & 1 & -12 & 61 & -312 \end{array} \rightarrow \text{Como el resto es } -312, \text{ entonces } P(-5) = -312.$

012 Comprueba que se verifica el teorema del resto para $P(x) = x^4 - 3x + 2$ si:

a) $x = 2$

b) $x = -1$

a) $\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 1 & 0 & 0 & -3 & 2 \\ & & 2 & 4 & 8 & 10 \\ \hline & 1 & 2 & 4 & 5 & 12 \end{array}$

$$P(2) = 2^4 - 3 \cdot 2 + 2 = 12$$

b) $\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & 0 & 0 & -3 & 2 \\ & & -1 & 1 & -1 & 4 \\ \hline & 1 & -1 & 1 & -4 & 6 \end{array}$

$$P(-1) = (-1)^4 - 3 \cdot (-1) + 2 = 6$$

- 013** ¿Cuánto vale a si el valor numérico de $P(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + a$, para $x = 2$, es 0?

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -3 & a \\ 2 & & 2 & 0 & -6 \\ \hline & 1 & 0 & -3 & a-6 \end{array} \rightarrow a-6=0 \rightarrow a=6$$

- 014** Calcula las raíces de estos polinomios.

a) $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

c) $R(x) = x^3 - 2x^2 - 5x - 6$

b) $Q(x) = x^2 - 2x + 1$

d) $S(x) = x^2 - 5x - 14$

a)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 1 & & 1 & -2 & -2 \\ \hline & 1 & -2 & -2 & 0 \end{array} \rightarrow 1 \text{ es raíz, } 1 + \sqrt{3} \text{ y } 1 - \sqrt{3} \text{ son también raíces.}$$

b)
$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -2 & 1 \\ 1 & & 1 & -1 \\ \hline & 1 & -1 & 0 \end{array} \rightarrow 1 \text{ es raíz doble.}$$

- c) No tiene raíces racionales, al probar con los divisores del denominador nunca da cero.

d)
$$\left. \begin{array}{l} \begin{array}{r|rrr} & 1 & -5 & -14 \\ -2 & & -2 & 14 \\ \hline & 1 & -7 & 0 \end{array} \rightarrow -2 \text{ es raíz.} \\ \begin{array}{r|rrr} & 1 & -5 & -14 \\ 7 & & 7 & 14 \\ \hline & 1 & 2 & 0 \end{array} \rightarrow 7 \text{ es raíz.} \end{array} \right\} \rightarrow \text{Son las dos raíces del polinomio.}$$

- 015** ¿Cuánto vale a para que $x = 2$ sea una raíz del polinomio $x^3 - 2x^2 - 4x + a$?

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -4 & a \\ 2 & & 2 & 0 & -8 \\ \hline & 1 & 0 & -4 & a-8 \end{array} \rightarrow a-8=0 \rightarrow a=8$$

- 016** Determina a y b para que el polinomio $P(x) = ax^2 + b$ tenga como raíces 2 y -2 .

$$\begin{array}{r|rrr} & a & 0 & b \\ 2 & & 2a & 4a \\ \hline & a & 2a & b+4a \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrr} & a & 0 & b \\ -2 & & -2a & 4a \\ \hline & a & -2a & b+4a \end{array}$$

Como $b = -4a$, cualquier par de números que lo cumpla formará un polinomio con esas raíces; por ejemplo, $a = 1$, y $b = -4$.

Polinomios y fracciones algebraicas

017 Obtén, utilizando el triángulo de Tartaglia, el desarrollo de estas potencias.

- a) $(x + y)^5$ c) $(2x - 2)^3$ e) $(3x^2 - y)^4$ g) $(x^2 - y^2)^5$
 b) $(x + 1)^4$ d) $(x - 24)^4$ f) $(x^2 - y)^5$ h) $(-x + 3y)^3$

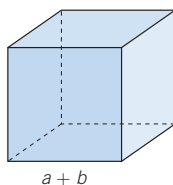
- a) Los coeficientes son 1, 5, 10, 10, 5 y 1.
 $(x + y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$
- b) Los coeficientes son 1, 4, 6, 4 y 1.
 $(x + 1)^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$
- c) Los coeficientes son 1, 3, 3 y 1.
 $(2x - 2)^3 = 8x^3 - 24x^2y + 24x - 8$
- d) Los coeficientes son 1, 4, 6, 4 y 1.
 $(x - 24)^4 = x^4 - 96x^3 + 3.456x^2 - 55.296x + 331.776$
- e) Los coeficientes son 1, 4, 6, 4 y 1.
 $(3x^2 - y)^4 = (3x^2)^4 + 4 \cdot (3x^2)^3 \cdot (-y) + 6 \cdot (3x^2)^2 \cdot (-y)^2 + 4 \cdot (3x^2) \cdot (-y)^3 + (-y)^4 = 81x^8 - 108x^6y + 54x^4y^2 - 12x^2y^3 + y^4$
- f) Los coeficientes son 1, 5, 10, 10, 5 y 1.
 $(x^2 - y)^5 = (x^2)^5 + 5 \cdot (x^2)^4 \cdot (-y) + 10 \cdot (x^2)^3 \cdot (-y)^2 + 10 \cdot (x^2)^2 \cdot (-y)^3 + 5 \cdot (x^2) \cdot (-y)^4 + (-y)^5 = x^{10} - 5x^8y + 10x^6y^2 - 10x^4y^3 + 5x^2y^4 - y^5$
- g) Los coeficientes son 1, 5, 10, 10, 5 y 1.
 $(x^2 - y^2)^5 = (x^2)^5 + 5 \cdot (x^2)^4 \cdot (-y^2) + 10 \cdot (x^2)^3 \cdot (-y^2)^2 + 10 \cdot (x^2)^2 \cdot (-y^2)^3 + 5 \cdot (x^2) \cdot (-y^2)^4 + (-y^2)^5 = x^{10} - 5x^8y^2 + 10x^6y^4 - 10x^4y^6 + 5x^2y^8 - y^{10}$
- h) Los coeficientes son 1, 3, 3 y 1.
 $(-x + 3y)^3 = (-x)^3 + 3 \cdot (-x)^2 \cdot 3y + 3 \cdot (-x) \cdot (3y)^2 + (3y)^3 = -x^3 - 9x^2y - 27xy^2 + 9y^3$

018 Completa el triángulo de Tartaglia hasta la décima fila.

				1						
				1	2	1				
			1	3	3	1				
		1	4	6	4	1				
	1	5	10	10	5	1				
	1	6	15	20	15	6	1			
	1	7	21	35	35	21	7	1		
	1	8	28	56	70	56	28	8	1	
	1	9	37	84	126	126	84	37	9	1
1	10	46	121	210	252	210	121	46	10	1

019 ¿Cuál es el volumen de este cubo?

Volumen: $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$



020 Halla un divisor de estos polinomios.

a) $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 6$

b) $Q(x) = x^4 - 4x^2 - x + 2$

c) $R(x) = x^6 - x^5 - 2x + 2$

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & -3 & 2 & -6 \\ & & 3 & 0 & 6 \\ \hline & 1 & 0 & 2 & 0 \end{array} \longrightarrow (x-3) \text{ es divisor de } P(x).$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & 0 & -4 & -1 & 2 \\ & & -1 & 1 & 3 & -2 \\ \hline & 1 & -1 & -3 & 2 & 0 \end{array} \longrightarrow (x+1) \text{ es divisor de } Q(x).$$

$$\begin{array}{r|rrrrrrr} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array} \longrightarrow (x-1) \text{ es divisor de } R(x).$$

021 Calcula a para que $x - 1$ sea divisor de $2x^3 - x^2 + 3x + a$.

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 2 & -1 & 3 & a \\ & & 2 & 1 & 4 \\ \hline & 1 & 1 & 4 & a+4 \end{array} \rightarrow a+4=0 \rightarrow a=-4$$

022 ¿Son correctos los cálculos?

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ & & -2 & 0 & -3 \\ \hline & 2 & 0 & 3 & 0 \end{array}$$

Así, tenemos que:

$$2x^3 + 2x^2 + 3x + 3 = (x-1) \cdot (2x+3)$$

Los cálculos no son correctos.

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ & & -2 & 0 & -3 \\ \hline & 2 & 0 & 3 & 0 \end{array} \rightarrow 2x^3 + 2x^2 + 3x + 3 = (x+1) \cdot (2x^2 + 3)$$

023 Descompón en factores estos polinomios.

a) $P(x) = x^3 - 8$

d) $P(x) = x^5 + 3x^4 - 9x^3 - 23x^2 - 12x$

b) $P(x) = x^3 + 4x^2 + 4x$

e) $P(x) = x^3 - 3x^2 - 25x - 21$

c) $P(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4$

f) $P(x) = x^5 - 9x^3$

a) $P(x) = x^3 - 8 = (x^2 + 2x + 4) \cdot (x - 2)$

b) $P(x) = x \cdot (x^2 + 4x + 4) = x \cdot (x + 2)^2$

c) $P(x) = (x + 1)^2 \cdot (x - 2)^2$

d) $P(x) = x \cdot (x^4 + 3x^3 - 9x^2 - 23x + 4) = x \cdot (x + 1)^2 \cdot (x - 3) \cdot (x + 4)$

e) $P(x) = (x + 1) \cdot (x + 3) \cdot (x - 7)$

f) $P(x) = x^3 \cdot (x^2 - 9) = x^3 \cdot (x + 3) \cdot (x - 3)$

Polinomios y fracciones algebraicas

024 Factoriza los siguientes polinomios y explica cómo lo haces.

a) $x^3 - 1$

b) $x^5 - 1$

c) $x^6 - 1$

a)
$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline & & & & 0 \end{array} \longrightarrow x^3 - 1 = (x - 1) \cdot (x^2 + x + 1)$$

b)
$$\begin{array}{r|rrrrrrr} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline & & & & & & 0 \end{array} \rightarrow x^5 - 1 = (x - 1) \cdot (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

c) $x^6 - 1 = (x^3 - 1) \cdot (x^3 + 1)$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline & & & & 0 \end{array} \longrightarrow x^3 - 1 = (x - 1) \cdot (x^2 + x + 1)$$

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ & & -1 & 1 & -1 \\ \hline & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \longrightarrow x^3 + 1 = (x + 1) \cdot (x^2 - x + 1)$$

$x^6 - 1 = (x - 1) \cdot (x^2 + x + 1) \cdot (x + 1) \cdot (x^2 - x + 1)$

025 Razona si son ciertas estas igualdades.

a) $x^3 + 9 = x \cdot (x + 3) \cdot (x + 3)$

b) $x^2 \cdot (x^2 + 1) = [x \cdot (x + 1)]^2$

a) Es falsa, porque $x \cdot (x + 3) \cdot (x + 3) = x^3 + 6x^2 + 9x$.

b) Es falsa, porque $[x \cdot (x + 1)]^2 = x^2 \cdot (x^2 + 2x + 1)$.

026 Simplifica estas fracciones algebraicas.

a) $\frac{2x - 2}{2x - 6}$

c) $\frac{x - 1}{x^2 - 1}$

e) $\frac{x^3 + 3x^2 - 4}{x^2 - 5x + 4}$

b) $\frac{x^2 - 1}{x^2 - 4x + 3}$

d) $\frac{2x^3 + 4x^2 + 2x}{6x^3 - 6x}$

f) $\frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1}$

a) $\frac{2x - 2}{2x - 6} = \frac{2 \cdot (x - 1)}{2 \cdot (x - 3)} = \frac{x - 1}{x - 3}$

b) $\frac{x^2 - 1}{x^2 - 4x + 3} = \frac{(x + 1) \cdot (x - 1)}{(x - 1) \cdot (x - 3)} = \frac{x + 1}{x - 3}$

c) $\frac{x - 1}{x^2 - 1} = \frac{x - 1}{(x + 1) \cdot (x - 1)} = \frac{1}{x + 1}$

d) $\frac{2x^3 + 4x^2 + 2x}{6x^3 - 6x} = \frac{2x \cdot (x + 1)^2}{6x \cdot (x + 1) \cdot (x - 1)} = \frac{x + 1}{3 \cdot (x - 1)}$

e) $\frac{x^3 + 3x^2 - 4}{x^2 - 5x + 4} = \frac{(x - 1) \cdot (x + 2)^2}{(x - 4) \cdot (x - 1)} = \frac{(x + 2)^2}{x - 4}$

f) $\frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1} = \frac{(x - 1) \cdot (x + 1)}{(x - 1)^2} = \frac{x + 1}{x - 1}$

027 Encuentra dos fracciones equivalentes y explica cómo lo haces.

a) $\frac{2x}{3x^2 - x}$

b) $\frac{x^4 - 1}{x^3 - x}$

Multiplicamos o dividimos el numerador y el denominador por el mismo factor.

a) $\frac{2x}{3x^2 - x} = \frac{2}{3x - 1} = \frac{6x^2}{9x^3 - 3x^2}$

b) $\frac{x^4 - 1}{x^3 - x} = \frac{x^2 + 1}{x} = \frac{x^5 - x}{x^4 - x^2}$

028 Pon dos ejemplos de fracciones que tengan polinomios, pero que no sean algebraicas.

Dos fracciones con polinomios no son algebraicas cuando el denominador es cero o es de grado cero.

$$\frac{3x + 1}{(x^2 - 1) - (x + 1) \cdot (x - 1)}$$

$$\frac{7x^5}{x \cdot (x + 1) - x^2 - x - 3}$$

029 Realiza las siguientes operaciones.

a) $\frac{x - 2}{x + 2} + \frac{2x}{x - 2}$

c) $\frac{x}{x^2 + 2} \cdot \frac{3x^2}{x - 1}$

b) $\frac{2x + 1}{x + 1} - \frac{x + 1}{x}$

d) $\frac{x - 1}{x^2 - x - 2} : \frac{x + 1}{x^2 - 2x}$

a) $\frac{x - 2}{x + 2} + \frac{2x}{x - 2} = \frac{(x - 2) \cdot (x - 2) + 2x \cdot (x + 2)}{(x + 2) \cdot (x - 2)} =$
 $= \frac{x^2 - 4x + 4 + 2x^2 + 4x}{x^2 - 4} = \frac{3x^2 + 4}{x^2 - 4}$

b) $\frac{2x + 1}{x + 1} - \frac{x + 1}{x} = \frac{x \cdot (2x + 1) - (x + 1) \cdot (x + 1)}{x \cdot (x + 1)} =$
 $= \frac{2x^2 + x - x^2 - 2x - 1}{x^2 + x} = \frac{x^2 - x - 1}{x^2 + x}$

c) $\frac{x}{x^2 + 2} \cdot \frac{3x^2}{x - 1} = \frac{x \cdot 3x^2}{(x^2 + 2) \cdot (x - 1)} = \frac{3x^3}{x^3 - x^2 + 2x - 2}$

d) $\frac{x - 1}{x^2 - x - 2} : \frac{x + 1}{x^2 - 2x} = \frac{(x - 1) \cdot (x^2 - 2x)}{(x^2 - x - 2) \cdot (x + 1)} =$
 $= \frac{(x - 1) \cdot x \cdot (x - 2)}{(x + 1) \cdot (x - 2) \cdot (x + 1)} = \frac{(x - 1) \cdot x}{(x + 1)^2}$

Polinomios y fracciones algebraicas

030 Opera y simplifica.

a) $\left(x + \frac{x}{3} + \frac{2x-5}{x}\right) \cdot \frac{x}{x+1}$

b) $\left(\frac{1}{x^2+3x} - \frac{5x}{x^2-9}\right) : \frac{2}{x^2+6x+9}$

a) $\left(\frac{3x^2}{3x} + \frac{x^2}{3x} + \frac{6x-15}{3x}\right) \cdot \frac{x}{x+1} = \frac{4x^2+6x-15}{3x} \cdot \frac{x}{x+1} =$
 $= \frac{(4x^2+6x-15) \cdot x}{3x \cdot (x+1)} = \frac{4x^2+6x-15}{3 \cdot (x+1)}$

b) $\left(\frac{1}{x \cdot (x+3)} - \frac{5x}{(x+3) \cdot (x-3)}\right) : \frac{2}{(x+3)^2} =$
 $= \frac{(x-3) - 5x^2}{x \cdot (x+3) \cdot (x-3)} : \frac{2}{(x+3)^2} = \frac{[(x-3) - 5x^2] \cdot (x+3)^2}{2x \cdot (x+3) \cdot (x-3)} =$
 $= \frac{(-5x^2 + x - 3) \cdot (x+3)}{2x \cdot (x-3)}$

031 ¿Por qué fracción algebraica hay que multiplicar $\frac{x^2-7}{x+2}$ para que dé $\frac{-x^3+7x}{x^2+4x+4}$?

$$\frac{-x^3+7x}{x^2+4x+4} = \frac{-x \cdot (x^2-7)}{(x+2)^2} = \frac{x^2-7}{x+2} \cdot \frac{-x}{x+2}$$

Hay que multiplicar por $\frac{-x}{x+2}$.

ACTIVIDADES

032 Halla el valor numérico del polinomio $P(x) = -x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 8x - 4$ para:

a) $x = 0$

c) $x = 2$

e) $x = -3$

b) $x = -\frac{1}{2}$

d) $x = -2$

f) $x = 2,5$

a) $P(0) = -4$

b) $P\left(-\frac{1}{2}\right) = -\left(-\frac{1}{2}\right)^4 + 5\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 7\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 8\left(-\frac{1}{2}\right) - 4 = \frac{-167}{16}$

c) $P(2) = -(2)^4 + 5 \cdot (2)^3 - 7 \cdot (2)^2 + 8 \cdot (2) - 4 = 8$

d) $P(-2) = -(-2)^4 + 5 \cdot (-2)^3 - 7 \cdot (-2)^2 + 8 \cdot (-2) - 4 = -104$

e) $P(-3) = -(-3)^4 + 5 \cdot (-3)^3 - 7 \cdot (-3)^2 + 8 \cdot (-3) - 4 = -307$

f) $P(2,5) = -(2,5)^4 + 5 \cdot (2,5)^3 - 7 \cdot (2,5)^2 + 8 \cdot (2,5) - 4 = 11,3125$

033 Razona si las siguientes igualdades son verdaderas o falsas.

a) $2x = x \cdot x$

b) $-(x^2 + x) = -x^2 - x$

c) $(2\sqrt{x})^4 = 4^2 x^2$

d) $-\frac{2x^2 - 4x}{2} = -x^2 - 2x$

e) $x^2 + x^3 = x^5$

f) $2x^2 \cdot 3x^3 = 5x^5$

g) $-x^2 = x^2$

h) $(x^2)^3 = x^6$

a) Falsa, ya que $2x = x + x$.

b) Verdadera.

c) Verdadera, pues se verifica que $(2\sqrt{x})^4 = 16x^2 = 4^2 x^2$.

d) Falsa, porque $-\frac{2x^2 - 4x}{2} = -(x^2 - 2x) = -x^2 + 2x$.

e) Falsa, ya que en la suma de potencias no se suman los exponentes.

f) Falsa, pues $2x^2 \cdot 3x^3 = 6x^5$.

g) Falsa.

h) Verdadera.

034 Dados los polinomios:

$$P(x) = -7x^4 + 6x^2 + 6x + 5$$

$$Q(x) = 3x^5 - 2x^2 + 2$$

$$R(x) = -x^5 + x^3 + 3x^2$$

calcula.

a) $P(x) + Q(x) + R(x)$

b) $P(x) - Q(x)$

c) $P(x) \cdot Q(x)$

d) $[P(x) - Q(x)] \cdot R(x)$

e) $[P(x) - R(x)] \cdot Q(x)$

a) $P(x) + Q(x) + R(x) = 2x^5 - 7x^4 + x^3 + 7x^2 + 6x + 7$

b) $P(x) - Q(x) = -3x^5 - 7x^4 + 8x^2 + 6x + 3$

c) $P(x) \cdot Q(x) =$
 $= -21x^9 + 18x^7 + 32x^6 + 15x^5 - 26x^4 - 12x^3 + 2x^2 + 12x + 10$

d) $[P(x) - Q(x)] \cdot R(x) = (-3x^5 - 7x^4 + 8x^2 + 6x + 3) \cdot (-x^5 + x^3 + 3x^2) =$
 $= 3x^{10} + 7x^9 - 3x^8 - 24x^7 - 27x^6 + 5x^5 + 30x^4 + 21x^3 + 9x^2$

e) $[P(x) - R(x)] \cdot Q(x) = (x^5 - 7x^4 - x^3 + 3x^2 + 6x + 5) \cdot (3x^5 - 2x^2 + 2) =$
 $= 3x^{10} - 21x^9 - 3x^8 + 7x^7 + 32x^6 + 19x^5 - 20x^4 - 14x^3 - 4x^2 + 12x + 10$

Polinomios y fracciones algebraicas

035 Opera y agrupa los términos de igual grado.

a) $\frac{3}{5}x^4 - 2x^3 + x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 2$ c) $\sqrt{45}x^3 - \sqrt{80}x^3 + \sqrt{5}x$

b) $\frac{2}{3}x + \frac{1}{5}x^2 - \frac{4}{3}x^2 - \frac{1}{6}x$ d) $\sqrt{28}x - \frac{\sqrt{7}}{7}$

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \frac{3}{5}x^4 - 2x^3 + x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 2 &= \left(\frac{3}{5} + 1\right)x^4 + \left(-2 - \frac{1}{3}\right)x^3 + 2 = \\ &= \frac{8}{5}x^4 - \frac{7}{3}x^3 + 2 \end{aligned}$$

$$\text{b)} \quad \frac{2}{3}x + \frac{1}{5}x^2 - \frac{4}{3}x^2 - \frac{1}{6}x = \left(\frac{1}{5} - \frac{4}{3}\right)x^2 + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{6}\right)x = -\frac{17}{15}x^2 + \frac{1}{2}x$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad \sqrt{45}x^3 - \sqrt{80}x^3 + \sqrt{5}x &= (\sqrt{45} - \sqrt{80})x^3 + \sqrt{5}x = \\ &= (3\sqrt{5} - 4\sqrt{5})x^3 + \sqrt{5}x = \sqrt{5} \cdot (-x^3 + x) \end{aligned}$$

$$\text{d)} \quad \sqrt{28}x - \frac{\sqrt{7}}{7} = 2\sqrt{7}x - \frac{\sqrt{7}}{7} = \sqrt{7} \cdot \left(2x - \frac{1}{7}\right)$$

036 Realiza las operaciones que se indican con los siguientes polinomios.

$$P(x) = 2x^3 + 6$$

$$Q(x) = x^2 - 2x + 3$$

$$R(x) = -2x^5 + x^2 - 1$$

a) $P(x) + Q(x) - R(x)$

b) $P(x) - [Q(x) - R(x)]$

c) $-[P(x) - [Q(x) + R(x)]]$

$$\text{a)} \quad P(x) + Q(x) - R(x) = 2x^5 + 2x^3 - 2x + 10$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad P(x) - [Q(x) - R(x)] &= (2x^3 + 6) - (2x^5 - 2x + 4) = \\ &= 2 \cdot (-x^5 + x^3 + x + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad -[P(x) - [Q(x) + R(x)]] &= -[(2x^3 + 6) - (-2x^5 + 2x^2 - 2x + 2)] = \\ &= -2x^5 - 2x^3 + 2x^2 - 2x - 4 \end{aligned}$$

037 Calcula.

a) $(4x^3 - 7x^3) - (6x^3 + 7x^3)$

d) $7x^3 \cdot (2x^2 \cdot 5x \cdot 3)$

b) $(4x + 5x) \cdot (2x - 7x)$

e) $(5x^6 : x^2) - (3x \cdot 2 \cdot x^3) + x^4$

c) $(6x^5 - 4x^5) : (8x^5 + 3x^5 - 9x^5)$

f) $(10x^{10} \cdot x^3) : (5x - 3x)$

$$\text{a)} \quad (4x^3 - 7x^3) - (6x^3 + 7x^3) = -3x^3 - 13x^3 = -16x^3$$

$$\text{b)} \quad (4x + 5x) \cdot (2x - 7x) = 9x \cdot (-5x) = -45x^2$$

$$\text{c)} \quad (6x^5 - 4x^5) : (8x^5 + 3x^5 - 9x^5) = 2x^5 : 2x^5 = 1$$

$$\text{d)} \quad 7x^3 \cdot (2x^2 \cdot 5x \cdot 3) = 7x^3 \cdot 30x^3 = 210x^6$$

$$\text{e)} \quad (5x^6 : x^2) - (3x \cdot 2 \cdot x^3) + x^4 = 5x^4 - 6x^4 + x^4 = 0$$

$$\text{f)} \quad (10x^{10} \cdot x^3) : (5x - 3x) = 10x^{13} : 2x = 5x^{12}$$

038 Determina el valor de a , b , c y d para que los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ sean iguales.

$$P(x) = x^3 - (a + 2) \cdot x + 2 - (9 + c) \cdot x^2$$

$$Q(x) = b + 5x - 2x^2 + \left(d + \frac{1}{4}\right) \cdot x^3 + 10x^2 - 2x + \frac{1}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} P(x) = x^3 - (9 + c)x^2 - (a + 2)x + 2 \\ Q(x) = \left(d + \frac{1}{4}\right)x^3 + 8x^2 + 3x + b + \frac{1}{2} \end{array} \right\} \rightarrow \begin{cases} d + \frac{1}{4} = 1 \rightarrow d = \frac{3}{4} \\ -(9 + c) = 8 \rightarrow c = -17 \\ -(a + 2) = 3 \rightarrow a = -5 \\ b + \frac{1}{2} = 2 \rightarrow b = \frac{3}{2} \end{cases}$$

039 Efectúa estas operaciones.

a) $(x^2 - 3x + 5) \cdot x^2 - x$

b) $(x^2 - x + 3) \cdot x^2 - 2x + (x - 4) \cdot (x + 5)$

c) $[(1 - x - x^2) \cdot (-1) - 3x] \cdot (8x + 7)$

d) $\left[\left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} - 3\right) \cdot \left(\frac{x}{3} - \frac{2}{5}\right) - \frac{1}{4}\right] \cdot x - 1$

e) $[x^2 + 1 - 6x \cdot (x - 4)] \cdot x - x \cdot (5x - 10)$

a) $x^4 - 3x^3 + 5x^2 - x$

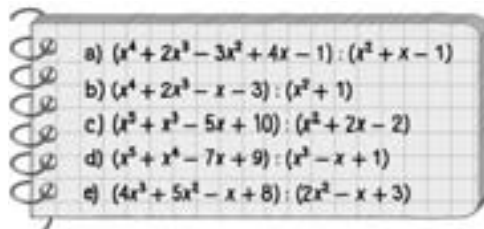
b) $x^4 - x^3 + 3x^2 - 2x + x^2 + x - 20 = x^4 - x^3 + 4x^2 - x - 20$

c) $(x^2 - 2x - 1) \cdot (8x - 7) = 8x^3 - 23x^2 + 6x + 7$

d) $\left(\frac{x^2 + 2x - 12}{4} \cdot \frac{5x - 6}{10} - \frac{1}{4}\right) \cdot x - 1 =$
 $= \left(\frac{5x^3 + 4x^2 - 72x + 62}{40}\right) \cdot x - 1 = \frac{5x^4 + 4x^3 - 72x^2 + 62x - 40}{40}$

e) $(-5x^2 + 24x + 1) \cdot x - 5x^2 + 10x = -5x^3 + 24x^2 + x - 5x^2 + 10x =$
 $= -5x^3 + 19x^2 + 11x$

040 Realiza las siguientes divisiones.



a) Cociente: $x^2 + x + 5$
 Resto: $-2x - 6$

b) Cociente: $x^2 + 2x - 1$
 Resto: $-3x - 2$

c) Cociente: $x^3 - 3x^2 + 9x - 35$
 Resto: $83x - 60$

d) Cociente: $x^2 + x + 1$
 Resto: $-7x + 8$

e) Cociente: $2x + \frac{7}{2}$
 Resto: $-\frac{7}{2}x - \frac{5}{2}$

Polinomios y fracciones algebraicas

041



Halla el polinomio $Q(x)$ por el que hay que dividir

a $P(x) = x^4 - x^3 - 4x^2 + x - 2$, para que el cociente

sea $C(x) = x^2 + x - 3$ y el resto sea $R(x) = -6x + 1$.

$$Q(x) = [P(x) - R(x)] : C(x) = (x^4 - x^3 - 4x^2 + 7x - 3) : (x^2 + x - 3) = x^2 - 2x + 1$$

042



Si en una división de polinomios el grado del dividendo es 6 y el del divisor es 3, ¿cuál es el grado del cociente y del resto? Razona la respuesta.

El grado del cociente es la diferencia que hay entre el grado del dividendo y el grado del divisor, y el grado del resto es siempre menor que el grado del divisor.

Cociente: grado 3

Resto: grado menor que 3

043



Realiza, aplicando la regla de Ruffini.

a) $(x^5 - x^3 + x^2 - x^4 + 3x - 7) : (x - 2)$

b) $(x^4 + 2x^2 - x - 3) : (x + 1)$

c) $(2x^4 - x^3 - x^2 + x + 3) : (x - 3)$

d) $(x^3 - 8x + x^2 - 7) : (x + 2)$

e) $(x^3 - 4x^2 + 6x - 9) : (x + 4)$

a)

2	1	-1	-1	1	3	-7
		2	2	2	6	18
	1	1	1	3	9	11

 → Cociente: $x^4 + x^3 + x^2 + 3x + 9$
Resto: 11

b)

-1	1	0	2	-1	-3
		-1	1	-3	4
	1	-1	3	-4	1

 → Cociente: $x^3 - x^2 + 3x - 4$
Resto: 1

c)

3	2	-1	-1	1	3
		6	15	42	129
	2	5	14	43	132

 → Cociente: $2x^3 + 5x^2 + 14x + 43$
Resto: 132

d)

-2	1	1	-8	-7
		-2	2	12
	1	-1	-6	5

 → Cociente: $x^2 - x - 6$
Resto: 5

e)

-4	1	-4	6	-9
		-4	32	-152
	1	-8	38	-161

 → Cociente: $x^2 - 8x + 38$
Resto: -161

044 Completa estas divisiones y escribe los polinomios dividendo, divisor, cociente y resto.

$$\begin{array}{r|rrrr} a) & 3 & 4 & 0 & 1 \\ -1 & & -3 & -1 & 1 \\ \hline & 3 & 1 & -1 & 2 \end{array}$$

Dividendo: $3x^3 + 4x^2 + 1$

Divisor: $x + 1$

Cociente: $3x^2 + x - 1$

Resto: 2

$$\begin{array}{r|rrrr} c) & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & & 2 & 4 & 6 \\ \hline & 1 & 2 & 3 & 8 \end{array}$$

Dividendo: $x^3 - x + 2$

Divisor: $x - 2$

Cociente: $x^2 + 2x + 3$

Resto: 8

$$\begin{array}{r|rrrr} b) & 4 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & & -4 & 1 & -3 \\ \hline & 4 & -1 & 3 & -2 \end{array}$$

Dividendo: $4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$

Divisor: $x + 1$

Cociente: $4x^2 - x + 3$

Resto: -2

$$\begin{array}{r|rrrr} d) & -2 & 0 & 0 & -3 \\ -4 & & 8 & -32 & 128 \\ \hline & -2 & 8 & -32 & 125 \end{array}$$

Dividendo: $-2x^3 - 3$

Divisor: $x + 4$

Cociente: $-2x^2 + 8x - 32$

Resto: 125

045 Halla el valor de m para que las divisiones sean exactas.

a) $(x^2 - 12x + m) : (x + 4)$

d) $(x^3 - 2 \cdot (m + 1) \cdot x^2 + m) : (x + 1)$

b) $(x^3 + 2x^2 + 8x + m) : (x - 2)$

e) $(x^3 + mx^2 + 2x - 10) : (x - 5)$

c) $(x^3 - x^2 + 2mx - 12) : (x - 6)$

$$\begin{array}{r|rrrr} a) & 1 & -12 & m & \\ -4 & & -4 & 64 & \\ \hline & 1 & -16 & m+64 & \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} m+64=0 \\ \rightarrow m=-64 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} b) & 1 & 2 & 8 & m \\ 2 & & 2 & 8 & 32 \\ \hline & 1 & 4 & 16 & m+32 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} m+32=0 \\ \rightarrow m=-32 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} c) & 1 & -1 & 2m & -12 \\ 6 & & 6 & 30 & 12m+180 \\ \hline & 1 & 5 & 2m+30 & 12m+168 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} 12m+168=0 \\ \rightarrow m=-14 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} d) & 1 & -2(m+1) & 0 & m \\ -1 & & -1 & 2m+3 & -2m-3 \\ \hline & 1 & -2m-3 & 2m+3 & -m-3 \end{array} \longrightarrow -m-3=0 \rightarrow m=-3$$

$$\begin{array}{r|rrrr} e) & 1 & m & 2 & -10 \\ 5 & & 5 & 5m+25 & 25m+135 \\ \hline & 1 & m+5 & 5m+27 & 25m+125 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} 25m+125=0 \\ \rightarrow m=-\frac{125}{25}=-5 \end{array}$$

Polinomios y fracciones algebraicas

046 Obtén el valor de m para que las divisiones tengan el resto indicado.



a) $(x^5 + 6x^3 + mx + 17) : (x + 1) \rightarrow$ Resto 2

b) $(2mx^3 - 3mx^2 + 8m) : (x - 2) \rightarrow$ Resto -4

$$\begin{array}{r|rrrrrr} \text{a)} & 1 & 0 & 6 & 0 & m & 17 \\ & -1 & & -1 & 1 & -7 & 7 \\ \hline & 1 & -1 & 7 & -7 & m+7 & -m-7 \end{array} \rightarrow -m+10=2$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & 6 & 0 \\ & -1 & & -1 & 1 \\ \hline & 1 & -1 & 7 & -7 \end{array} \rightarrow m+7 \quad \boxed{-m+10} \rightarrow m=8$$

$$\begin{array}{r|rrrr} \text{b)} & 2m & -3m & 0 & 8m \\ & 2 & & 4m & 2m & 4m \\ \hline & 2m & m & 2m & 12m \end{array} \rightarrow 12m = -4 \rightarrow m = -\frac{1}{3}$$

047 HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE APLICA LA REGLA DE RUFFINI CUANDO EL DIVISOR ES DEL TIPO $(ax - b)$?

Efectúa esta división por la regla de Ruffini.

$$(x^2 + 2x - 3) : (2x - 6)$$

PRIMERO. Se divide el polinomio divisor, $ax - b$, entre a .

$$(x^2 + 2x - 3) : (2x - 6) \xrightarrow{(2x-6):2} (x^2 + 2x - 3) : (x - 3)$$

SEGUNDO. Se aplica la regla de Ruffini con el nuevo divisor.

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & 2 & -3 \\ 3 & & 3 & 15 \\ \hline & 1 & 5 & 12 \end{array} \rightarrow C(x) = x + 5$$

TERCERO. El cociente de la división inicial será el cociente de esta división dividido entre el número por el que se ha dividido el divisor inicial.

$$\text{Cociente: } x + 5 \xrightarrow{:2} \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

El resto no varía. Resto: 12.

048 Calcula, utilizando la regla de Ruffini, las siguientes divisiones.



a) $(x^5 + 1) : (2x + 4)$

b) $(x^4 - 5x^2 + 2) : (5x - 10)$

$$\text{a)} (x^5 + 1) : (2x + 4) \xrightarrow{(2x+4):2} (x^5 + 1) : (x + 2)$$

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & & -2 & 4 & -8 & 16 & -32 \\ \hline & 1 & -2 & 4 & -8 & 16 & -31 \end{array}$$

$$\text{Cociente: } x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16 \xrightarrow{:2} \frac{1}{2}x^4 - x^3 + 2x^2 - 4x + 8$$

Resto: -31

$$\text{b)} (x^4 - 5x^2 + 2) : (5x - 10) \xrightarrow{(5x-10):5} (x^4 - 5x^2 + 2) : (x - 2)$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -5 & 0 & 2 \\ 2 & & 2 & 4 & -2 & -4 \\ \hline & 1 & 2 & -1 & -2 & -2 \end{array}$$

$$\text{Cociente: } x^3 + 2x^2 - x - 2 \xrightarrow{:5} \frac{1}{5}x^3 + \frac{2}{5}x^2 - \frac{1}{5}x - \frac{2}{5}$$

Resto: -2

049 Utiliza el teorema del resto para calcular estos valores numéricos.

a) $P(x) = x^2 + 2x - 7$, para $x = 1$

b) $P(x) = x^3 + 5x^2 - 6x + 7$, para $x = -2$

c) $P(x) = x^4 - 2$, para $x = -1$

d) $P(x) = x^4 - 4x + x^2 - 13$, para $x = 3$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 2 & -7 & \\ 1 & & 1 & 3 & \\ \hline & 1 & 3 & -4 & \end{array} \longrightarrow P(1) = -4$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 5 & -6 & 7 & \\ -2 & & -2 & -6 & 24 & \\ \hline & 1 & 3 & -12 & 31 & \end{array} \longrightarrow P(-2) = 31$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ -1 & & -1 & 1 & -1 & 1 \\ \hline & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{array} \longrightarrow P(-1) = -1$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & 1 & -4 & -13 \\ 3 & & 3 & 9 & 30 & 78 \\ \hline & 1 & 3 & 10 & 26 & 65 \end{array} \longrightarrow P(3) = 65$$

050 HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE CALCULA EL RESTO DE LAS DIVISIONES CON DIVISOR $(x - a)$?

Calcula, sin realizar la división, el resto de:

$$(2x^4 - 3x^2 + x - 1) : (x - 2)$$

PRIMERO. Se calcula el valor numérico del dividendo cuando x toma el valor del término independiente del divisor, cambiado de signo.

$$P(2) = 2 \cdot 2^4 - 3 \cdot 2^2 + 2 - 1 = 32 - 12 + 2 - 1 = 21$$

SEGUNDO. Según el teorema del resto, este es el resto de la división.

El resto que obtenemos al efectuar la división es $R = 21$.

051 Calcula el resto sin hacer las divisiones.

a) $(x^6 - x^5 + x^4 - 3x^2 + x - 2) : (x - 2)$

b) $(x^4 - x^3 + 6x + 3) : (x + 1)$

c) $(2x^3 - x^2 + 7x - 9) : (x - 3)$

d) $(5x^4 + 7x^3 - 4x + 2) : (x + 2)$

a) $P(2) = 2^6 - 2^5 + 2^4 - 3 \cdot 2^2 + 2 - 2 = 36 \longrightarrow$ Resto: 36

b) $P(-1) = (-1)^4 - (-1)^3 + 6 \cdot (-1) + 3 = -1 \longrightarrow$ Resto: -1

c) $P(3) = 2 \cdot 3^3 - 3^2 + 7 \cdot 3 - 9 = 57 \longrightarrow$ Resto: 57

d) $P(-2) = 5 \cdot (-2)^4 + 7 \cdot (-2)^3 - 4 \cdot (-2) + 2 = 34 \rightarrow$ Resto: 34

Polinomios y fracciones algebraicas

052 Halla el resto de esta división.



$$(x^{200} + 1) : (x + 1)$$

$$P(-1) = (-1)^{200} + 1 = 2 \rightarrow \text{Resto: } 2$$

053 Responde razonadamente si es verdadero o falso.



a) Si $P(-2) = 0$, entonces $P(2) = 0$.

b) Si el resto de $P(x) : (x + 2)$ es 3, resulta que $P(3) = 0$.

a) Falso, por ejemplo, en $P(x) = x + 2$, $P(-2) = 0$ y $P(2) = 4$.

b) Falso. Al ser el resto 3, sabemos que $P(-2) = 3$, pero no nos aporta más información.

054 Comprueba si $x = 3$ y $x = 2$ son raíces del polinomio



$$P(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12.$$

Como $P(3) = 60$, $x = 3$ no es raíz.

Como $P(2) = 0$, $x = 2$ es raíz del polinomio.

055 Comprueba que una raíz de $P(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$ es $x = 1$.



Como $P(1) = 0$, $x = 1$ es raíz del polinomio.

056 Calcula las raíces de estos polinomios.



a) $x^3 - 9x^2 + 26x - 24$

e) $x^2 - x - 2$

b) $x^3 - 2x^2 - 3x$

f) $x^2 + x$

c) $x^4 - x^2 - x + 1$

g) $4x^2 - 2x$

d) $x^3 + x^2 - 9x - 9$

h) $x^2 - 4x + 4$

a) Raíces: $x = 2, x = 3, x = 4$

e) Raíces: $x = -1, x = 2$

b) Raíces: $x = 0, x = -1, x = 3$

f) Raíces: $x = -1, x = 0$

c) Raíz: $x = 1$

g) Raíces: $x = 0, x = \frac{1}{2}$

d) Raíces: $x = -1, x = -3, x = 3$

h) Raíz doble: $x = 2$

057 Observando el dividendo y el divisor, señala cuáles de estas divisiones no son exactas.



a) $(x^3 - 3x^2 + 7x - 8) : (x + 2)$

c) $(x^4 - 9) : (x - 5)$

b) $(x^2 + 4x - 5) : (x - 7)$

d) $(x^3 + 16x^2 + 19x + 21) : (x + 4)$

¿Puedes asegurar que las otras divisiones son exactas?

No son exactas las divisiones de los apartados b), c) y d).

Sin hacer más operaciones no es posible asegurar si la división del apartado a) es exacta o no.

058 HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE CALCULA UN POLINOMIO, CONOCIDAS SUS RAÍCES Y EL COEFICIENTE DEL TÉRMINO DE MAYOR GRADO?

Escribe el polinomio cuyas raíces son 1, 1, 2 y -3, y el coeficiente del término de mayor grado es 5.

PRIMERO. Los divisores del polinomio buscado serán de la forma $(x - a)$, donde a es cada una de las raíces.

Los divisores del polinomio serán:

$$(x - 1), (x - 2) \text{ y } (x + 3)$$

SEGUNDO. Se efectúa el producto de los monomios, multiplicando cada uno tantas veces como aparece la raíz.

$$(x - 1) \cdot (x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x + 3)$$

TERCERO. Se multiplica por el coeficiente del término de mayor grado.

$$P(x) = 5 \cdot (x - 1) \cdot (x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x + 3)$$

$$P(x) = 5x^4 - 5x^3 - 35x^2 + 65x - 30$$

059 ¿Qué polinomios tienen estas raíces y coeficientes de mayor grado?

a) $x = 1$, $x = -2$, $x = 3$ y coeficiente -4.

b) $x = 2$ (raíz doble) y coeficiente 2.

c) $x = -2$, $x = -3$ y coeficiente -1.

$$\text{a) } P(x) = -4 \cdot (x - 1) \cdot (x + 2) \cdot (x - 3) = -4x^3 + 8x^2 + 20x - 24$$

$$\text{b) } P(x) = 2 \cdot (x - 2)^2 = 2x^2 - 8x + 8$$

$$\text{c) } P(x) = -1 \cdot (x + 2) \cdot (x + 3) = -x^2 - 5x - 6$$

060 Efectúa.

$$\text{a) } (3x + 4)^2 \quad \text{b) } \left(4x - \frac{2}{3}\right)^2 \quad \text{c) } (2x - 3)^3 \quad \text{d) } (x^2 - 2x)^3$$

$$\text{a) } 9x^2 + 24x + 16$$

$$\text{c) } 8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$$

$$\text{b) } 16x^2 + \frac{16}{3}x + \frac{4}{9}$$

$$\text{d) } x^6 - 6x^5 + 12x^4 - 8x^3$$

061 Desarrolla las siguientes potencias.

$$\text{a) } (x^2 + x + 2)^2 \quad \text{b) } (2x^2 - 3x - 1)^2 \quad \text{c) } (3x^2 + x - 2)^3 \quad \text{d) } \left(\frac{x^2}{3} - \frac{x}{5} + 1\right)^3$$

$$\text{a) } x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 4x + 4$$

$$\text{b) } 4x^4 - 12x^3 + 5x^2 + 6x + 1$$

$$\text{c) } 27x^6 + 27x^5 - 45x^4 - 35x^3 + 30x^2 + 12x - 8$$

$$\text{d) } \frac{x^6}{27} - \frac{x^3}{125} + 1 - \frac{x^5}{15} + \frac{x^4}{3} + \frac{x^4}{25} + \frac{3x^2}{25} + x^2 - \frac{3x}{5} + \frac{2x^3}{5} =$$

$$= \frac{x^6}{27} - \frac{x^5}{15} + \frac{28x^4}{75} + \frac{51x^3}{125} + \frac{28x^2}{25} - \frac{3x}{5} + 1$$

Polinomios y fracciones algebraicas

062 Efectúa y reduce términos semejantes.



a) $(x + 2)^4 + (x - 2)^2$

c) $(5x - 6)^2 + (x - 1)^3$

b) $(2x - 3)^3 - (x^2 + 4)^2$

d) $(3x + 5)^3 - (4x - 2)^3$

a) $(x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16) + (x^2 - 4x + 4) = x^4 + 8x^3 + 25x^2 + 28x + 20$

b) $(8x^3 - 36x^2 + 54x - 27) - (x^4 + 8x^2 + 16) = -x^4 + 8x^3 - 44x^2 + 5x - 43$

c) $25x^2 - 60x + 36 + x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = x^3 + 22x^2 - 57x + 35$

d) $(27x^3 + 135x^2 + 225x + 27) - (64x^3 - 96x^2 + 48x - 8) =$
 $= -37x^3 + 231x^2 + 177x + 35$

063 Indica si las igualdades son verdaderas o falsas. Razona la respuesta.



a) $(6x + 5)^4 - (6x + 5)^2 = (6x + 5)^2 \cdot (6x + 5)^2 - 1$

b) $(3x + 4)^4 - (3x + 4)^3 = (3x + 4)^3 \cdot (3x + 3)$

c) $(2x - 3)^2 - (4x + 2)^2 = (6x - 1) \cdot (-2x - 5)$

d) $(4x - 2)^3 = 8 \cdot (2x - 1)^3$

e) $(8x^2 + 4x)^2 = 4x^2 \cdot (2x + 1)^2$

a) $(6x + 5)^2[(6x + 5)^2 - 1] \neq (6x + 5)^2 \cdot (6x + 5)^2 - 1 \rightarrow$ Falsa

b) $(3x + 4)^3[(3x + 4) - 1] = (3x + 4)^3 \cdot (3x + 3) \rightarrow$ Verdadera

c) $4x^2 - 12x + 9 - 16x^2 - 16x - 4 = -12x^2 - 30x + 2x + 5 \rightarrow$ Verdadera

d) $(4x - 2)^3 = 2^3(2x - 1)^3 \rightarrow$ Verdadera

e) $(4x)^2(2x + 1)^2 \neq 4x^2(2x + 1)^2 \rightarrow$ Falsa

064 Señala cuáles de los siguientes polinomios son el cuadrado de un binomio, e indícalo.



a) $25x^2 - 70x + 49$

d) $x^6 - 4x^3 + 4$

b) $x^4 - 6x^3 + 9x^2$

e) $4x^4 - 16x^2 - 16$

c) $x^6 + 4x^3 + 4$

f) $9x^4 + 12x^3 + 4$

a) $(5x - 7)^2$

d) $(x^3 - 2)^2$

b) $(x^2 - 3x)^2$

e) No es el cuadrado de un binomio.

c) $(x^3 + 2)^2$

f) No es el cuadrado de un binomio.

065 Añade los términos necesarios a cada polinomio para que sea el cuadrado de un binomio.



a) $25x^2 + 4$

d) $x^6 - 4x^3$

b) $49x^2 + 36$

e) $9x^4 - 24x^3$

c) $x^4 + 10x^3$

f) $x^8 + x^2$

a) $25x^2 \pm 20x + 4$

d) $x^6 - 4x^3 + 4x^2$

b) $49x^2 \pm 84x + 36$

e) $9x^4 - 24x^3 + 16x^2$

c) $x^4 + 10x^3 + 25x^2$

f) $x^8 + 2x^5 + x^2$

066 Descompón en factores los siguientes polinomios, sacando factor común.

- | | |
|--------------------------|--------------------------|
| a) $8x^3 - 4x$ | d) $x^6 - 4x^3$ |
| b) $18x^3 + 14x^2$ | e) $x^3 + 7x^2$ |
| c) $9x^2 + 12x$ | f) $x^4 - x^3$ |
| a) $4x \cdot (2x^2 - 1)$ | d) $x^3 \cdot (x^3 - 4)$ |
| b) $2x^2 \cdot (9x + 7)$ | e) $x^2 \cdot (x + 7)$ |
| c) $3x \cdot (3x + 4)$ | f) $x^3 \cdot (x - 1)$ |

067 Factoriza estos polinomios, aplicando las igualdades notables.

- | | |
|------------------------|------------------------------|
| a) $x^2 + 2x + 1$ | d) $x^2 - 4$ |
| b) $x^2 + 10x + 25$ | e) $4x^2 - 16$ |
| c) $4x^4 - 16x^2 + 16$ | f) $x^3 - 9x^2 + 27x - 27$ |
| a) $(x + 1)^2$ | d) $(x + 2) \cdot (x - 2)$ |
| b) $(x + 5)^2$ | e) $(2x + 4) \cdot (2x - 4)$ |
| c) $(2x^2 - 4)^2$ | f) $(x - 3)^3$ |

068 Factoriza los siguientes polinomios.

- | | |
|----------------------------|--|
| a) $x^2 + 5x + 6$ | e) $x^3 - 13x + 12$ |
| b) $x^2 + x - 12$ | f) $x^3 - 5x^2 - x + 5$ |
| c) $x^2 + 11x + 24$ | g) $x^3 + 4x^2 - 11x - 30$ |
| d) $x^2 + 2x - 24$ | h) $x^3 + 8x^2 - 32x - 60$ |
| a) $(x + 3) \cdot (x + 2)$ | e) $(x - 3) \cdot (x - 1) \cdot (x + 4)$ |
| b) $(x - 3) \cdot (x + 4)$ | f) $(x - 5) \cdot (x - 1) \cdot (x + 1)$ |
| c) $(x + 3) \cdot (x + 8)$ | g) $(x + 2) \cdot (x - 3) \cdot (x + 5)$ |
| d) $(x + 6) \cdot (x - 4)$ | h) No es posible |

069 Descompón factorialmente.

- | | |
|--|-------------------------------|
| a) $x^3 + x^2 - 6$ | e) $x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 12x$ |
| b) $x^4 - x^2$ | f) $x^5 - x^4 - 19x^3 + 4x^2$ |
| c) $2x^2 - 3x^3$ | g) $18x^3 + 48x^2 + 32x$ |
| d) $3x^2 + 12x + 12$ | h) $48x^2 + 24x + 3$ |
| a) No es posible | |
| b) $x^2 \cdot (x + 1) \cdot (x - 1)$ | |
| c) $x^2 \cdot (2 - 3x)$ | |
| d) $3 \cdot (x + 2)^2$ | |
| e) $x \cdot (x + 3) \cdot (x - 1) \cdot (x - 4)$ | |
| f) $x^2 \cdot (x + 4) \cdot (x^2 - 5x + 1)$ | |
| g) $2x \cdot (3x + 4)^2$ | |
| h) $3 \cdot (4x + 1)^2$ | |

Polinomios y fracciones algebraicas

070 Escribe como producto de factores.

a) $7x^3 + 7x^2 + \frac{7}{4}x$

b) $x^4 - \frac{5}{2}x^3 + \frac{1}{25}x^2$

c) $(2x + 1)^2 - (4x - 3)^2$

d) $(x - 2)^2 - 16x^4$

a) $7x \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$

b) $x^2 \cdot \left(x^2 - \frac{2}{5}x + \frac{1}{25}\right) = x^2 \cdot \left(x + \frac{1}{5}\right)^2$

c) $[(2x + 1) + (4x - 3)] \cdot [(2x + 1) - (4x - 3)] = (6x - 2) \cdot (-2x + 4) =$
 $= 4 \cdot (3x - 1) \cdot (-x + 2)$

d) $[(x - 2) + 4] \cdot [(x - 2) - 4] = (x + 2) \cdot (x - 6)$

071 Escribe tres polinomios de grado 2 y otros tres de grado 3, que sean divisores de:

a) $P(x) = x^4 + x^3 - 30x^2$

b) $P(x) = x^4 - 6x^3 - 7x^2$

a) $P(x) = x^2(x + 6)(x - 5)$ Grado 2:

$$x^2$$

$$x^2 + 6x$$

$$x^2 - 5x$$

Grado 3:

$$x^3 + 6x^2$$

$$x^3 - 5x^2$$

$$x^3 + x^2 - 30x$$

b) $P(x) = x^2(x + 1)(x - 7)$ Grado 2:

$$x^2$$

$$x^2 + x$$

$$x^2 - 7x$$

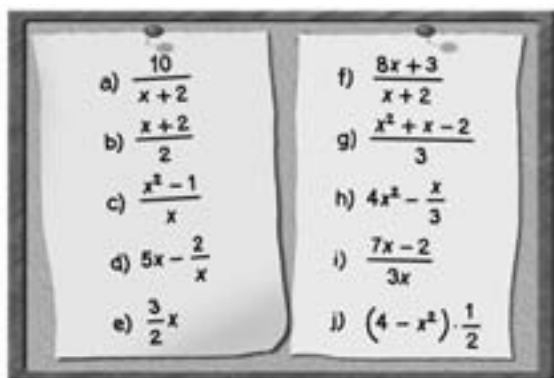
Grado 3:

$$x^3 + x^2$$

$$x^3 - 7x^2$$

$$x^3 - 6x^2 - x$$

072 Indica cuáles de las siguientes expresiones son fracciones algebraicas.



Son fracciones algebraicas las expresiones de: a), c), d), f) e i).

073 Escribe tres fracciones algebraicas equivalentes a:

a) $\frac{x}{x-2}$

c) $\frac{1}{x}$

e) $\frac{x^2+1}{x}$

b) $\frac{x}{x^2+10}$

d) $\frac{x+3}{x-5}$

f) $\frac{x-6}{x^3}$

a) $\frac{x}{x-2} = \frac{x^2}{x^2-2x} = \frac{x^2-2x}{(x-2)^2} = \frac{x^4}{x^4-2x^3}$

b) $\frac{x}{x^2+10} = \frac{x^2}{x^3+10x} = \frac{x \cdot (x+1)}{(x^2+10) \cdot (x+1)} = \frac{x \cdot (x+2)^2}{(x^2+10) \cdot (x+2)^2}$

c) $\frac{1}{x} = \frac{x}{x^2} = \frac{x+1}{x^2+x} = \frac{x-2}{x^2+2x}$

d) $\frac{x+3}{x-5} = \frac{x^2+3x}{x^2-5x} = \frac{x^2+6x+9}{x^2-2x+15} = \frac{x^2-2x+15}{x^2-50x+25}$

e) $\frac{x^2+1}{x} = \frac{x^3+x}{x^2} = \frac{3x^2+3}{3x} = \frac{x^4-1}{x^3-x}$

f) $\frac{x-6}{x^3} = \frac{x^2-6x}{x^4} = \frac{8x-48}{8x^3} = \frac{x^2-12x+36}{x^4-6x^3}$

074 Averigua si los siguientes pares de fracciones algebraicas son equivalentes.

a) $\frac{x+2}{x-3}$ y $\frac{x^2+2x}{x^2-3x}$

c) $\frac{x-1}{x+4}$ y $\frac{x^2+x-2}{x^2-4x+3}$

b) $\frac{x}{x^2-5}$ y $\frac{x^2+x}{x^3-5}$

d) $\frac{x-3}{x^2}$ y $\frac{x^3-3x^2}{x^3+2x^2}$

Solo es equivalente el par de fracciones del apartado a).

075 Halla el valor de $P(x)$ para que las fracciones sean equivalentes.

a) $\frac{x+1}{x} = \frac{P(x)}{x^2-2x}$

c) $\frac{P(x)}{x} = \frac{x^2-16}{x^2-4x}$

b) $\frac{x+4}{x-3} = \frac{x^3+4x^2-x-4}{P(x)}$

d) $\frac{x^2-10}{P(x)} = \frac{x^3+8x^2-10x-80}{x^2+13x+40}$

a) $P(x) = \frac{(x+1) \cdot (x^2-2x)}{x} = (x+1) \cdot (x-2) = x^2-x-2$

b) $P(x) = \frac{(x-3) \cdot (x^3+4x^2-x-4)}{x+4} = (x-3) \cdot (x^2-1) = x^3-3x^2-x+3$

c) $P(x) = \frac{x \cdot (x^2-16)}{x^2-4x} = x+4$

d) $P(x) = \frac{(x^2-10) \cdot (x^2+13x+40)}{x^3+8x^2-10x-80} = x+5$

Polinomios y fracciones algebraicas

076

¿Cuánto debe valer a para que las fracciones algebraicas sean equivalentes?

a) $\frac{5x}{2x-6} = \frac{5x^2+ax}{2x^2+2x-24}$

b) $\frac{3x-2}{x^2+4} = \frac{38x^2-2x-35}{x^3-x^2+4x-a}$

c) $\frac{x-a}{x+2} = \frac{x^2-2x-35}{x^2+7x+10}$

d) $\frac{x-8}{x+a} = \frac{x^2-10x+16}{x^2+x-6}$

a) $a = 20$

c) $a = 7$

b) Sin solución

d) $a = 3$

077

Simplifica las siguientes fracciones algebraicas.

a) $\frac{8x^3}{24x^4}$

c) $\frac{-6x^3yz}{18xy^3z}$

b) $\frac{(2x)^4}{(4x^2)^3}$

d) $\frac{(x^2y^4)^{-3}}{(x^4y^3)^{-2}}$

a) $\frac{8x^3}{24x^4} = \frac{1}{3x}$

c) $\frac{-6x^3yz}{18xy^3z} = \frac{-x^2}{3y^2}$

b) $\frac{(2x)^4}{(4x^2)^3} = \frac{1}{4x^2}$

d) $\frac{(x^2y^4)^{-3}}{(x^4y^3)^{-2}} = \frac{x^2}{y^6}$

078

Simplifica estas fracciones algebraicas.

a) $\frac{x+1}{x^2-1}$

e) $\frac{x^2-4x+3}{x^3-6x^2+11x-6}$

b) $\frac{x^2-4}{x^2-4x+2}$

f) $\frac{x^2-3x+2}{x^2-x-2}$

c) $\frac{x^2-1}{x-1}$

g) $\frac{x^4+x^3+x^2}{3x^2+3x+3}$

d) $\frac{x^2-x}{x^3-x^2}$

h) $\frac{x^3-12x+16}{x^3-10x^2+32x-32}$

a) $\frac{x+1}{x^2-1} = \frac{1}{x-1}$

e) $\frac{x^2-4x+3}{x^3-6x^2+11x-6} = \frac{1}{x-2}$

b) $\frac{x^2-4}{x^2-4x+2} = \frac{x+2}{x-2}$

f) $\frac{x^2-3x+2}{x^2-x-2} = \frac{x-1}{x+1}$

c) $\frac{x^2-1}{x-1} = x+1$

g) $\frac{x^4+x^3+x^2}{3x^2+3x+3} = \frac{x^2}{3}$

d) $\frac{x^2-x}{x^3-x^2} = \frac{1}{x}$

h) $\frac{x^3-12x+16}{x^3-10x^2+32x-32} = \frac{(x-2)(x+4)}{(x-4)^2}$

079 HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE REDUCEN FRACCIONES ALGEBRAICAS A COMÚN DENOMINADOR?

Reduce a común denominador estas fracciones algebraicas.

$$\frac{2}{x-2} \quad \frac{3}{x^2-4} \quad \frac{4}{x^2+4x+4}$$

PRIMERO. Se factorizan los denominadores.

$$x-2 = x-2$$

$$x^2-4 = (x+2) \cdot (x-2)$$

$$x^2+4x+4 = (x+2)^2$$

SEGUNDO. Se calcula el mínimo común múltiplo, que estará formado por los factores comunes y no comunes elevados al mayor exponente.

$$\text{m.c.m. } (x-2, x^2-4, x^2+4x+4) = (x+2)^2 \cdot (x-2)$$

TERCERO. Se divide el denominador entre el m.c.m., y el resultado se multiplica por el numerador.

$$\frac{2}{x-2} = \frac{2 \cdot (x+2)^2}{(x+2)^2 \cdot (x-2)} = \frac{2x^2+8x+8}{(x+2)^2 \cdot (x-2)}$$

$$\frac{3}{x^2-4} = \frac{3 \cdot (x+2)}{(x+2)^2 \cdot (x-2)} = \frac{3x+6}{(x+2)^2 \cdot (x-2)}$$

$$\frac{4}{x^2+4x+4} = \frac{4 \cdot (x-2)}{(x+2)^2 \cdot (x-2)} = \frac{4x-8}{(x+2)^2 \cdot (x-2)}$$

Las tres fracciones algebraicas tienen el mismo denominador: $(x+2)^2 \cdot (x-2)$.

080 Calcula el mínimo común múltiplo de estos polinomios.

a) $2x^2, 10x^3$ y $2x$

b) $3x, x^2-3$ y $9-3x$

c) $x^2+5x, x+5$ y $x^2+10x+25$

d) x^2+x, x^2-1 y $3x+3$

e) x^2-x, x^3-x^2 y x^3+x^2

f) x^2+2x+1, x^2-1 y x^2-5x+6

a) $10x^3$

b) $x \cdot (x+3) \cdot (x-3)$

c) $x \cdot (x+5)^2$

d) $x \cdot (x+1) \cdot (x-1)$

e) $x^2 \cdot (x+1) \cdot (x-1)$

f) $(x+1)^2 \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3)$

Polinomios y fracciones algebraicas

081 Opera y simplifica.

a) $\frac{5x}{x+1} + \frac{4x}{x^2-1}$

b) $\frac{-3}{x^2-4} + \frac{5+2x}{x^2+x-6}$

c) $\frac{x+2}{x+2} + \frac{1}{x^2+4x+4}$

a) $\frac{5x \cdot (x-1)}{x^2-1} + \frac{4x}{x^2-1} = \frac{5x^2-x}{x^2-1}$

b) $\frac{-3 \cdot (x+3)}{(x-2) \cdot (x+2) \cdot (x+3)} + \frac{(5+2x) \cdot (x+2)}{(x-2) \cdot (x+2) \cdot (x+3)} =$
 $= \frac{2x^2+6x+1}{(x-2) \cdot (x+2) \cdot (x+3)}$

c) $\frac{(x+2)^2}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x+5}{(x+2)^2}$

082 Realiza estas operaciones y simplifica.

a) $\frac{2}{x^2+2x+1} - \frac{3}{x^2-1} - \frac{4}{x^2-2x+1}$

b) $\frac{5}{4x} + \frac{1}{x+1} - \frac{2x-3}{x^2+x} - \frac{3}{4}$

c) $\frac{x-1}{2x+6} + \frac{8}{-3x-9} - \frac{1}{3x^2}$

d) $\frac{x-2}{6x+6} - \frac{x+3}{2x+2} + \frac{3-x}{4x+4}$

a) $\frac{2 \cdot (x-1)^2}{(x+1)^2 \cdot (x-1)^2} - \frac{3 \cdot (x+1) \cdot (x-1)}{(x+1)^2 \cdot (x-1)^2} - \frac{4 \cdot (x+1)^2}{(x+1)^2 \cdot (x-1)^2} =$
 $= \frac{-5x^2-12x+1}{(x+1)^2 \cdot (x-1)^2}$

b) $\frac{5 \cdot (x+1)}{4x \cdot (x+1)} + \frac{4x}{4x \cdot (x+1)} - \frac{4 \cdot (2x-3)}{4x \cdot (x+1)} - \frac{3x \cdot (x+1)}{4x \cdot (x+1)} =$
 $= \frac{-3x^2-2x+17}{4x \cdot (x+1)}$

c) $\frac{3x^2 \cdot (x-1)}{6x^2 \cdot (x+3)} - \frac{2x^2 \cdot 8}{6x^2 \cdot (x+3)} - \frac{2 \cdot (x+3)}{6x^2 \cdot (x+3)} = \frac{3x^3-13x^2-2x-6}{6x^2 \cdot (x+3)}$

d) $\frac{2 \cdot (x-2)}{12 \cdot (x+1)} - \frac{3 \cdot (x+3)}{12 \cdot (x+1)} + \frac{3 \cdot (3-x)}{12 \cdot (x+1)} = \frac{-13x-1}{12 \cdot (x+1)}$

083 Efectúa las operaciones.

$$a) \frac{9x}{3x-3} \cdot \frac{x^2-1}{3x^2}$$

$$c) \frac{x-3}{x} \cdot \frac{x^2+3x}{x^2-9}$$

$$b) \frac{2x-6}{x^2-4} \cdot \frac{x^2+4x+4}{x^2-6x+9}$$

$$d) \frac{x+5}{x-5} \cdot \frac{x^2-25}{x^2+25}$$

$$a) \frac{9x \cdot (x+1) \cdot (x-1)}{9x^2 \cdot (x-1)} = \frac{x+1}{x}$$

$$b) \frac{2 \cdot (x-3) \cdot (x+2)^2}{(x+2) \cdot (x-2) \cdot (x-3)^2} = \frac{2 \cdot (x+2)}{(x-2) \cdot (x-3)}$$

$$c) \frac{(x-3) \cdot x \cdot (x+3)}{x \cdot (x+3) \cdot (x-3)} = 1$$

$$d) \frac{(x+5) \cdot (x+5) \cdot (x-5)}{(x-5) \cdot (x^2+25)} = \frac{(x+5)^2}{x^2+25}$$

084 Realiza los productos de fracciones algebraicas y simplifica el resultado.

$$a) \frac{x^2-5x+6}{x^2+11x+24} \cdot \frac{x^2-4x-21}{x^2+3x-10}$$

$$b) \frac{x^2+x-20}{x^2+6x+8} \cdot \frac{x^3+x^2}{x^2-3x-40}$$

$$c) \frac{x^2-9}{x^3-x^2} \cdot \frac{x^2+6x+8}{x^2-3x}$$

$$a) \frac{(x-2) \cdot (x-3) \cdot (x-7) \cdot (x+3)}{(x+3) \cdot (x+8) \cdot (x+5) \cdot (x-2)} = \frac{(x-3) \cdot (x-7)}{(x+8) \cdot (x+5)}$$

$$b) \frac{(x-4) \cdot (x+5) \cdot x^2 \cdot (x+1)}{(x+2) \cdot (x+4) \cdot (x+5) \cdot (x-8)} = \frac{x^2 \cdot (x-4) \cdot (x+1)}{(x+2) \cdot (x+4) \cdot (x-8)}$$

$$c) \frac{(x+3) \cdot (x-3) \cdot (x+4) \cdot (x+2)}{x^2 \cdot (x-1) \cdot x \cdot (x-3)} = \frac{(x+3) \cdot (x+4) \cdot (x+2)}{x^3 \cdot (x-1)}$$

085 Efectúa estas divisiones de fracciones algebraicas y simplifica el resultado.

$$a) \frac{x^2-1}{x^2-4x+4} : \frac{x^2+2x+1}{x^2-4}$$

$$c) \frac{2x-1}{x^2+2x} : \frac{4x}{x^3+2x^2}$$

$$b) \frac{3x+9}{x-3} : \frac{x^3+8x^2+21x+18}{x^2-9}$$

$$a) \frac{(x-1) \cdot (x+1)}{(x-2)^2} : \frac{(x+1)^2}{(x+2) \cdot (x-2)} = \frac{(x-1) \cdot (x+2)}{(x-2) \cdot (x+1)}$$

$$b) \frac{3 \cdot (x+3)}{(x-3)} : \frac{(x+2) \cdot (x+3)^2}{(x+3) \cdot (x-3)} = \frac{3}{x+2}$$

$$c) \frac{2x+1}{x \cdot (x+2)} : \frac{4x}{x^2 \cdot (x+2)} = \frac{2x+1}{4}$$

Polinomios y fracciones algebraicas

086

Efectúa las siguientes operaciones.

a) $\left(\frac{1}{x-2} - \frac{x-3}{x^2-4} \right) \cdot \frac{x+2}{x} - \frac{x}{2}$

b) $\left(\frac{6}{1-x} - \frac{5x}{x-1} \right) : \frac{x^2-1}{2} + \frac{3}{x}$

c) $\left(x+1 + \frac{x^2}{1-x} \right) : \left(1 - \frac{x}{1+x} \cdot \frac{x+1}{x^3} \right) + \frac{4}{x^2-1}$

d) $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3x} \right) \cdot \left(\frac{x-1}{x} - \frac{x-2}{2x} \right) - \frac{1}{x^2-1}$

a) $\left(\frac{5}{(x+2) \cdot (x-2)} \right) \cdot \frac{x+2}{x} - \frac{x}{2} = \frac{5}{x \cdot (x-2)} - \frac{x}{2} =$
 $= \frac{10 - x^2 \cdot (x-2)}{2x \cdot (x-2)} = \frac{10 - x^3 + 2x^2}{2x \cdot (x-2)}$

b) $\left(\frac{-5x-6}{x-1} \right) : \frac{(x+1) \cdot (x-1)}{x} + \frac{3}{x} = \frac{-5x^2-6x}{(x+1) \cdot (x-1)^2} + \frac{3}{x} =$
 $= \frac{-5x^3-6x^2+3 \cdot (x+1) \cdot (x-1)^2}{x \cdot (x+1) \cdot (x-1)^2} = \frac{-2x^3-3x^2-3x-3}{x \cdot (x+1) \cdot (x-1)^2}$

c) $\left(\frac{-1}{x-1} \right) : \left(\frac{x^3-x^2+2x+1}{x^3 \cdot (x+1)} \right) + \frac{4}{(x+1) \cdot (x-1)} =$
 $= \frac{-x^3 \cdot (x+1)}{(x-1) \cdot (x^3-x^2+2x+1)} + \frac{4}{(x+1) \cdot (x-1)} =$
 $= \frac{-x^3 \cdot (x+1)^2 + 4 \cdot (x^3-x^2+2x+1)}{(x^3-x^2+2x+1) \cdot (x+1) \cdot (x-1)}$

d) $\left(\frac{4}{3x} \right) \cdot \left(\frac{1}{2} \right) - \frac{1}{(x+1) \cdot (x-1)} = \frac{2}{3x} - \frac{1}{(x+1) \cdot (x-1)} =$
 $= -\frac{2x^2-2-3x}{3x \cdot (x+1) \cdot (x-1)}$

087

La torre de una iglesia es un prisma de base cuadrada y de altura 15 m mayor que la arista de la base.

- a) Expresa, en lenguaje algebraico, cuánto miden su superficie lateral y su volumen.
 b) Calcula los valores numéricos de la superficie y del volumen para una arista de la base de 5, 6 y 7 m, respectivamente.

a) Arista: x

Altura: $x+15$

$$A_{\text{lateral}} = 4x \cdot (x+15) = 4x^2 + 60x$$

$$V = x^2 \cdot (x+15) = x^3 + 15x^2$$

b)

	$x = 5 \text{ m}$	$x = 6 \text{ m}$	$x = 7 \text{ m}$
$A_{\text{lateral}} = 4x^2 + 60x$	400 m ²	504 m ²	616 m ²
$V = x^3 + 15x^2$	500 m ³	756 m ³	1.078 m ³

088

La página de un libro mide el doble de alto que de ancho, y los márgenes laterales miden 2 cm, y los márgenes superior e inferior, 3 cm.

- a) Expresa la superficie total de la página en lenguaje algebraico.
 b) Haz lo mismo con la superficie útil de papel (lo que queda dentro de los márgenes).



a) Ancho: x

Alto: $2x$

$A = x \cdot 2x = 2x^2$

b) Ancho: $x - 4$

Alto: $2x - 6$

$A = (x - 4) \cdot (2x - 6) = 2x^2 - 14x + 24$

089

Mandamos construir un depósito de agua con forma cilíndrica, siendo el área de la base la quinta parte del cubo de la altura.

- a) Expresa el volumen del depósito.
 b) ¿Cuántos metros cúbicos de agua caben si la altura mide 1 m?

a) Altura: x $A_{\text{base}} = \frac{x^3}{5}$ $V = x \cdot \frac{x^3}{5} = \frac{x^4}{5}$

b) $V(1) = \frac{1}{5} = 0,2 \text{ m}^3$

090

El diámetro de la base de un silo cilíndrico mide $\frac{3}{4}$ de la longitud de la altura.



- a) Expresa la capacidad del silo en función del diámetro de su base.
 b) Queremos pintar el silo y empleamos 1 kg de pintura por cada metro cuadrado. Calcula cuántos kilogramos de pintura necesitamos si el diámetro de la base mide 2 m.

a) Diámetro: x Altura: $\frac{4}{3}x$ $V = \pi \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 \cdot \frac{4}{3}x = \pi \cdot \frac{x^3}{3}$

b) Diámetro: x Altura: $\frac{4}{3}x$

$A_{\text{lateral}} = \pi \cdot x \cdot \frac{4}{3}x = \pi \cdot \frac{4x^2}{3} \xrightarrow{x=2} A_{\text{lateral}} = \pi \cdot \frac{4 \cdot 2^2}{3} = 16,75 \text{ m}^2$

Necesitamos 16,75 kg de pintura.

Polinomios y fracciones algebraicas

091

Si el resto de la división de un polinomio $P(x)$ entre $(x - 2)$ es 12, y entre $(x + 2)$ es 4, ¿cuál será el resto de la división de $P(x)$ entre $(x^2 - 4)$?

Como el resto de $P(x)$ entre $(x - 2)$ es 12: $P(x) = (x - 2) \cdot A(x) + 12$

Como el resto de $P(x)$ entre $(x + 2)$ es 4: $P(x) = (x + 2) \cdot B(x) + 4$

Por el teorema del resto: $P(2) = 12$

Sustituyendo en la segunda igualdad: $P(2) = 12 = (2 + 2) \cdot B(2) + 4$
 $\rightarrow B(2) = 2$

Como el resto de $B(x)$ entre $(x - 2)$ es 2 $\rightarrow B(x) = (x - 2) \cdot C(x) + 2$

Y sustituyendo:

$$\begin{aligned} P(x) &= (x + 2) \cdot B(x) + 4 = (x + 2) \cdot [(x - 2) \cdot C(x) + 2] + 4 = \\ &= (x + 2) \cdot (x - 2) \cdot C(x) + 2 \cdot (x + 2) + 4 = \\ &= (x - 2) \cdot (x + 2) \cdot C(x) + (2x + 8) \end{aligned}$$

El resto de dividir $P(x)$ entre $(x^2 - 4)$ es $2x + 8$.

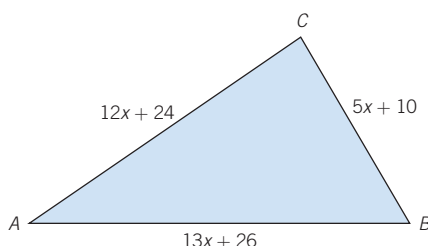
092

¿Cuál es el resto de la división de $x^{51} + 51$ entre $(x + 1)$?

El resto es $P(-1) = -1 + 51 = 50$.

093

Demuestra que el triángulo $\widehat{ABC}$ es rectángulo para cualquier valor de x .

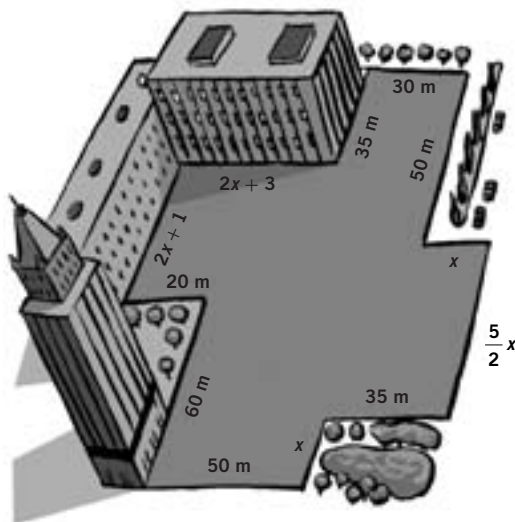


$$(12x + 24)^2 + (5x + 10)^2 = (12^2 + 5^2) \cdot (x + 2)^2 = 13^2 \cdot (x + 2)^2 = (13x + 26)^2$$

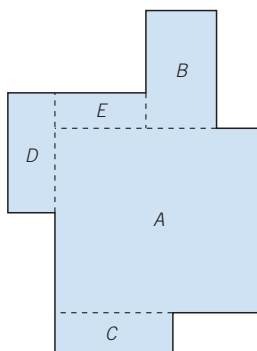
Se cumple el teorema de Pitágoras para cualquier valor de x , y el triángulo es equilátero.

094

Calcula el perímetro y el área de la figura, expresando los resultados mediante polinomios.



$$\begin{aligned}\text{Perímetro} &= 50 + x + 35 + \frac{5}{2}x + x + 50 + 30 + 35 + 2x + 3 + \\ &+ 2x + 1 + 20 + 60 = 284 + \frac{17}{2}x \text{ m}\end{aligned}$$



$$A_A = \frac{5}{2}x \cdot (50 + 35) = \frac{425}{2}x \text{ m}^2$$

$$A_B = 30 \cdot 50 = 1.500 \text{ m}^2$$

$$A_C = 50 \cdot x = 50x \text{ m}^2$$

$$A_D = 20 \cdot (2x + 1) = (40x + 20) \text{ m}^2$$

$$\begin{aligned}A_E &= (2x + 3 - 20) \cdot (50 - 35) = \\ &= (30x - 255) \text{ m}^2\end{aligned}$$

$$A = A_A + A_B + A_C + A_D + A_E =$$

$$= \frac{425}{2}x + 1.500 + 50x + 40x + 20 + 30x - 255 = \frac{665}{2}x + 1.265 \text{ m}^2$$

095 Encuentra los valores de A , B y C para que se cumpla la igualdad.

$$(Ax - 7) \cdot (5x + B) = Cx^2 - 6x - 14$$

$$\left. \begin{aligned}(Ax - 7) \cdot (5x + B) &= 5Ax^2 + (AB - 35)x - 7B \\ (Ax - 7) \cdot (5x + B) &= Cx^2 - 6x - 14\end{aligned} \right\}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 7B = 14 \rightarrow B = 2 \\ AB - 35 = -6 \xrightarrow{B=2} A = \frac{29}{2} \\ C = 5A \xrightarrow{A=\frac{29}{2}} C = \frac{145}{2} \end{cases}$$

096 Halla un polinomio de segundo grado que sea divisible por $(x - 1)$ y que, al dividirlo entre $(x + 1)$ y entre $(x - 2)$, se obtenga como resto 10 y 5, respectivamente.

$$P(x) = Ax^2 + Bx + C$$

$$\left. \begin{aligned}P(1) &= A + B + C = 0 \\ P(-1) &= A - B + C = 10\end{aligned} \right\} \rightarrow B = -5$$

$$\left. \begin{aligned}P(2) &= 4A + 2B + C = 5 \xrightarrow{B=-5} 4A + C = 15 \\ P(-1) &= A - B + C = 10 \xrightarrow{B=-5} A + C = 5\end{aligned} \right\} \rightarrow A = \frac{10}{3} \text{ y } C = \frac{5}{3}$$

$$P(x) = \frac{10}{3}x^2 - 5x + \frac{5}{3}$$

Polinomios y fracciones algebraicas

EN LA VIDA COTIDIANA

097



Dentro de los proyectos de conservación de zonas verdes de un municipio, se ha decidido instalar un parque en el solar que ocupaba una antigua fábrica.

Disponemos de una superficie cuadrada de 100 metros de lado. Podríamos dividir el parque en tres zonas.



El parque tendrá tres áreas delimitadas: la zona de juego, la zona de lectura, que rodeará a la zona de juego, y el resto, que se dedicará a la zona de paseo.

Aún no han hecho mediciones, pero los técnicos han determinado que la zona dedicada a los juegos sea cuadrada y su lado medirá 40 metros.



- a) ¿Qué expresión nos da el área de la zona para pasear? ¿Y el área de la zona de lectura?
- b) Si deciden que la zona de paseo tenga un ancho de 40 metros, ¿cuáles serán las áreas de cada zona?

$$\begin{aligned} \text{a) } A_{\text{juego}} &= 40^2 = 1.600 \text{ m}^2 \\ A_{\text{lectura}} &= (100 - x)^2 - 40^2 = 8.400 - 200x + x^2 \\ A_{\text{paseo}} &= 100^2 - (100 - x)^2 = 200x - x^2 \\ \text{b) } A_{\text{juego}} &= 40^2 = 1.600 \text{ m}^2 \\ A_{\text{lectura}} &= (100 - 40)^2 - 40^2 = 2.000 \text{ m}^2 \\ A_{\text{paseo}} &= 100^2 - 60^2 = 6.400 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

098

Al recoger el correo, Ana ha recibido la factura de su consumo de luz en los dos últimos meses.

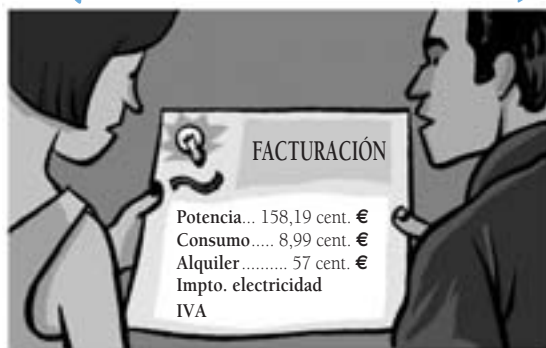
¿Cómo han hecho las cuentas en esta factura?



Ana le pide ayuda a su hermano y ambos se disponen a analizar la factura con detalle.

Aparecen varias variables: la potencia, p , contratada, 4,4 kW cada mes; el consumo, c , 272 kWh.

No olvides los precios de cada variable y los impuestos.



Con esta información, escriben un polinomio:

$$1,16 \cdot [1,09 \cdot (2px + cy) + 2z]$$

siendo x el importe de la potencia al mes, y el importe de la energía consumida y z el importe mensual del alquiler.

Ahora comprenden por qué la factura ha sido de 49,84 €.

a) Comprueba el importe.

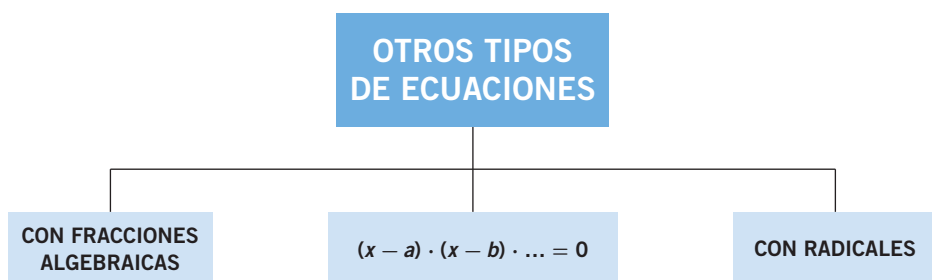
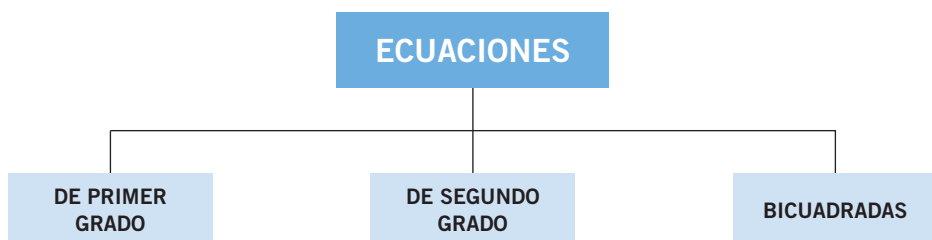
b) Deciden bajar la potencia a 3,5 kW y el consumo aumenta a 315 kWh. ¿Cuánto tendrán que pagar en la factura de los dos próximos meses?

$$\begin{aligned} \text{a) Importe} &= 1,16 \cdot [1,09 \cdot (2px + cy) + 2z] = \\ &= 1,16 \cdot [1,09 \cdot (2 \cdot 4,4 \cdot 158,19 + 8,99 \cdot 272) + 2 \cdot 57] = \\ &= 4.984,18 \text{ céntimos} = 49,84 \text{ €} \end{aligned}$$

b) El importe de la factura de los dos próximos meses es:

$$\begin{aligned} &1,16 \cdot [1,09 \cdot (2px + cy) + 2z] = \\ &= 1,16 \cdot [1,09 \cdot (2 \cdot 3,5 \cdot 158,19 + 8,99 \cdot 315) + 2 \cdot 57] = \\ &= 5.112,93 \text{ céntimos} = 51,13 \text{ €} \end{aligned}$$

Ecuaciones e inecuaciones



INECUACIONES

La última noche

Durante un corto intervalo de tiempo la actividad del joven cesó, y en la pequeña habitación de la pensión donde vivía solo se escuchaba su agitada respiración, pues parecía que ni durmiendo descansaba.

El ruido producido por un carruaje sobre el empedrado de la calle hizo que primero entornara los ojos y después, como si hubiera sido poseído, tomó pluma y papel y comenzó a escribir.

Évariste Galois, presintiendo lo inevitable, escribió sus cartas con un carácter inequívoco de última voluntad, como si se dictara a sí mismo.

[...] Vuestra tarea es sencilla: demostrad que he de combatir contra mi voluntad, tras haber agotado todos los medios de reconciliación. [...] Por favor recordadme, ya que el destino no me ha dado vida bastante para ser recordado por mi patria.

Tras sellar esta primera carta, más tranquilo, comenzó a escribir la segunda:

[...] He hecho algunos descubrimientos nuevos en Matemáticas que puedes ver en tres memorias que dejo aquí... Haz llegar estos trabajos a la Academia de las Ciencias. [...] Confío en que después de leerlos alguien encuentre provecho en organizarlo todo. [...]

El premonitorio estado de ánimo de Galois estaba plenamente justificado: al amanecer sería herido de muerte en un duelo y moriría al día siguiente, abandonado por todos, en un hospital de París.

Pese a fallecer con tan solo veinte años, sus trabajos sobre ecuaciones fueron absolutamente geniales.

Escribe tres ecuaciones: una que no tenga solución, otra que tenga una solución y una tercera con más de una solución.

Sin solución $\longrightarrow x + 3 = x - 3$

Con una solución $\longrightarrow x + 3 = 0$

Con dos soluciones $\longrightarrow x^2 + 4x - 5 = 0$



Ecuaciones e inecuaciones

EJERCICIOS

001 Indica los elementos de estas ecuaciones.

a) $(x + 2) - (x - 5) + 2 = 7 - x^2$

b) $x + (x - 1) - 9 = x + 4$

a) Incógnita: x

Miembros: $(x + 2) - (x - 5) + 2; 7 - x^2$

Grado: 2

b) Incógnita: x

Miembros: $x + (x - 1) - 9; x + 4$

Grado: 1

002 ¿Cuáles de los siguientes valores son solución

de la ecuación $\frac{x + 4}{3} - \frac{1}{2} = \frac{5 - x}{2}$?

a) $x = 1$

b) $x = 5$

c) $x = -2$

d) $x = 2$

La solución es la del apartado d) $x = 2$.

003 Comprueba si estas ecuaciones tienen la misma solución, es decir, si son ecuaciones equivalentes.

a) $3x - 2 = 7$ y $x - 3 = 0$

b) $x^2 - 9 = 0$ y $(x - 3)^2 = 0$

a) Tienen la misma solución, $x = 3$.

b) No son equivalentes, ya que tienen una solución común ($x = 3$), pero la otra no.

004 Escribe una ecuación que tenga como solución:

a) $x = 0$

b) $x = -1$

c) $x = \frac{1}{2}$

a) $x^2 - x = 0$

b) $3x - 5 = -8$

c) $2x - 1 = 0$

005 Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $4x - 8 = 6x$

c) $x^2 + 14x + 49 = 0$

b) $x^2 + 7x + 12 = 0$

d) $5x^2 + 10x + 7 = 0$

a) $4x - 6x = 8 \rightarrow x = -4$

b) $x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 12}}{2} = \frac{-7 \pm \sqrt{1}}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = -4 \end{cases}$

c) $x = \frac{-14 \pm \sqrt{196 - 4 \cdot 49}}{2} = \frac{-14 \pm \sqrt{0}}{2} \rightarrow x_1 = x_2 = -7$

d) $x = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 4 \cdot 35}}{10} = \frac{-10 \pm \sqrt{-40}}{10} \rightarrow$ No tiene solución.

006 Opera y resuelve esta ecuación.

$$(x - 1) \cdot (x + 1) + 1 = 100$$

$$(x - 1) \cdot (x + 1) + 1 = 100 \rightarrow x^2 = 100 \rightarrow x = \pm\sqrt{100} = \pm 10$$

007 Encuentra una ecuación de segundo grado cuyas soluciones sean 2 y -7.

$$(x - 2) \cdot (x + 7) = x^2 + 5x - 14 = 0$$

008 Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $7x^2 - 12 = 0$

b) $2x^2 - 32 = 0$

c) $2x^2 = 0$

a) $x_1 = \sqrt{\frac{12}{7}}$

$$x_2 = -\sqrt{\frac{12}{7}}$$

b) $x_1 = 4$

$$x_2 = -4$$

c) $x_1 = x_2 = 0$

009 Determina el número de soluciones que tienen estas ecuaciones.

a) $x^2 - 10x + 25 = 0$

b) $x^2 - 5x + 8 = 0$

a) $\Delta = 100 - 4 \cdot 25 = 0 \rightarrow$ Una solución

b) $\Delta = 25 - 32 < 0 \rightarrow$ Ninguna solución

010 Halla el valor de a en estas ecuaciones para que tengan dos soluciones.

a) $ax^2 - 2x + 2 = 0$

b) $-x^2 + ax - 1 = 0$

a) $\Delta = 4 - 8a > 0 \rightarrow a < \frac{1}{2}$

b) $\Delta = a^2 - 4 > 0 \rightarrow |a| > 2 \rightarrow a > 2 \text{ o } a < -2$

011 Escribe dos ecuaciones de segundo grado cuya única solución sea -2.

$$x^2 + 4x + 4 = 0$$

$$2x^2 + 8x + 8 = 0$$

Ecuaciones e inecuaciones

012 Calcula las soluciones de estas ecuaciones bicuadradas.

a) $x^4 + 7x^2 - 3 = 0$

c) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

b) $36x^4 - 13x^2 + 1 = 0$

d) $2x^4 - 6x^2 + 4 = 0$

a) $x^4 + 7x^2 - 3 = 0 \xrightarrow{z=x^2} z^2 + 7z - 3 = 0$

$$z = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 12}}{2} \rightarrow \begin{cases} z_1 = \frac{-7 + \sqrt{61}}{2} \xrightarrow{z=x^2} x = \pm \sqrt{\frac{-7 + \sqrt{61}}{2}} \\ z_2 = \frac{-7 - \sqrt{61}}{2} \xrightarrow{z=x^2} \text{No tiene solución.} \end{cases}$$

b) $36x^4 - 13x^2 + 1 = 0 \xrightarrow{z=x^2} 36z^2 - 13z + 1 = 0$

$$z = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{72} \rightarrow \begin{cases} z_1 = \frac{18}{42} = \frac{1}{4} \xrightarrow{z=x^2} x^2 = \frac{1}{4} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} \\ x_2 = -\frac{1}{2} \end{cases} \\ z_2 = \frac{8}{72} = \frac{1}{9} \xrightarrow{z=x^2} x^2 = \frac{1}{9} \rightarrow \begin{cases} x_3 = \frac{1}{3} \\ x_4 = -\frac{1}{3} \end{cases} \end{cases}$$

c) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \xrightarrow{z=x^2} z^2 - 5z + 4 = 0$

$$z = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} \rightarrow \begin{cases} z_1 = 4 \xrightarrow{z=x^2} x^2 = 4 \rightarrow x_1 = 2, x_2 = -2 \\ z_2 = 1 \xrightarrow{z=x^2} x^2 = 1 \rightarrow x_3 = 1, x_4 = -1 \end{cases}$$

d) $2x^4 - 6x^2 + 4 = 0 \xrightarrow{z=x^2} 2z^2 - 6z + 4 = 0$

$$z = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{4} \rightarrow \begin{cases} z_1 = 2 \xrightarrow{z=x^2} x^2 = 2 \rightarrow x_1 = \sqrt{2}, x_2 = -\sqrt{2} \\ z_2 = 1 \xrightarrow{z=x^2} x^2 = 1 \rightarrow x_3 = 1, x_4 = -1 \end{cases}$$

013 Opera y resuelve.

$$(x^3 + x) \cdot x - 1 = 0$$

$$(x^3 + x) \cdot x - 1 = 0 \rightarrow x^4 + x^2 - 1 = 0 \xrightarrow{z=x^2} z^2 + z - 1 = 0$$

$$z = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4}}{2} \rightarrow \begin{cases} z_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \xrightarrow{z=x^2} x^2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \rightarrow x_1 = \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}}, x_2 = -\sqrt{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}} \\ z_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \xrightarrow{z=x^2} x^2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \rightarrow \text{No tiene solución.} \end{cases}$$

014 Escribe una ecuación bicuadrada que tenga como soluciones 0 y 1.

$$x^4 - x^2 = 0$$

015 Resuelve estas ecuaciones.

a) $\frac{x}{x-2} + 2x = 1$

c) $(x+1) \cdot (x-7) \cdot (x+4) = 0$

b) $\frac{x+2}{x-3} + \frac{3 \cdot (x+6)}{x} = \frac{1}{x}$

d) $(x-3) \cdot (x^2 + 2x + 1) \cdot (x^2 + 5) = 0$

a) $\frac{x}{x-2} + 2x = 1 \rightarrow \frac{x}{x-2} + \frac{2x^2 - 4x}{x-2} = \frac{x-2}{x-2} \rightarrow$
 $\rightarrow 2x^2 - 3x = x - 2 \rightarrow 2x^2 - 4x + 2 = 0$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{4} = \frac{4 \pm \sqrt{0}}{4} \rightarrow x_1 = x_2 = 1$$

b) $\frac{x+2}{x-3} + \frac{3 \cdot (x+6)}{x} = \frac{1}{x} \rightarrow \frac{x^2 + 2x}{x \cdot (x-3)} + \frac{3x^2 + 9x - 54}{x \cdot (x-3)} = \frac{x-3}{x \cdot (x-3)}$
 $\rightarrow 4x^2 + 11x - 54 = x - 3$
 $\rightarrow 4x^2 + 10x - 51 = 0$

$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{100 + 816}}{8} = \frac{-10 \pm \sqrt{916}}{8} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-10 + \sqrt{916}}{8} \\ x_2 = \frac{-10 - \sqrt{916}}{8} \end{cases}$$

c) $x+1=0 \rightarrow x_1 = -1$

d) $x-3=0 \rightarrow x_1 = 3$

$x-7=0 \rightarrow x_2 = 7$

$x^2 + 2x + 1 = 0 \rightarrow x_2 = x_3 = -1$

$x+4=0 \rightarrow x_3 = -4$

$x^2 + 5 = 0 \rightarrow$ No tiene solución.

016 Resuelve.

a) $\frac{1}{x-3} - \frac{x}{(x-3)^2} = \frac{-3}{49}$

b) $x^2 \cdot (x+1)^2 = 0$

a) $\frac{1}{x-3} - \frac{x}{(x-3)^2} = \frac{-3}{49} \rightarrow \frac{49x - 147}{49 \cdot (x-3)^2} - \frac{49x}{49 \cdot (x-3)^2} = \frac{(x-3)^2}{49 \cdot (x-3)^2}$
 $\rightarrow 147 = x^2 - 6x + 9 \rightarrow$
 $\rightarrow x^2 - 6x - 138 = 0$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{588}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{588}}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{6 + \sqrt{588}}{2} \\ x_2 = \frac{6 - \sqrt{588}}{2} \end{cases}$$

b) $x^2 = 0 \rightarrow x_1 = x_2 = 0$

$(x+1)^2 = 0 \rightarrow x_3 = x_4 = -1$

Ecuaciones e inecuaciones

017 Escribe una ecuación que tenga como soluciones -2 , -1 , 0 y 6 .

$$x \cdot (x + 2) \cdot (x + 1) \cdot (x - 6) = x^4 - 3x^3 - 16x^2 - 12x = 0$$

018 Razona cuáles de los valores son solución de la ecuación $\sqrt{2x + 6} = 3x + 5$.

a) $x = 2$

c) $x = 4$

b) $x = -1$

d) $x = -3$

La solución es la del apartado b) $x = -1$.

019 Resuelve las ecuaciones.

a) $\sqrt{9 + x} = x - 11$

b) $x - \sqrt{x} = 6$

a) $\sqrt{9 + x} = x - 11 \rightarrow 9 + x = x^2 - 22x + 121 \rightarrow x^2 - 23x + 112 = 0$

$$x = \frac{23 \pm \sqrt{529 - 448}}{2} = \frac{23 \pm \sqrt{81}}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{23 + 9}{2} = 16 \\ x_2 = \frac{23 - 9}{2} = 7 \end{cases}$$

b) $x - \sqrt{x} = 6 \rightarrow x - 6 = \sqrt{x} \rightarrow x^2 - 12x + 36 = x \rightarrow$
 $\rightarrow x^2 - 13x + 36 = 0$

$$x = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{2} = \frac{13 \pm \sqrt{25}}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{13 + 5}{2} = 9 \\ x_2 = \frac{13 - 5}{2} = 4 \end{cases}$$

020 Resuelve.

a) $\sqrt{x + 7} = \sqrt{x} + 1$

b) $\sqrt{x^2 - 2x} + x = \sqrt{x}$

a) $\sqrt{x + 7} = \sqrt{x} + 1 \rightarrow x + 7 = x + 1 + 2\sqrt{x} \rightarrow 3 = \sqrt{x} \rightarrow x = 9$

b) $\sqrt{x^2 - 2x} + x = \sqrt{x} \rightarrow x^2 - 2x + x^2 + 2x\sqrt{x^2 - 2x} = x$

$$\rightarrow 2x^2 - 3x = 2x\sqrt{x^2 - 2x} \rightarrow$$

$$\rightarrow 4x^4 + 9x^2 - 12x^3 = 4x^2 \cdot (x^2 - 2x) \rightarrow$$

$$\rightarrow 9x^2 - 4x^3 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 \cdot (9 - 4x) = 0$$

$$x^2 = 0 \rightarrow x_1 = x_2 = 0$$

$$9 - 4x = 0 \rightarrow x_3 = \frac{9}{4}$$

- 021** Escribe una ecuación con radicales que tenga como solución $x = 2$.

$$\sqrt{x+2} - 3x = -4$$

- 022** Transforma cada inecuación, realizando la operación que se indica.

- a) Suma 2 a $4x < 3$.
 b) Resta 5 a $x - 4 > 3x + 2$.
 c) Multiplica $2x + 1 \leq x - 3$ por 4.
 d) Divide $5x + 6 \geq x$ entre -3 .
 e) Divide $-40x + 16 < 2$ entre 4.

- a) $4x + 2 < 5$
 b) $x - 9 > 3x - 3$
 c) $8x + 4 \leq 4x - 12$
 d) $\frac{5x+6}{-3} \leq \frac{x}{-3}$
 e) $-10x + 4 < \frac{1}{2}$

- 023** Determina tres soluciones en cada caso.

- a) $x - 4 \leq 3$
 b) $2x + 2 > 0$
 c) $\frac{x}{2} + 1 < -2$
 d) $x^2 + 1 \geq 1$
 a) $x \leq 7 \rightarrow x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = -6$
 b) $x > -1 \rightarrow x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = 5$
 c) $x < -6 \rightarrow x_1 = -12, x_2 = -20, x_3 = -61$
 d) $x^2 \geq 0 \rightarrow x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = -6$

- 024** Escribe dos inecuaciones que tengan como solución $x = 0$.

$$7x < 5$$

$$3x - 8 > -34$$

- 025** Resuelve estas inecuaciones.

- a) $2x - 3x + 5 > 6x - 1$ b) $7 - 2x < -4$
 a) $2x - 3x - 6x > -1 - 5 \rightarrow -7x > -6 \rightarrow x < \frac{6}{7}$
 b) $-2x < -11 \rightarrow x > \frac{11}{2}$

Ecuaciones e inecuaciones

026 Calcula la solución de las siguientes inecuaciones.

a) $x^2 \leq 3x$ b) $2x^2 > 4x$ c) $3x^2 < 3$ d) $-4x^2 \geq -36$

a) $x^2 \leq 3x \rightarrow x \cdot (x - 3) \leq 0$

$x \cdot (x - 3) = 0 \rightarrow x_1 = 0, x_2 = 3$

La solución es el intervalo $[0, 3]$.

b) $2x^2 > 4x \rightarrow 2x \cdot (x - 4) > 0$

$2x \cdot (x - 4) = 0 \rightarrow x_1 = 0, x_2 = 4$

La solución es los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(4, +\infty)$.

c) $3x^2 < 3 \rightarrow 3(x^2 - 1) < 0$

$3 \cdot (x^2 - 1) = 0 \rightarrow x_1 = 1, x_2 = -1$

La solución es el intervalo $(-1, 1)$.

d) $-4x^2 \geq -36 \rightarrow 4 \cdot (x^2 - 9) \leq 0$

$4 \cdot (x^2 - 9) = 0 \rightarrow x_1 = 3, x_2 = -3$

La solución es el intervalo $[-3, 3]$.

027 Resuelve estas inecuaciones.

a) $4x - 2 \cdot (x + 1) \leq 0$

c) $x^2 - 3x \geq 4$

b) $x + 4 \cdot (3 - x) < 15$

d) $3x - 2x^2 < x + x^2$

a) $4x - 2 \cdot (x + 1) \leq 0 \rightarrow 2x - 2 \leq 0 \rightarrow x \leq 1$

b) $x + 4 \cdot (3 - x) < 15 \rightarrow x + 12 - 4x < 15 \rightarrow -3x < 3 \rightarrow x > -1$

c) $x^2 - 3x \geq 4 \rightarrow x^2 - 3x - 4 \geq 0$

$x^2 - 3x - 4 = 0 \rightarrow x_1 = 4, x_2 = -1$

La solución es los intervalos $(-\infty, -1]$ y $[4, +\infty)$.

d) $3x - 2x^2 < x + x^2 \rightarrow 2x - 3x^2 < 0$

$2x - 3x^2 = 0 \rightarrow x_1 = 0, x_2 = \frac{2}{3}$

La solución es los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(\frac{2}{3}, +\infty)$.

028 Escribe una inecuación cuya solución sea el intervalo $[2, +\infty)$.

$x - 5 \geq -3$

EJERCICIOS

029 Identifica los elementos de cada ecuación, y completa la tabla en tu cuaderno.

Ecuación	1.º miembro	2.º miembro	Incógnita	Grado
$x \cdot (x + 1) = 2$	$x \cdot (x + 1)$	2	x	2
$\frac{x}{3} - \frac{x + 4}{9} = 0$	$\frac{x}{3} - \frac{x + 4}{9}$	0	x	1
$(x - 2)^2 = x^2$	$(x - 2)^2$	x^2	x	2
$4x - (2x - 5) = 11$	$4x - (2x - 5)$	11	x	1
$3x + 2y = 1$	$3x + 2y$	1	x, y	1

030 Relaciona cada ecuación con sus soluciones.

- a) $6x - 2 = x + 8$ 1) $x = -3$
 b) $(x + 3)^2 = 0$ 2) $x = -4$
 c) $(x - 2) \cdot (x + 4) = 0$ 3) $x = 2$
 d) $x^2 + 8x = 0$ 4) $x = 0$
 e) $\frac{x+1}{5} - \frac{x}{2} = \frac{7}{5}$ 5) $x = -8$

a) $\rightarrow 3)$ b) $\rightarrow 1)$ c) $\rightarrow 2)$ y 3) d) $\rightarrow 4)$ y 5) e) $\rightarrow 2)$

031 Escribe una ecuación que cumpla estas condiciones.

- a) De grado 1 y con solución $x = 5$.
 b) De grado 1, con paréntesis y fracciones.
 c) De grado 2 y producto de dos factores.
 d) De grado 2 y una de las soluciones $x = 0$.

- a) $2x - 10 = 0$ c) $(x - 2) \cdot (x + 3) - 2 = 0$
 b) $3 \cdot (x - 5) - \frac{x+1}{2} = 8 - x$ d) $x^2 - 3x = 0$

032 Resuelve las siguientes ecuaciones.

- a) $2 + 3 \cdot (2x + 1) - 8 - 3 \cdot (x + 4) = 6$
 b) $6x - 5 \cdot (4 - 2x) = (4 - x) \cdot 5 + 2$
 c) $3x + 4 \cdot (-x - 6) = 5x - 6 \cdot (-x + 1)$
 d) $3 \cdot (x + 5) - x = (2x + 3) \cdot 4 + x$
 e) $\frac{x}{4} + 3 - \frac{x+3}{2} = 1$
 f) $\frac{1}{8} \cdot (2x + 4) - \frac{2}{3} \cdot (2x + 6) + x = -4$
 g) $\frac{x-2}{3} - \frac{x-3}{2} = \frac{4-2x}{5}$
 h) $\frac{3x+7}{2} - \frac{1-4x}{4} = \frac{1-x}{6} - \frac{9+x}{3}$

- a) $2 + 6x + 3 - 8 - 3x - 12 = 6 \rightarrow 3x = 21 \rightarrow x = 7$
 b) $6x - 20 + 10x = 20 - 5x + 2 \rightarrow 21x = 42 \rightarrow x = 2$
 c) $3x - 4x - 24 = 5x + 6x - 6 \rightarrow -12x = 18 \rightarrow x = -\frac{3}{2}$
 d) $3x + 15 - x = 8x + 12 + x \rightarrow -7x = -3 \rightarrow x = \frac{3}{7}$
 e) $\frac{x+12-2x-6}{4} = \frac{4}{4} \rightarrow -x = -2 \rightarrow x = 2$
 f) $\frac{6x+12-32x-96+24x}{24} = \frac{-96}{4} \rightarrow -2x = -12 \rightarrow x = 6$
 g) $\frac{10x-20-15x+45}{30} = \frac{24-12x}{30} \rightarrow 7x = -1 \rightarrow x = -\frac{1}{7}$
 h) $\frac{18x+42-3+12x}{12} = \frac{2-2x-36-4x}{12} \rightarrow 36x = -73 \rightarrow x = -\frac{73}{36}$

Ecuaciones e inecuaciones

033

Escribe una ecuación de primer grado cuya solución sea:

a) $x = -3$

c) $x = 4$

e) $x = -10$

g) $x = 2,5$

b) $x = \frac{1}{5}$

d) $x = \frac{2}{5}$

f) $x = \frac{-3}{4}$

h) Sin solución

a) $2x + 6 = 0$

c) $3x - 12 = 0$

e) $3x + 50 = 20$

g) $2x - 5 = 0$

b) $10x = 2$

d) $10x - 2 = 2$

f) $4x + 2 = -1$

h) $x + 1 = x - 2$

034

Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado.

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$

e) $x^2 + 15 = 8x$

i) $2x^2 + 7x = 3$

b) $x^2 = 4x - 3$

f) $x^2 - x = 30$

j) $x^2 = x - 3$

c) $x^2 - 2x = 3$

g) $8x^2 = 15 - 2x$

d) $x^2 + 3x - 2 = 0$

h) $x^2 + 3x - 1 = 0$

a) $x_1 = 3, x_2 = 2$

h) $x_1 = \frac{-3 + \sqrt{13}}{2}$

b) $x_1 = 3, x_2 = 1$

$x_2 = \frac{-3 - \sqrt{13}}{2}$

c) $x_1 = 3, x_2 = -1$

d) $x_1 = \frac{-3 + \sqrt{17}}{2}, x_2 = \frac{-3 - \sqrt{17}}{2}$

i) $x_1 = \frac{-7 + \sqrt{73}}{4}$

e) $x_1 = 5, x_2 = 3$

$x_2 = \frac{-7 - \sqrt{73}}{4}$

f) $x_1 = 6, x_2 = -5$

g) $x_1 = \frac{5}{4}, x_2 = \frac{-3}{2}$

j) No tiene solución.

035

HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE RESUELVEN ECUACIONES CUYOS COEFICIENTES SON MÚLTIPLOS DE UN MISMO NÚMERO?

Fíjate en los coeficientes de esta ecuación y resuélvela.

$$12x^2 - 4x - 8 = 0$$

PRIMERO. Cuando todos los coeficientes son múltiplos del mismo número, se calcula el máximo común divisor y se extrae factor común en la ecuación.

$$\text{m.c.d.}(12, 4, 8) = 4 \rightarrow 4 \cdot (3x^2 - x - 2) = 0$$

SEGUNDO. Se dividen los dos miembros de la ecuación entre el máximo común divisor.

$$\frac{4 \cdot (3x^2 - x - 2)}{4} = \frac{0}{4} \rightarrow 3x^2 - x - 2 = 0$$

TERCERO. Se resuelve la ecuación equivalente resultante.

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 3 \cdot (-2)}}{2 \cdot 3} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{6} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

036 Resuelve, sacando factor común.

a) $5x^2 + 10x + 5 = 0$

b) $6x^2 + 24x + 18 = 0$

c) $32x^2 - 80x + 18 = 0$

d) $-100x^2 + 275x + 75 = 0$

e) $-120x^2 + 300x + 720 = 0$

a) $5x^2 + 10x + 5 = 0 \rightarrow 5(x^2 + 2x + 1) = 0$

$x_1 = x_2 = -1$

b) $6x^2 + 24x + 18 = 0 \rightarrow 6(x^2 + 4x + 3) = 0$

$x_1 = -1, x_2 = -3$

c) $32x^2 - 80x + 18 = 0 \rightarrow 2(16x^2 - 40x + 9) = 0$

$x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = \frac{9}{4}$

d) $-100x^2 + 275x + 75 = 0 \rightarrow -25(4x^2 - 11x - 3) = 0$

$x_1 = -\frac{1}{4}, x_2 = 3$

e) $-120x^2 + 300x + 720 = 0 \rightarrow 2x^2 - 5x - 12 = 0$

$x_1 = 4, x_2 = -\frac{3}{2}$

037 Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $x^2 + 6x = 0$

d) $-x^2 + 4x = 0$

b) $3x^2 = 12x$

e) $8x^2 - 6x = 0$

c) $5x = 10x^2$

f) $7x = 23x^2$

a) $x_1 = 0, x_2 = -6$

d) $x_1 = 0, x_2 = 4$

b) $x_1 = 0, x_2 = 4$

e) $x_1 = 0, x_2 = \frac{3}{4}$

c) $x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{2}$

f) $x_1 = 0, x_2 = \frac{7}{23}$

038 Resuelve estas ecuaciones de segundo grado.

a) $25x^2 - 4 = 0$

d) $-3x^2 = -48$

b) $-8x^2 = -18$

e) $5x^2 = 100$

c) $2x^2 - 18 = 0$

f) $4x^2 - 144 = 0$

a) $x_1 = \frac{2}{5}, x_2 = -\frac{2}{5}$

d) $x_1 = 4, x_2 = -4$

b) $x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = -\frac{3}{2}$

e) $x_1 = \sqrt{20}, x_2 = -\sqrt{20}$

c) $x_1 = 3, x_2 = -3$

f) $x_1 = 6, x_2 = -6$

Ecuaciones e inecuaciones

039 Indica el número de soluciones de las ecuaciones sin resolverlas.

- a) $x^2 - 2x + 1 = 0$ e) $x^2 - 4x + 4 = 0$
 - b) $x^2 + x - 2 = 0$ f) $x^2 - 3x + 2 = 0$
 - c) $x^2 + 5x + 7 = 0$ g) $3x^2 + x - 1 = 0$
 - d) $4x^2 - 5x + 6 = 0$ h) $-x^2 + 3x - 8 = 0$
- a) $\Delta = 0 \rightarrow$ Una solución e) $\Delta = 0 \rightarrow$ Una solución
- b) $\Delta = 9 > 0 \rightarrow$ Dos soluciones f) $\Delta = 1 > 0 \rightarrow$ Dos soluciones
- c) $\Delta = -3 < 0 \rightarrow$ Sin solución g) $\Delta = 13 > 0 \rightarrow$ Dos soluciones
- d) $\Delta = -71 < 0 \rightarrow$ Sin solución h) $\Delta = -23 < 0 \rightarrow$ Sin solución

040 Resuelve las siguientes ecuaciones bicuadradas y comprueba la solución.

- a) $x^4 + 2x^2 - 48 = 0$ e) $x^4 + 8x^2 + 15 = 0$
 - b) $x^4 - 9x^2 = 0$ f) $x^4 + 3x^2 = 18$
 - c) $x^4 - 16 = 0$ g) $x^4 - x^2 = 20$
 - d) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ h) $x^4 + 12 = 7x^2$
- a) $x^4 + 2x^2 - 48 = 0 \xrightarrow{z=x^2} z^2 + 2z - 48 = 0$
- $$z = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 192}}{2} \rightarrow \begin{cases} z_1 = 6 \xrightarrow{z=x^2} x^2 = 6 \rightarrow x_1 = \sqrt{6} \\ \phantom{\xrightarrow{z=x^2}} \phantom{x_1 = \sqrt{6}} x_2 = -\sqrt{6} \\ z_2 = -8 \xrightarrow{z=x^2} x^2 = -8 \rightarrow \text{No tiene solución.} \end{cases}$$
- b) $x^4 - 9x^2 = 0 \rightarrow x^2 \cdot (x^2 - 9) = 0$
 $x_1 = x_2 = 0, x_3 = 3, x_4 = -3$
- c) $x^4 - 16 = 0 \xrightarrow{z=x^2} z^2 - 16 = 0$
- $$z_1 = 4 \xrightarrow{z=x^2} x^2 = 4 \rightarrow x_1 = 2, x_2 = -2$$
- $$z_2 = -4 \xrightarrow{z=x^2} x^2 = -4 \rightarrow \text{No tiene solución.}$$
- d) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0 \xrightarrow{z=x^2} z^2 - 10z + 9 = 0$
- $$z_1 = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{2} \rightarrow \begin{cases} z_1 = 9 \xrightarrow{z=x^2} x^2 = 9 \rightarrow x_1 = 3, x_2 = -3 \\ z_2 = 1 \xrightarrow{z=x^2} x^2 = 1 \rightarrow x_3 = 1, x_4 = -1 \end{cases}$$
- e) $x^4 + 8x^2 + 15 = 0 \xrightarrow{z=x^2} z^2 + 8z + 15 = 0$
- $$z_1 = -3 \xrightarrow{z=x^2} x^2 = -3 \rightarrow \text{No tiene solución.}$$
- $$z_2 = -5 \xrightarrow{z=x^2} x^2 = -5 \rightarrow \text{No tiene solución.}$$
- f) $x^4 + 3x^2 - 18 = 0 \xrightarrow{z=x^2} z^2 + 3z - 18 = 0$
- $$z_1 = 3 \xrightarrow{z=x^2} x^2 = 3 \rightarrow x_1 = \sqrt{3}, x_2 = -\sqrt{3}$$
- $$z_2 = -6 \xrightarrow{z=x^2} x^2 = -6 \rightarrow \text{No tiene solución.}$$

$$\begin{aligned} \text{g) } x^4 - x^2 - 20 &= 0 \xrightarrow{z=x^2} z^2 - z - 20 = 0 \\ z_1 &= 5 \xrightarrow{z=x^2} x^2 = 5 \rightarrow x_1 = \sqrt{5}, x_2 = -\sqrt{5} \\ z_2 &= -4 \xrightarrow{z=x^2} x^2 = -4 \rightarrow \text{No tiene solución.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{h) } x^4 - 7x^2 + 12 &= 0 \xrightarrow{z=x^2} z^2 - 7z + 12 = 0 \\ z_1 &= 4 \xrightarrow{z=x^2} x^2 = 4 \rightarrow x_1 = 2, x_2 = -2 \\ z_2 &= 3 \xrightarrow{z=x^2} x^2 = 3 \rightarrow x_3 = \sqrt{3}, x_4 = -\sqrt{3} \end{aligned}$$

041 Resuelve las ecuaciones mediante la regla que afirma que «el producto de extremos es igual al producto de medios».

a) $\frac{x+8}{6-x} = 13$

b) $\frac{x-2}{3-x} = -\frac{5}{4}$

c) $\frac{2x+1}{3x-6} = \frac{3}{2}$

d) $\frac{6x+1}{2x-3} = \frac{11}{7}$

a) $x+8 = 13 \cdot (6-x) \rightarrow 14x = 70 \rightarrow x = 5$

b) $4 \cdot (x-2) = -5 \cdot (3-x) \rightarrow -x = -7 \rightarrow x = 7$

c) $2 \cdot (2x+1) = 3 \cdot (3x-6) \rightarrow -5x = -20 \rightarrow x = 4$

d) $7 \cdot (6x+1) = 11 \cdot (2x-3) \rightarrow 20x = -40 \rightarrow x = -2$

042 Resuelve.

a) $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{5}{12}$

b) $\frac{3-x}{x+2} - \frac{x-1}{x-2} = -2$

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{12 \cdot (x+1)}{12 \cdot (x^2-1)} + \frac{12 \cdot (x-1)}{12 \cdot (x^2-1)} &= \frac{5 \cdot (x^2-1)}{12 \cdot (x^2-1)} \\ &\rightarrow 12x+12+12x-12 = 5x^2-5 \\ &\rightarrow 5x^2-24x-5=0 \rightarrow x_1=5, x_2=-\frac{1}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{(3-x) \cdot (x-2)}{x^2-4} - \frac{(x+2) \cdot (x-1)}{x^2-4} &= \frac{-2 \cdot (x^2-4)}{x^2-4} \\ &\rightarrow -x^2+5x-6-x^2-x+2 = -2x^2+8 \\ &\rightarrow 4x=12 \rightarrow x=3 \end{aligned}$$

Ecuaciones e inecuaciones

043

Resuelve las siguientes ecuaciones con fracciones algebraicas.

a) $\frac{1}{x} + \frac{1}{2x} = \frac{3}{10}$

d) $\frac{3}{x-2} + \frac{4}{x+2} = 3$

b) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{5}{16}$

e) $\frac{-2}{x-2} + \frac{1}{(x-2)^2} = \frac{9}{16}$

c) $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-1} = \frac{5}{4}$

f) $\frac{5}{x^2-1} - \frac{10}{x+1} = \frac{-5}{3}$

a) $\frac{10}{10x} + \frac{5}{10x} = \frac{3x}{10x} \rightarrow 15 = 3x \rightarrow x = 5$

b) $\frac{16x}{16x^2} + \frac{16}{16x^2} = \frac{5x^2}{16x^2} \rightarrow 5x^2 - 16x - 16 = 0$
 $\rightarrow x_1 = 4, x_2 = \frac{-4}{5}$

c) $\frac{4 \cdot (x-1)}{4 \cdot (x^2-1)} + \frac{8 \cdot (x+1)}{4 \cdot (x^2-1)} = \frac{5 \cdot (x^2-1)}{4 \cdot (x^2-1)}$
 $\rightarrow 4x - 4 + 8x + 8 = 5x^2 - 5 \rightarrow 5x^2 - 12x - 9 = 0 \rightarrow x_1 = 3, x_2 = \frac{-3}{5}$

d) $\frac{3 \cdot (x+2)}{x^2-4} + \frac{4 \cdot (x-2)}{x^2-4} = \frac{3 \cdot (x^2-4)}{x^2-4}$
 $\rightarrow 3x + 6 + 4x - 8 = 3x^2 - 12$
 $\rightarrow 3x^2 - 7x - 10 = 0 \rightarrow x_1 = \frac{10}{3}, x_2 = -1$

e) $\frac{-32 \cdot (x-2)}{16 \cdot (x-2)^2} + \frac{16}{16 \cdot (x-2)^2} = \frac{9 \cdot (x-2)^2}{16 \cdot (x-2)^2}$
 $\rightarrow -32x + 64 + 16 = 9x^2 - 36x + 36$
 $\rightarrow 9x^2 - 4x - 44 = 0 \rightarrow x_1 = \frac{22}{9}, x_2 = -2$

f) $\frac{15}{3 \cdot (x^2-1)} - \frac{30 \cdot (x-1)}{3 \cdot (x^2-1)} = \frac{-5 \cdot (x^2-1)}{3 \cdot (x^2-1)}$
 $\rightarrow 15 - 30x + 30 = -5x^2 + 5$
 $\rightarrow 5x^2 - 30x + 40 = 0 \rightarrow x_1 = 4, x_2 = 2$

044

Resuelve las ecuaciones.

a) $(x-8) \cdot (8x-1) = 0$

b) $(3x-5) \cdot \left(x - \frac{1}{5}\right) = 0$

c) $(-x+7) \cdot (3-4x) = 0$

d) $(-4+x) \cdot (5-x) = 0$

e) $(7-2x) \cdot (4x-2) = 0$

f) $(3x-9) \cdot (10-5x) = 0$

$$\begin{aligned} \text{a) } x - 8 = 0 &\rightarrow x_1 = 8 \\ 8x - 1 = 0 &\rightarrow x_2 = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 3x - 5 = 0 &\rightarrow x_1 = \frac{5}{3} \\ x - \frac{1}{5} = 0 &\rightarrow x_2 = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } -x + 7 = 0 &\rightarrow x_1 = 7 \\ 3 - 4x = 0 &\rightarrow x_2 = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } -4 + x = 0 &\rightarrow x_1 = 4 \\ 5 - x = 0 &\rightarrow x_2 = 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } 7 - 2x = 0 &\rightarrow x_1 = \frac{7}{2} \\ 4x - 2 = 0 &\rightarrow x_2 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } 3x - 9 = 0 &\rightarrow x_1 = 3 \\ 10 - 5x = 0 &\rightarrow x_2 = 2 \end{aligned}$$

045 Calcula la solución de las siguientes ecuaciones.

$$\text{a) } x^2 \cdot (x + 1) \cdot (x + 2)^2 = 0$$

$$\text{b) } (x - 3)^2 \cdot (x + 3)^2 = 0$$

$$\text{c) } x(x - 4)^2 \cdot (x + 3)^2 = 0$$

$$\text{d) } (x^2 - 1)^2 = 0$$

$$\begin{aligned} \text{a) } x^2 = 0 &\rightarrow x_1 = x_2 = 0 \\ x + 1 = 0 &\rightarrow x_3 = -1 \\ (x + 2)^2 = 0 &\rightarrow x_4 = x_5 = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } (x - 3)^2 = 0 &\rightarrow x_1 = x_2 = 3 \\ (x + 3)^2 = 0 &\rightarrow x_3 = x_4 = -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } x = 0 &\rightarrow x_1 = 0 \\ (x - 4)^2 = 0 &\rightarrow x_2 = x_3 = 4 \\ (x + 3)^2 = 0 &\rightarrow x_4 = x_5 = -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } (x^2 - 1)^2 = 0 &\rightarrow (x + 1)^2 \cdot (x - 1)^2 = 0 \\ (x + 1)^2 = 0 &\rightarrow x_1 = x_2 = -1 \\ (x - 1)^2 = 0 &\rightarrow x_3 = x_4 = 1 \end{aligned}$$

$$\text{e) } (x - 1)^2 \cdot x^3 = 0$$

$$\text{f) } (x + 1)^3 \cdot (x - 2)^2 = 0$$

$$\text{g) } \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{x}{2} - 3\right)^2 = 0$$

$$\begin{aligned} \text{e) } x^3 = 0 &\rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0 \\ (x - 1)^2 = 0 &\rightarrow x_4 = x_5 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } (x + 1)^3 = 0 &\rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = -1 \\ (x - 2)^2 = 0 &\rightarrow x_4 = x_5 = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{g) } x^2 - \frac{1}{4} = 0 &\rightarrow x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = -\frac{1}{2} \\ \left(\frac{x}{2} - 3\right)^2 = 0 &\rightarrow x_3 = x_4 = 6 \end{aligned}$$

046 Resuelve las ecuaciones.

$$\text{a) } (x^2 - 2) \cdot (x^2 - 3) = 2$$

$$\text{b) } (2x^2 + 1) \cdot (x^2 + 2) = x^2 \cdot (x^2 - 2)$$

$$\begin{aligned} \text{a) } x^4 - 5x^2 + 6 = 2 &\rightarrow x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \xrightarrow{z=x^2} z^2 - 5z + 4 = 0 \\ z_1 = 1 &\xrightarrow{z=x^2} x^2 = 1 \rightarrow x_1 = 1, x_2 = -1 \\ z_2 = 4 &\xrightarrow{z=x^2} x^2 = 4 \rightarrow x_3 = 2, x_4 = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 2x^4 + 5x^2 + 2 = x^4 - 2x^2 &\rightarrow x^4 + 7x^2 + 2 = 0 \xrightarrow{z=x^2} z^2 + 7z + 2 = 0 \\ z_1 = \frac{-7 + \sqrt{41}}{2} &\xrightarrow{z=x^2} x^2 = \frac{-7 + \sqrt{41}}{2} \rightarrow \text{No tiene solución.} \\ z_2 = \frac{-7 - \sqrt{41}}{2} &\xrightarrow{z=x^2} x^2 = \frac{-7 - \sqrt{41}}{2} \rightarrow \text{No tiene solución.} \end{aligned}$$

Ecuaciones e inecuaciones

047 HAZLO ASÍ

¿CÓMO RESOLVEMOS ECUACIONES DE GRADO 3 CON ALGUNA RAÍZ ENTERA?

Resuelve esta ecuación: $x^3 - 4x^2 + 4x - 1 = 0$

PRIMERO. Se halla la raíz entera por la regla de Ruffini.

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -4 & 4 & -1 \\ & & 1 & -3 & 1 \\ \hline & 1 & -3 & 1 & 0 \end{array}$$

$$x^3 - 4x^2 + 4x - 1 = (x - 1) \cdot (x^2 - 3x + 1)$$

SEGUNDO. Se resuelve la ecuación obtenida al factorizar.

$$(x - 1) \cdot (x^2 - 3x + 1) = 0$$

$$\begin{aligned} x - 1 = 0 &\rightarrow x_1 = 1 \\ x^2 - 3x + 1 = 0 &\rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4}}{2} \rightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \\ x_3 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

048 ●● Halla la solución de estas ecuaciones de grado superior a 2, tal como se ha explicado en la actividad anterior.

a) $x^3 - 4x^2 - 4x + 16 = 0$

e) $2x^3 - 11x^2 + 12x = 0$

b) $x^4 + 2x^3 - 8x^2 = 0$

f) $x^3 - 6x^2 + 8x = 0$

c) $x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 12x = 0$

g) $2x^3 - 3x^2 - 2x + 3 = 0$

d) $x^3 - 7x^2 + 10x = 0$

a) $\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -4 & -4 & 16 \\ 4 & & 4 & 0 & -16 \\ \hline & 1 & 0 & -4 & 0 \end{array} \rightarrow x_1 = 4$

$$x^2 - 4 = 0 \rightarrow x_2 = 2, x_3 = -2$$

b) $x^2 \cdot (x^2 + 2x - 8) = 0$

$$x^2 = 0 \rightarrow x_1 = x_2 = 0$$

$$x^2 + 2x - 8 = 0 \rightarrow x_3 = 2, x_4 = -4$$

c) $x \cdot (x^3 - 2x^2 - 11x + 12) = 0$

$$x_1 = 0$$

$$x^3 - 2x^2 - 11x + 12 = 0$$

$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -2 & -11 & 12 \\ 1 & & 1 & -1 & -12 \\ \hline & 1 & -1 & -12 & 0 \end{array} \rightarrow x_2 = 1$

$$x^2 - x - 12 = 0 \rightarrow x_3 = 4, x_4 = -3$$

d) $x \cdot (x^2 - 7x + 10) = 0$

$$x_1 = 0$$

$$x^2 - 7x + 10 = 0 \rightarrow x_2 = 5, x_3 = 2$$

e) $2x^3 - 11x^2 + 12x = 0 \rightarrow x \cdot (2x^2 - 11x + 12) = 0 \rightarrow x_1 = 0$

$$2x^2 - 11x + 12 = 0 \rightarrow x_2 = 4, x_3 = \frac{3}{2}$$

f) $x \cdot (x^2 - 6x + 8) = 0$

$$x_1 = 0 \quad x^2 - 6x + 8 = 0 \rightarrow x_2 = 2, x_3 = 4$$

g) $2x^3 - 3x^2 - 2x + 3 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -3 & -2 & 3 \\ 1 & & 2 & -1 & -3 \\ \hline & 2 & -1 & -3 & 0 \end{array}$$

$$2x^3 - 3x^2 - 2x + 3 = 0 \rightarrow 2x^3 - 3x^2 - 2x + 3 = (x - 1) \cdot (2x^2 - x - 3) = 0$$

$$\rightarrow x_1 = 1$$

$$2x^2 - x - 3 = 0 \rightarrow x_2 = -1, x_3 = \frac{3}{2}$$

049 Resuelve las ecuaciones, factorizando el polinomio de la ecuación.

a) $x^3 - x^2 = 0$ c) $x^3 - 25x = 0$ e) $x^3 - 4x = 0$ g) $x^4 - x^3 = 0$
 b) $x^3 - x = 0$ d) $x^3 + 2x^2 = 0$ f) $x^3 - 5x^2 = 0$ h) $x^5 - 16x^3 = 0$

a) $x^2 \cdot (x - 1) = 0$

$$x^2 = 0 \rightarrow x_1 = x_2 = 0$$

$$x - 1 = 0 \rightarrow x_3 = 1$$

b) $x \cdot (x - 1) \cdot (x + 1) = 0$

$$x = 0 \rightarrow x_1 = 0$$

$$x + 1 = 0 \rightarrow x_2 = -1$$

$$x - 1 = 0 \rightarrow x_3 = 1$$

c) $x \cdot (x - 5) \cdot (x + 5) = 0$

$$x = 0 \rightarrow x_1 = 0$$

$$x + 5 = 0 \rightarrow x_2 = -5$$

$$x - 5 = 0 \rightarrow x_3 = 5$$

d) $x^2 \cdot (x + 2) = 0$

$$x^2 = 0 \rightarrow x_1 = x_2 = 0$$

$$x + 2 = 0 \rightarrow x_3 = -2$$

e) $x \cdot (x - 2) \cdot (x + 2) = 0$

$$x = 0 \rightarrow x_1 = 0$$

$$x + 2 = 0 \rightarrow x_2 = -2$$

$$x - 2 = 0 \rightarrow x_3 = 2$$

f) $x^2 \cdot (x - 5) = 0$

$$x^2 = 0 \rightarrow x_1 = x_2 = 0$$

$$x - 5 = 0 \rightarrow x_3 = 5$$

g) $x^3 \cdot (x - 1) = 0$

$$x^3 = 0 \rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0$$

$$x - 1 = 0 \rightarrow x_4 = 1$$

h) $x^3 \cdot (x - 4) \cdot (x + 4) = 0$

$$x^3 = 0 \rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0$$

$$x - 4 = 0 \rightarrow x_4 = 4$$

$$x + 4 = 0 \rightarrow x_5 = -4$$

050 Escribe ecuaciones con estas soluciones.

a) $x_1 = 2, x_2 = -1, x_3 = 3$ y $x_4 = 4$

b) $x_1 = 1$ y $x_2 = -2$ (solución doble)

c) $x_1 = 4$ y $x_2 = -3$ (solución triple)

d) $x_1 = -5, x_2 = 1$ (solución doble) y $x_3 = -1$ (solución triple)

e) $x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = \frac{1}{2}$ y $x_3 = \frac{1}{4}$

a) $(x - 2) \cdot (x + 1) \cdot (x - 3) \cdot (x - 4) = 0$

b) $(x - 1) \cdot (x + 2)^2 = 0$

c) $(x - 4) \cdot (x + 3)^3 = 0$

d) $(x + 5) \cdot (x - 1)^2 \cdot (x + 1)^3 = 0$

e) $\left(x - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{1}{4}\right) = 0$

Ecuaciones e inecuaciones

051

Resuelve las siguientes ecuaciones con fracciones algebraicas.

a) $\frac{x^2}{4} - \frac{2}{x} = 0$ d) $\frac{x^2 - 3}{9 - x} = 0$ g) $\frac{16}{5x} - \frac{81x^3}{20} = 0$

b) $\frac{1}{x^4} - \frac{1}{16} = 0$ e) $\frac{x^2}{5} - \frac{125}{x^2} = 0$ h) $\frac{81x^3 - 192}{5x - 20} = 0$

c) $\frac{x^2}{9} - \frac{3}{x} = 0$ f) $\frac{1.331}{12x} - \frac{2x^2}{3} = 0$

a) $\frac{x^3 - 8}{4x} = 0 \rightarrow x^3 - 8 = 0 \rightarrow (x - 2) \cdot (x^2 + 2x + 4) = 0 \rightarrow x = 2$

b) $\frac{16 - x^4}{16x^2} = 0 \rightarrow x^4 - 16 = 0 \rightarrow (x + 2) \cdot (x - 2) \cdot (x^2 + 4) = 0$
 $\rightarrow x_1 = -2, x_2 = 2$

c) $\frac{x^3 - 27}{9x} = 0 \rightarrow x^3 - 27 = 0 \rightarrow (x - 3) \cdot (x^2 + 3x + 9) = 0 \rightarrow x = 3$

d) $\frac{x^2 - 3}{9 - x} = 0 \rightarrow x^2 - 3 = 0 \rightarrow x_1 = \sqrt{3}, x_2 = -\sqrt{3}$

e) $\frac{x^4 - 625}{5x^2} = 0 \rightarrow x^4 - 625 = 0 \rightarrow (x + 5) \cdot (x - 5) \cdot (x^2 + 25) = 0$
 $\rightarrow x_1 = -5, x_2 = 5$

f) $\frac{1.331 - 8x^3}{13x} = 0 \rightarrow 8x^3 - 1.331 = 0$
 $\rightarrow (2x - 11) \cdot (4x^2 + 22x + 121) = 0 \rightarrow x = \frac{11}{2}$

g) $\frac{64 - 81x^4}{20x} = 0 \rightarrow 81x^4 - 64 = 0$
 $\rightarrow (3x + \sqrt{8}) \cdot (3x - \sqrt{8}) \cdot (9x^2 + 8) = 0 \rightarrow x_1 = -\frac{\sqrt{8}}{3}, x_2 = \frac{\sqrt{8}}{3}$

h) $81x^3 - 192 = 0 \rightarrow 27x^3 - 64 = 0 \rightarrow$
 $\rightarrow (3x - 4) \cdot (9x^2 + 12x + 16) = 0 \rightarrow x = \frac{4}{3}$

052

Calcula la solución de estas ecuaciones con fracciones algebraicas.

a) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} = \frac{7}{8}$ c) $\frac{5}{x+2} + \frac{10}{(x+2)^2} = \frac{x+4}{5}$

b) $\frac{3}{x+1} - \frac{2}{x} + \frac{1}{x-1} = 0$ d) $\frac{x+4}{2x} - \frac{x-3}{x^3} = \frac{30x+6}{2x^3}$

a) $\frac{8x^2 + 8x + 8}{8x^3} = \frac{7x^3}{8x^3} \rightarrow 7x^3 - 8x^2 - 8x - 8 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrr} 7 & 7 & -8 & -8 & -8 \\ 2 & & 14 & 12 & 8 \\ \hline & 7 & 6 & 4 & 0 \end{array} \rightarrow x_1 = 2 \quad 7x^2 + 6x + 4 = 0 \rightarrow \text{Sin solución}$$

b) $\frac{3x \cdot (x - 1) - 2(x^2 - 1) + x(x + 1)}{x \cdot (x^2 - 1)} = 0$

$\rightarrow 3x^2 - 3x - 2x^2 + 2 + x^2 + x = 0$

$\rightarrow 2x^2 - 2x + 2 = 0 \rightarrow x^2 - x + 1 = 0$

$\rightarrow \text{Sin solución}$

$$c) \frac{25x + 50 + 50}{5 \cdot (x + 2)^2} = \frac{(x + 4) \cdot (x + 2)^2}{5 \cdot (x + 2)^2} \rightarrow x^3 + 8x^2 - 5x - 84 = 0$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & 18 & -5 & -84 \\ & & 3 & 33 & 84 \\ \hline & 1 & 11 & 28 & 0 \end{array} \rightarrow x_1 = 3$$

$$x^2 + 11x + 28 = 0 \rightarrow x_2 = -7, x_3 = -4$$

$$d) \frac{x^2 \cdot (x + 4) - 2 \cdot (x - 3)}{2x^3} = \frac{30x + 6}{2x^3} \rightarrow x^3 + 4x^2 - 32x = 0$$

$$\rightarrow x \cdot (x^2 + 4x - 32) = 0$$

$$x_1 = 0 \rightarrow \text{No es solución porque anula al denominador}$$

$$x^2 + 4x - 32 = 0 \rightarrow x_2 = -8, x_3 = 4$$

053 Resuelve las siguientes ecuaciones con radicales.

a) $\sqrt{2x + 5} - 3x + 3 = 0$

e) $3x - \sqrt{5x} = 10$

b) $\sqrt{8 + 2x} + x = 0$

f) $1 + \sqrt{4 - 2x} = x + 11$

c) $\sqrt{9 + 7x} - 2x = 2$

g) $\sqrt{5x + 5} = x + 1$

d) $x - \sqrt{4x - 3} = 0$

h) $\sqrt{4 - 8x} + x = 2$

a) $\sqrt{2x + 5} = 3x - 3 \rightarrow 2x + 5 = 9x^2 - 18x + 9 \rightarrow 9x^2 - 20x + 4 = 0$
 $x_1 = 2; x_2 = \frac{2}{9}$ no es solución porque $\sqrt{2 \cdot \frac{2}{9} + 5} - 3 \cdot \frac{2}{9} + 3 = \frac{14}{3} \neq 0$

b) $\sqrt{8 + 2x} = -x \rightarrow 2x + 8 = x^2 \rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0$
 $x_1 = -2, x_2 = 4$ no es solución porque $\sqrt{8 + 2 \cdot 4} + 4 = 8 \neq 0$

c) $\sqrt{9 + 7x} = 2x + 2 \rightarrow 9 + 7x = 4x^2 + 8x + 4 \rightarrow 4x^2 + x - 5 = 0$
 $x_1 = 1; x_2 = \frac{-5}{4}$ no es solución porque $\sqrt{9 + 7 \cdot \frac{-5}{4}} - 2 \cdot \frac{-5}{4} = 3 \neq 2$

d) $\sqrt{4x - 3} = x \rightarrow 4x - 3 = x^2 \rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$
 $x_1 = 1; x_2 = 3$

e) $\sqrt{5x} = 3x - 10 \rightarrow 5x = 9x^2 - 60x + 100 \rightarrow 9x^2 - 65x + 100 = 0$
 $x_1 = 5; x_2 = \frac{20}{9}$ no es solución porque $3 \cdot \frac{20}{9} - \sqrt{5 \cdot \frac{20}{9}} = \frac{10}{3} \neq 10$

f) $\sqrt{4 - 2x} = x + 10 \rightarrow 4 - 2x = x^2 + 20x + 100 \rightarrow x^2 + 22x + 96 = 0$
 $x_1 = -6; x_2 = -16$ no es solución porque $1 + \sqrt{4 - 2(-16)} = 7 \neq -16 + 11$

g) $\sqrt{5x + 5} = x + 1 \rightarrow 5x + 5 = x^2 + 2x + 1 \rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$
 $x_1 = -1; x_2 = 4$

h) $\sqrt{4 - 8x} = 2 - x \rightarrow 4 - 8x = x^2 - 4x + 4 \rightarrow x^2 + 4x = 0$
 $x_1 = 0; x_2 = -4$

Ecuaciones e inecuaciones

054

Halla la solución de estas ecuaciones con radicales.

a) $\sqrt{x^2 + 3} + \sqrt{4x} = 0$

b) $\sqrt{5x + 1} = \sqrt{x^2 - 5}$

a) $\sqrt{x^2 + 3} + \sqrt{4x} = 0 \rightarrow \sqrt{x^2 + 3} = -\sqrt{4x} \rightarrow$
 $\rightarrow (\sqrt{x^2 + 3})^2 = (-\sqrt{4x})^2 \rightarrow x^2 + 3 = 4x \rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$
 $\rightarrow x_1 = 1, x_2 = 3 \rightarrow$ ninguna es solución porque al sustituir no verifican la ecuación.

b) $\sqrt{5x + 1} = \sqrt{x^2 - 5} \rightarrow 5x + 1 = x^2 - 5 \rightarrow x^2 - 5x - 6 = 0$
 $\rightarrow x_1 = 6, x_2 = -1 \rightarrow$ no es solución porque $\sqrt{(-1)^2 - 5}$ no existe.

055

Asocia cada enunciado con su correspondiente desigualdad.

a) 1 es menor que 5.

1) $2 > -4$

b) 2 es mayor que -4 .

2) $5 > 3$

c) -13 es menor que -2 .

3) $1 < 5$

d) -4 es mayor que -7 .

4) $-14 < 6$

e) 5 es mayor que 3.

5) $-4 > -7$

f) -14 es menor que 6.

6) $-13 < -2$

a) $\rightarrow 3)$

c) $\rightarrow 6)$

e) $\rightarrow 2)$

b) $\rightarrow 1)$

d) $\rightarrow 5)$

f) $\rightarrow 4)$

056

Expresa cada enunciado como inecuación, como intervalo y gráficamente.

a) Números menores que 9 y mayores o iguales que 4.

b) Números menores o iguales que 10.

c) Números mayores que -3 y menores que 3.

d) Números mayores o iguales que -6 .

e) Números menores que -5 y mayores que -10 .

f) Números mayores que -8 y menores o iguales que 0.

g) Los años que tiene una persona mayor de edad.

h) Los números de la matrícula de un coche.

a) $4 \leq x < 9 \rightarrow [4, 9)$

e) $-10 < x < -5 \rightarrow (-10, -5)$

b) $x \leq 10 \rightarrow (-\infty, 10]$

f) $-8 < x \leq 0 \rightarrow (-8, 0]$

c) $-3 < x < 3 \rightarrow (-3, 3)$

g) $x \geq 18 \rightarrow [18, +\infty)$

d) $x \geq -6 \rightarrow [-6, +\infty)$

h) $0 \leq x \leq 9.999 \rightarrow [0, 9.999]$

057

Completa, para $x = 2$, con el signo ($<$, $\leq$, $>$, $\geq$) que corresponda.

a) $2x \square 3$

e) $-2x \square 3x$

i) $-4x \square -1$

b) $-2x \square 3$

f) $2 \square -3x$

j) $3x \square -x + 3$

c) $2x \square -3$

g) $-2 \square -3x$

d) $-2x \square -3$

h) $4x \square 1$

- a) $2x > 3$ f) $2 > -3x$
 b) $-2x < 3$ g) $-2 > -3x$
 c) $2x > -3$ h) $4x > 1$
 d) $-2x < -3$ i) $-4x < -1$
 e) $-2x < 3x$ j) $3x > -x + 3$

058 Razona si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones.

- a) $x = \frac{1}{2}$ verifica que $1 + x \leq \frac{3}{2}$.
 b) $x = 0$ verifica que $2x + 3 < 3$.
 c) $x = -3$ verifica que $\frac{4x + 5}{2} \leq \frac{14}{4}$.
 d) $x = -5$ verifica que $\frac{x + 3}{2} \geq -4$.
- a) Verdadera c) Verdadera
 b) Falsa d) Verdadera

059 Resuelve las inecuaciones.

- a) $-2x < 2x - 4$ d) $x + 1 < 2x - 1$
 b) $2x > 4x + 2$ e) $4x \geq 1 - x$
 c) $5x \leq x + 5$ f) $-2x \geq 0$
- a) $-2x < 2x - 4 \rightarrow -4x < -4 \rightarrow x > 1 \rightarrow (1, +\infty)$
 b) $2x > 4x + 2 \rightarrow -2x > 2 \rightarrow x < -1 \rightarrow (-\infty, -1)$
 c) $5x \leq x + 5 \rightarrow 4x \leq 5 \rightarrow x \leq \frac{5}{4} \rightarrow \left(-\infty, \frac{5}{4}\right]$
 d) $x + 1 < 2x - 1 \rightarrow -x < -2 \rightarrow x > 2 \rightarrow (2, +\infty)$
 e) $4x \geq 1 - x \rightarrow 5x \geq 1 \rightarrow x \geq \frac{1}{5} \rightarrow \left[\frac{1}{5}, +\infty\right)$
 f) $-2x \geq 0 \rightarrow x \leq 0 \rightarrow (-\infty, 0]$

060 Resuelve estas inecuaciones.

- a) $5 - 2x \leq 3 + 2(4 - 2x)$ c) $(7 + x) \cdot (-8) - 2 < 9x - 3$
 b) $x + 6(x - 5) > 3x + 2$ d) $2x - 4(-3 - x) \geq 5x - 10$
- a) $5 - 2x \leq 3 + 8 - 4x \rightarrow 2x \leq 6 \rightarrow x \leq 3 \rightarrow (-\infty, 3]$
 b) $x + 6x - 30 > 3x + 2 \rightarrow 4x > 32 \rightarrow x > 8 \rightarrow (8, +\infty)$
 c) $-56 - 8x - 2 < 9x - 3 \rightarrow -17x < 55 \rightarrow x > \frac{-55}{17} \rightarrow \left(\frac{-55}{17}, +\infty\right)$
 d) $2x + 12 + 4x \geq 5x - 10 \rightarrow x \geq -22 \rightarrow [-22, +\infty)$

Ecuaciones e inecuaciones

061 Halla la solución de las inecuaciones.

a) $\frac{x+1}{2} + \frac{x+4}{3} \leq \frac{1}{6}$

b) $\frac{x+2}{3} - \frac{x-1}{4} \leq 12$

c) $\frac{x}{4} - \frac{x}{8} + 5 \geq x$

d) $\frac{2x-1}{6} - \frac{3x}{10} < \frac{4x-5}{2}$

e) $1 + \frac{x}{5} - \frac{x}{10} \leq \frac{x}{12}$

f) $\frac{3x+4}{7} - \frac{x}{3} > 4 - 6x$

a) $3x + 3 + 2x + 8 \leq 1 \rightarrow 5x \leq -10 \rightarrow x \leq -2 \rightarrow (-\infty, -2]$

b) $4x + 8 - 3x + 3 \leq 144 \rightarrow x \leq 133 \rightarrow (-\infty, 133]$

c) $2x - x + 40 \geq 8x \rightarrow -7x \geq -40 \rightarrow x \leq \frac{40}{7} \rightarrow \left(-\infty, \frac{40}{7}\right]$

d) $10x - 5 - 9x < 60x - 75 \rightarrow -59x < -70 \rightarrow x > \frac{70}{59} \rightarrow \left(\frac{70}{59}, +\infty\right)$

e) $60 + 12x - 6x \leq 5x \rightarrow x \leq 60 \rightarrow (-\infty, 60]$

f) $9x + 12 - 7x > 84 - 126x \rightarrow 128x > 72 \rightarrow x > \frac{16}{9} \rightarrow \left(\frac{16}{9}, +\infty\right)$

062 Resuelve las inecuaciones de segundo grado.

a) $x^2 - 1 \geq 0$

e) $x^2 - 9x + 20 < 0$

b) $(x-2) \cdot (x+3) > 0$

f) $(x+1) \cdot (x-4) \geq 0$

c) $x^2 - 4 < 0$

g) $4x^2 - 16x < 0$

d) $x \cdot (x+5) \leq 0$

h) $x^2 \leq 2x$

a) $x^2 - 1 \geq 0$

$x^2 - 1 = 0 \rightarrow x_1 = 1, x_2 = -1$

La solución es los intervalos $(-\infty, -1]$ y $[1, +\infty)$.

b) $(x-2) \cdot (x+3) > 0$

$(x-2) \cdot (x+3) = 0 \rightarrow x_1 = 2, x_2 = -3$

La solución es los intervalos $(-\infty, -3)$ y $(2, +\infty)$.

c) $x^2 - 4 < 0$

$x^2 - 4 = 0 \rightarrow x_1 = 2, x_2 = -2$

La solución es el intervalo $(-2, 2)$.

d) $x \cdot (x+5) \leq 0$

$x \cdot (x+5) = 0 \rightarrow x_1 = 0, x_2 = -5$

La solución es el intervalo $[-5, 0]$.

e) $x^2 - 9x + 20 < 0$

$$x^2 - 9x + 20 = 0 \rightarrow x_1 = 4, x_2 = 5$$

La solución es el intervalo (4, 5).

f) $(x + 1) \cdot (x - 4) \geq 0$

$$(x + 1) \cdot (x - 4) = 0 \rightarrow x_1 = -1, x_2 = 4$$

La solución es los intervalos $(-\infty, -1]$ y $[4, +\infty)$.

g) $4x^2 - 16x < 0$

$$4x^2 - 16x = 0 \rightarrow x_1 = 0, x_2 = 4$$

La solución es el intervalo (0, 4).

h) $x^2 \leq 2x \rightarrow x^2 - 2x \leq 0$

$$x^2 - 2x = 0 \rightarrow x_1 = 0, x_2 = 2$$

La solución es el intervalo [0, 2].

063 Resuelve las inecuaciones de segundo grado.

a) $x^2 - 2x + 1 < 0$

b) $x^2 + 6x + 9 \leq 0$

c) $x^2 \geq 1$

d) $x^2 - 8x + 16 \geq 0$

e) $x^2 + 3x + 9 < 0$

f) $x^2 + x + 1 \geq 0$

a) $x^2 - 2x + 1 < 0$

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \rightarrow x_1 = x_2 = 1$$

No tiene solución.

b) $x^2 + 6x + 9 \leq 0$

$$x^2 + 6x + 9 = 0 \rightarrow x_1 = x_2 = -3$$

La solución es $x = -3$.

c) $x^2 \geq 1 \rightarrow x^2 - 1 \geq 0$

$$x^2 - 1 = 0 \rightarrow x_1 = 1, x_2 = -1$$

La solución es los intervalos $(-\infty, -1]$ y $[1, +\infty)$.

d) $x^2 - 8x + 16 \geq 0$

$$x^2 - 8x + 16 = 0 \rightarrow x_1 = x_2 = 4$$

La solución es toda la recta real.

e) $x^2 + 3x + 9 < 0$

$$x^2 + 3x + 9 = 0 \rightarrow \text{No tiene solución.}$$

En todos los valores de x es positiva, por lo que no tiene solución.

f) $x^2 + x + 1 \geq 0$

$$x^2 + x + 1 = 0 \rightarrow \text{No tiene solución.}$$

En todos los valores de x es positiva, por lo que la solución es toda la recta real.

Ecuaciones e inecuaciones

064 HAZLO ASÍ

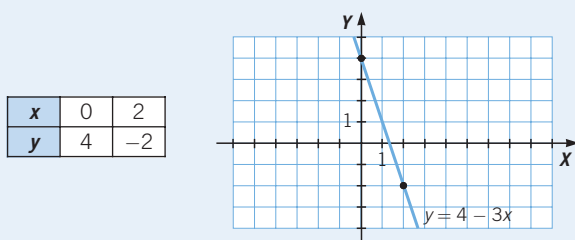
¿CÓMO SE RESUELVEN INECUACIONES DE PRIMER GRADO CON DOS INCÓGNITAS?

Resuelve la inecuación $3x + y > 4$.

PRIMERO. Se considera la función lineal asociada a la inecuación, sustituyendo el signo $>$ por $=$.

$$3x + y > 4 \rightarrow 3x + y = 4 \rightarrow y = 4 - 3x$$

SEGUNDO. Se representa gráficamente la función que representa, que será una recta que divide el plano en dos partes.



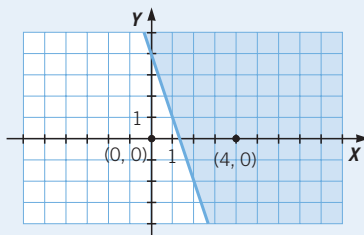
TERCERO. Se elige un punto en cada parte del plano y se comprueba si cumple la inecuación.

Tomamos, por ejemplo, el punto $(4, 0)$:

$$3 \cdot 4 + 0 > 4 \rightarrow \text{Cumple la inecuación.}$$

El punto $(0, 0)$ del otro semiplano:

$$3 \cdot 0 + 0 \not> 4 \rightarrow \text{No cumple la inecuación.}$$



Si un punto del semiplano cumple la desigualdad, entonces todos la cumplen.

La solución es el semiplano de la derecha.

065 Resuelve las siguientes inecuaciones.

a) $x + y \geq 2$

b) $2x - y < 3$

c) $-x + 2y > 4$

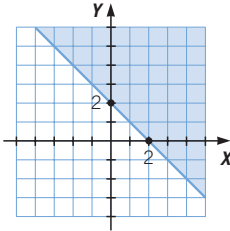
d) $3x + 5y \leq 0$

e) $\frac{x}{2} + y > 1$

f) $\frac{2x}{3} < 1 + \frac{y}{2}$

a) Representamos $y = 2 - x$

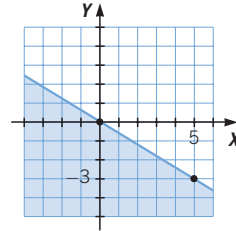
x	0	2
y	2	0



La recta es parte de la solución.

d) Representamos $y = \frac{-3x}{5}$

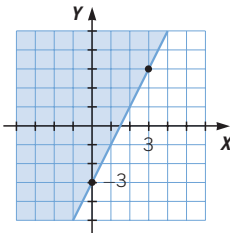
x	0	5
y	0	-3



La recta es parte de la solución.

b) Representamos $y = 2x - 3$

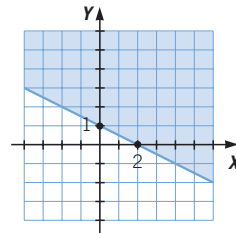
x	0	3
y	-3	3



La recta no es parte de la solución.

e) Representamos $y = 1 - \frac{x}{2}$

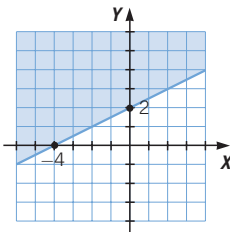
x	0	2
y	1	0



La recta no es parte de la solución.

c) Representamos $y = \frac{x + 4}{2}$

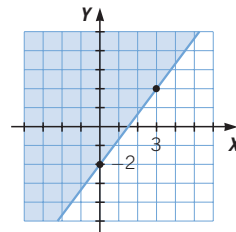
x	0	-4
y	2	0



La recta no es parte de la solución.

f) Representamos $y = \frac{4x - 6}{3}$

x	0	3
y	-2	2



La recta no es parte de la solución.

Ecuaciones e inecuaciones

- 066** ●● Jorge tiene 3 discos más que Marta, Marta tiene 3 discos más que Alberto y Alberto tiene 3 discos más que Sara. Entre los cuatro tienen 58 discos. ¿Cuántos discos tiene cada uno?

Discos de Sara: x Discos de Marta: $x + 6$
Discos de Alberto: $x + 3$ Discos de Jorge: $x + 9$
$$x + x + 3 + x + 6 + x + 9 = 58 \rightarrow x = 10$$

Discos de Sara: 10 Discos de Marta: 16
Discos de Alberto: 13 Discos de Jorge: 19

- 067** ●●● Un matrimonio y sus tres hijos viajan en tren. Si el billete de adulto vale el doble que el de niño, y el coste total de los billetes es 8,75 €, ¿cuánto ha costado cada billete?

Billete de niño: x Billete de adulto: $2x$
$$3 \cdot x + 2 \cdot 2 \cdot x = 8,75 \rightarrow x = 1,25 \text{ €}$$

Billete de niño: 1,25 € Billete de adulto: 2,50 €

- 068** ●● Claudia se ha gastado el 25 % de sus ahorros en un regalo y todavía le quedan 120 €. ¿Cuánto dinero tenía ahorrado?

Dinero ahorrado: x
$$x - 0,25x = 120 \rightarrow x = 160 \text{ € tenía ahorrados.}$$

- 069** ●● En una tienda, Pedro observa unos pantalones que están rebajados un 20 % y cuestan 18 €. ¿Cuánto valían los pantalones antes de efectuar el descuento?

Precio de los pantalones: x
$$x - 0,20x = 18 \text{ €} \rightarrow x = 22,50 \text{ €}$$

Los pantalones valían 22,50 €.

- 070** ●● Halla tres números enteros consecutivos cuya suma sea 27.

Números: $x - 1$, x , $x + 1$
$$x - 1 + x + x + 1 = 27 \rightarrow x = 9$$

Los números son 8, 9 y 10.

- 071** ●● El transporte en taxi cuesta 2,50 € de bajada de bandera y 1,50 € por cada kilómetro recorrido. Si en un trayecto hemos pagado 13 €, ¿qué distancia hemos recorrido?

Distancia recorrida (km): x
$$2,50 + 1,50x = 13 \rightarrow x = 7 \text{ km}$$

Hemos recorrido 7 km.



- 072** ●● Halla dos números consecutivos, sabiendo que la suma de sus cuadrados es 1.301.

Números: $x, x + 1$

$$x^2 + (x + 1)^2 = 1.301 \rightarrow 2x^2 + 2x - 1.300 = 0$$

$$x_1 = 25, x_2 = -26$$

Los números son 25 y 26, o -26 y -25.

- 073** ●● Calcula dos números pares consecutivos, cuya diferencia de sus cuadrados sea 60.

Números: $x, x + 2$

$$(x + 2)^2 - x^2 = 60 \rightarrow 4x = 56 \rightarrow x = 14$$

Los números son 14 y 16.

- 074** ●● El dividendo y el resto de una división de números enteros son 200 y 5, respectivamente. Halla el divisor y el cociente si se diferencian en dos unidades. Recuerda: $D = d \cdot c + R$.

Divisor: x

Cociente: $x - 2$

$$x \cdot (x - 2) + 5 = 200 \rightarrow x^2 - 2x - 195 = 0$$

$$x_1 = 15, x_2 = -13 \text{ (solución negativa no válida)}$$

Divisor: 15

Cociente: 13

- 075** ●● Halla el divisor y el cociente obtenido al efectuar una división si el dividendo es 140 y el resto es 12, sabiendo que el cociente es la mitad del divisor.

Divisor: $2x$

Cociente: x

$$2x \cdot x + 12 = 140 \rightarrow 2x^2 = 128$$

$$x_1 = 8, x_2 = -8 \text{ (solución negativa no válida)}$$

Divisor: 16

Cociente: 8

- 076** ●● Un jardín rectangular tiene 5.600 m² de superficie y mide 10 m más de largo que de ancho. ¿Qué dimensiones tiene el jardín?

Ancho: x

Largo: $x + 10$

$$x \cdot (x + 10) = 5.600 \rightarrow x^2 + 10x - 5.600 = 0$$

$$x_1 = 70, x_2 = -80 \text{ (solución negativa no válida)}$$

Ancho: 70 m

Largo: 80 m

Ecuaciones e inecuaciones

077

● ● ● ¿Cuántos hermanos hay en una familia si por Navidad cada uno hace un regalo a cada hermano y entre todos reúnen 30 regalos?

N.º de hermanos: x

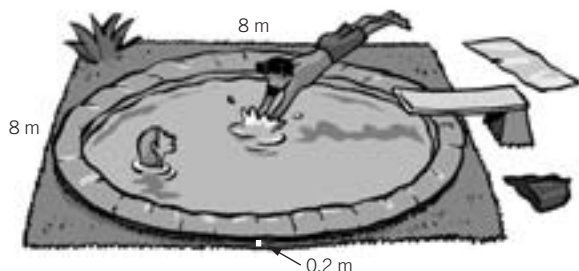
$$x \cdot (x - 1) = 30 \rightarrow x^2 - x - 30 = 0$$

$$x_1 = 6, x_2 = -5 \text{ (solución negativa no válida)}$$

Hay 6 hermanos.

078

● ● ● ¿Qué superficie ocupa el jardín que rodea la piscina?



$$\text{El radio de la piscina es: } r = \frac{8 - 2 \cdot 0,2}{2} = 3,8 \text{ m}$$

$$\text{Área del jardín: } 8^2 - \pi \cdot 3,8^2 = 18,6584 \text{ m}^2$$

079

● ● Si aumentamos la base de un cuadrado en 25 cm y su altura la disminuimos en 24 cm, obtenemos un rectángulo de igual área que el cuadrado.

a) Halla cuánto mide el lado del cuadrado.

b) ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?

$$\text{a) } x^2 = (x - 24)(x + 25) \rightarrow x = 600 \text{ cm}$$

El lado del cuadrado mide 600 cm.

$$\text{b) Base: } 600 + 25 = 625 \text{ cm}$$

$$\text{Altura: } 600 - 24 = 576 \text{ cm}$$

080

● ● La superficie de un rectángulo mide 360 cm^2 . Aumentando su base en 4 cm y disminuyendo su altura en 3 cm, se obtiene un rectángulo de igual área que el primero. Halla las dimensiones de los dos rectángulos.

Base: x

$$\text{Altura: } \frac{360}{x}$$

$$(x + 4) \cdot \left(\frac{360}{x} - 3 \right) = 360$$

$$\rightarrow (x + 4) \cdot (360 - 3x) = 360x \rightarrow 3x^2 + 12x - 1.440 = 0$$

$$x_1 = 20, x_2 = -24 \text{ (solución negativa no válida)}$$

Base: 20 cm

Altura: 18 cm

- 081** ●● Un peregrino camina a una velocidad comprendida entre 4 km/h y 6 km/h. Halla entre qué valores se encuentra la distancia recorrida, cuando hayan transcurrido:



- a) 4 horas.
 b) 5 horas y media.
 c) 2 días, si camina 7 horas diarias.
- a) Entre 16 km y 24 km.
 b) Entre 22 km y 33 km.
 c) Entre 56 km y 84 km.

- 082** ●●● Carlos tiene entre 6 y 10 años, Javier tiene 4 años menos que Carlos y María tiene 6 años más que Javier. Determina los intervalos en los que se encuentran las edades de Javier y María.

La edad de Javier se encuentra comprendida entre 2 y 6 años.

La edad de María se encuentra comprendida entre 8 y 12 años.

- 083** ●● Calcula la medida del lado de los cuadrados cuya área sea menor que 81 cm². ¿Entre qué valores se encuentra?

$$x^2 < 81 \rightarrow x^2 - 81 < 0$$

$$x^2 - 81 = 0 \rightarrow x_1 = -9, x_2 = 9$$

Como el lado debe ser positivo, el lado debe estar en el intervalo (0, 9).

Los lados serán menores de 9 cm.

- 084** ●● Halla las dimensiones de los cuadrados de área menor que 36 m².

$$x^2 < 36 \rightarrow x^2 - 36 < 0$$

$$x^2 - 36 = 0 \rightarrow x_1 = -6, x_2 = 6$$

Como el lado debe ser positivo, su valor debe estar situado en el intervalo (0, 6).

Los lados serán menores de 6 cm.

- 085** ●● Obtén los números tales que su triple menos 2 es mayor que su cuádruplo menos 1.

$$3x - 2 > 4x - 1 \rightarrow -x > 1 \rightarrow x < -1$$

Son los números menores que -1.

Ecuaciones e inecuaciones

086



En dos empresas, *A* y *B*, hay un puesto de comercial vacante. En la empresa *A* pagan de salario fijo 300 €, más 75 € por cada venta realizada, y en la empresa *B* se cobra 125 € por cada venta, sin salario fijo. ¿Qué empresa interesa más?

Ventas: x

Sueldo *A*: $300 + 75x$

Sueldo *B*: $125x$

$$300 + 75x > 125x \rightarrow x < 6$$

Interesa más la empresa *A* si se realizan mas de 6 ventas, la empresa *B* si se realizan menos de 6 ventas y, en el caso de realizarse 6 ventas, no importa la empresa que sea.

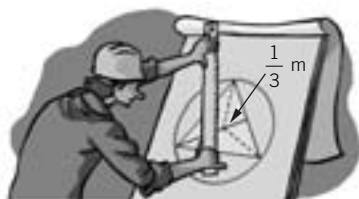
087



El perímetro de un triángulo equilátero inscrito en una circunferencia mide 6 m.

a) ¿Cuánto mide el radio de la circunferencia?

b) ¿Y el área del triángulo?



Lado = 2 m

$$\text{Altura} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3} \text{ m}$$

Por ser un triángulo equilátero, el baricentro coincide con el centro de la circunferencia y el radio es dos terceras partes de la altura.

$$\text{Radio} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ m}$$

$$\text{Área} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \text{ m}^2$$

088



En una playa alquilan sillas y tumbonas. Por una silla cobran 3 € cada hora, y por una tumbona cobran 5 € fijos, más 2 € cada hora. ¿A partir de cuántas horas es más económico alquilar una tumbona que una silla?

Horas: x

Alquiler silla: $3x$

$$3x > 5 + 2x \rightarrow x > 5$$

A partir de 5 horas es mas económico alquilar una tumbona.

089



La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 80 cm y el cateto menor mide más de 30 cm.

a) ¿Cuánto mide su cateto mayor?

b) ¿Cuál es su área?



a) x = cateto mayor

y = cateto menor

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 80^2 \\ 30 < y \leq x \end{array} \right\}$$

$$\text{Para } y = 30 \rightarrow x = \sqrt{80^2 - 30^2} = \sqrt{5.500} = 74,16 \text{ cm}$$

$$\text{Para } y = x \rightarrow 2x^2 = 80^2 \rightarrow x = \sqrt{3.200} = 56,57 \text{ cm}$$

$$56,57 \text{ cm} \leq x < 74,16 \text{ cm}$$

$$b) A = \frac{x \cdot y}{2} = \frac{x \cdot \sqrt{80^2 - x^2}}{2}$$

$$\text{Para } x = 56,57 \rightarrow A = 1.600 \text{ cm}^2$$

$$\text{Para } x = 74,16 \rightarrow A = 1.112,6 \text{ cm}^2$$

$$1.112,6 \text{ cm}^2 < A \leq 1.600 \text{ cm}^2$$

090 Halla todos los números tales que:



a) El cuadrado de su suma más 3 es menor o igual que 8.

b) El cuadrado de la suma de su doble más 1 es mayor o igual que 2.

a) Número: x

$$(x + 3)^2 \leq 8 \rightarrow x^2 + 6x + 9 \leq 8 \rightarrow x^2 + 6x + 1 \leq 0$$

$$x^2 + 6x + 1 = 0 \rightarrow x_1 = \frac{-6 + \sqrt{32}}{2}, x_2 = \frac{-6 - \sqrt{32}}{2}$$

$$\text{Solución: } \left[\frac{-6 - \sqrt{32}}{2}, \frac{-6 + \sqrt{32}}{2} \right]$$

b) Número: x

$$(2x + 1)^2 \geq 2 \rightarrow 4x^2 + 4x - 1 \geq 0$$

$$4x^2 + 4x - 1 = 0 \rightarrow x_1 = \frac{-4 + \sqrt{32}}{8}, x_2 = \frac{-4 - \sqrt{32}}{8}$$

$$\text{Soluciones: } \left[-\infty, \frac{-4 - \sqrt{32}}{8} \right] \text{ y } \left[\frac{-4 + \sqrt{32}}{8}, +\infty \right)$$

091 Determina qué condición tienen que cumplir los coeficientes y los términos independientes de dos ecuaciones de primer grado:



$$ax + b = 0 \quad a'x + b' = 0$$

para que tengan la misma solución.

La condición que tienen que cumplir es: $\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'}$

092 Encuentra la condición que se debe cumplir para que una ecuación de segundo grado de la forma $ax^2 + ax + 1 = 0$ tenga:



a) Dos soluciones.

b) Una solución doble.

c) Ninguna solución.

$$a) \Delta > 0 \rightarrow a^2 - 4a > 0$$

$$a^2 - 4a = 0 \rightarrow a \cdot (a - 4) = 0 \rightarrow a_1 = 0, a_2 = 4$$

a debe pertenecer a los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(4, +\infty)$.

$$b) \Delta = 0 \rightarrow a^2 - 4a = 0 \rightarrow a_1 = 0, a_2 = 4$$

Como la ecuación es de segundo grado, $a = 4$.

$$c) \Delta < 0 \rightarrow a^2 - 4a < 0$$

$$a^2 - 4a = 0 \rightarrow a_1 = 0, a_2 = 4 \rightarrow a \text{ debe pertenecer al intervalo } (0, 4).$$

Ecuaciones e inecuaciones

093

Halla todos los valores que puede tomar c para que una ecuación de segundo grado de la forma $x^2 - 2x + c = 0$ tenga:

a) Dos soluciones.

b) Ninguna solución.

a) $\Delta > 0 \rightarrow 4 - 4c > 0 \rightarrow c < 1 \rightarrow c$ debe de ser menor que 1.

b) $\Delta < 0 \rightarrow 4 - 4c < 0 \rightarrow c > 1 \rightarrow c$ debe de ser mayor que 1.

094

Resuelve la ecuación $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$ mediante la conversión $x^3 = z$.

$$x^6 - 7x^3 - 8 = 0 \xrightarrow{z=x^3} z^2 - 7z - 8 = 0$$

$$z = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 32}}{2} \rightarrow \begin{cases} z_1 = 8 \xrightarrow{z=x^3} x^3 = 8 \rightarrow x_1 = \sqrt[3]{8} = 2 \\ z_2 = -1 \xrightarrow{z=x^3} x^3 = -1 \rightarrow x_2 = \sqrt[3]{-1} = -1 \end{cases}$$

095

Resuelve la ecuación $x^8 - 7x^4 - 8 = 0$, realizando el cambio $x^4 = z$.

$$x^8 - 7x^4 - 8 = 0 \xrightarrow{z=x^4} z^2 - 7z - 8 = 0$$

$$z = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 32}}{2} \rightarrow \begin{cases} z_1 = 8 \xrightarrow{z=x^4} x^4 = 8 \rightarrow x_1 = \sqrt[4]{8}, x_2 = -\sqrt[4]{8} \\ z_2 = -1 \xrightarrow{z=x^4} x^4 = -1 \rightarrow \text{No tiene solución.} \end{cases}$$

096

Resuelve la ecuación $x^{10} - 7x^5 - 8 = 0$, efectuando el cambio $x^5 = z$.

$$x^{10} - 7x^5 - 8 = 0 \xrightarrow{z=x^5} z^2 - 7z - 8 = 0$$

$$z = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 32}}{2} \rightarrow \begin{cases} z_1 = 8 \xrightarrow{z=x^5} x^5 = 8 \rightarrow x_1 = \sqrt[5]{8} \\ z_2 = -1 \xrightarrow{z=x^5} x^5 = -1 \rightarrow x_2 = -1 \end{cases}$$

097

Explica cómo resolverías una ecuación de grado $2n$ de esta forma.

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0$$

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0 \xrightarrow{z=x^n} az^2 + bz + c = 0$$

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} z_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \xrightarrow{z=x^n} x^n = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ \rightarrow x_1 = \sqrt[n]{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \\ z_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \xrightarrow{z=x^n} x^n = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ \rightarrow x_2 = \sqrt[n]{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \end{cases}$$

098 Razona cuándo la inecuación de segundo grado $x^2 + bx + c \leq 0$:

- a) Tiene una solución.
 b) No tiene solución.
 c) Tiene solución para cualquier valor de x .

Si tiene raíces, la solución es:

$$\left[\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2}, \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2} \right]$$

- a) Cuando el intervalo es solo un punto; es decir, si la ecuación tiene una raíz doble, y el discriminante es igual a cero $\rightarrow b^2 - 4c = 0$.
 b) Cuando la ecuación de segundo grado no tiene solución, y el discriminante es menor que cero $\rightarrow b^2 - 4c < 0$.
 c) Nunca, independientemente del valor de b y c , siempre hay valores de x que hacen que $x^2 + bx + c > 0$.

099 Razona como en la actividad anterior para esta inecuación.

$$x^2 + bx + c < 0$$

Si tiene raíces, la solución es:

$$\left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right)$$

- a) Cuando el intervalo es solo un punto, lo que es imposible por ser la desigualdad estricta.
 b) Cuando la ecuación de segundo grado no tiene solución, y el discriminante es menor que cero $\rightarrow b^2 - 4c < 0$.
 c) Nunca, porque siempre existe algún valor de x tal que $x^2 + bx + c > 0$.

100 Resuelve la inecuación en forma factorizada.

$$(x + 1) \cdot (x - 2) \cdot (x + 3) \geq 0$$

Para ello utiliza la regla de los signos y comprueba para qué valores es positivo y negativo este producto.

$x + 1$	-	-	+	+
$x - 2$	-	-	-	+
$x + 3$	-	+	+	+

$$(x + 1) \cdot (x - 2) \cdot (x + 3) \rightarrow \quad - \quad -3 \quad + \quad -1 \quad - \quad 2 \quad +$$

La solución es los intervalos $[-3, -1]$ y $[2, +\infty)$.

Ecuaciones e inecuaciones

EN LA VIDA COTIDIANA

101



En el Parque de La Luz van a construir dos rampas de hormigón para que los jóvenes practiquen con su monopatín. Para ello han consultado con los técnicos y con los expertos en seguridad.

El armazón principal será un gran bloque cúbico y, adosadas a sus aristas, colocaremos las dos rampas.

Para que la inclinación de la rampa para principiantes sea suave, su pie estará separado de la arista del cubo 3 metros menos que la altura, y el pie de la rampa de expertos, 7 metros menos que la altura.



Para calcular qué dimensiones debe tener la estructura han presentado un proyecto con los datos y han incluido un esquema.

Calcula las dimensiones de la estructura.



$$15^2 = x^2 + (x + 3)^2 \rightarrow 2x^2 + 6x - 216 = 0$$

$$x_1 = 9, x_2 = -12$$

La arista de la estructura cúbica mide 9 m.

Longitud de la base de la rampa de expertos $\rightarrow x - 7 = 9 - 7 = 2$ m

Longitud de la base de la rampa de principiantes $\rightarrow x - 3 = 9 - 3 = 6$ m

102

Un polideportivo realiza una oferta de abonos de entrada a sus instalaciones.

Al recibir los resultados de las ventas del primer mes, los directivos han mostrado su satisfacción y han convocado una asamblea general para comunicar el éxito de la oferta.



En el mes de julio hemos tenido ingresos superiores a 1.500 €.

La taquillera me ha dicho que hace dos días se terminó el primer taco de abonos semanales. Es decir, hemos vendido más de 25 bonos semanales.



Para preparar la asamblea han representado gráficamente los datos que hasta ese momento tenían.

¿Cuántos abonos mensuales, como mínimo, han vendido si la venta exacta de abonos semanales ha sido de 28?
¿Y si ha sido de 102?



Si los abonos semanales han sido 28:

$$15 \cdot 28 + 25y > 1.500 \rightarrow 25y > 1.080 \rightarrow y > 43,2$$

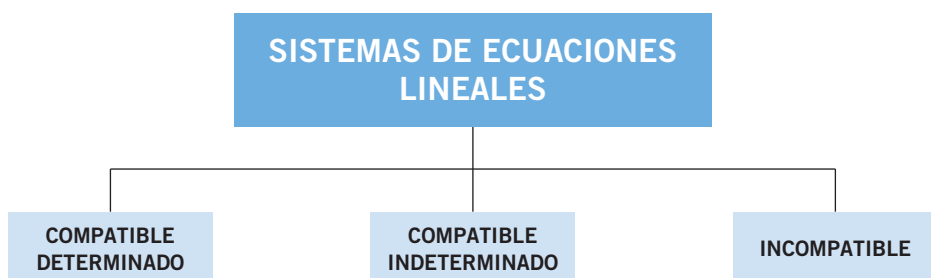
Como debe ser una cantidad entera, tenemos que $y = 44$.

El número de abonos mensuales ha sido, al menos, de 44.

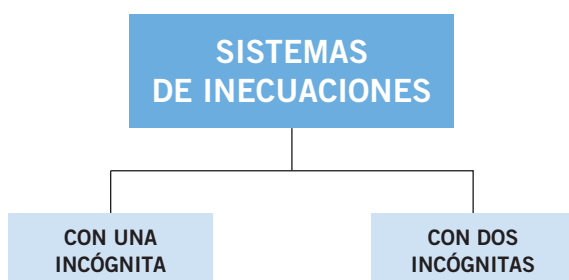
Si los abonos semanales han sido 102:

$$15 \cdot 102 + 25y > 1.500 \rightarrow 25y > -30 \rightarrow y > -1,2$$

Como debe ser una cantidad positiva, como mínimo no se habrá vendido ningún abono.



SISTEMAS DE ECUACIONES NO LINEALES



Orgullo herido

Un golpe seco, luego tres más rápidos, y la puerta se entornó dejando ver dos ojos brillantes escondidos en la sombra de una capucha. Tras comprobar la identidad de los dos embozados visitantes, sin mediar palabra les abrió la puerta y los tres se acomodaron en la pequeña celda del monasterio.

El anfitrión, el padre Marín Mersenne, saludó a los recién llegados Roberval y Gassendi y, sin más preámbulos, dio comienzo a la reunión.

—He vuelto a tener noticias de Descartes —dijo Mersenne, mientras rebuscaba en un cajón y enseñaba una carta.

—¡Otra vez ese engreído! —manifestó con desagrado Roberval—. ¿Qué tripa se le ha roto ahora?

—Él también te manda recuerdos —contestó con sorna Mersenne, y mirando a Gassendi continuó hablando—. Nos envía sus últimos avances en ecuaciones algebraicas, un trabajo fantástico.

Gassendi observó divertido a Roberval, que observaba el trabajo con un mal disimulado interés, y poco después comenzaba a criticarlo abiertamente.

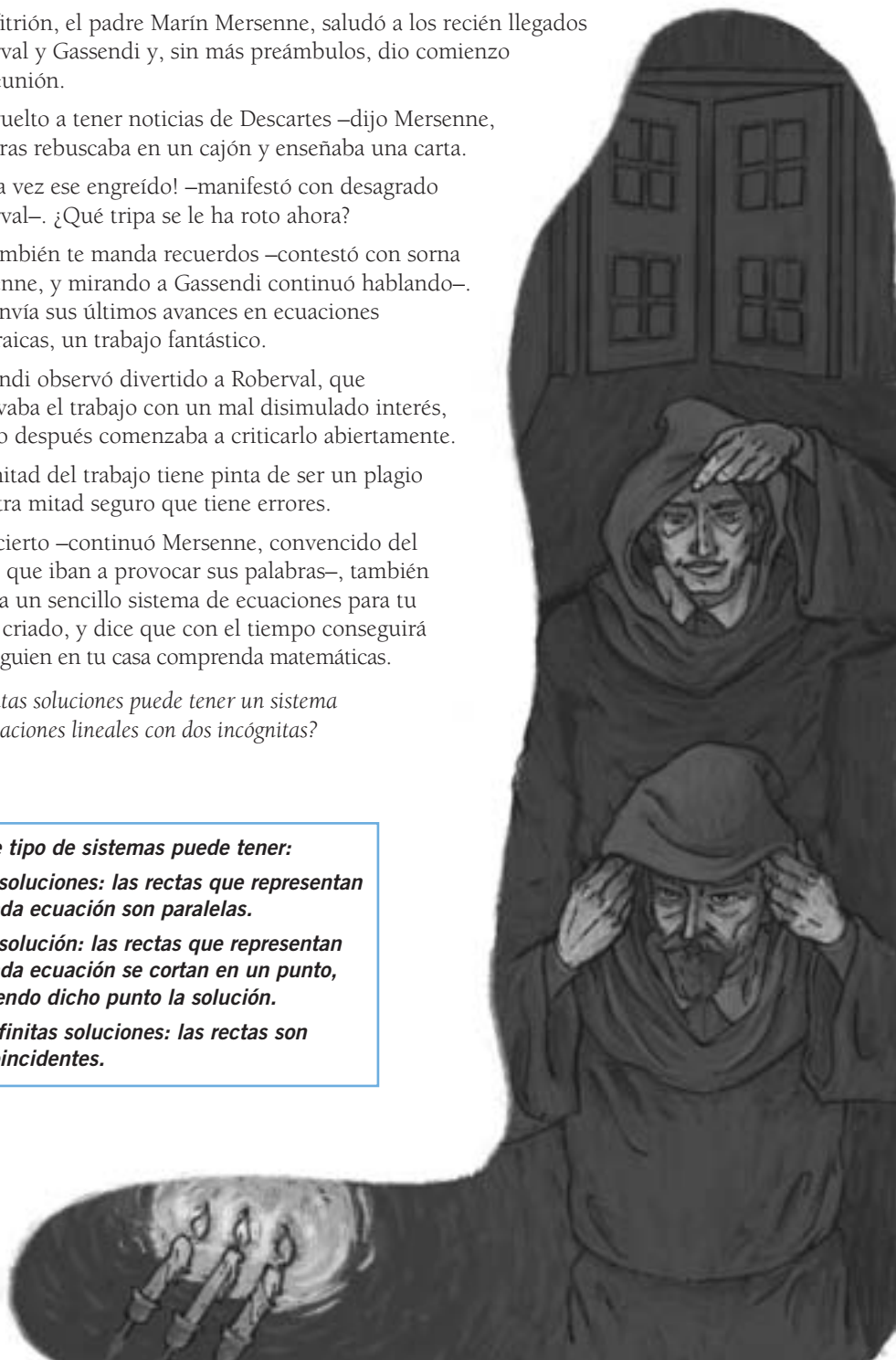
—La mitad del trabajo tiene pinta de ser un plagio y la otra mitad seguro que tiene errores.

—Por cierto —continuó Mersenne, convencido del efecto que iban a provocar sus palabras—, también manda un sencillo sistema de ecuaciones para tu joven criado, y dice que con el tiempo conseguirá que alguien en tu casa comprenda matemáticas.

¿Cuántas soluciones puede tener un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas?

Este tipo de sistemas puede tener:

- 0 soluciones: las rectas que representan cada ecuación son paralelas.***
- 1 solución: las rectas que representan cada ecuación se cortan en un punto, siendo dicho punto la solución.***
- Infinitas soluciones: las rectas son coincidentes.***



Sistemas de ecuaciones

EJERCICIOS

001

Halla tres soluciones de las siguientes ecuaciones lineales, y represéntalas en el plano.

a) $x - 2y = 2$ b) $2x + y = -1$ c) $x = 2y - 2$ d) $3x - y = 7$

a) Soluciones: $x = 0, y = -1$

$x = 2, y = 0$

$x = 4, y = 1$

b) Soluciones: $x = 0, y = -1$

$x = -1, y = 1$

$x = 1, y = -3$

c) Soluciones: $x = -2, y = 0$

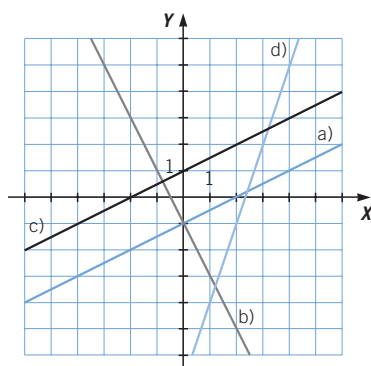
$x = 0, y = 1$

$x = 2, y = 2$

d) Soluciones: $x = 0, y = -7$

$x = 2, y = -1$

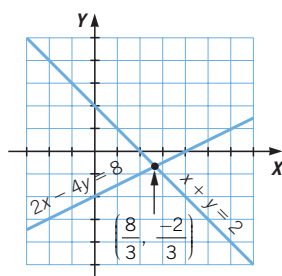
$x = 3, y = 2$



002

Resuelve gráficamente este sistema.

$$\begin{cases} 2x - 4y = 8 \\ x + y = 2 \end{cases}$$



003

Si una ecuación lineal se multiplica o divide por un número distinto de cero, ¿tendrá las mismas soluciones?

Sí, tendrá las mismas soluciones, ya que se obtienen ecuaciones equivalentes.

004

A partir del número de soluciones, clasifica estos sistemas de ecuaciones.

a) $\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y = 20 \\ x - y = 4 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + 3y = 2 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 2y = 4 \\ x + y = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x + 2y = 3 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$

a) Compatible determinado: $x = 1, y = -1$

b) Compatible indeterminado: $y = 2 - x$

c) Compatible determinado: $x = 12, y = 8$

d) Compatible determinado: $x = \frac{2}{3}, y = \frac{5}{6}$

e) Compatible determinado: $x = 2, y = 0$

f) Compatible determinado: $x = 2, y = 1$

005 Razona si son ciertas estas afirmaciones referidas a un sistema de ecuaciones lineales.

a) Puede tener únicamente dos soluciones.

b) Si tiene dos soluciones, entonces tendrá infinitas soluciones.

a) No es cierto que pueda tener únicamente dos soluciones. Un sistema de ecuaciones puede tener ninguna, una o infinitas soluciones.

b) Es cierto.

006 Pon un ejemplo de sistema compatible determinado, indeterminado e incompatible.

Compatible determinado:
$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$$

Compatible indeterminado:
$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 4x + 2y = 6 \end{cases}$$

Incompatible:
$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 4x + 2y = 5 \end{cases}$$

007 Resuelve estos sistemas por sustitución e igualación.

a)
$$\begin{cases} x - y = 4 \\ x + 2y = 13 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} 2x + 3y = -5 \\ 3x + 2y = -5 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 10x + y = 21 \\ 4x - 3y = 5 \end{cases}$$

e)
$$\begin{cases} -x + 2y = -1 \\ 4x + 2y = 14 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x - y = 4 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

f)
$$\begin{cases} 2x + 3y = 23 \\ 6x - 2y = 14 \end{cases}$$

a) Sustitución:

$$\begin{cases} x - y = 4 \\ x + 2y = 13 \end{cases} \rightarrow x = y + 4$$

$$x + 2y = 13 \xrightarrow{x = y + 4} 3y + 4 = 13 \rightarrow y = 3$$

$$x = y + 4 \xrightarrow{y = 3} x = 7$$

Igualación:

$$\begin{cases} x - y = 4 \\ x + 2y = 13 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = y + 4 \\ x = 13 - 2y \end{cases}$$

$$y + 4 = 13 - 2y \rightarrow 3y = 9 \rightarrow y = 3$$

$$x = y + 4 \xrightarrow{y = 3} x = 7$$

Sistemas de ecuaciones

b) Sustitución:

$$\begin{cases} 10x + y = 21 \\ 4x - 3y = 5 \end{cases} \rightarrow y = 21 - 10x$$

$$4x - 3y = 5 \xrightarrow{y=21-10x} 4x - 63 + 30x = 5 \rightarrow x = 2$$

$$y = 21 - 10x \xrightarrow{x=2} y = 1$$

Igualación:

$$\begin{cases} 10x + y = 21 \\ 4x - 3y = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 21 - 10x \\ y = \frac{4x - 5}{3} \end{cases}$$

$$21 - 10x = \frac{4x - 5}{3} \rightarrow 63 - 30x = 4x - 5 \rightarrow x = 2$$

$$y = 21 - 10x \xrightarrow{x=2} y = 1$$

c) Sustitución:

$$\begin{cases} x - y = 4 \\ x + y = 2 \end{cases} \rightarrow x = y + 4$$

$$x + y = 2 \xrightarrow{x=y+4} 2y + 4 = 2 \rightarrow y = -1$$

$$x = y + 4 \xrightarrow{y=-1} x = 3$$

Igualación:

$$\begin{cases} x - y = 4 \\ x + y = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = y + 4 \\ x = 2 - y \end{cases}$$

$$y + 4 = 2 - y \rightarrow 2y = -2 \rightarrow y = -1$$

$$x = y + 4 \xrightarrow{y=-1} x = 3$$

d) Sustitución:

$$\begin{cases} 2x + 3y = -5 \\ 3x + 2y = -5 \end{cases} \rightarrow x = \frac{-3y - 5}{2}$$

$$3x + 2y = -5 \xrightarrow{x=\frac{-3y-5}{2}} \frac{-9y - 15}{2} + 2y = -5 \rightarrow y = -1$$

$$x = \frac{-3y - 5}{2} \xrightarrow{y=-1} x = -1$$

Igualación:

$$\begin{cases} 2x + 3y = -5 \\ 3x + 2y = -5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{-3y - 5}{2} \\ x = \frac{-2y - 5}{3} \end{cases}$$

$$\frac{-3y - 5}{2} = \frac{-2y - 5}{3} \rightarrow y = -1$$

$$x = \frac{-3y - 5}{2} \xrightarrow{y=-1} x = -1$$

e) Sustitución:

$$\begin{cases} -x + 2y = -1 \\ 4x + 2y = 14 \end{cases} \rightarrow x = 2y + 1$$

$$4x + 2y = 14 \xrightarrow{x=2y+1} 8y + 4 + 2y = 14 \rightarrow y = 1$$

$$x = 2y + 1 \xrightarrow{y=1} x = 3$$

Igualación:

$$\begin{cases} -x + 2y = -1 \\ 4x + 2y = 14 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2y + 1 \\ x = \frac{14 - 2y}{4} \end{cases}$$

$$2y + 1 = \frac{14 - 2y}{4} \rightarrow y = 1$$

$$x = 2y + 1 \xrightarrow{y=1} x = 3$$

f) Sustitución:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 23 \\ 6x - 2y = 14 \end{cases} \rightarrow y = 3x - 7$$

$$2x + 3y = 23 \xrightarrow{y=3x-7} 2x + 9x - 21 = 23 \rightarrow x = 4$$

$$y = 3x - 7 \xrightarrow{x=4} y = 5$$

Igualación:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 23 \\ 6x - 2y = 14 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = \frac{23 - 2x}{3} \\ y = 3x - 7 \end{cases}$$

$$\frac{23 - 2x}{3} = 3x - 7 \rightarrow x = 4$$

$$y = 3x - 7 \xrightarrow{x=4} y = 5$$

008 Resuelve por el método que creas más adecuado.

a)
$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 2x - 3y = -25 \\ 4x - y = 25 \end{cases}$$

a) Sustitución:

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x + y = 7 \end{cases} \rightarrow y = 7 - 2x$$

$$x + 2y = 5 \xrightarrow{y=7-2x} x + 14 - 4x = 5 \rightarrow x = 3$$

$$y = 7 - 2x \xrightarrow{x=3} y = 1$$

b) Sustitución:

$$\begin{cases} 2x - 3y = -25 \\ 4x - y = 25 \end{cases} \rightarrow y = 4x - 25$$

$$2x - 3y = -25 \xrightarrow{y=4x-25} 2x - 12x + 75 = -25 \rightarrow x = 10$$

$$y = 4x - 25 \xrightarrow{x=10} y = 15$$

Sistemas de ecuaciones

009 ¿Qué resultado obtendrías al resolver un sistema compatible indeterminado por el método de igualación?

Se obtendría una ecuación que, al desarrollarla, quedaría $0 = 0$.

010 Resuelve por el método de reducción.

a)
$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} -4x - y = -9 \\ 2x + 5y = 9 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} 3x - 5y = -31 \\ 12x + 3y = -9 \end{cases}$$

a)
$$\begin{array}{r} \begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 1 \end{cases} + \begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \\ \hline 3x = 6 \end{array}$$

$$3x = 6 \rightarrow x = 2$$

$$x + y = 5 \xrightarrow{x=2} 2 + y = 5 \rightarrow y = 3$$

b)
$$\begin{array}{r} \begin{cases} -4x - y = -9 \\ 2x + 5y = 9 \end{cases} \xrightarrow{\cdot 2} + \begin{cases} -4x - y = -9 \\ 4x + 10y = 18 \end{cases} \\ \hline 9y = 9 \end{array}$$

$$9y = 9 \rightarrow y = 1$$

$$2x + 5y = 9 \xrightarrow{y=1} 2x + 5 = 9 \rightarrow x = 2$$

c)
$$\begin{array}{r} \begin{cases} 3x - 5y = -31 \\ 12x + 3y = -9 \end{cases} \xrightarrow{\cdot (-4)} + \begin{cases} -12x + 20y = 124 \\ 12x + 3y = -9 \end{cases} \\ \hline 23y = 115 \end{array}$$

$$23y = 115 \rightarrow y = 5$$

$$3x - 5y = -31 \xrightarrow{y=5} 3x - 25 = -31 \rightarrow x = -2$$

011 En un barrio se reciclan diariamente 20 toneladas de papel y vidrio. Si se recoge el triple de papel que de vidrio, ¿cuántas toneladas de cada material se reciclan?

x: papel, y: vidrio

$$\begin{array}{r} \begin{cases} x + y = 20 \\ -x + 3y = 0 \end{cases} + \begin{cases} x + y = 20 \\ -x + 3y = 0 \end{cases} \\ \hline 4y = 20 \end{array}$$

$$4y = 20 \rightarrow y = 5$$

$$x + y = 20 \xrightarrow{y=5} x = 15$$

Se reciclan 15 toneladas de papel y 5 toneladas de vidrio.

012 ¿Qué resultado obtendrías al resolver un sistema incompatible por el método de reducción?

Al sumar las ecuaciones se obtendría una igualdad falsa.

013 Resuelve estos sistemas.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \left. \begin{array}{l} x - 3y = 12 \\ x^2 - y^2 = 7 \end{array} \right\} & \text{b) } \left. \begin{array}{l} \frac{x+1}{2} = y - 3 \\ 2x^2 = y^2 - 7 \end{array} \right\} \end{array}$$

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} x - 3y = 12 \\ x^2 - y^2 = 7 \end{array} \right\} \rightarrow x = 3y + 12$$

$$x^2 - y^2 = 7 \xrightarrow{x=3y+12} 9y^2 + 72y + 144 - y^2 = 7$$

$$\rightarrow 8y^2 + 72y + 137 = 0$$

$$8y^2 + 72y + 137 = 0 \rightarrow \begin{cases} y_1 = \frac{-72 + \sqrt{800}}{16} = \frac{18 + \sqrt{50}}{4} \\ y_2 = \frac{-72 - \sqrt{800}}{16} = \frac{18 - \sqrt{50}}{4} \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = 3y + 12 \xrightarrow{y_1 = \frac{18 + \sqrt{50}}{4}} \\ \rightarrow x_1 = 3 \cdot \left(\frac{18 + \sqrt{50}}{4} \right) + 12 = \frac{102 + 3\sqrt{50}}{4} \\ \\ x_2 = 3y + 12 \xrightarrow{y_2 = \frac{18 - \sqrt{50}}{4}} \\ \rightarrow x_2 = 3 \cdot \left(\frac{18 - \sqrt{50}}{4} \right) + 12 = \frac{102 - 3\sqrt{50}}{4} \end{array} \right.$$

$$\left(x_1 = \frac{102 + 3\sqrt{50}}{4}, y_1 = \frac{18 + \sqrt{50}}{4} \right) \text{ y } \left(x_2 = \frac{102 - 3\sqrt{50}}{4}, y_2 = \frac{18 - \sqrt{50}}{4} \right)$$

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} \frac{x+1}{2} = y - 3 \\ 2x^2 = y^2 - 7 \end{array} \right\} \rightarrow x = 2y - 7$$

$$2x^2 = y^2 - 7 \xrightarrow{x=2y-7} 8y^2 - 56y + 98 = y^2 - 7$$

$$\rightarrow 7y^2 - 56y + 105 = 0$$

$$y^2 - 8y + 15 = 0 \rightarrow \begin{cases} y_1 = 5 \\ y_2 = 3 \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = 2y - 7 \xrightarrow{y_1=5} x_1 = 3 \\ x_2 = 2y - 7 \xrightarrow{y_2=3} x_2 = -1 \end{array} \right.$$

$$(x_1 = 3, y_1 = 5) \text{ y } (x_2 = -1, y_2 = 3)$$

Sistemas de ecuaciones

014 Resuelve los siguientes sistemas.

$$\text{a) } \begin{cases} (x+2) \cdot y = -16 \\ 4x + y = 4 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} (x+3) \cdot y = -8 \\ x \cdot (y-1) = -3 \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} (x+2) \cdot y = -16 \\ 4x + y = 4 \end{cases} \rightarrow y = 4 - 4x$$

$$(x+2) \cdot y = -16 \xrightarrow{y=4-4x} (x+2) \cdot (4-4x) = -16 \\ \rightarrow 4x^2 + 4x - 24 = 0$$

$$x^2 + x - 6 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = 4 - 4x \xrightarrow{x_1 = -3} y_1 = 16 \\ y_2 = 4 - 4x \xrightarrow{x_2 = 2} y_2 = -4 \end{cases}$$

Solución: $(x_1 = -3, y_1 = 16)$

Solución: $(x_2 = 2, y_2 = -4)$

$$\text{b) } \begin{cases} (x+3) \cdot y = -8 \\ x \cdot (y-1) = -3 \end{cases} \rightarrow x = \frac{-3}{y-1}$$

$$(x+3) \cdot y = -8 \xrightarrow{x = \frac{-3}{y-1}} \left(\frac{-3}{y-1} + 3 \right) \cdot y = -8 \rightarrow 3y^2 + 2y - 8 = 0$$

$$3y^2 + 2y - 8 = 0 \rightarrow \begin{cases} y_1 = -2 \\ y_2 = \frac{4}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-3}{y-1} \xrightarrow{y_1 = -2} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{-3}{y-1} \xrightarrow{y_2 = \frac{4}{3}} x_2 = -9 \end{cases}$$

Solución: $(x_1 = 1, y_1 = -2)$

Solución: $(x_2 = -9, y_2 = \frac{4}{3})$

015 Halla dos números enteros cuya suma es 30 y su cociente es 4.

$$\begin{cases} x + y = 30 \\ \frac{x}{y} = 4 \end{cases} \rightarrow x = 4y$$

$$x + y = 30 \xrightarrow{x=4y} 5y = 30 \rightarrow y = 6$$

$$x = 4y \xrightarrow{y=6} x = 24$$

Los números son 6 y 24.

016 Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones no lineales.

$$\text{a) } \begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{y+2}{y} = 1 \\ xy + 1 = -5 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} \sqrt{x+6} = y+1 \\ 2x - y = -5 \end{cases}$$

$$\text{a) } \left\{ \begin{array}{l} \frac{3}{x} + \frac{y+2}{y} = 1 \\ xy + 1 = -5 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3y + 2x = 0 \\ x = \frac{-6}{y} \end{array} \right\}$$

$$3y + 2x = 0 \xrightarrow{x = \frac{-6}{y}} 3y + 2 \cdot \frac{-6}{y} = 0$$

$$\rightarrow 3y - \frac{12}{y} = 0 \rightarrow 3y = \frac{12}{y}$$

$$3y = \frac{12}{y} \rightarrow y^2 = 4 \rightarrow \begin{cases} y_1 = 2 \\ y_2 = -2 \end{cases}$$

$$x = \frac{-6}{y} \rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{y_1=2} x_1 = -3 & \text{Solución: } (x_1 = -3, y_1 = 2) \\ \xrightarrow{y_2=-2} x_2 = 3 & \text{Solución: } (x_2 = 3, y_2 = -2) \end{cases}$$

$$\text{b) } \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x+6} = y+1 \\ 2x - y = -5 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+6 = y^2 + 2y + 1 \\ x = \frac{y-5}{2} \end{array} \right\}$$

$$x+6 = y^2 + 2y + 1 \xrightarrow{x = \frac{y-5}{2}} \frac{y-5}{2} + 6 = y^2 + 2y + 1$$

$$\rightarrow 2y^2 + 3y - 5 = 0$$

$$2y^2 + 3y - 5 = 0 \rightarrow \begin{cases} y_1 = 1 \rightarrow x_1 = -2 & \text{Solución: } (x_1 = -2, y_1 = 1) \\ y_2 = \frac{-5}{2} \rightarrow x_2 = \frac{-15}{4} & \text{Solución no válida.} \end{cases}$$

017 Resuelve los siguientes sistemas.

$$\text{a) } \left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{x} + \frac{y+2}{xy} = 0 \\ \frac{1}{x} + 2y = -1 \end{array} \right\}$$

$$\text{b) } \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{3-x} = y+2 \\ x+1 = \sqrt{2y} \end{array} \right\}$$

$$\text{a) } \left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{x} + \frac{y+2}{xy} = 0 \\ \frac{1}{x} + 2y = -1 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2y + y + 2 = 0 \\ 1 + 2xy = -x \end{array} \right\} \rightarrow y = \frac{-2}{3}$$

$$1 + 2xy = -x \xrightarrow{y = \frac{-2}{3}} 1 - \frac{4}{3}x = -x \rightarrow x = 3 \quad \text{Solución: } (x = 3, y = -\frac{2}{3})$$

Sistemas de ecuaciones

$$b) \left. \begin{aligned} \sqrt{3-x} &= y+2 \\ x+1 &= \sqrt{2y} \end{aligned} \right\} \rightarrow \left. \begin{aligned} 3-x &= y^2+4y+4 \\ x^2+2x+1 &= 2y \end{aligned} \right\} \rightarrow x = -y^2 - 4y - 1$$

$$\begin{aligned} x^2+2x+1 &= 2y \xrightarrow{x = -y^2 - 4y - 1} \\ &\rightarrow (-y^2 - 4y - 1)^2 + 2 \cdot (-y^2 - 4y - 1) + 1 = 2y \\ &\rightarrow y^4 + 8y^3 + 16y^2 + 8y + 1 - 2y^2 - 8y - 2 + 1 - 2y = 0 \\ &\rightarrow y^4 + 8y^3 + 14y^2 = 0 \end{aligned}$$

$$y^2 \cdot (y^2 + 8y + 14) = 0 \rightarrow \begin{cases} y_1 = y_2 = 0 \\ y_3 = \frac{-8 + \sqrt{8}}{2} < 0 \\ y_4 = \frac{-8 - \sqrt{8}}{2} < 0 \end{cases}$$

Como y_3 e y_4 son menores que 0, no son raíces de la segunda ecuación.

$$x = -y^2 - 4y - 1 \xrightarrow{y_1=0} x = -1 \quad \text{Solución: } (x = -1, y = 0)$$

018 Escribe un sistema de ecuaciones no lineales que tenga como solución $x = -1, y = 2$.

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{3-x} &= y \\ x \cdot y &= -2 \end{aligned} \right\}$$

019 Resuelve estos sistemas de inecuaciones.

$$\begin{array}{lll} a) \left. \begin{aligned} x &> 0 \\ 2x &\geq 4 \end{aligned} \right\} & b) \left. \begin{aligned} x+3 &< 2 \\ 2x-5 &< 3 \end{aligned} \right\} & c) \left. \begin{aligned} \frac{x}{2} &> -2 \\ 5x-4 &\leq 2 \end{aligned} \right\} \quad d) \left. \begin{aligned} 6x-3 &\geq x+7 \\ 7x+3 &\leq 15+3x \end{aligned} \right\} \end{array}$$

$$a) \left. \begin{aligned} x &> 0 \\ 2x &\geq 4 \end{aligned} \right\} \rightarrow \left. \begin{aligned} x &> 0 \\ x &\geq 2 \end{aligned} \right\} \rightarrow x \geq 2 \rightarrow \text{Solución: } [2, +\infty)$$

$$b) \left. \begin{aligned} x+3 &< 2 \\ 2x-5 &< 3 \end{aligned} \right\} \rightarrow \left. \begin{aligned} x &< -1 \\ x &< 4 \end{aligned} \right\} \rightarrow x < -1 \rightarrow \text{Solución: } (-\infty, -1)$$

$$c) \left. \begin{aligned} \frac{x}{2} &> -2 \\ 5x-4 &\leq 2 \end{aligned} \right\} \rightarrow \left. \begin{aligned} x &> -4 \\ x &\leq \frac{6}{5} \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{Solución: } \left(-4, \frac{6}{5}\right]$$

$$d) \left. \begin{aligned} 6x-3 &\geq x+7 \\ 7x+3 &\leq 15+3x \end{aligned} \right\} \rightarrow \left. \begin{aligned} x &\geq 2 \\ x &\leq 3 \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{Solución: } [2, 3]$$

020 Halla la solución de estos sistemas de inecuaciones.

$$a) \left. \begin{aligned} 5 \cdot (x+2) &\leq x+2 \\ 9 \cdot (x+1) &\leq -4x+3 \cdot (x+1) \end{aligned} \right\}$$

$$b) \left. \begin{aligned} 4+6x-3 &\leq x+7 \cdot (x-2) \\ 8x-2 \cdot (3x+4) &\leq 10 \cdot (x+1) \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 \text{a) } & \left. \begin{aligned} 5 \cdot (x+2) &\leq x+2 \\ 9 \cdot (x+1) &\leq -4x+3 \cdot (x+1) \end{aligned} \right\} \rightarrow \left. \begin{aligned} 5x+10 &\leq x+2 \\ 9x+9 &\leq -4x+3x+3 \end{aligned} \right\} \\
 & \rightarrow \left. \begin{aligned} x &\leq -2 \\ x &\leq \frac{-3}{5} \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{Solución: } (-\infty, -2] \\
 \\
 \text{b) } & \left. \begin{aligned} 4+6x-3 &\leq x+7 \cdot (x-2) \\ 8x-2 \cdot (3x+4) &\leq 10 \cdot (x+1) \end{aligned} \right\} \rightarrow \left. \begin{aligned} 6x+1 &\leq x+7x-14 \\ 8x-6x-8 &\leq 10x+10 \end{aligned} \right\} \\
 & \rightarrow \left. \begin{aligned} x &\geq \frac{15}{2} \\ x &\geq \frac{-9}{4} \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{Solución: } \left[\frac{15}{2}, +\infty \right)
 \end{aligned}$$

021 Escribe sistemas de inecuaciones cuya solución sea $[-2, 5]$.

$$\left. \begin{aligned} 3x-5 &\geq -11 \\ 4x-8 &\leq 12 \end{aligned} \right\}$$

022 Resuelve este sistema:
$$\left. \begin{aligned} 3x-10 &\geq 6 \\ -5x+14 &\leq 3 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} 3x-10 &\geq 6 \\ -5x+14 &\leq 3 \end{aligned} \right\} \rightarrow \left. \begin{aligned} x &\geq \frac{16}{3} \\ x &\geq \frac{11}{5} \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{Solución: } \left[\frac{16}{3}, +\infty \right)$$

023 Expresa de forma algebraica.

- a) La edad de María multiplicada por 2 y sumándole 3 es mayor que 18.
 b) Si divides la edad de María entre 2 y le restas 3 es menor que 5.

a) $3x+2 > 18$

b) $\frac{x}{2} - 3 < 5$

024 Razona si este sistema de inecuaciones está resuelto correctamente.

$$\left. \begin{aligned} 5x &\leq 2+4x+7 \\ x-4 &\geq 5x \end{aligned} \right\} \rightarrow \left. \begin{aligned} 5x-4x &\leq 2+7 \\ x-5x &\geq 4 \end{aligned} \right\} \rightarrow \left. \begin{aligned} x &\leq 9 \\ x &\geq -1 \end{aligned} \right\}$$

Hay un error en el último paso.

$$\left. \begin{aligned} 5x &\leq 2+4x+7 \\ x-4 &\geq 5x \end{aligned} \right\} \rightarrow \left. \begin{aligned} 5x-4x &\leq 2+7 \\ x-5x &\geq 4 \end{aligned} \right\} \rightarrow \left. \begin{aligned} x &\leq 9 \\ x &\leq -1 \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{Solución: } (-\infty, -1]$$

Sistemas de ecuaciones

ACTIVIDADES

025 Comprueba que $x = -\frac{1}{2}$, $y = \frac{3}{4}$ es solución del sistema.

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 3y = \frac{5}{4} \\ 16x + 20y = 7 \end{array} \right\}$$

Escribe otro sistema con las mismas soluciones.

$$\left. \begin{array}{l} 2 \cdot \frac{-1}{2} + 3 \cdot \frac{3}{4} = -1 + \frac{9}{4} = \frac{5}{4} \\ 16 \cdot \frac{-1}{2} + 20 \cdot \frac{3}{4} = -8 + 15 = 7 \end{array} \right\}$$

El sistema de ecuaciones tiene como solución $x = -\frac{1}{2}$, $y = \frac{3}{4}$.

Determinamos otro sistema con estas soluciones.

$$x + y$$

$$\frac{-1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$x - y$$

$$\frac{-1}{2} - \frac{3}{4} = \frac{-5}{4}$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y = \frac{1}{4} \\ x - y = \frac{-5}{4} \end{array} \right\} \text{ es un sistema con estas soluciones.}$$

026 Investiga cuántas soluciones tienen los sistemas de ecuaciones, e interpreta geométicamente el resultado.

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} 3x - 2y = 1 \\ -6x + 2y = -2 \end{array} \right\}$$

$$\text{c) } \left. \begin{array}{l} 2x - 3y = 9 \\ 4x - 9 = 6y \end{array} \right\}$$

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} x - 5y = 11 \\ 2x + 3y = -4 \end{array} \right\}$$

$$\text{d) } \left. \begin{array}{l} x + 2y = 5 \\ 2x + y = 7 \end{array} \right\}$$

- a) Es un sistema compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones. Geométricamente son dos rectas coincidentes.
- b) Es un sistema compatible determinado, con una única solución: $x = 1$, $y = -2$. Geométricamente son dos rectas que se cortan en el punto $(1, -2)$.
- c) Es un sistema incompatible, no tiene solución. Geométricamente son dos rectas paralelas.
- d) Es un sistema compatible determinado, con una única solución: $x = 3$, $y = 1$. Geométricamente son dos rectas que se cortan en el punto $(3, 1)$.

027 HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE DETERMINA EL NÚMERO DE SOLUCIONES DE UN SISTEMA ESTUDIANDO SUS COEFICIENTES?

Clasifica estos sistemas atendiendo a su número de soluciones.

$$\text{a) } \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 4x + 6y = 10 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 4x + 6y = 8 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 5x + y = 5 \end{cases}$$

PRIMERO. Se estudia si los coeficientes de las dos ecuaciones del sistema son proporcionales.

$$\text{a) } \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{5}{10} \rightarrow \text{Son proporcionales.}$$

$$\text{b) } \frac{2}{4} = \frac{3}{6} \neq \frac{5}{8} \rightarrow \text{Son proporcionales los coeficientes de las incógnitas, pero no los términos independientes.}$$

$$\text{c) } \frac{2}{5} \neq \frac{3}{1} \rightarrow \text{No son proporcionales los coeficientes de las incógnitas.}$$

SEGUNDO.

- Si todos los coeficientes son proporcionales, el sistema es compatible indeterminado.
- Si solo son proporcionales los coeficientes de las incógnitas, el sistema es incompatible.
- Si los coeficientes de las incógnitas no son proporcionales, el sistema es compatible determinado.
 - Compatible indeterminado.
 - Incompatible.
 - Compatible determinado.

028 Completa los sistemas para que sean incompatibles.

$$\text{a) } \begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 1 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 2 \cdot (x - y) + x = 10 \\ 3x - 2y = 5 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 3x - y = 0 \\ 6x - 2y = -1 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 5 \\ 2x + y = 10 \end{cases}$$

029 Completa los siguientes sistemas para que sean compatibles indeterminados.

$$\text{a) } \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 3x + 6y = 9 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 5 \cdot (x + 2) - 3 \cdot (y - 1) = 6 \\ -10x + 6y = 14 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 4x - 10y = 1 \\ 2x - 5y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Sistemas de ecuaciones

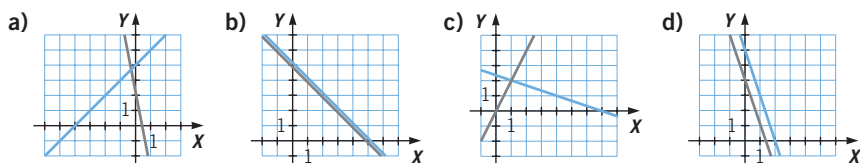
030 Clasifica los sistemas según su número de soluciones, sin resolverlos.

a) $\begin{cases} x + y = 10 \\ 2x + y = 20 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y = 10 \\ 2x + 2y = 20 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 10 \\ 2x - 2y = -20 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 2 \end{cases}$

- a) Compatible determinado
- b) Compatible determinado
- c) Compatible indeterminado
- d) Compatible determinado

031 Observa las gráficas y escribe el sistema en su forma general, determina la solución y decide de qué tipo es.



a) $\begin{cases} -x + y = 4 \\ 5x + y = 2 \end{cases} \rightarrow x = \frac{-1}{3}, y = \frac{11}{3} \rightarrow \text{Compatible determinado}$

b) $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 2y = 10 \end{cases} \rightarrow y = -x + 5 \rightarrow \text{Compatible indeterminado}$

c) $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + 3y = 7 \end{cases} \rightarrow x = 1, y = 2 \rightarrow \text{Compatible determinado}$

d) $\begin{cases} 3x + y = 4 \\ 3x + y = 6 \end{cases} \rightarrow \text{No tiene solución} \rightarrow \text{Incompatible}$

032 Escribe un sistema compatible determinado, uno compatible indeterminado y otro incompatible. Representalos en unos ejes de coordenadas y halla sus soluciones.

Compatible determinado:

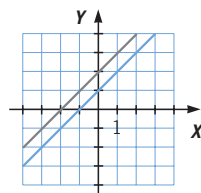
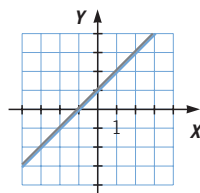
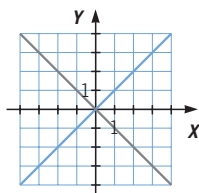
$\begin{cases} -x + y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \rightarrow x = 0, y = 0$

Compatible indeterminado:

$\begin{cases} -x + y = 1 \\ -2x + 2y = 2 \end{cases} \rightarrow y = x + 1$

Incompatible:

$\begin{cases} -x + y = 1 \\ -x + y = 2 \end{cases}$



033 Resuelve los sistemas por el método de sustitución.

$$\text{a) } \begin{cases} 10x + y = 21 \\ 4x - 3y = 5 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} 2x - 3y = -25 \\ 4x - y = 25 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} -x + 2y = -1 \\ 4x + 2y = 14 \end{cases} \quad \text{d) } \begin{cases} x + y = 4 \\ 3x + 2y = 15 \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} 10x + y = 21 \\ 4x - 3y = 5 \end{cases} \rightarrow y = 21 - 10x$$

$$4x - 3y = 5 \xrightarrow{y=21-10x} 4x - 63 + 30x = 5 \rightarrow x = 2$$

$$y = 21 - 10x \xrightarrow{x=2} y = 1$$

$$\text{b) } \begin{cases} -x + 2y = -1 \\ 4x + 2y = 14 \end{cases} \rightarrow x = 2y + 1$$

$$4x + 2y = 14 \xrightarrow{x=2y+1} 8y + 4 + 2y = 14 \rightarrow y = 1$$

$$x = 2y + 1 \xrightarrow{y=1} x = 3$$

$$\text{c) } \begin{cases} 2x - 3y = -25 \\ 4x - y = 25 \end{cases} \rightarrow y = 4x - 25$$

$$2x - 3y = -25 \xrightarrow{y=4x-25} 2x - 12x + 75 = -25 \rightarrow x = -10$$

$$y = 4x - 25 \xrightarrow{x=-10} y = 15$$

$$\text{d) } \begin{cases} x + y = 4 \\ 3x + 2y = 15 \end{cases} \rightarrow y = 4 - x$$

$$3x + 2y = 15 \xrightarrow{y=4-x} 3x + 8 - 2x = 15 \rightarrow x = 7$$

$$y = 4 - x \xrightarrow{x=7} y = -3$$

034 Utiliza el método de igualación para resolver los sistemas.

$$\text{a) } \begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ 3x + 2y = 12 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ 3x + 2y = 12 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{-3y + 13}{2} \\ x = \frac{-2y + 12}{3} \end{cases}$$

$$\frac{-3y + 13}{2} = \frac{-2y + 12}{3} \rightarrow -9y + 39 = -4y + 24 \rightarrow y = 3$$

$$x = \frac{-3y + 13}{2} \xrightarrow{y=3} x = 2$$

$$\text{b) } \begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ x + y = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = \frac{3x - 5}{2} \\ y = 5 - x \end{cases} \rightarrow \frac{3x - 5}{2} = 5 - x \rightarrow x = 3$$

$$y = 5 - x \xrightarrow{x=3} y = 2$$

Sistemas de ecuaciones

035 Halla la solución de los sistemas por el método de reducción.

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 2x - 3y = 4 \end{cases}$	c) $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x - 3y = 0 \end{cases}$
b) $\begin{cases} x + 4y = 9 \\ 3x - 6y = 9 \end{cases}$	d) $\begin{cases} 5x - 3y = 1 \\ 4x + y = 11 \end{cases}$

$$\begin{array}{r} \text{a) } \begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 2x - 3y = 4 \end{cases} \quad \begin{array}{r} + \\ + \end{array} \quad \begin{array}{r} 2x + 3y = 4 \\ 2x - 3y = 4 \end{array} \\ \hline \qquad \qquad \qquad 4x \qquad \qquad = 8 \end{array}$$

$$4x = 8 \rightarrow x = 2$$

$$2x + 3y = 4 \xrightarrow{x=2} 4 + 3y = 4 \rightarrow y = 0$$

$$\begin{array}{r} \text{b) } \begin{cases} x + 4y = 9 \\ 3x - 6y = 9 \end{cases} \quad \begin{array}{r} \cdot (-3) \\ + \end{array} \quad \begin{array}{r} -3x - 12y = -27 \\ 3x - 6y = 9 \end{array} \\ \hline \qquad \qquad \qquad -18y = -18 \end{array}$$

$$-18y = -18 \rightarrow y = 1$$

$$x + 4y = 9 \xrightarrow{y=1} x + 4 = 9 \rightarrow x = 5$$

$$\begin{array}{r} \text{c) } \begin{cases} 2x + y = 7 \\ x - 3y = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{r} \cdot 3 \\ + \end{array} \quad \begin{array}{r} 6x + 3y = 21 \\ x - 3y = 0 \end{array} \\ \hline \qquad \qquad \qquad 7x \qquad \qquad = 21 \end{array}$$

$$7x = 21 \rightarrow x = 3$$

$$x - 3y = 0 \xrightarrow{x=3} 3 - 3y = 0 \rightarrow y = 1$$

$$\begin{array}{r} \text{d) } \begin{cases} 5x - 3y = 1 \\ 4x + y = 11 \end{cases} \quad \begin{array}{r} \cdot 3 \\ + \end{array} \quad \begin{array}{r} 5x - 3y = 1 \\ 12x + 3y = 33 \end{array} \\ \hline \qquad \qquad \qquad 17x \qquad \qquad = 34 \end{array}$$

$$17x = 34 \rightarrow x = 2$$

$$4x + y = 11 \xrightarrow{x=2} 8 + y = 11 \rightarrow y = 3$$

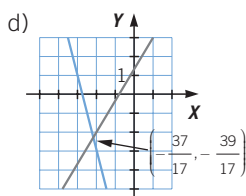
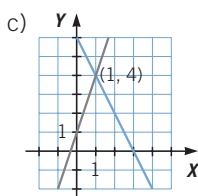
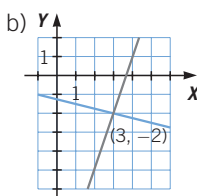
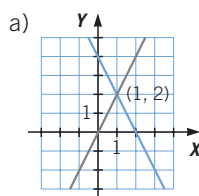
036 Resuelve gráficamente estos sistemas.

a) $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + y = 6 \\ 3x - y = -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 4y = -5 \\ 3x - y = 11 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 5x - 3y = -4 \\ 4x + y = -11 \end{cases}$



037 Resuelve los sistemas por el método más adecuado.

$$\left. \begin{array}{l} \text{a) } 3x - 2 \cdot (y - 1) = y - x + 1 \\ \quad 2x - y = x + y - 9 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \text{b) } 3 - 2 \cdot (x - 4) = 5y + 6 \\ \quad 5x - 3y = 12x - (4 - y) \end{array} \right\}$$

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} 3x - 2 \cdot (y - 1) = y - x + 1 \\ 2x - y = x + y - 9 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 4x - 3y = -1 \\ x - 2y = -9 \end{array} \right\} \rightarrow x = 2y - 9$$

$$4x - 3y = -1 \xrightarrow{x=2y-9} 8y - 36 - 3y = -1 \rightarrow y = 7$$

$$x = 2y - 9 \xrightarrow{y=7} x = 5$$

$$\begin{array}{l} \text{b) } \left. \begin{array}{l} 3 - 2 \cdot (x - 4) = 5y + 6 \\ 5x - 3y = 12x - (4 - y) \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} -2x - 5y = -5 \\ -7x - 4y = -4 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \cdot 4 \\ \cdot (-5) \end{array} \\ \rightarrow \left. \begin{array}{l} -8x - 20y = -20 \\ + 35x + 20y = 20 \end{array} \right\} \\ \hline 43x = 0 \end{array}$$

$$43x = 0 \rightarrow x = 0$$

$$-2x - 5y = -5 \xrightarrow{x=0} y = 1$$

038 Halla la solución de los sistemas.

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} \frac{x-1}{4} - \frac{y+2}{3} = 0 \\ \frac{x+3}{5} - \frac{y-2}{4} = 2 \end{array} \right\}$$

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} \frac{5 \cdot (x-2)}{3} - \frac{3 \cdot (y+1)}{4} = \frac{x-7y}{12} \\ \frac{6 - (x+y)}{2} - \frac{(5-x) \cdot 4}{5} = \frac{x+2y}{10} \end{array} \right\}$$

$$\text{c) } \left. \begin{array}{l} \frac{7x+5y}{10} - \frac{3 \cdot (x+y)}{5} = \frac{x-y}{10} \\ \frac{3x+y+2}{4} - \frac{y-2x}{6} = \frac{y-x}{4} \end{array} \right\}$$

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} \frac{x-1}{4} - \frac{y+2}{3} = 0 \\ \frac{x+3}{5} - \frac{y-2}{4} = 2 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x - 3 - 4y - 8 = 0 \\ 4x + 12 - 5y + 10 = 40 \end{array} \right\}$$

$$\rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x - 4y = 11 \\ 4x - 5y = 18 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \cdot 4 \\ \cdot (-3) \end{array} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 12x - 16y = 44 \\ -12x + 15y = -54 \end{array} \right\} \rightarrow -y = -10$$

$$-y = -10 \rightarrow y = 10$$

$$4x - 5y = 18 \xrightarrow{y=10} 4x - 50 = 18 \rightarrow x = 17$$

Sistemas de ecuaciones

$$\begin{aligned} \text{b) } & \left. \begin{aligned} \frac{5 \cdot (x-2)}{3} - \frac{3 \cdot (y+1)}{4} &= \frac{x-7y}{12} \\ \frac{6-(x+y)}{2} - \frac{(5-x) \cdot 4}{5} &= \frac{x+2y}{10} \end{aligned} \right\} \\ & \rightarrow \left. \begin{aligned} 20x-40-9y-9 &= x-7y \\ 30-5x-5y-40+8x &= x+2y \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{cases} 19x-2y=49 \\ 2x-7y=10 \end{cases} \\ & \begin{aligned} & \cdot 7 \rightarrow 133x-14y=343 \\ & \cdot (-2) \rightarrow -4x+14y=-20 \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} & \cdot 7 \rightarrow 133x-14y=343 \\ & \cdot (-2) \rightarrow -4x+14y=-20 \end{aligned}} \right\} \\ & \quad \quad \quad \frac{129x}{129x} = \frac{323}{323} \\ & 129x = 323 \rightarrow x = \frac{323}{129} \\ & 2x-7y=10 \xrightarrow{x=\frac{323}{129}} \frac{646}{129}-7y=10 \rightarrow y = \frac{92}{129} \\ \text{c) } & \left. \begin{aligned} \frac{7x+5y}{10} - \frac{3 \cdot (x+y)}{5} &= \frac{x-y}{10} \\ \frac{3x+y+2}{4} - \frac{y-2x}{6} &= \frac{y-x}{4} \end{aligned} \right\} \\ & \rightarrow \left. \begin{aligned} 7x+5y-6x-6y &= x-y \\ 9x+3y+6-2y+4x &= 3y-3x \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{cases} 0=0 \\ 16x-2y=-6 \end{cases} \rightarrow y=8x+3 \end{aligned}$$

039 HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE RESUELVEN SISTEMAS DE ECUACIONES EN FUNCIÓN DE UN PARÁMETRO?

Encuentra las soluciones de este sistema en función del parámetro a .

$$\left. \begin{aligned} ax + y &= 13 \\ x - y &= 3 \end{aligned} \right\}$$

PRIMERO. Se resuelve el sistema por el método más adecuado y se expresan las soluciones en función de a .

$$\begin{aligned} & \left. \begin{aligned} + \quad ax + y &= 13 \\ \quad x - y &= 3 \end{aligned} \right\} \\ & \quad \quad \quad (a+1) \cdot x = 16 \rightarrow x = \frac{16}{a+1} \\ & x - y = 3 \xrightarrow{x=\frac{16}{a+1}} \frac{16}{a+1} - y = 3 \rightarrow y = \frac{16}{a+1} - 3 = \frac{13-3a}{a+1} \end{aligned}$$

SEGUNDO. Se analiza la solución para comprobar que existe para todos los valores de a . Esto se llama discutir la solución del sistema en función de a .

En este caso el denominador es $a+1$, luego:

- Para $a = -1$, el sistema es incompatible, porque no podemos dividir entre cero, es decir, no tiene solución.
- Para todos los valores de a distintos de -1 , el sistema es compatible.

040

Discute la solución de los siguientes sistemas en función de a .

$$\text{a) } \begin{cases} -2x + ay = 12 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 2x + y = 7 \\ ax + 2y = 12 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} ax - 3y = 7 \\ x + 3y = -1 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} 3x + 5y = 20 \\ 7x + ay = 39 \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} -2x + ay = 12 \\ x + 2y = 1 \end{cases} \rightarrow x = 1 - 2y$$

$$-2x + ay = 12 \xrightarrow{x=1-2y} -2 + 4y + ay = 12 \rightarrow y \cdot (a + 4) = 14$$

$$\rightarrow y = \frac{14}{a + 4}$$

Compatible determinado para $a \neq -4$ Incompatible para $a = -4$

$$\text{b) } \begin{cases} ax - 3y = 7 \\ x + 3y = -1 \end{cases} + \begin{cases} ax - 3y = 7 \\ x + 3y = -1 \end{cases}$$

$$\frac{ax + x = 6}{ax + x = 6}$$

$$ax + x = 6 \rightarrow x = \frac{6}{a + 1}$$

Compatible determinado para $a \neq -1$ Incompatible para $a = -1$

$$\text{c) } \begin{cases} 2x + y = 7 \\ ax + 2y = 12 \end{cases} \rightarrow y = 7 - 2x$$

$$ax + 2y = 12 \xrightarrow{y=7-2x} ax + 14 - 4x = 12 \rightarrow x \cdot (a - 4) = -2$$

$$\rightarrow y = \frac{-2}{a - 4}$$

Compatible determinado para $a \neq 4$ Incompatible para $a = 4$

$$\text{d) } \begin{cases} 3x + 5y = 20 \\ 7x + ay = 39 \end{cases} \begin{matrix} \cdot 7 \\ \cdot (-3) \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} 21x + 35y = 140 \\ -21x - 3ay = -117 \end{cases}$$

$$\frac{35y - 3ay = 23}{35y - 3ay = 23}$$

$$35y - 3ay = 23 \rightarrow y = \frac{23}{35 - 3a}$$

Compatible determinado para $a \neq \frac{35}{3}$ Incompatible para $a = \frac{35}{3}$

Sistemas de ecuaciones

041

Determina el número de soluciones de los siguientes sistemas en función de a y b .

a) $\begin{cases} 3x - ay = 5 \\ 6x - 2y = b \end{cases}$

c) $\begin{cases} ax + by = 4 \\ 3x - y = 8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} ax + 5y = -1 \\ -2x - by = 6 \end{cases}$

d) $\begin{cases} -ax - by = 5 \\ 6x - 2by = 10 \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{a) } \begin{cases} 3x - ay = 5 \\ 6x - 2y = b \end{cases} &\xrightarrow{\cdot (-2)} \begin{array}{r} -6x + 2ay = -10 \\ + \quad 6x - 2y = b \\ \hline 2ay - 2y = b - 10 \end{array} \end{aligned}$$

$$2ay - 2y = b - 10 \rightarrow y = \frac{b - 10}{2a - 2} \rightarrow \begin{cases} \text{C. determinado para } a \neq 1 \\ \text{Incompatible para } a = 1 \text{ y } b \neq 10 \\ \text{C. indeterminado para } a = 1 \text{ y } b = 10 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \begin{cases} ax + 5y = -1 \\ -2x - by = 6 \end{cases} &\xrightarrow{\cdot 2} \begin{array}{r} 2ax + 10y = -2 \\ + \quad -2ax - aby = 6a \\ \hline 10y - aby = 6a - 2 \end{array} \end{aligned}$$

$$10y - aby = 6a - 2 \rightarrow y = \frac{6a - 2}{10 - ab}$$

Compatible determinado para $a \cdot b \neq 10 \rightarrow a \neq \frac{10}{b}$

Incompatible para $a \cdot b = 10 \rightarrow a = \frac{10}{b}$ y $6a - 2 \neq 0 \rightarrow a \neq \frac{1}{3}$

Compatible indeterminado para $a \cdot b = 10$

$$\rightarrow a = \frac{10}{b} \text{ y } 6a - 2 = 0 \rightarrow a = \frac{1}{3} \text{ y } b = 30$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \begin{cases} ax + by = 4 \\ 3x - y = 8 \end{cases} &\xrightarrow{\cdot b} \begin{array}{r} ax + by = 4 \\ + \quad 3bx - by = 8b \\ \hline ax + 3bx = 8b + 4 \end{array} \rightarrow x = \frac{8b + 4}{a + 3b} \end{aligned}$$

Compatible determinado para $a + 3b \neq 0 \rightarrow a \neq -3b$

Incompatible para $a + 3b = 0 \rightarrow a = -3b$ y $8b + 4 \neq 0 \rightarrow b \neq \frac{-1}{2}$

Compatible indeterminado para $a + 3b = 0$

$$\rightarrow a = -3b \text{ y } 8b + 4 = 0 \rightarrow b = \frac{-1}{2} \text{ y } a = \frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \begin{cases} -ax - by = 5 \\ 6x - 2by = 10 \end{cases} &\xrightarrow{\cdot (-2)} \begin{array}{r} -2ax - 2by = -10 \\ + \quad 6x + 2by = 10 \\ \hline 2ax + 6x = 0 \end{array} \end{aligned}$$

$$(2a + 6) \cdot x = 0 \rightarrow \begin{cases} \rightarrow x = 0, y = \frac{-5}{b} \text{ C. determinado si } b \neq 0 \\ \text{Incompatible si } b = 0 \\ \rightarrow 2a + 6 = 0 \rightarrow \text{C. Indeterminado si } a = -3 \end{cases}$$

042 Resuelve los siguientes sistemas.

$$\begin{array}{l} \text{a) } \begin{cases} x^2 + y^2 = 29 \\ x^2 - y^2 = -21 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x \cdot (x + y) = -3 \\ x^2 + y = 5 \end{cases} \end{array}$$

$$\text{a) } \begin{cases} x^2 + y^2 = 29 \\ x^2 - y^2 = -21 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 29 \\ + \quad x^2 - y^2 = -21 \\ \hline 2x^2 = 8 \end{array}$$

$$2x^2 = 8 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \rightarrow 4 + y^2 = 29 \rightarrow y_1 = \pm 5 \\ x_2 = -2 \rightarrow 4 + y^2 = 29 \rightarrow y_2 = \pm 5 \end{cases}$$

Hay 4 soluciones: (2, 5); (2, -5); (-2, 5) y (-2, -5).

$$\text{b) } \begin{cases} x \cdot (x + y) = -3 \\ x^2 + y = 5 \end{cases} \rightarrow y = 5 - x^2$$

$$x \cdot (x + y) = -3 \xrightarrow{y=5-x^2} x \cdot (x + 5 - x^2) = -3 \rightarrow x^3 - x^2 - 5x - 3 = 0$$

$$x^3 - x^2 - 5x - 3 = 0 \rightarrow (x - 3) \cdot (x + 1)^2 = 0 \rightarrow x_1 = 3, x_2 = -1$$

$$y_1 = 5 - x^2 \xrightarrow{x_1=3} y_1 = -4 \quad y_2 = 5 - x^2 \xrightarrow{x_2=-1} y_2 = 4$$

Las soluciones son (3, -4) y (-1, 4).

043 Resuelve estos sistemas.

Handwritten systems of equations:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{-1}{4} \\ \frac{1}{x+3} - \frac{1}{y-3} = -1 \end{cases} & \text{c) } \begin{cases} \frac{3}{x+1} - \frac{5}{y+2} = 2 \\ \frac{x+1}{y-1} = \frac{1}{4} \end{cases} \\ \text{b) } \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{-3}{10} \\ \frac{6}{xy} = \frac{-3}{5} \end{cases} & \text{d) } \begin{cases} \frac{1}{x} + y = \frac{5}{2} \\ \frac{2}{y} - 3x = -5 \end{cases} \end{array}$$

$$\text{a) } \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{-1}{4} \\ \frac{1}{x+3} - \frac{1}{y-3} = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4y + 4x = -xy \\ y - 3 - x - 3 = -(x + 3) \cdot (y - 3) \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 4x + 4y + xy = 0 \\ -4x + 4y + xy = 15 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} 4x + 4y + xy = 0 \\ -4x + 4y + xy = 15 \\ \hline 8x = -15 \end{array}$$

$$8x = -15 \rightarrow x = \frac{-15}{8}$$

$$4x + 4y + xy = 0 \xrightarrow{x = \frac{-15}{8}} \frac{-60}{8} + 4y - \frac{15y}{8} = 0$$

$$\rightarrow -60 + 32y - 15y = 0 \rightarrow y = \frac{60}{17}$$

Sistemas de ecuaciones

$$\text{b) } \left. \begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} &= \frac{-3}{10} \\ \frac{6}{xy} &= \frac{-3}{5} \end{aligned} \right\} \rightarrow \left. \begin{aligned} 10y + 10x &= -3xy \\ 30 &= -3xy \end{aligned} \right\} \rightarrow x = \frac{-10}{y}$$

$$10y + 10x = -3xy \xrightarrow{x = \frac{-10}{y}} 10y - \frac{100}{y} = 30 \rightarrow y^2 - 3y - 10 = 0$$

$$y^2 - 3y - 10 = 0 \rightarrow \begin{cases} y_1 = 5 \rightarrow x_1 = -2 \\ y_2 = -2 \rightarrow x_2 = 5 \end{cases}$$

$$\text{c) } \left. \begin{aligned} \frac{3}{x+1} - \frac{5}{y+2} &= 2 \\ \frac{x+1}{y-1} &= \frac{1}{4} \end{aligned} \right\} \rightarrow \left. \begin{aligned} 3y + 6 - 5x - 5 &= 2 \cdot (x+1) \cdot (y+2) \\ 4x + 4 &= y - 1 \end{aligned} \right\}$$

$$\rightarrow \begin{cases} y - 9x - 2xy - 3 = 0 \\ y = 4x + 5 \end{cases}$$

$$y - 9x - 2xy - 3 = 0 \xrightarrow{y = 4x + 5}$$

$$\rightarrow 4x + 5 - 9x - 8x^2 - 10x - 3 = 0$$

$$\rightarrow 8x^2 + 15x - 2 = 0$$

$$8x^2 + 15x - 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \rightarrow y_1 = -3 \\ x_2 = \frac{1}{8} \rightarrow y_2 = \frac{11}{2} \end{cases}$$

$$\text{d) } \left. \begin{aligned} \frac{1}{x} + y &= \frac{5}{2} \\ \frac{2}{y} - 3x &= -5 \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{cases} 2 + 2xy = 5x \\ 2 - 3xy = -5y \end{cases} \rightarrow y = \frac{5x-2}{2x}$$

$$2 - 3xy = -5y \xrightarrow{y = \frac{5x-2}{2x}} 2 - \frac{15x+6}{2} = \frac{-25x+10}{2x}$$

$$\rightarrow 10x - 15x^2 = -25x + 10$$

$$15x^2 - 35x + 10 = 0 \rightarrow 3x^2 - 7x + 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \rightarrow y_1 = 2 \\ x_2 = \frac{1}{3} \rightarrow y_2 = \frac{-1}{2} \end{cases}$$

044 Halla la solución de los sistemas.

a) $\begin{cases} \sqrt{x} + 2y = -1 \\ x - 1 = y + 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \sqrt{x-2} = y+2 \\ 2x-3 = 2-y \end{cases}$

b) $\begin{cases} \sqrt{x+1} = -y-1 \\ \sqrt{-2y+3} = 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \frac{\sqrt{x+4}}{2} = \sqrt{y} \\ \sqrt{x} - y = -1 \end{cases}$

- a) $\begin{cases} \sqrt{x} + 2y = -1 \\ x - 1 = y + 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 4y^2 + 4y + 1 \\ x = y + 2 \end{cases}$
 $4y^2 + 4y + 1 = y + 2 \rightarrow 4y^2 + 3y - 1$
 $\rightarrow \begin{cases} y_1 = -1 \rightarrow x_1 = 1 \\ y_2 = \frac{1}{4} \rightarrow x_2 = \frac{9}{4} \end{cases} \rightarrow \text{Solución no válida}$
- b) $\begin{cases} \sqrt{x+1} = -y-1 \\ \sqrt{-2y+3} = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+1 = y^2 + 2y + 1 \\ -2y+3 = 9 \end{cases} \rightarrow y = -3$
 $x+1 = y^2 + 2y + 1 \xrightarrow{y=-3} x+1 = 4 \rightarrow x = 3$
- c) $\begin{cases} \sqrt{x-2} = y+2 \\ 2x-3 = 2-y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x-2 = y^2 + 4y + 4 \\ 2x+y = 5 \end{cases} \rightarrow x = y^2 + 4y + 6$
 $2x+y = 5 \xrightarrow{x=y^2+4y+6} 2y^2 + 8y + 12 + y = 5 \rightarrow 2y^2 + 9y + 7 = 0$
 $2y^2 + 9y + 7 = 0 \rightarrow \begin{cases} y_1 = -1 \rightarrow x_1 = 3 \\ y_2 = \frac{-7}{2} \rightarrow x_2 = \frac{17}{4} \end{cases} \rightarrow \text{Solución no válida}$
- d) $\begin{cases} \frac{\sqrt{x+4}}{2} = \sqrt{y} \\ \sqrt{x} - y = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+4 = 4y \\ x = y^2 - 2y + 1 \end{cases} \rightarrow x = 4y - 4$
 $y^2 - 2y + 1 = 4y - 4 \rightarrow y^2 - 6y + 5 = 0 \rightarrow \begin{cases} y_1 = 5 \rightarrow x_1 = 16 \\ y_2 = 1 \rightarrow x_2 = 0 \end{cases}$

045 Determina la solución de los sistemas.

a) $\begin{cases} (x-2) \cdot (y-2) = 0 \\ (x-4) \cdot (y+3) = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} (x+3) \cdot (y+x) = 0 \\ x \cdot y = -6 \end{cases}$

a) $\begin{cases} (x-2) \cdot (y-2) = 0 \\ (x-4) \cdot (y+3) = 0 \end{cases} \rightarrow x = 2 \text{ o } y = 2$
 $(x-4) \cdot (y+3) = 0 \xrightarrow{x=2} -2 \cdot (y+3) = 0 \rightarrow y = -3$
 $(x-4) \cdot (y+3) = 0 \xrightarrow{y=2} 5 \cdot (x-4) = 0 \rightarrow x = 4$
 Solución: $(x_1 = 2, y_1 = -3)$ y $(x_2 = 4, y_2 = 2)$

b) $\begin{cases} (x+3) \cdot (y+x) = 0 \\ x \cdot y = -6 \end{cases} \rightarrow x = -3 \text{ o } x = -y$

$x \cdot y = -6 \xrightarrow{x_1 = -3} -3y = -6 \rightarrow y = 2$
 $x \cdot y = -6 \xrightarrow{x = -y} -y^2 = -6 \rightarrow y = \sqrt{6}, y = -\sqrt{6}$
 $y = \sqrt{6} \xrightarrow{x = -y} x = -\sqrt{6} \quad y = -\sqrt{6} \xrightarrow{x = -y} x = \sqrt{6}$

Solución: $(x_1 = -3, y_1 = 2); (x_2 = \sqrt{6}, y_2 = -\sqrt{6}); (x_3 = -\sqrt{6}, y_3 = \sqrt{6})$

Sistemas de ecuaciones

046 Resuelve los sistemas de inecuaciones.

$$\text{a) } \begin{cases} x + 4 > 5 - 2x \\ 3x \geq 9 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} 4x + 3 \cdot (x - 2) > x \\ 3x - 4 \cdot (5 - x) \leq 1 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2 \cdot (x + 3) > 4 \\ 2x - 3 < x \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} 5 \cdot (6 - x) + 2 \cdot (x + 3) \geq x \\ -4 \cdot (3 - 2x) \geq 2 \cdot (3 - x) \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 5x - 2 \cdot (8 - x) \leq -2 \\ 4 \cdot (x + 6) - 8 > 0 \end{cases}$$

$$\text{f) } \begin{cases} 7x - 8 \cdot (x - 2) \geq 0 \\ 3x + 4 \cdot (1 - x) \leq 0 \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} x + 4 > 5 - 2x \\ 3x \geq 9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{3} \\ x \geq 3 \end{cases} \rightarrow x \geq 3 \rightarrow \text{Solución: } [3, +\infty)$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2 \cdot (x + 3) > 4 \\ 2x - 3 < x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x < 3 \end{cases} \rightarrow -1 < x < 3 \rightarrow \text{Solución: } (-1, 3)$$

$$\text{c) } \begin{cases} 5x - 2 \cdot (8 - x) \leq -2 \\ 4 \cdot (x + 6) - 8 > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x > -4 \end{cases} \rightarrow -4 < x \leq 2 \rightarrow \text{Solución: } (-4, 2]$$

$$\text{d) } \begin{cases} 4x + 3 \cdot (x - 2) > x \\ 3x - 4 \cdot (5 - x) \leq 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x \leq 3 \end{cases} \rightarrow 1 < x \leq 3 \rightarrow \text{Solución: } (1, 3]$$

$$\begin{aligned} \text{e) } \begin{cases} 5 \cdot (6 - x) + 2 \cdot (x + 3) \geq x \\ -4 \cdot (3 - 2x) \geq 2 \cdot (3 - x) \end{cases} &\rightarrow \begin{cases} 30 - 5x + 2x + 6 \geq x \\ -12 + 8x \geq 6 - 2x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \leq 9 \\ x \geq \frac{9}{5} \end{cases} \\ &\rightarrow \frac{9}{5} \leq x \leq 9 \rightarrow \text{Solución: } \left[\frac{9}{5}, 9\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } \begin{cases} 7x - 8 \cdot (x - 2) \geq 0 \\ 3x + 4 \cdot (1 - x) \leq 0 \end{cases} &\rightarrow \begin{cases} 7x - 8x + 16 \geq 0 \\ 3x + 4 - 4x \leq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \leq 16 \\ x \geq 4 \end{cases} \\ &\rightarrow 16 \geq x \geq 4 \rightarrow \text{Solución: } [4, 16] \end{aligned}$$

047 Halla la solución de los sistemas de inecuaciones.

$$\text{a) } \begin{cases} \frac{x-3}{4} + \frac{x}{2} \leq 1 \\ \frac{x-3}{2} + \frac{x+3}{5} < 2 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} \frac{3 \cdot (x+2)}{4} - \frac{x}{5} > 3 \\ \frac{5x}{6} - \frac{x-2}{4} \geq 2 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} \frac{3 \cdot (1-2x)}{5} > \frac{1}{2} \\ 4x - 5 \leq \frac{x-1}{3} \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} 5 - \frac{x}{3} - \frac{x}{4} > \frac{x-5}{6} \\ \frac{x+4}{5} - \frac{x}{6} > \frac{7}{10} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{a) } \left\{ \begin{array}{l} \frac{x-3}{4} + \frac{x}{2} \leq 1 \\ \frac{x-3}{2} + \frac{x+3}{5} < 2 \end{array} \right\} &\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x-3+2x \leq 4 \\ 5x-15+2x+6 < 20 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \leq \frac{7}{3} \\ x < \frac{29}{7} \end{array} \right\} \\ &\rightarrow x \leq \frac{7}{3} \rightarrow \text{Solución: } \left(-\infty, \frac{7}{3} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \left\{ \begin{array}{l} \frac{3 \cdot (1-2x)}{5} > \frac{1}{2} \\ 4x-5 \leq \frac{x-1}{3} \end{array} \right\} &\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 6-12x > 5 \\ 12x-15 \leq x-1 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x < \frac{1}{12} \\ x \leq \frac{14}{11} \end{array} \right\} \rightarrow x < \frac{1}{12} \\ \text{Solución: } &\left(-\infty, \frac{1}{12} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \left\{ \begin{array}{l} \frac{3 \cdot (x+2)}{4} - \frac{x}{5} > 3 \\ \frac{5x}{6} - \frac{x-2}{4} \geq 2 \end{array} \right\} &\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 15x+30-4x > 60 \\ 10x-3x+6 \geq 24 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x > \frac{30}{11} \\ x \geq \frac{18}{7} \end{array} \right\} \rightarrow x > \frac{30}{11} \\ \text{Solución: } &\left(\frac{30}{11}, +\infty \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \left\{ \begin{array}{l} 5 - \frac{x}{3} - \frac{x}{4} > \frac{x-5}{6} \\ \frac{x+4}{5} - \frac{x}{6} > \frac{7}{10} \end{array} \right\} &\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 60-4x-3x > 2x-10 \\ 6x+24-5x > 21 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x < \frac{70}{9} \\ x > -3 \end{array} \right\} \\ &\rightarrow -3 < x < \frac{70}{9} \rightarrow \text{Solución: } \left(-3, \frac{70}{9} \right) \end{aligned}$$

048

Encuentra la solución de los siguientes sistemas de inecuaciones.

$$\text{a) } \left\{ \begin{array}{l} x > 0 \\ 2x+1 \geq 0 \\ 4x-3 < 0 \end{array} \right\}$$

$$\text{b) } \left\{ \begin{array}{l} 5x-2 \leq 0 \\ 3x+4 > 0 \\ \frac{x+9}{2} \geq 3 \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} \text{a) } \left\{ \begin{array}{l} x > 0 \\ x > 0 \\ 2x+1 \geq 0 \\ 4x-3 < 0 \end{array} \right\} &\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \geq \frac{-1}{2} \\ x < \frac{3}{4} \end{array} \right\} \rightarrow 0 < x < \frac{3}{4} \rightarrow \text{Solución: } \left(0, \frac{3}{4} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \left\{ \begin{array}{l} 5x-2 \leq 0 \\ 3x+4 > 0 \\ \frac{x+9}{2} \geq 3 \end{array} \right\} &\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \leq \frac{2}{5} \\ x > \frac{-4}{3} \\ x \geq -3 \end{array} \right\} \rightarrow \frac{-4}{3} < x \leq \frac{2}{5} \rightarrow \text{Solución: } \left(\frac{-4}{3}, \frac{2}{5} \right] \end{aligned}$$

Sistemas de ecuaciones

049

En una chocolatería hay 900 bombones envasados en cajas de 6 y 12 unidades.



¿Cuántas cajas hay de cada clase si en total tienen 125 cajas?

N.º de cajas de 6 bombones: x

N.º de cajas de 12 bombones: y

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 125 \\ 6x + 12y = 900 \end{array} \right\} \rightarrow x = 125 - y$$

$$6x + 12y = 900 \xrightarrow{x = 125 - y} 750 - 6y + 12y = 900 \rightarrow 6y = 150 \rightarrow y = 25$$

$$x = 125 - y \xrightarrow{y = 25} x = 100$$

Hay 100 cajas de 6 bombones y 25 cajas de 12 bombones.

050

A un congreso acuden 60 personas. Si se van 3 hombres y vienen 3 mujeres,

el número de mujeres sería $\frac{1}{3}$ del número de hombres. ¿Cuántos hombres y mujeres hay en el congreso?

N.º de hombres: x

N.º de mujeres: y

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 60 \\ x - 3 = 3 \cdot (y + 3) \end{array} \right\} \rightarrow x = 60 - y$$

$$x - 3 = 3 \cdot (y + 3) \xrightarrow{x = 60 - y} 57 - y = 3 \cdot (y + 3) \rightarrow 4y = 48 \rightarrow y = 12$$

$$x = 60 - y \xrightarrow{y = 12} x = 48$$

Hay 48 hombres y 12 mujeres en el congreso.

051

Halla las edades de dos personas, sabiendo que hace 10 años la primera tenía 4 veces la edad de la segunda persona, pero dentro de 20 años la edad de la primera persona será el doble de la edad de la segunda.

Edad de la primera persona: x

Edad de la segunda persona: y

$$\left. \begin{array}{l} x - 10 = 4 \cdot (y - 10) \\ x + 20 = 2 \cdot (y + 20) \end{array} \right\} \rightarrow x = 4y - 30$$

$$x + 20 = 2 \cdot (y + 20) \xrightarrow{x = 4y - 30} 4y - 10 = 2y + 40 \rightarrow 2y = 50 \rightarrow y = 25$$

$$x = 4y - 30 \xrightarrow{y = 25} x = 70$$

La primera persona tiene 70 años y la segunda tiene 25 años.

- 052** La edad de Marta más la edad que tendrá dentro de 3 años es igual a la edad de Luisa dentro de 6 años, y la edad de Luisa dentro de 3 años es igual a la que tendrá Marta dentro de 6 años. Calcula las edades de Marta y de Luisa.

Edad de Marta: x

Edad de Luisa: y

$$\left. \begin{array}{l} x + x + 3 = y + 6 \\ y + 3 = x + 6 \end{array} \right\} \rightarrow x = y - 3$$

$$x + x + 3 = y + 6 \xrightarrow{x=y-3} 2y - 6 + 3 = y + 6 \rightarrow y = 9$$

$$x = y - 3 \xrightarrow{y=9} x = 6$$

Marta tiene 6 años y Luisa tiene 9 años.

- 053** Por el desierto va una caravana formada por camellos y dromedarios, con un total de 440 patas y 160 jorobas. ¿Cuántos camellos y dromedarios hay en la caravana? (Recuerda que los camellos tienen dos jorobas y los dromedarios tienen una.)



N.º de camellos: x

N.º de dromedarios: y

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y = 160 \\ 4x + 4y = 440 \end{array} \right\} \rightarrow x = 110 - y$$

$$2x + y = 160 \xrightarrow{x=110-y} 220 - 2y + y = 160 \rightarrow y = 60$$

$$x = 110 - y \xrightarrow{y=60} x = 50$$

Hay 50 camellos y 60 dromedarios en la caravana.

- 054** Pedro le dice a María: «Si cambias los billetes de 10 € que tienes por billetes de 5 € y los billetes de 5 € por billetes de 10 €, seguirás teniendo el mismo dinero». ¿Cuánto dinero tiene María, si en total son 20 billetes?

N.º de billetes de 5 €: x

N.º de billetes de 10 €: y

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 20 \\ 5x + 10y = 10x + 5y \end{array} \right\} \rightarrow x = y$$

$$x + y = 20 \xrightarrow{x=y} 2y = 20 \rightarrow y = 10$$

$$x = y \xrightarrow{y=10} x = 10$$

María tiene 10 billetes de 5 € y 10 billetes de 10 €.

Sistemas de ecuaciones

- 055** Los billetes de 50 € y 20 € que lleva Ángel en el bolsillo suman 380 €. Si cambiamos los billetes de 50 € por billetes de 20 € y al revés, entonces suman 320 €. Calcula cuántos billetes tiene de cada tipo.

N.º de billetes de 20 €: x

N.º de billetes de 50 €: y

$$\left. \begin{array}{l} 20x + 50y = 380 \\ 50x + 20y = 320 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{:2} \\ \xrightarrow{:(-5)} \end{array} \begin{array}{l} 10x + 25y = 190 \\ + \\ -10x - 4y = -64 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \hline \end{array} \right\} \begin{array}{l} \\ \\ 21y = 126 \end{array}$$

$$21y = 126 \rightarrow y = 6$$

$$20x + 50y = 380 \xrightarrow{y=6} 20x + 300 = 380 \rightarrow x = 4$$

Ángel tiene 4 billetes de 20 € y 6 billetes de 50 €.

- 056** Laura acude al banco a cambiar monedas de 5 céntimos por monedas de 20 céntimos. Si sale del banco con 225 monedas menos que cuando entró, ¿cuánto dinero llevaba?

N.º de monedas de 5 céntimos: x

N.º de monedas de 20 céntimos: y

$$\left. \begin{array}{l} x = y + 225 \\ 5x = 20y \end{array} \right\} \rightarrow x = 4y$$

$$4y = y + 225 \rightarrow y = 75$$

$$x = 4y \xrightarrow{y=75} x = 300$$

Tenía 300 monedas de 5 céntimos o, lo que es lo mismo, 15 €.

- 057** Por un chándal y unas zapatillas de deporte que costaban 135 € he pagado 85,50 € en rebajas, ya que en la sección de textil tienen el 40 % de descuento, y en la de calzado, el 30 %. ¿Qué precio tenía cada artículo y cuánto me han costado?



Precio del chándal: x

Precio de las zapatillas: y

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 135 \\ \frac{60}{100}x + \frac{70}{100}y = 85,5 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \rightarrow x = 135 - y \\ \rightarrow 6x + 7y = 855 \end{array}$$

$$6x + 7y = 855 \xrightarrow{x=135-y} 810 - 6y + 7y = 855 \rightarrow y = 45$$

$$x = 135 - y \xrightarrow{y=45} x = 90$$

El precio del chándal era de 90 € y el precio de las zapatillas era de 45 €.

Me han costado 54 € y 31,50 €, respectivamente.

- 058** Por la mezcla de 400 kg de pienso de tipo A con 800 kg de pienso de tipo B se han pagado 2.200 €. Calcula el precio de cada tipo de pienso, sabiendo que, si se mezclase 1 kg de pienso de cada tipo, la mezcla costaría 3,90 €.

Precio del pienso A: x

Precio del pienso B: y

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 3,9 \\ 400x + 800y = 2.200 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} x = 3,9 - y \\ 2x + 4y = 11 \end{array}$$

$$2x + 4y = 11 \xrightarrow{x = 3,9 - y} 7,8 - 2y + 4y = 11 \rightarrow y = 1,6$$

$$x = 3,9 - y \xrightarrow{1,6} x = 2,3$$

El pienso A cuesta 2,30 €/kg y el pienso B cuesta 1,60 €/kg.

- 059** La suma de las dos cifras de un número es 9. Si le añadimos 27, el número resultante es capicúa con él. Halla cuál es dicho número.

Cifra de las decenas: x

Cifra de las unidades: y

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 9 \\ 10x + y + 27 = x + 10y \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} x = 9 - y \\ x = y - 3 \end{array}$$

$$9 - y = y - 3 \rightarrow y = 6$$

$$x = 9 - y \xrightarrow{y = 6} x = 3$$

Es el número 36.

- 060** Obtén un número de dos cifras cuya diferencia de sus cifras es 6 y la cifra de las unidades es el cuadrado de la cifra de las decenas.

Cifra de las decenas: x

Cifra de las unidades: y

$$\left. \begin{array}{l} y - x = 6 \\ y = x^2 \end{array} \right\}$$

$$y - x = 6 \xrightarrow{y = x^2} x^2 - x - 6 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 3 \end{cases} \rightarrow \text{Solución no válida}$$

$$y = x^2 \xrightarrow{2y = 3} y = 9$$

Es el número 39.

- 061** Halla un número de dos cifras si el producto de sus cifras es 18 y la cifra de las unidades es el doble que la cifra de las decenas.

Cifra de las decenas: x

Cifra de las unidades: y

$$\left. \begin{array}{l} y = 2x \\ x \cdot y = 18 \end{array} \right\}$$

$$x \cdot y = 18 \xrightarrow{y = 2x} 2x^2 = 18 \rightarrow x = 3$$

$$y = 2x \xrightarrow{x = 3} y = 6$$

Es el número 36.

Sistemas de ecuaciones

062 Determina dos números cuya suma es 5 y la suma de sus cuadrados es 13.

Números: x, y

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 5 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{array} \right\} \rightarrow x = 5 - y$$

$$x^2 + y^2 = 13 \xrightarrow{x=5-y} 25 - 10y + 2y^2 = 13 \rightarrow y^2 - 5y + 6 = 0$$
$$\rightarrow y_1 = 2, y_2 = 3$$

$$x = 5 - y \xrightarrow{y_1=2} x_1 = 3 \qquad x = 5 - y \xrightarrow{y_2=3} x_2 = 2$$

Los números son 2 y 3.

063 Halla dos números sabiendo que su suma es 16 y la suma de sus inversos es $\frac{1}{3}$.

Números: x, y

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 16 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3} \end{array} \right\} \rightarrow x = 16 - y$$
$$\rightarrow 3y + 3x = xy$$

$$3y + 3x = xy \xrightarrow{x=16-y} 3y + 48 - 3y = 16y - y^2$$
$$\rightarrow y^2 - 16y + 48 = 0 \rightarrow y_1 = 12, y_2 = 4$$

$$x = 16 - y \xrightarrow{y_1=12} x_1 = 4 \qquad x = 16 - y \xrightarrow{y_2=4} x_2 = 12$$

Los números son 4 y 12.

064 En un instituto, la relación del número de chicos con el número

de chicas era de $\frac{8}{9}$, pero en junio esta relación era de $\frac{25}{21}$,

pues abandonaron el centro 20 chicos y el 30 % de las chicas.

¿Cuántos alumnos acabaron el curso?

Número de chicos que comenzaron el curso: x

Número de chicas que comenzaron el curso: y

$$\left. \begin{array}{l} \frac{x}{y} = \frac{8}{9} \\ \frac{x-20}{0,70 \cdot y} = \frac{25}{21} \end{array} \right\} \rightarrow y = \frac{9x}{8}$$
$$\rightarrow y = \frac{21x - 420}{17,5} \rightarrow y = \frac{6x - 120}{5}$$

$$\frac{9x}{8} = \frac{6x - 120}{5} \rightarrow 45x = 48x - 960 \rightarrow x = 320$$

$$y = \frac{9x}{8} \xrightarrow{x=320} y = 360$$

Comenzaron el curso 320 chicos y 360 chicas. Y lo acabaron 300 chicos y 252 chicas.



065

Tenemos que:

$$ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$$

Siendo x_1 y x_2 las soluciones de la ecuación de segundo grado, encuentra el sistema de ecuaciones que relaciona los coeficientes a , b y c con las soluciones x_1 y x_2 .

$$a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0 \rightarrow ax^2 + a \cdot (-x_1 - x_2) \cdot x + a \cdot x_1 \cdot x_2 = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} ax^2 + a \cdot (-x_1 - x_2) \cdot x + a \cdot x_1 \cdot x_2 = 0 \\ ax^2 + bx + c = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{-b}{a} = x_1 + x_2 \\ \frac{c}{a} = x_1 \cdot x_2 \end{array} \right\}$$

066

Resuelve los sistemas.

$$\text{a) } \begin{cases} x + y = 6 \\ 4x - y = -1 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x + y = 6 \\ 2x + 2y = 12 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x + y = 6 \\ x + y = 8 \end{cases}$$

a) Sistema compatible determinado

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ 4x - y = -1 \end{cases} \rightarrow x = 6 - y$$

$$4x - y = -1 \xrightarrow{x=6-y} 24 - 4y - y = -1 \rightarrow y = 5$$

$$x = 6 - y \xrightarrow{y=5} x = 1$$

b) Sistema compatible indeterminado

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ 2x + 2y = 12 \end{cases} \rightarrow x = 6 - y$$

$$2x + 2y = 12 \xrightarrow{x=6-y} 12 - 2y + 2y = 12 \rightarrow 0 = 0$$

c) Sistema incompatible

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ x + y = 8 \end{cases} \rightarrow x = 6 - y$$

$$x + y = 8 \xrightarrow{x=6-y} 6 - y + y = 8 \rightarrow 6 \neq 8 \rightarrow \text{Sin solución}$$

067

Generaliza la clasificación de sistemas de ecuaciones en función de los coeficientes y los términos independientes.

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

a) Sistema compatible determinado si: $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ b) Sistema compatible indeterminado si: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ c) Sistema incompatible si: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$

EN LA VIDA COTIDIANA

068



La empresa de perfumería Rich Perfum va a lanzar al mercado su nueva colonia que presentará en envases de dos tamaños, de 75 ml y de 100 ml. La colonia se llamará Rodin y los envases tendrán la forma del *Pensador*.



Al vender todas las existencias, la empresa quiere obtener lo suficiente para poder mantener el negocio, pagar a sus empleados y conseguir su propia ganancia.



¿A cuánto debe vender cada frasco?

N.º de envases pequeños: x

N.º de envases grandes: y

Teniendo en cuenta que han comprado el triple de envases pequeños que de grandes, y el precio de cada uno de ellos y el total, tenemos que:

$$x = 3y$$

$$3,5x + 4,5y = 113.400$$

$$3,5x + 4,5y = 113.400 \xrightarrow{x = 3y} 10,5y + 4,5y = 113.400$$

$$\rightarrow 15y = 113.400 \rightarrow y = 7.560$$

$$x = 3y \xrightarrow{y = 7.560} x = 22.680$$

Se han comprado 22.680 envases pequeños y 7.560 envases grandes.

La cantidad de colonia que pueden envasar es:

$$22.680 \diamond 75 + 7.560 \diamond 100 = 2.457.000 \text{ ml} = 2.457 \text{ litros}$$

El coste de la colonia es:

$$2.457 \diamond 6 = 14.742 \text{ €}$$

Producción = colonia + envases

El coste de producción es:

$$14.742 + 113.400 = 128.142 \text{ €}$$

Para conseguir 204.020 € de beneficios hay que ingresar por las ventas:

$$204.020 + 128.142 = 332.162 \text{ €}$$

Coste del envase pequeño: z

Coste del envase grande: t

$$t = z + 2$$

$$22.680z + 7.560t = 332.162$$

$$22.680z + 7.560t = 332.162 \xrightarrow{t = z + 2} 30.240z = 317.042 \rightarrow z = 10,48$$

$$t = z + 2 \xrightarrow{z = 10,48} t = 12,48$$

Precio del envase pequeño: 10,48 €.

Precio del envase grande: 12,48 €.

Sistemas de ecuaciones

069



Se van a comprar ordenadores e impresoras para actualizar los equipos informáticos de un hospital.



Cada ordenador cuesta 699 €, y cada impresora, 139 €. Y el presupuesto para la compra oscila entre 7.500 y 8.000 €.

Los responsables van al departamento financiero para presentar la petición de compra.

El rendimiento óptimo de las impresoras se obtiene para un máximo de tres ordenadores por impresora.

Además, debe haber al menos una impresora en cada una de las ocho plantas del edificio.



¿Quién crees que tiene razón?

Este presupuesto no es viable.

A mí me parece que sí lo es.



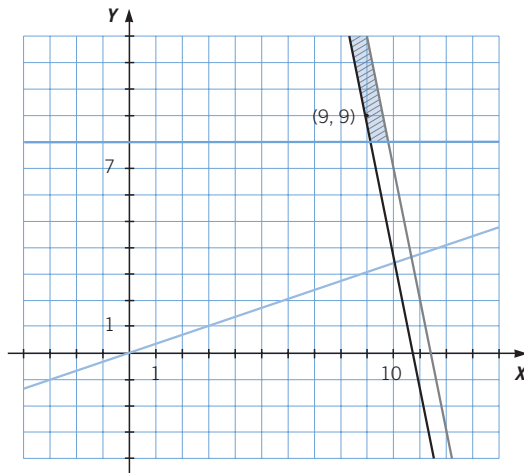
$$699x + 139y \leq 7.500$$

$$699x + 139y \leq 8.000$$

$$y \leq \frac{x}{3}$$

$$y \leq 8$$

Representamos las distintas rectas que resultan al sustituir las desigualdades por igualdades, y comprobamos los valores que están en la región solución.

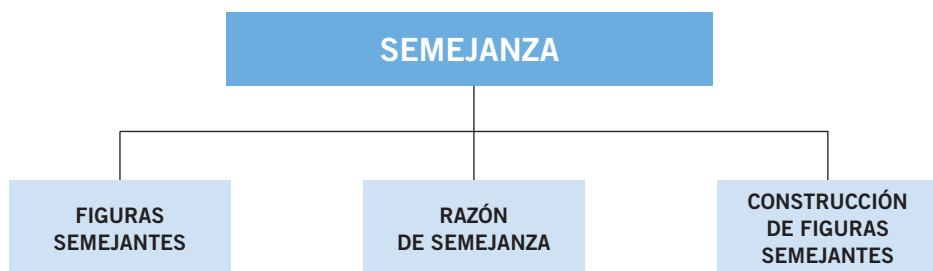


De los valores que están en la región solución, el único valor que cumple todas las condiciones es que haya 9 ordenadores y 9 impresoras:

$$699 \diamond 9 + 139 \diamond 9 = 7.542$$

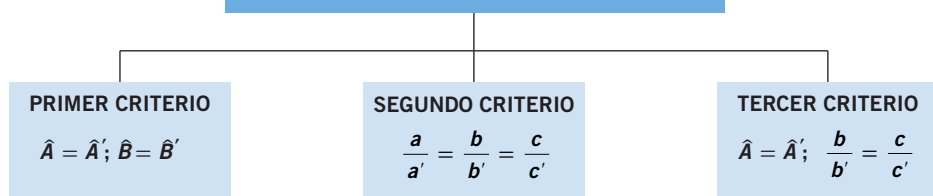
$$7.500 \leq 7.542 \leq 8.000$$

En cualquier otro caso dentro de la región solución, el número de impresoras es superior al número de ordenadores, y esto supondría un incremento del coste sin tener un aumento de las prestaciones.

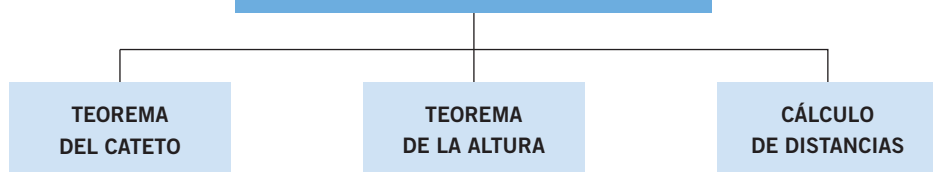


TEOREMA DE TALES

CRITERIOS DE SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS



SEMEJANZA EN TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS



SEMEJANZA EN ÁREAS Y VOLÚMENES

Enigmas

Fue un cortejo en toda regla: el primer encuentro sorprendió, la segunda vez el interés creció hasta límites insospechados, y a partir ahí esperábamos cada misiva con la impaciencia de un amante, pues realmente nos conquistó.

Así explicaba Roberval la relación de Pierre de Fermat con el grupo de Mersenne.

Mientras paseaban por el claustro del monasterio, Roberval y el padre Mersenne charlaban animadamente acerca de Pierre de Fermat.

—Al principio, cuando leímos los problemas que proponía en su carta, pensamos que era un pobre loco —recordaba riendo Roberval—. Sin embargo, al resolverlos nos dimos cuenta de que las respuestas a sus preguntas abrían nuevos caminos en el mundo de las Matemáticas.

—Las Parábolas de Nuestro Señor nos enseñan que unas historias corrientes pueden encerrar la esencia de la doctrina cristiana; con sus preguntas, Fermat nos ha dado una lección parecida: la pregunta adecuada abre caminos alternativos en la senda del conocimiento.

La campana, llamando a la oración, y un amistoso apretón de manos pusieron término a la visita.

El último enigma de Fermat tardó en resolverse tres siglos, y dice que la ecuación $x^n + y^n = z^n$ no tiene soluciones enteras para ningún exponente mayor que 2. Escribe la ecuación y encuentra una solución para $n = 2$.

Si $n = 2$, tenemos que:

$$x^n + y^n = z^n \rightarrow x^2 + y^2 = z^2$$

Así, para cualquier terna pitagórica se cumplirá esta ecuación.

Por ejemplo:

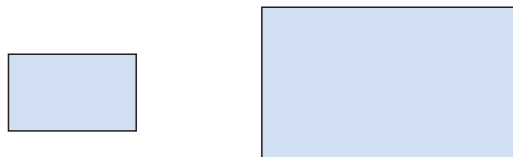
$$\left. \begin{array}{l} x = 4 \\ y = 3 \\ z = 5 \end{array} \right\} \rightarrow 4^2 + 3^2 = 5^2$$



Semejanza

EJERCICIOS

- 001 Razona si son semejantes los dos rectángulos de la figura.



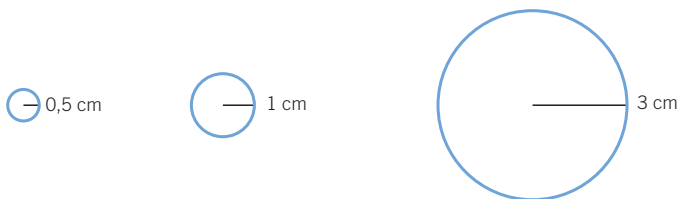
En caso afirmativo, averigua cuál es la razón de semejanza.

Son semejantes, ya que tienen los ángulos iguales y los lados son proporcionales. La razón de semejanza es 2.

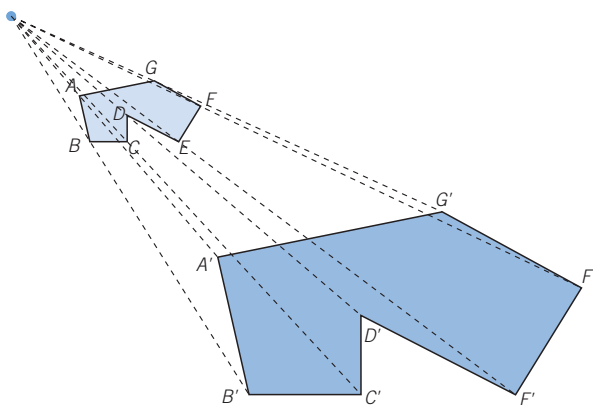
- 002 Ana ha dibujado dos cuadrados cuyos lados miden 1 y 3 cm, respectivamente. ¿Son semejantes? Calcula su razón de semejanza.

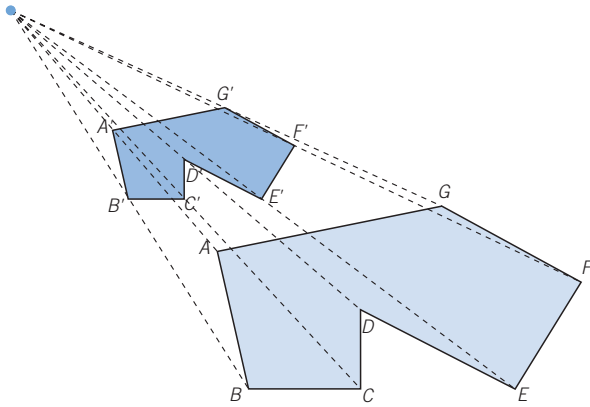
Todos los cuadrados son semejantes y, en este caso, la razón de semejanza es 3.

- 003 Dibuja dos figuras semejantes a una circunferencia de 1 cm de radio, con razones de semejanza 3 y $\frac{1}{2}$.

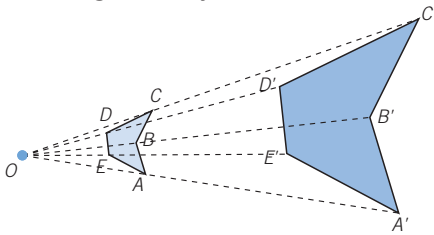


- 004 Calca esta figura y construye dos figuras semejantes a ella con razones 3 y 0,5.

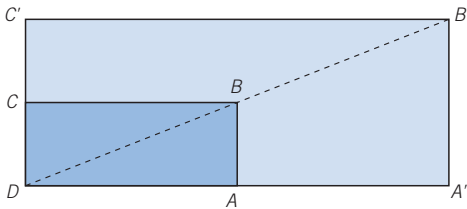




005 Completa la figura semejante.



006 Dibuja un rectángulo semejante a otro, con razón 2, si el punto O es uno de sus vértices.



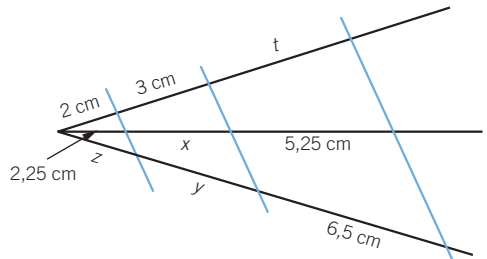
007 Calcula las distancias desconocidas.

$$\frac{2,25}{2} = \frac{x}{3} \rightarrow x = 3,375 \text{ cm}$$

$$\frac{2,25}{2} = \frac{5,25}{t} \rightarrow t = 4,6 \text{ cm}$$

$$\frac{6,5}{5,25} = \frac{z}{2,25} \rightarrow z = 2,79 \text{ cm}$$

$$\frac{6,5}{5,25} = \frac{y}{x} \rightarrow \frac{6,5}{5,25} = \frac{y}{3,375} \rightarrow y = 4,18 \text{ cm}$$

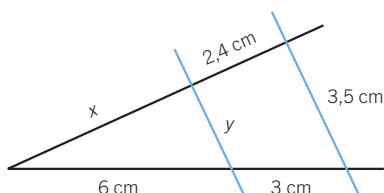


Semejanza

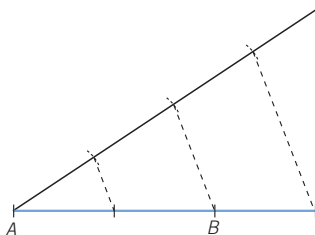
008 Halla las distancias que faltan.

$$\frac{2,4}{3} = \frac{x}{6} \rightarrow x = 4,8 \text{ cm}$$

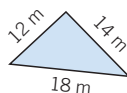
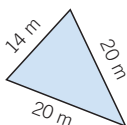
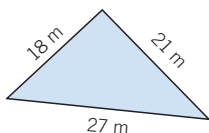
$$\frac{3,5}{9} = \frac{y}{6} \rightarrow y = 2,3 \text{ cm}$$



009 Utiliza el teorema de Tales para dividir un segmento de 4 cm en tres partes iguales.



010 Comprueba si los siguientes triángulos son semejantes o no.



Utilizando el segundo criterio de semejanza, se comprueba que son semejantes los triángulos primero y tercero, y su razón de semejanza

$$\text{es: } r = \frac{18}{12} = \frac{21}{14} = \frac{27}{18} = 1,5.$$

011 Razona la semejanza de dos triángulos si:

a) Sus lados miden 2, 4 y 6 cm, y 3, 6 y 9 cm, respectivamente.

b) Son triángulos rectángulos isósceles.

a) Por el segundo criterio, son semejantes, porque sus lados son proporcionales.

b) Por el primer criterio, son semejantes, pues tienen sus ángulos iguales.

012 ¿Cuáles son las condiciones necesarias para que dos triángulos isósceles sean semejantes? ¿Y si fueran equiláteros?

Dos triángulos isósceles son semejantes si tienen el mismo ángulo formado por los lados iguales.

Los triángulos equiláteros son siempre semejantes, ya que tienen sus ángulos iguales.

- 013** La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 10 cm y un cateto 4 cm, y la hipotenusa de otro mide 20 cm y un cateto 8 cm. ¿Son semejantes los triángulos?

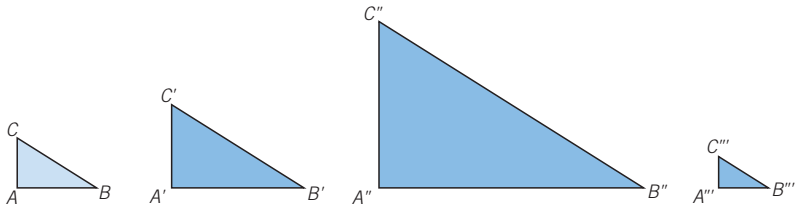
El otro cateto del primer triángulo mide: $c = \sqrt{100 - 16} = \sqrt{84}$ cm

El otro cateto del segundo triángulo mide:

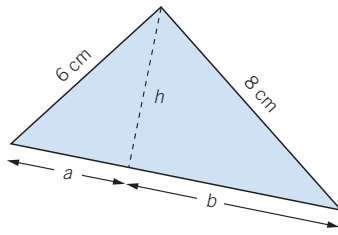
$$c' = \sqrt{400 - 64} = \sqrt{336} = 2\sqrt{84} \text{ cm}$$

Por tanto, sus lados son proporcionales, y aplicando el segundo criterio, los triángulos son semejantes.

- 014** Dibuja en tu cuaderno un triángulo rectángulo, y construye tres triángulos semejantes a él.



- 015** Calcula las medidas a , b y h .



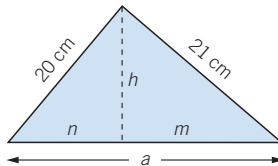
$$\text{Hipotenusa} = \sqrt{64 + 36} = 10 \text{ cm}$$

$$\frac{8}{10} = \frac{b}{8} \rightarrow b = 6,4 \text{ cm}$$

$$\frac{6}{10} = \frac{a}{6} \rightarrow a = 3,6 \text{ cm}$$

$$\frac{6,4}{h} = \frac{h}{3,6} \rightarrow h^2 = 23,04 \rightarrow h = 4,8 \text{ cm}$$

- 016** Halla la medida de la hipotenusa y la altura sobre la hipotenusa de este triángulo rectángulo.



$$\text{Hipotenusa} = \sqrt{400 + 441} = 29 \text{ cm}$$

$$\frac{20}{29} = \frac{n}{20} \rightarrow n = 13,79 \text{ cm}$$

$$\frac{21}{29} = \frac{m}{21} \rightarrow m = 15,21 \text{ cm}$$

$$h^2 = 13,79 \cdot 15,21 \rightarrow h = 14,48 \text{ cm}$$

Semejanza

- 017** Determina la hipotenusa y la altura sobre la hipotenusa en un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 5 y 12 cm, respectivamente.

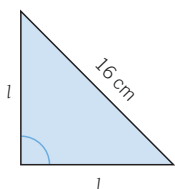
$$\text{Hipotenusa} = \sqrt{144 + 25} = 13 \text{ cm}$$

$$\frac{5}{13} = \frac{n}{5} \rightarrow n = 1,92 \text{ cm}$$

$$\frac{12}{13} = \frac{m}{12} \rightarrow m = 11,08 \text{ cm}$$

$$h^2 = 1,92 \cdot 11,08 \rightarrow h = 4,61 \text{ cm}$$

- 018** Calcula la altura, el perímetro y el área de un triángulo rectángulo isósceles cuya hipotenusa mide 16 cm.



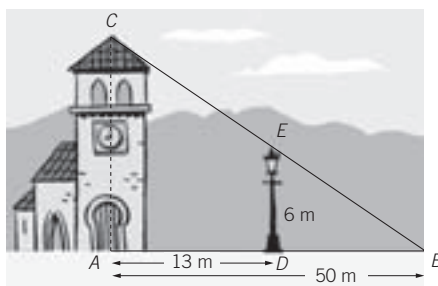
$$16^2 = l^2 + l^2 \rightarrow l^2 = \frac{256}{2} \rightarrow l = \sqrt{128} = 11,31 \text{ cm}$$

$$\text{Altura} = l = 11,31 \text{ cm}$$

$$\text{Perímetro} = 2 \cdot l + 16 = 38,62 \text{ cm}$$

$$\text{Área} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{\sqrt{128} \cdot \sqrt{128}}{2} = 64 \text{ cm}^2$$

- 019** Los triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{ADE}$ son semejantes.



a) Escribe la relación de semejanza que cumplen los triángulos.

b) Halla la altura de la torre.

a) La razón de semejanza es:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DB}} = \frac{50}{50 - 13} = 1,351$$

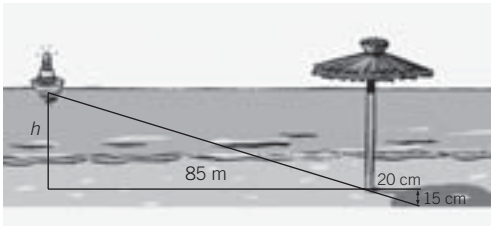
$$\text{b) } \frac{h}{50} = \frac{6}{50 - 13} \rightarrow h = \frac{50 \cdot 6}{37} = 8,1 \text{ m}$$

- 020** Un niño situado a 3 m de un charco, ve reflejado en él un nido de cigüeña sobre una torre. ¿A qué altura se encuentra el nido, si el niño mide 1,50 m y la distancia del charco a la torre es 50 m?

Llamando h a la altura de la torre, y aplicando las relaciones de semejanza de triángulos, se obtiene:

$$\frac{h}{1,5} = \frac{50}{3} \rightarrow h = \frac{50 \cdot 1,5}{3} = 25 \text{ m}$$

- 021** ¿Qué distancia hay de la boya a la playa?



$$\begin{aligned} \frac{85}{h} &= \frac{0,2}{0,15} \\ h &= \frac{85 \cdot 0,15}{0,2} = 63,75 \text{ m} \end{aligned}$$

- 022** Las dimensiones de un campo de fútbol son 70 y 100 m, respectivamente. ¿Cuál es la superficie de un futbolín hecho a escala 1:75?

La razón de semejanza es $r = \frac{1}{75}$.

$$A = r^2 \cdot A_{\text{real}} = \left(\frac{1}{75}\right)^2 \cdot 70 \cdot 100 = \frac{7.000}{75^2} = 1,244 \text{ m}^2$$

- 023** Si el volumen de un silo es de 45.000 m³, ¿cuál será el volumen de su maqueta a escala 1:40?

La razón de semejanza es: $r = \frac{1}{40} = 0,025$; ya que la escala es 1:40.

$$V = r^3 \cdot V_{\text{real}} = (0,025)^3 \cdot 45.000 = 0,00015625 \cdot 45.000 = 0,703125 \text{ m}^3$$

- 024** A Carlos le han regalado una maqueta de un barco a escala 1:100.

- a) Si el barco real desplaza 3.671 toneladas de agua, ¿cuánto desplazaría la maqueta?
b) Si la superficie real mide 3.153 m², ¿cuánto mide la superficie de las velas de la maqueta?

La razón de semejanza es: $r = \frac{1}{100} = 0,01$.

a) $V = r^3 \cdot V_{\text{real}} = (0,01)^3 \cdot 3.671 = 0,000001 \cdot 3.671 = 0,003671$ toneladas
El barco de la maqueta desplaza 3,671 kg de agua.

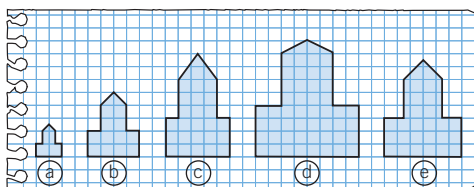
b) $A = r^2 \cdot A_{\text{real}} = (0,01)^2 \cdot 3.153 = 0,0001 \cdot 3.153 = 0,3153 \text{ m}^2$

Semejanza

ACTIVIDADES

- 025** Indica qué polígonos son semejantes entre sí, y calcula su razón de semejanza.

Son semejantes los polígonos a), b) y e).
La razón de semejanza de a) y b) es 2 y la razón de semejanza de a) y e) es 3.



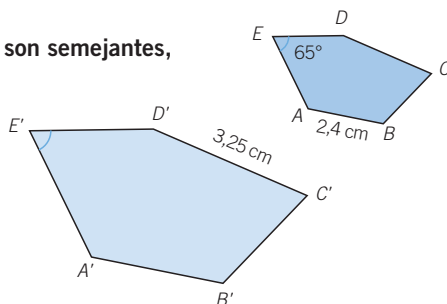
- 026** Los pentágonos $ABCDE$ y $A'B'C'D'E'$ son semejantes, con razón de semejanza $r = \frac{5}{2}$.

- a) ¿Cuánto mide el segmento $A'B'$?
b) ¿Cuál es la amplitud de $\hat{E}'$?
c) Calcula la medida de CD .

a) $\overline{A'B'} = \frac{5}{2} \cdot \overline{AB} = 6 \text{ cm}$

b) La amplitud de $\hat{E}'$ es la misma que la amplitud de $\hat{E}$: 65° .

c) $\overline{CD} = \frac{2}{5} \cdot \overline{C'D'} = 1,3 \text{ cm}$



- 027** Halla la longitud de los lados de un triángulo semejante a otro de lados 5, 6 y 8 cm, respectivamente, con razón de semejanza $r = 1,6$.

Los lados medirán 6; 9,6 y 12,8 cm, respectivamente.

028 HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE CALCULAN LOS LADOS DE UN POLÍGONO SEMEJANTE A OTRO, CONOCIDO SOLO SU PERÍMETRO?

Calcula los lados de un pentágono si su perímetro es 180 cm y es semejante a otro cuyos lados miden 4, 5, 7, 9 y 11 cm, respectivamente.

PRIMERO. Se halla la razón de semejanza dividiendo ambos perímetros.

$$P = 180 \text{ cm} \quad P' = 4 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36 \text{ cm}$$

$$P = r \cdot P' \rightarrow r = \frac{P}{P'} = \frac{180}{36} = 5$$

SEGUNDO. Para calcular la longitud de los lados, se multiplica cada lado conocido del otro pentágono por la razón de semejanza.

$$a = 5 \cdot 4 = 20 \text{ cm}$$

$$d = 5 \cdot 9 = 45 \text{ cm}$$

$$b = 5 \cdot 5 = 25 \text{ cm}$$

$$e = 5 \cdot 11 = 55 \text{ cm}$$

$$c = 5 \cdot 7 = 35 \text{ cm}$$

- 029** Los lados de un triángulo miden $a = 7$ cm, $b = 8$ cm y $c = 10$ cm. Calcula cuánto miden los lados de un triángulo semejante cuyo perímetro es 125 cm.

Siendo m , n y s los lados del triángulo y r la razón de semejanza, se verifica:

$$m = 7r \quad n = 8r \quad s = 10r$$

Teniendo en cuenta que el perímetro del nuevo triángulo es 125 cm:

$$m + n + s = 125 \rightarrow 7r + 8r + 10r = 125 \rightarrow 25r = 125 \rightarrow r = 5$$

La longitud de los lados del nuevo triángulo es:

$$m = 35 \text{ cm} \quad n = 40 \text{ cm} \quad s = 50 \text{ cm}$$

- 030** Dibuja dos polígonos que tengan los lados proporcionales y no sean polígonos semejantes.

Hay que dibujar un cuadrado y un rombo cuyos ángulos no sean rectos; así los lados serían proporcionales, pues son iguales, pero los polígonos no son semejantes.

- 031** Si dos cuadriláteros tienen sus ángulos iguales, ¿son semejantes? Pon un ejemplo.

No necesariamente, puesto que dos rectángulos tienen sus ángulos iguales, pero sus lados no tienen por qué ser proporcionales.

- 032** Razona si son ciertas estas afirmaciones.

- Todos los cuadrados son semejantes.
- Todos los rombos son semejantes.
- Todos los hexágonos regulares son semejantes.

a) Cierta. Todos los ángulos son rectos y los lados son proporcionales.

b) Falsa. Hay rombos que no tienen los ángulos iguales.

c) Cierta. Todos los hexágonos regulares son semejantes, porque tienen los ángulos iguales y los lados proporcionales.

- 033** Tenemos tres cuadriláteros A , B y C semejantes. La razón de semejanza de B respecto de A es 2,6 y la de C respecto de A es 0,8. Calcula.

- La razón de semejanza de A respecto de B .
- La razón de semejanza de C respecto de B .

$$\text{a) } r = \frac{1}{2,6} = \frac{5}{13}$$

$$\text{b) } r = \frac{0,8}{2,6} = \frac{4}{13}$$

Semejanza

034



Sabiendo que la razón de semejanza del polígono A respecto del polígono B es $r = 1,5$; indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

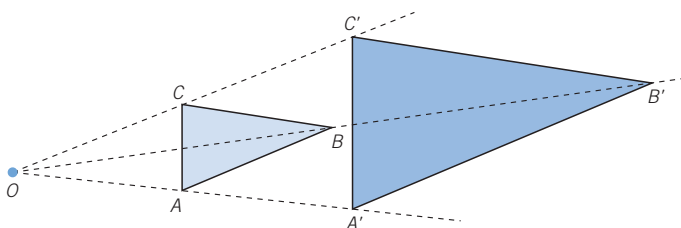
- B es un polígono de mayor tamaño que A .
- Cada lado del polígono B mide 1,5 cm más que cada lado del polígono A .
- Los ángulos del polígono B son 1,5 veces mayores que los del polígono A .
- Las longitudes de los lados de B multiplicadas por 1,5 miden igual que los lados de A .

a) Falsa b) Falsa c) Falsa d) Verdadera

035



Construye un triángulo semejante a $\widehat{ABC}$, utilizando el punto O , y cuya razón sea $r = 2$.



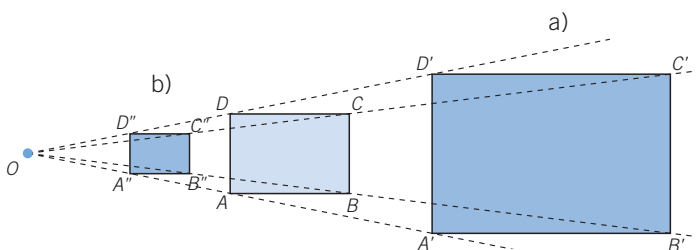
036



Dibuja un cuadrilátero en tu cuaderno y elige un punto exterior O .

Dibuja las figuras semejantes con razón de semejanza:

- $r = 2$
- $r = 0,5$

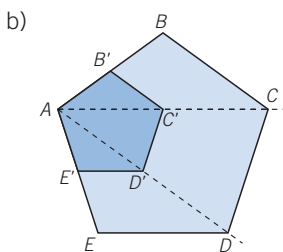
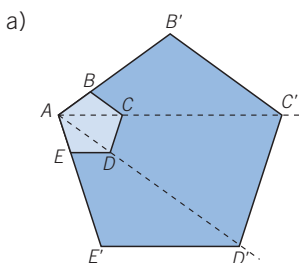


037



Dibuja un pentágono en tu cuaderno y elige uno de sus vértices para construir un pentágono semejante con razón de semejanza:

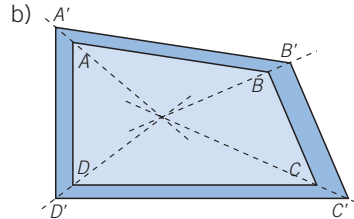
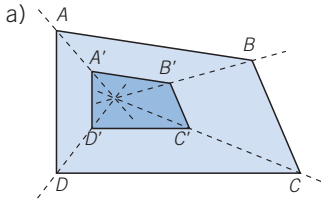
- $r = 3,5$
- $r = 0,5$



038 Dibuja un trapezoide. Toma un punto interior a él, y construye dos trapezoides semejantes con razón de semejanza:

a) $r = 0,4$

b) $r = 1,2$



039 Pon un ejemplo de dos figuras semejantes, con razón de semejanza:

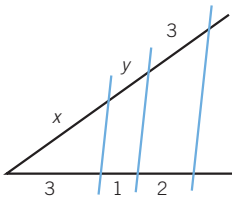
a) $0 < r < 1$

b) $r > 1$

- a) Por ejemplo, un cuadrado, de 4 cm de lado, y otro cuadrado, de 2 cm de lado.
 b) Por ejemplo, un triángulo equilátero, de 3 cm de lado, y otro triángulo equilátero, de 5 cm de lado.

040 Calcula las longitudes desconocidas.

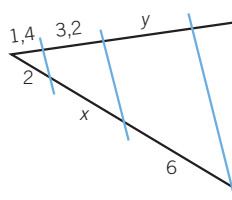
a)



$$a) \frac{3}{2} = \frac{x}{3} \rightarrow x = 4,5 \text{ cm}$$

$$\frac{3}{2} = \frac{y}{1} \rightarrow y = 1,5 \text{ cm}$$

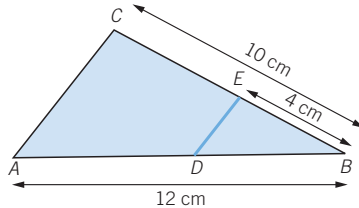
b)



$$b) \frac{2}{1,4} = \frac{x}{3,2} \rightarrow x = 4,57 \text{ cm}$$

$$\frac{1,4}{2} = \frac{y}{6} \rightarrow y = 4,2 \text{ cm}$$

041 ¿Cuánto mide $\overline{DB}$? ¿Se puede hallar $\overline{DE}$?



$$\frac{12}{10} = \frac{\overline{DB}}{4} \rightarrow \overline{DB} = 4,8 \text{ cm}$$

La medida de $\overline{DE}$ no se puede calcular, porque faltan datos como, por ejemplo, el valor de $\overline{AC}$.

Semejanza

042 HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE DIVIDE UN SEGMENTO EN PARTES IGUALES?

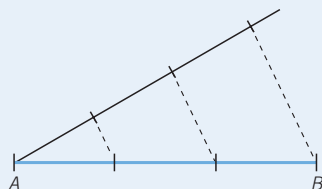
Divide un segmento cuya longitud es 4 cm en tres partes iguales.

PRIMERO. Se traza una recta secante al segmento en uno de sus extremos.

SEGUNDO. Se marcan en la recta tres segmentos consecutivos de igual longitud y se une, mediante una recta, la última marca con el extremo del segmento.

TERCERO. Se trazan paralelas a esta recta que pasen por las otras marcas.

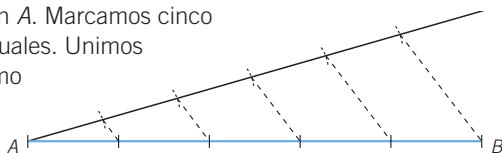
El segmento AB queda dividido en tres partes iguales por el teorema de Tales.



043 Divide gráficamente un segmento en cinco partes iguales y explica cómo lo haces.



Se traza una recta secante en A. Marcamos cinco segmentos consecutivos e iguales. Unimos la última marca con el extremo del segmento y trazamos las paralelas.

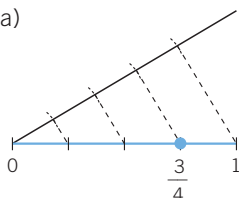


044 Representa, de forma exacta en la recta real, los siguientes números racionales.



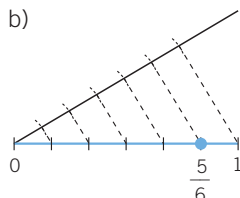
a) $\frac{3}{4}$

a)



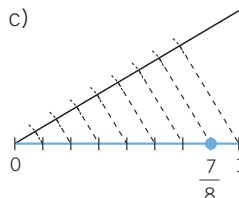
b) $\frac{5}{6}$

b)



c) $\frac{7}{8}$

c)



045 Aplicando el teorema de Tales, divide un segmento en dos partes, una doble que la otra.

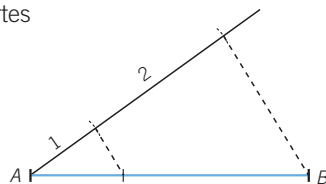


Esto equivale a dividir el segmento en dos partes proporcionales a 2 y 1.

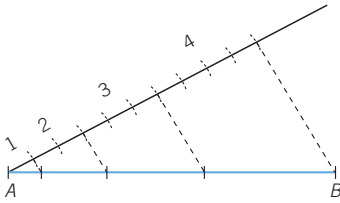
Trazamos una recta secante que pase por uno de los extremos, y marcamos en ella una medida correspondiente a 1 y otra medida que sea doble que la anterior, correspondiente a 2.

Se une la última marca con el otro extremo del segmento y, después, se traza una paralela que pase por la otra marca.

Las rectas que hemos trazado dividen el segmento en dos partes, siendo una doble que la otra.

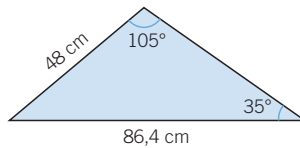
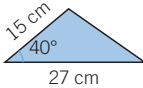


- 046** Utilizando el teorema de Tales, divide un segmento en partes proporcionales a 3, 4, 2 y 1.

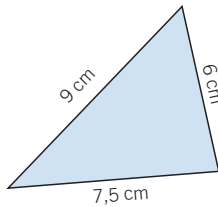
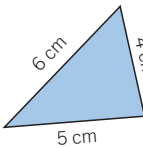


- 047** Indica si son semejantes estos triángulos.

a)



b)

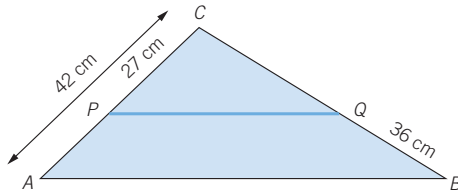


a) Son semejantes, ya que tienen un ángulo igual de 40° , y los dos lados

contiguos son proporcionales: $\frac{48}{15} = \frac{86,4}{27}$

b) Son semejantes, porque tienen los lados proporcionales: $\frac{9}{6} = \frac{6}{4} = \frac{7,5}{5}$

- 048** En el triángulo ABC se traza un segmento PQ paralelo a AB . Calcula BC .
¿Se puede hallar AB ?



Aplicando el teorema de Tales se obtiene:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BQ}} \rightarrow \frac{42}{15} = \frac{\overline{BC}}{36} \rightarrow \overline{BC} = \frac{42 \cdot 36}{15} = 100,8 \text{ cm}$$

No se puede calcular el segmento AB porque faltan datos.

Semejanza

049



Indica si un triángulo, cuyos lados miden a , b y c , es semejante a los triángulos cuyos lados miden:

a) $3a$, $3b$ y $3c$

b) $a + 3$, $b + 3$ y $c + 3$

c) $\frac{a}{3}$, $\frac{b}{3}$ y $\frac{c}{3}$

a) $\frac{3a}{a} = \frac{3b}{b} = \frac{3c}{c} \rightarrow$ Son semejantes.

b) $\frac{a+3}{a} \neq \frac{b+3}{b} \neq \frac{c+3}{c} \rightarrow$ No son semejantes.

c) $\frac{\frac{a}{3}}{\frac{a}{3}} = \frac{\frac{b}{3}}{\frac{b}{3}} = \frac{\frac{c}{3}}{\frac{c}{3}} \rightarrow$ Son semejantes.

050



La base de un triángulo y su altura miden el triple que las de otro. Explica por qué los dos triángulos podrían no ser semejantes y dibuja un ejemplo.

Dadas una base y una altura, existen infinitos triángulos distintos con esos datos, y que tienen ángulos diferentes.

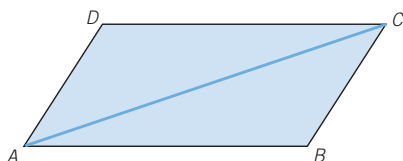


051



Una diagonal divide un paralelogramo en dos triángulos. ¿Son semejantes?

Aplicando el segundo criterio de semejanza, se puede comprobar que son semejantes.



052



Si dos triángulos rectángulos tienen uno de los catetos iguales, ¿son semejantes?

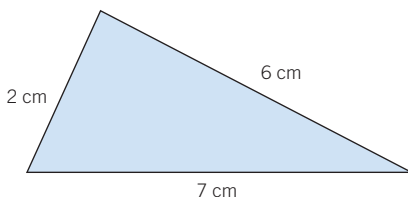
No lo son. En el caso de que tengan un cateto igual no se conserva la proporcionalidad de los lados, ya que la razón entre los catetos iguales es 1 y la razón entre los catetos que no son iguales puede ser distinta de 1.

053



Determina todos los triángulos de perímetro 12 cm que sean semejantes a otro cuyos lados miden 2, 7 y 6 cm, respectivamente.

Sean x , y , z los lados de un triángulo de perímetro 12 cm y sea r la razón de semejanza. Utilizando el segundo criterio de semejanza, resulta:



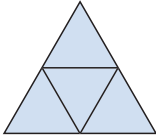
$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{2} = \frac{y}{7} = \frac{z}{6} = r &\rightarrow \begin{cases} x = 2r \\ y = 7r \\ z = 6r \end{cases} \rightarrow 2r + 7r + 6r = 12 \rightarrow 15r = 12 \\ &\rightarrow r = \frac{12}{15} \rightarrow r = 0,8 \text{ cm} \end{aligned} \right\}$$

Por tanto, las medidas son: $x = 1,6$ cm; $y = 5,6$ cm y $z = 4,8$ cm.

054

Dibuja un triángulo equilátero, marca los puntos medios de cada uno de sus lados y únelos mediante rectas. La figura que resulta tiene cuatro triángulos.

- a) ¿Son semejantes estos cuatro triángulos al triángulo original?
 b) ¿Y son semejantes estos cuatro triángulos entre sí?
 c) Halla, en cada caso, la razón de semejanza de los triángulos.

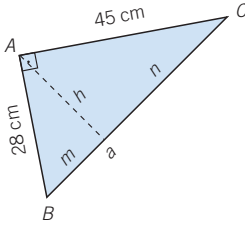


- a) Son semejantes, ya que los cuatro triángulos son equiláteros.
 b) Son semejantes, ya que los cuatro triángulos son equiláteros.
 c) La razón entre el triángulo original y los nuevos triángulos es 0,5; y la razón entre los nuevos triángulos es 1.

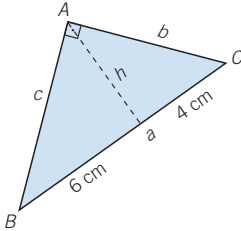
055

Calcula los valores que faltan en los siguientes triángulos rectángulos.

a)



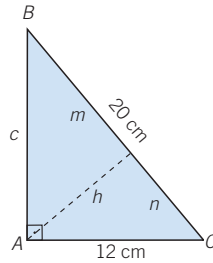
b)



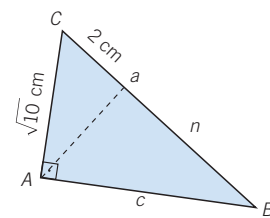
$$\begin{aligned} \text{a) } a &= \sqrt{28^2 + 45^2} = 53 \text{ cm} \\ m &= \frac{28^2}{53} = 14,79 \text{ cm} \\ n &= \frac{45^2}{53} = 38,21 \text{ cm} \\ h &= \sqrt{14,79 \cdot 38,21} = 23,77 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } h &= \sqrt{6 \cdot 4} = 4,9 \text{ cm} \\ c &= \sqrt{6^2 + 4,9^2} = 7,75 \text{ cm} \\ b &= \sqrt{4^2 + 4,9^2} = 6,32 \text{ cm} \\ a &= 6 + 4 = 10 \text{ cm} \end{aligned}$$

c)



d)



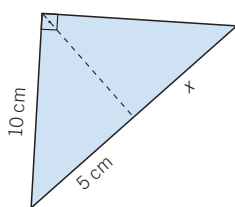
$$\begin{aligned} \text{c) } c &= \sqrt{20^2 - 12^2} = 16 \text{ cm} \\ m &= \frac{16^2}{20} = 12,8 \text{ cm} \\ n &= \frac{12^2}{20} = 7,2 \text{ cm} \\ h &= \sqrt{12,8 \cdot 7,2} = 9,6 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } h &= \sqrt{(\sqrt{10})^2 - 2^2} = 2,45 \text{ cm} \\ n &= \frac{2,45^2}{2} = 3 \text{ cm} \\ a &= 3 + 2 = 5 \text{ cm} \\ c &= \sqrt{5^2 - (\sqrt{10})^2} = 3,87 \text{ cm} \end{aligned}$$

Semejanza

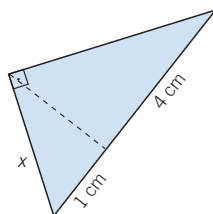
056 Calcula x en cada caso.

a)



$$\begin{aligned} a) \quad h &= \sqrt{10^2 - 5^2} = 8,66 \text{ cm} \\ x &= \frac{8,66^2}{5} = 15 \text{ cm} \end{aligned}$$

b)



$$\begin{aligned} b) \quad h &= \sqrt{1 \cdot 4} = 2 \text{ cm} \\ x &= \sqrt{2^2 + 1^2} = 2,24 \text{ cm} \end{aligned}$$

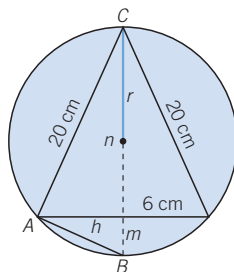
057 En un triángulo rectángulo isósceles, la altura trazada sobre la hipotenusa es la mitad de la hipotenusa. ¿Por qué?

Siendo la hipotenusa a , las dos proyecciones miden $\frac{a}{2}$.

$$h = \sqrt{\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}} = \sqrt{\frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2}$$

058 ¿Cuánto mide el radio de esta circunferencia?

$$\begin{aligned} n &= \sqrt{20^2 - 6^2} = 17,08 \text{ cm} \\ m &= \frac{6^2}{17,08} = 2,11 \text{ cm} \\ 2r &= m + n = 17,08 + 2,11 = 19,19 \text{ cm} \\ r &= \frac{19,19}{2} = 9,6 \text{ cm} \end{aligned}$$



059 ¿Cuánto mide la sombra proyectada por un árbol de 15 m de altura, sabiendo que en ese mismo momento otro árbol de 8 m de altura proyecta una sombra de 10 m?

$$\frac{15}{8} = \frac{x}{10} \rightarrow x = 18,75 \text{ m}$$

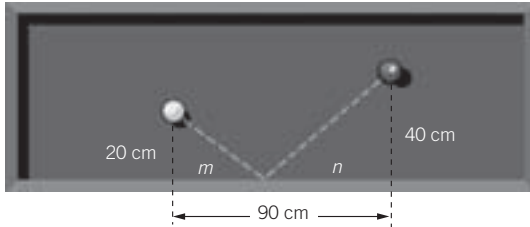
La sombra del árbol mide 18,75 m.

060 Una antena está sujeta con dos cables que forman entre sí un ángulo de 90° y miden 8 y 5 m, respectivamente. ¿A qué altura se enganchan a la antena?

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{8^2 + 5^2} = 9,43 \text{ m} \\ m &= \frac{8^2}{9,43} = 6,78 \text{ m} \\ h &= \sqrt{8^2 - 6,78^2} = 4,25 \text{ m} \end{aligned}$$

La altura a la que se enganchan los cables es de 4,25 m.

- 061** ●● ¿En qué punto debe golpear la bola blanca a la banda para que el rebote dé a la bola roja?



Tenemos que $m + n = 90$. Al golpear sin efecto, $\hat{A} = \hat{B}$ y, por tanto, los triángulos son semejantes.

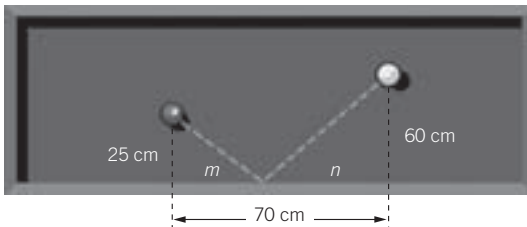
$$\frac{40}{n} = \frac{20}{m} \rightarrow 40m = 20n \rightarrow n = 2m$$

Sustituyendo el valor en la primera ecuación, resulta:

$$m + n = 90 \rightarrow m + 2m = 90 \rightarrow 3m = 90 \rightarrow m = 30$$

Es decir, tenemos que $m = 30$ cm y $n = 60$ cm.

- 062** ●● Calcula dónde debe golpear la bola roja a la banda para que el rebote alcance a la bola blanca.



Si jugaráramos con la bola blanca para alcanzar a la roja, ¿en qué punto de la banda tendríamos que golpear?

$$\frac{60}{n} = \frac{25}{m} \rightarrow 60m = 25n \rightarrow m = \frac{5}{12}n$$

Como $m + n = 70$, resulta:

$$\begin{cases} m + n = 70 \\ m = \frac{5}{12}n \end{cases}$$

$$m + n = 70 \rightarrow \frac{5}{12}n + n = 70 \rightarrow \frac{17}{12}n = 70 \rightarrow n = \frac{70 \cdot 12}{17} = 49,4 \text{ cm}$$

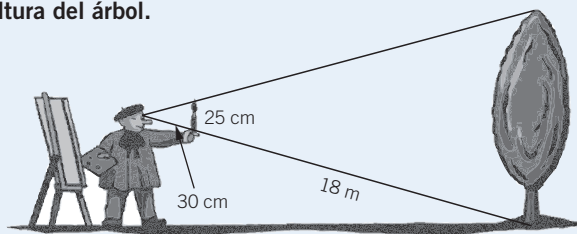
Es decir, tenemos que $m = 20,6$ cm y $n = 49,4$ cm.

Semejanza

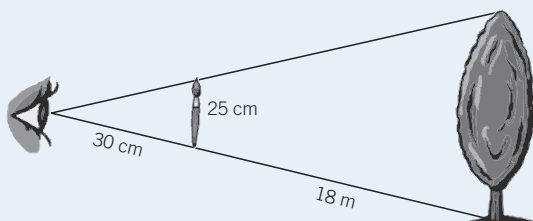
063 HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE CALCULAN DISTANCIAS POR EL MÉTODO DEL PINTOR?

Calcula la altura del árbol.



PRIMERO. Se forman dos triángulos en posición de Tales y se escribe la proporción.

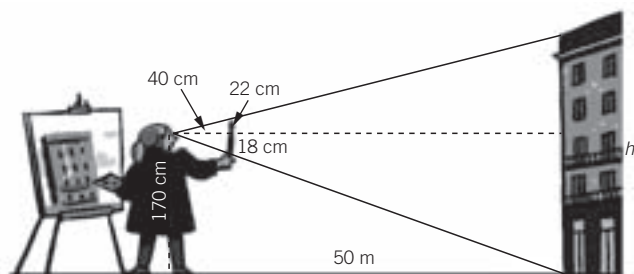


$$\frac{0,25}{h} = \frac{0,3}{18}$$

SEGUNDO. Se resuelve la ecuación que resulta.

$$\frac{0,25}{h} = \frac{0,3}{18} \rightarrow h = \frac{0,25 \cdot 18}{0,3} = 15 \text{ m}$$

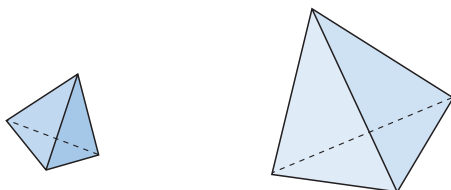
064 Calcula la altura del edificio si el pincel mide 22 cm y está a 40 cm del ojo.



$$\frac{0,4}{50} = \frac{0,22}{h}$$

$$h = \frac{0,22 \cdot 50}{0,4} = 27,5 \text{ m}$$

065 Dados los dos poliedros de la figura, responde.



a) ¿Son semejantes? ¿Cuál es la razón de las aristas?

b) ¿Y la razón de las áreas de sus caras?

c) ¿Cuál es la razón de los volúmenes?

- a) Las dos figuras son semejantes, porque tienen los ángulos iguales y los lados proporcionales.
- b) La razón de las aristas es $r = 2$.
- c) La razón de semejanza de las áreas de las caras es $2^2 = 4$.
- d) La razón de los volúmenes es $2^3 = 8$.

066 Una estatua mide 10 m de altura y pesa 200 kg. ¿Cuánto pesará una reproducción del mismo material que mida 22 cm de altura?

La razón entre las longitudes es: $r = \frac{0,22}{10} = 0,022$.

Al igual que el volumen, el peso tendrá de razón: $r' = (0,022)^3$, de manera que el peso de la reproducción es: $200 \cdot (0,022)^3 = 0,002 \text{ kg} = 2 \text{ g}$.

067 Una esfera de vidrio tiene un radio de 4 cm, y una canica de vidrio tiene un diámetro de 1 cm. Encuentra la razón entre sus volúmenes.

El volumen de la esfera de radio 4 cm es:

$$V_1 = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 4^3 = \frac{256}{3} \pi \text{ cm}^3$$

El volumen de la canica de diámetro 1 cm ($r = 0,5 \text{ cm}$) es:

$$V_2 = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 0,5^3 = \frac{1}{6} \pi \text{ cm}^3$$

Como la razón de los volúmenes de dos cuerpos geométricos semejantes es igual al cubo de la razón de semejanza:

$$V_1 = r^3 \cdot V_2 \rightarrow r^3 = \frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{256}{3} \pi}{\frac{1}{6} \pi} = 512$$

La razón es: $r = \sqrt[3]{512} = 8$.

Se puede comprobar que la razón es 8 calculando el cociente entre los radios de las dos circunferencias:

$$\frac{4}{0,5} = 8$$

Semejanza

- 068** ●● Una pelota de balonmano tiene doble diámetro que una pelota de tenis. ¿Cuál es la relación entre sus volúmenes?

Si r es el radio de la pelota de tenis, $2r$ es el radio de la pelota de balonmano.

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$V_2 = \frac{4}{3}\pi \cdot (2r)^3 = \frac{32}{3}\pi r^3$$

Como la razón de los volúmenes de dos cuerpos geométricos semejantes es igual al cubo de la razón de semejanza, r' :

$$V_1 = r'^3 \cdot V_2 \rightarrow r' = \frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{32}{3}\pi r^3} = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$$

Es decir, la razón entre sus volúmenes es $r' = 0,125$.

- 069** ●● La superficie acristalada de un invernadero mide 270 m^2 . ¿Qué cantidad de cristal se necesita para construir una maqueta del invernadero a escala **1:20**?

La razón de semejanza es: $r = \frac{1}{20} = 0,05$.

Por tanto, la superficie acristalada de la maqueta es:

$$A = r^2 \cdot A_{\text{real}} = (0,05)^2 \cdot 270 = 0,675 \text{ m}^2$$

- 070** ●●● Queremos hacer un armario en miniatura, semejante a otro cuyas medidas son $180 \times 110 \times 45 \text{ cm}$. Siendo la altura de $13,5 \text{ cm}$, calcula.

- a) Ancho y profundidad del armario en miniatura.
- b) Razón de semejanza entre los volúmenes.
- c) Razón de semejanza entre las áreas laterales.

a) La razón de semejanza de las aristas es:

$$r = \frac{13,5}{180} = 0,075$$

$$\text{Ancho} = 110 \cdot 0,075 = 8,25 \text{ cm}$$

$$\text{Profundidad} = 48 \cdot 0,075 = 3,6 \text{ cm}$$

b) La razón de semejanza de los volúmenes es:

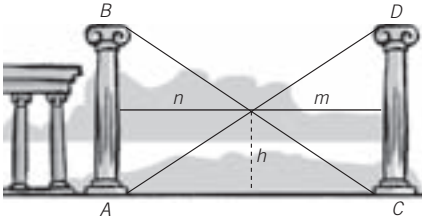
$$r' = r^3 = (0,075)^3 = 0,000421875$$

c) La razón de semejanza de las áreas laterales es:

$$r'' = r^2 = (0,075)^2 = 0,005625$$

071

Demuestra que no influye la distancia de separación de las columnas AB y CD para calcular la altura h . ¿Cuánto mide la altura?

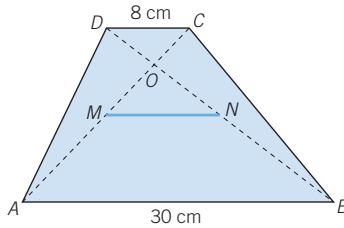


$$\begin{aligned}\frac{\overline{AB}}{\overline{CB}} &= \frac{n}{m} \\ \frac{\overline{AB}}{h} &= \frac{m+n}{m} \rightarrow \frac{\overline{AB}}{h} = \frac{m}{m} + \frac{n}{m} \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{\overline{AB}}{h} = 1 + \frac{\overline{AB}}{\overline{CB}} \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{\overline{AB}}{h} = \frac{\overline{CB} + \overline{AB}}{\overline{CB}} \rightarrow \\ &\rightarrow h = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CD}}{\overline{AB} + \overline{CD}}\end{aligned}$$

El valor de h solo depende de la longitud de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.

072

Calcula la longitud del segmento MN , siendo M y N los puntos medios de las diagonales.



$$\begin{aligned}\frac{\overline{OC}}{\overline{OA}} &= \frac{8}{30} \xrightarrow{+1} \frac{\overline{OC}}{\overline{OA}} + 1 = \frac{8}{30} + 1 \rightarrow \frac{\overline{OC}}{\overline{OA}} + \frac{\overline{OA}}{\overline{OA}} = \frac{38}{30} \rightarrow \frac{\overline{AC}}{\overline{OA}} = \frac{38}{30} \rightarrow \frac{\overline{OA}}{\overline{AC}} = \frac{30}{38} \\ \frac{\overline{OA}}{\overline{OC}} &= \frac{30}{8} \xrightarrow{+1} \frac{\overline{OA}}{\overline{OC}} + 1 = \frac{30}{8} + 1 \rightarrow \frac{\overline{OA}}{\overline{OC}} + \frac{\overline{OC}}{\overline{OC}} = \frac{38}{8} \rightarrow \frac{\overline{AC}}{\overline{OC}} = \frac{38}{8} \rightarrow \frac{\overline{OC}}{\overline{AC}} = \frac{8}{38} \\ \overline{OM} + \overline{CO} &= \frac{\overline{CA}}{2} \rightarrow \overline{OM} = \frac{\overline{CA}}{2} - \overline{CO} \rightarrow \frac{\overline{OM}}{\overline{AC}} = \frac{\frac{\overline{CA}}{2} - \overline{CO}}{\overline{AC}} = \frac{1}{2} - \frac{8}{38} = \frac{11}{38} \\ \frac{\overline{OA}}{\overline{OM}} &= \frac{\frac{\overline{OA}}{\overline{AC}}}{\frac{\overline{OM}}{\overline{AC}}} = \frac{\frac{30}{38}}{\frac{11}{38}} = \frac{30}{11} \rightarrow \frac{\overline{OA}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{MN}} \rightarrow \frac{30}{11} = \frac{30}{\overline{MN}} \rightarrow \overline{MN} = 11 \text{ cm}\end{aligned}$$

073

Obtén el teorema de Pitágoras utilizando solamente el teorema del cateto. ¿Se podría demostrar utilizando solo el teorema de la altura?

Mediante el teorema del cateto:

$$\left. \begin{aligned}c^2 &= m \cdot a \\ b^2 &= n \cdot a\end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{aligned}c^2 + b^2 &= m \cdot a + n \cdot a \\ c^2 + b^2 &= (m+n) \cdot a \xrightarrow{a=m+n} c^2 + b^2 = a^2\end{aligned}$$

Únicamente con el teorema de la altura no se puede demostrar, ya que no intervienen los catetos, y necesitaríamos aplicar también el teorema del cateto.

Semejanza

EN LA VIDA COTIDIANA

074



Se ha colocado una antena cerca de un edificio de viviendas. La comunidad de vecinos piensa que la zona de acceso restringido es insuficiente para garantizar su seguridad.

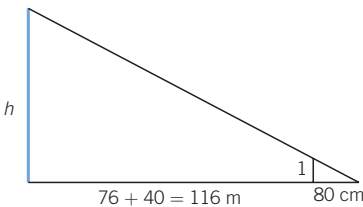
Algunos vecinos aseguran que si la antena se cayera afectaría al edificio.

La distancia del edificio a la valla que delimita la zona de seguridad es de 38 metros, y es, aproximadamente, el doble de la distancia que hay de la valla de seguridad a la antena.

La sombra de la torre que sobrepasa la zona de seguridad mide 40 metros, en el mismo momento en que la sombra de los postes de 1 metro, que delimitan la zona, mide 80 centímetros.



El informe municipal afirma que no existe ningún riesgo. ¿Es correcta esta información?



$$\frac{h}{1} = \frac{116}{0,8} \rightarrow h = 145 \text{ m}$$

La altura de la antena es de 145 m.

Y la distancia de la antena al edificio es: $76 + 38 = 114 \text{ m}$.

Por tanto, si la antena cayera podría afectar al edificio, pues la distancia es menor que la altura de la antena. La conclusión del informe municipal no es correcta.

075

Gema y Manuel son hermanos gemelos, y les han regalado unos *walkie-talkies* el día de su cumpleaños.



Los hermanos no se separan de su regalo ni un momento.

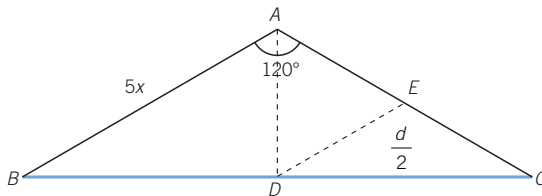
Tengo que ir a la biblioteca para devolver unos libros.

Yo he quedado para jugar un partido de baloncesto.



Deciden ir a sus destinos por calles que forman un ángulo de 120° y se llevan los *walkie-talkies*.

Si ambos caminan a 5 km/h, ¿durante cuánto tiempo siguen recibiendo la señal?



Si x es el tiempo que caminan, la distancia que recorre cada hermano es $5x$.

Los triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{EDC}$ son semejantes, luego $|\overline{DE}| = \frac{5x}{2}$.

$$|\overline{DE}| = |\overline{AD}| \rightarrow |\overline{AD}| = \frac{5x}{2}$$

Aplicamos ahora el teorema de Pitágoras:

$$\overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 = \overline{AC}^2 \rightarrow \frac{25x^2}{4} + \overline{DC}^2 = 25x^2 \rightarrow \overline{DC}^2 = 25x^2 - \frac{25x^2}{4} = \frac{75}{4}x^2$$

$$\overline{DC} = \sqrt{\frac{75}{4}x^2} = \frac{5\sqrt{3}}{2}x = 4,33x \rightarrow \overline{BC} = 5\sqrt{3} \cdot x = 8,66x$$

$$8,66x = 10 \rightarrow x = \frac{10}{8,66} = 1,1547 = 1 \text{ h } 9 \text{ min } 17 \text{ s}$$

Los hermanos dejarán de comunicarse al transcurrir 1 h 9 min 17 s, es decir, tras recorrer esta distancia: $5 \cdot 1,1547 = 5,773$ km.

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO

SENO

COSENO

TANGENTE

RELACIONES ENTRE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1$$

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$$

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE 30°, 45° Y 60°

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO CUALQUIERA

REDUCCIÓN DE ÁNGULOS AL PRIMER CUADRANTE

COMPLEMENTARIO

SUPLEMENTARIO

OPUESTO

Las Bocas del Cielo

Seguro que tenía poderes mágicos. Aquel cofre de ébano con adornos de plata ejercía sobre él tal atracción que daría lo que fuera por averiguar el contenido que su maestro, Claudio Ptolomeo, guardaba en él celosamente.

El momento había llegado y su corazón amenazaba con escaparse por su boca. Ptolomeo, por fin, había terminado su trabajo y se disponía a desvelar el misterio. El joven, Nemes, lo acuciaba hablando sin parar.

—¿Sabéis, maestro? Siempre he deseado ver el tesoro del cofre. A veces soñaba que podía hacerme tan pequeño como para entrar por la cerradura y al hacerlo el mundo entero estaba dentro, y corría mil aventuras, y... ¡por favor, decidme lo que hay!

Ptolomeo no pudo contener una risita y mientras abría el cofre, con gran solemnidad, le dijo:

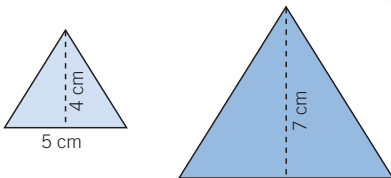
—Aquí tienes todo el mundo: sus mares y sus tierras, sus ríos y sus desiertos, sus montañas y sus valles.

Nemes no podía dar crédito a lo que veía: un mapa que representaba todo el mundo. Recorrió el Nilo con su dedo y, de repente, exclamó:

—El nacimiento de la divinidad es como dicen los sacerdotes: «Encontrarás las Bocas del Cielo más allá de las Montañas de la Luna». Pero, ¿cómo habéis sido capaz de saber el lugar exacto si nunca habéis estado en esos lugares?

—Hablo con los viajeros, algunos miden los ángulos con los que ven algunas estrellas, y eso me da la situación exacta: a ángulos iguales les corresponden distancias semejantes.

La altura sobre el lado desigual, que mide 5 cm, de un triángulo isósceles es 4 cm. ¿Cuánto mediría otro semejante si la altura fuera 7 cm?



$$\frac{4}{5} = \frac{7}{x} \rightarrow x = \frac{5 \cdot 7}{4} = 8,75 \text{ cm}$$

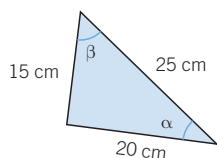


Trigonometría

EJERCICIOS

001 Calcula las razones trigonométricas de los ángulos α y β .

a)

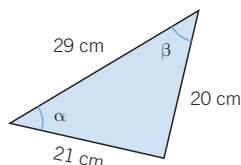


$$a) \operatorname{sen} \alpha = \frac{15}{25} = 0,6$$

$$\cos \alpha = \frac{20}{25} = 0,8$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{15}{20} = 0,75$$

b)



$$\operatorname{sen} \beta = \frac{20}{29} = 0,8$$

$$\cos \beta = \frac{15}{25} = 0,6$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{20}{15} = 1,33$$

$$b) \operatorname{sen} \alpha = \frac{20}{29} = 0,69$$

$$\cos \alpha = \frac{21}{29} = 0,72$$

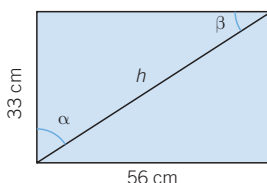
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{20}{21} = 0,95$$

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{21}{29} = 0,72$$

$$\cos \beta = \frac{20}{29} = 0,69$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{21}{20} = 1,05$$

002 Halla las razones trigonométricas de los ángulos.



$$h = \sqrt{56^2 + 33^2} = 65 \text{ cm}$$

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{56}{65} = 0,86 \quad \operatorname{sen} \beta = \frac{33}{65} = 0,51$$

$$\cos \alpha = \frac{33}{65} = 0,51 \quad \cos \beta = \frac{56}{65} = 0,86$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{56}{33} = 1,7 \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{33}{56} = 0,59$$

003 Razona por qué las razones trigonométricas de un ángulo no dependen del triángulo que escogemos.

Si las razones no dependen del triángulo es porque son triángulos semejantes, y el cociente de sus lados es constante.

004 Calcula el resto de razones trigonométricas conociendo la que se indica.

a) $\text{sen } \alpha = 0,3$ b) $\text{sen } \beta = 0$ c) $\cos \gamma = 0,4$ d) $\text{tg } \delta = 2$

$$\begin{aligned} \text{a) } \text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1 \rightarrow (0,3)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \\ &\rightarrow \cos \alpha = \sqrt{1 - (0,3)^2} = \sqrt{0,91} = 0,95 \\ \text{tg } \alpha &= \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} \rightarrow \text{tg } \alpha = \frac{0,3}{0,95} = 0,32 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \text{sen}^2 \beta + \cos^2 \beta &= 1 \rightarrow 0 + \cos^2 \beta = 1 \rightarrow \cos \beta = \sqrt{1} \rightarrow \begin{cases} \cos \beta = 1 \\ \cos \beta = -1 \end{cases} \\ \text{tg } \beta &= \frac{\text{sen } \beta}{\cos \beta} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \text{sen}^2 \gamma + \cos^2 \gamma &= 1 \rightarrow \text{sen}^2 \gamma + (0,4)^2 = 1 \\ &\rightarrow \text{sen } \gamma = \sqrt{1 - 0,16} = \sqrt{0,84} = 0,92 \\ \text{tg } \gamma &= \frac{\text{sen } \gamma}{\cos \gamma} \rightarrow \text{tg } \gamma = \frac{0,92}{0,4} = 2,3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \text{sen}^2 \delta + \cos^2 \delta &= 1 \left\{ \begin{array}{l} \frac{\text{sen } \delta}{\cos \delta} = 2 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{sen } \delta = 2 \cdot \cos \delta} (2 \cdot \cos \delta)^2 + \cos^2 \delta = 1 \\ &\rightarrow 5 \cdot \cos^2 \delta = 1 \rightarrow \cos \delta = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \\ \text{sen } \delta &= 2 \cdot \cos \delta \rightarrow \text{sen } \delta = 2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

005 ¿Existe algún ángulo con $\text{sen } \alpha = 0,4$ y $\cos \alpha = 0,6$? Justifica la respuesta.

$$\begin{aligned} \text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1 \\ (0,4)^2 + (0,6)^2 &= 0,16 + 0,36 = 0,52 \neq 1 \rightarrow \text{No existe.} \end{aligned}$$

006 ¿Hay algún ángulo con $\text{tg } \alpha = 2$ y cuyo seno sea el doble que el coseno?

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} = 2 \rightarrow \text{sen } \alpha = 2 \cdot \cos \alpha \rightarrow \text{Sí existe.}$$

007 Calcula el valor de las siguientes expresiones.

a) $\cos 30^\circ - \text{sen } 60^\circ + \text{tg } 45^\circ$ c) $\text{tg } 60^\circ + \text{sen } 45^\circ - \cos^2 30^\circ$
b) $\cos^2 60^\circ - \text{sen}^2 45^\circ$ d) $\text{tg } 30^\circ + \text{tg } 60^\circ - \text{sen } 30^\circ \cdot \cos 30^\circ$

$$\text{a) } \cos 30^\circ - \text{sen } 60^\circ + \text{tg } 45^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 = 1$$

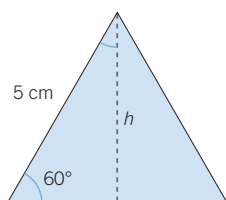
$$\text{b) } \cos^2 60^\circ - \text{sen}^2 45^\circ = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$$

$$\text{c) } \text{tg } 60^\circ + \text{sen } 45^\circ - \cos^2 30^\circ = \sqrt{3} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3}{4} = \frac{4\sqrt{3} + 2\sqrt{2} - 3}{4}$$

$$\text{d) } \text{tg } 30^\circ + \text{tg } 60^\circ - \text{sen } 30^\circ \cdot \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{13\sqrt{3}}{12}$$

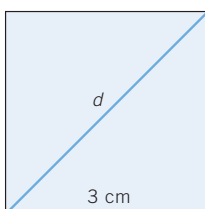
Trigonometría

- 008** Determina la altura de un triángulo equilátero de lado 5 cm, sin aplicar el teorema de Pitágoras.



$$h = 5 \cdot \operatorname{sen} 60^\circ = 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{2} \text{ cm}$$

- 009** Halla, utilizando las razones trigonométricas, la diagonal de un cuadrado de 3 cm de lado.



$$d = \frac{3}{\operatorname{sen} 45^\circ} = \frac{3}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2} \text{ cm}$$

- 010** Razona en qué cuadrante está cada ángulo.

a) $\operatorname{sen} \alpha = 0,8$
 $\cos \alpha = -0,6$

b) $\operatorname{sen} \beta = -0,8$
 $\cos \beta = -0,6$

c) $\operatorname{sen} \gamma = 0,5$
 $\operatorname{tg} \gamma = 0,57$

a) Segundo cuadrante b) Tercer cuadrante c) Primer cuadrante

- 011** Indica el signo que tienen las razones trigonométricas de estos ángulos.

a) 66° b) 175° c) 342° d) 18° e) 135°

- a) Todas sus razones son positivas.
b) Seno positivo, coseno y tangente negativos.
c) Coseno positivo, seno y tangente negativos.
d) Todas sus razones son positivas.
e) Seno positivo, coseno y tangente negativos.

- 012** ¿Por qué no existe $\operatorname{tg} 90^\circ$? ¿Sucede esto con los ángulos cuya amplitud es un múltiplo de 90° ?

No existe, porque $\cos 90^\circ = 0$.

Esto sucede con los ángulos de la forma $90^\circ + n \cdot 180^\circ$, con n un número entero.

- 013** Calcula las razones trigonométricas de los siguientes ángulos, teniendo en cuenta que $\cos 50^\circ = 0,6428$.

a) 140°

b) 130°

c) 230°

d) 310°

a) $\operatorname{sen} 140^\circ = \cos 50^\circ = 0,6428$
 $\cos 140^\circ = -\operatorname{sen} 50^\circ = -0,766$

b) $\operatorname{sen} 130^\circ = \operatorname{sen} 50^\circ = 0,766$
 $\cos 130^\circ = -\cos 50^\circ = -0,6428$

$\operatorname{tg} 140^\circ = -\frac{1}{\operatorname{tg} 50^\circ} = -0,839$

$\operatorname{tg} 130^\circ = -\operatorname{tg} 50^\circ = -1,1917$

$$\begin{array}{ll}
 \text{c) } \operatorname{sen} 230^\circ = -\operatorname{sen} 50^\circ = -0,766 & \text{d) } \operatorname{sen} 310^\circ = -\operatorname{sen} 50^\circ = -0,766 \\
 \cos 230^\circ = -\cos 50^\circ = -0,6428 & \cos 310^\circ = \cos 50^\circ = 0,6428 \\
 \operatorname{tg} 230^\circ = \operatorname{tg} 50^\circ = 1,1917 & \operatorname{tg} 310^\circ = -\operatorname{tg} 50^\circ = -1,1917
 \end{array}$$

014



Si sabemos que $\operatorname{sen} 25^\circ = 0,4226$; ¿cuáles son las razones trigonométricas de un ángulo cuya amplitud es 205° ?

$$\operatorname{sen}^2 25^\circ + \cos^2 25^\circ = 1 \rightarrow \cos 25^\circ = \sqrt{1 - (0,4226)^2} = 0,9063$$

$$205^\circ = 180^\circ + 25^\circ \rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} 205^\circ = -\operatorname{sen} 25^\circ = -0,4226 \\ \cos 205^\circ = -\cos 25^\circ = -0,9063 \\ \operatorname{tg} 205^\circ = \operatorname{tg} 25^\circ = \frac{-0,4226}{-0,9063} = 0,4663 \end{cases}$$

015

Calcula las razones trigonométricas de 70° , sabiendo que $\cos 110^\circ = -0,342$.

$$\operatorname{sen}^2 110^\circ + \cos^2 110^\circ = 1$$

$$\rightarrow \operatorname{sen} 110^\circ = \sqrt{1 - \cos^2 110^\circ} = \sqrt{1 - (-0,342)^2} = 0,94$$

$$70^\circ = 180^\circ - 110^\circ \rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} 70^\circ = \operatorname{sen} 110^\circ = 0,94 \\ \cos 70^\circ = -\cos 110^\circ = 0,342 \\ \operatorname{tg} 70^\circ = \frac{\operatorname{sen} 70^\circ}{\cos 70^\circ} = \frac{0,94}{0,342} = 2,75 \end{cases}$$

016

Expresa las razones trigonométricas de estos ángulos en función de las razones de otros ángulos del 1.º cuadrante.

a) 475° c) 1.130° e) 1.215° b) 885° d) 695° f) 985°

$$\text{a) } 475^\circ = 360^\circ + 90^\circ + 25^\circ$$

$$\operatorname{sen} 475^\circ = \cos 25^\circ$$

$$\cos 475^\circ = -\operatorname{sen} 25^\circ$$

$$\operatorname{tg} 475^\circ = -\frac{1}{\operatorname{tg} 25^\circ}$$

$$\text{d) } 695^\circ = 2 \cdot 360^\circ - 25^\circ$$

$$\operatorname{sen} 695^\circ = -\operatorname{sen} 25^\circ$$

$$\cos 695^\circ = \cos 25^\circ$$

$$\operatorname{tg} 695^\circ = -\operatorname{tg} 25^\circ$$

$$\text{b) } 885^\circ = 2 \cdot 360^\circ + 90^\circ + 75^\circ$$

$$\operatorname{sen} 885^\circ = \cos 75^\circ$$

$$\cos 885^\circ = -\operatorname{sen} 75^\circ$$

$$\operatorname{tg} 885^\circ = -\frac{1}{\operatorname{tg} 75^\circ}$$

$$\text{e) } 1.215^\circ = 3 \cdot 360^\circ + 90^\circ + 45^\circ$$

$$\operatorname{sen} 1.215^\circ = \cos 45^\circ$$

$$\cos 1.215^\circ = -\operatorname{sen} 45^\circ$$

$$\operatorname{tg} 1.215^\circ = -\frac{1}{\operatorname{tg} 45^\circ}$$

$$\text{c) } 1.130^\circ = 3 \cdot 360^\circ + 50^\circ$$

$$\operatorname{sen} 1.130^\circ = \operatorname{sen} 50^\circ$$

$$\cos 1.130^\circ = \cos 50^\circ$$

$$\operatorname{tg} 1.130^\circ = \operatorname{tg} 50^\circ$$

$$\text{f) } 985^\circ = 2 \cdot 360^\circ + 180^\circ + 85^\circ$$

$$\operatorname{sen} 985^\circ = -\operatorname{sen} 85^\circ$$

$$\cos 985^\circ = -\cos 85^\circ$$

$$\operatorname{tg} 985^\circ = \operatorname{tg} 85^\circ$$

Trigonometría

017 Sabiendo que $\text{sen } \alpha = 0,2$; calcula.

- a) $\text{sen } (90^\circ - \alpha)$ b) $\text{sen } (180^\circ - \alpha)$ c) $\text{sen } (-\alpha)$

a) $\text{sen } (90^\circ - \alpha) = \cos \alpha = 0,98$

b) $\text{sen } (180^\circ - \alpha) = \text{sen } \alpha = 0,2$

c) $\text{sen } (-\alpha) = -\text{sen } \alpha = -0,2$

018 Si $\text{sen } 18^\circ = 0,309$ y $\cos 18^\circ = 0,951$; halla.

- a) $\text{sen } 72^\circ$ b) $\cos 162^\circ$ c) $\text{tg } (-72^\circ)$

a) $\text{sen } 72^\circ = \cos 18^\circ = 0,951$

b) $\cos 162^\circ = -\cos 18^\circ = -0,951$

c) $\text{tg } (-72^\circ) = -\frac{1}{\text{tg } 18^\circ} = -3,077$

019 Determina la relación entre los ángulos α y β si sus razones trigonométricas cumplen estas condiciones.

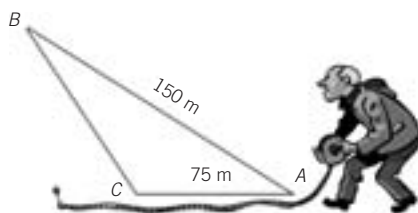
- a) $\text{sen } \alpha = \cos \beta$ b) $\cos \alpha = \cos \beta$ c) $\text{sen } \alpha = \text{sen } \beta$

a) $\alpha = 90^\circ \pm \beta$

b) $\alpha = n \cdot 360^\circ \pm \beta$

c) $\alpha = 180^\circ - \beta$

020 ¿Cuál es el área del triángulo, si $\hat{A} = 30^\circ$?



$$h = 75 \cdot \text{sen } 30^\circ = 75 \cdot \frac{1}{2} = 37,5 \text{ m}$$

$$A = \frac{150 \cdot 37,5}{2} = 2.812,5 \text{ m}^2$$

021 Halla el área de un hexágono regular de 4 cm de lado.

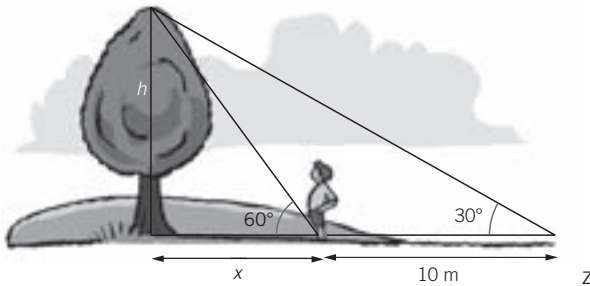
$$\alpha = 60^\circ$$

$$A = \frac{4 \cdot 4 \cdot \text{sen } 60^\circ}{2} \cdot 6 = \frac{16 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} \cdot 6 = 24 \cdot \sqrt{3} = 41,57 \text{ cm}^2$$

- 022** Calcula el área de un triángulo isósceles cuyos lados iguales miden 8 cm y el ángulo desigual mide 45° .

$$A = \frac{8 \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = 16 \cdot \sqrt{2} = 22,63 \text{ cm}^2$$

- 023** Félix quiere medir uno de los árboles que hay al lado de su casa. Para ello ha pedido prestado un teodolito y ha medido algunos ángulos y distancias. ¿Cuánto mide el árbol?



$$\left. \begin{array}{l} x \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = h \\ (x + 10) \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = h \end{array} \right\} \rightarrow x\sqrt{3} = (x + 10) \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow x \cdot 2\sqrt{3} = 10 \cdot \sqrt{3} \rightarrow x = 5 \text{ m}$$

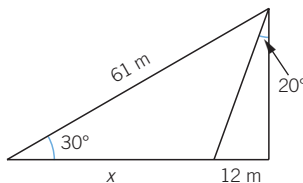
$$h = 5 \cdot \sqrt{3} = 8,66 \text{ m}$$

- 024** Calcula el área de una parcela triangular, sabiendo que dos de sus lados miden 20 m y 30 m, y que los ángulos distintos al comprendido entre ellos miden 80° y 70° .

El tercer ángulo mide: $180^\circ - 80^\circ - 70^\circ = 30^\circ$.

$$A = \frac{30 \cdot 20 \cdot \operatorname{sen} 30^\circ}{2} = 150 \text{ m}^2$$

- 025** Halla el valor de x .



$$\cos 30^\circ = \frac{12 + x}{61} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{12 + x}{61} \rightarrow 61 \cdot \sqrt{3} = 24 + 2x$$

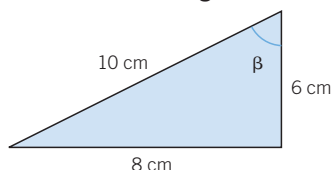
$$\rightarrow x = \frac{61 \cdot \sqrt{3} - 24}{2} = 40,8 \text{ m}$$

Trigonometría

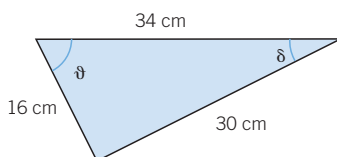
ACTIVIDADES

026 Calcula las razones trigonométricas de los ángulos marcados en cada caso.

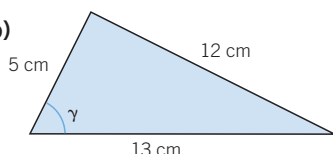
a)



c)



b)



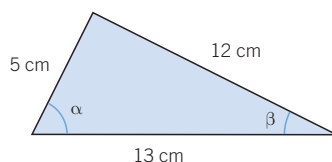
$$a) \quad \operatorname{sen} \beta = \frac{6}{10} \quad \cos \beta = \frac{8}{10} \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{6}{8}$$

$$b) \quad \operatorname{sen} \gamma = \frac{5}{13} \quad \cos \gamma = \frac{12}{13} \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{5}{12}$$

$$c) \quad \operatorname{sen} \delta = \frac{16}{34} \quad \cos \delta = \frac{30}{34} \quad \operatorname{tg} \delta = \frac{16}{30}$$

$$\operatorname{sen} \vartheta = \frac{30}{34} \quad \cos \vartheta = \frac{16}{34} \quad \operatorname{tg} \vartheta = \frac{30}{16}$$

027 Las longitudes de los catetos de un triángulo rectángulo son 5 cm y 12 cm. Calcula las razones trigonométricas de los dos ángulos agudos del triángulo.



$$a = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13 \text{ cm}$$

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{5}{13} = 0,385 \quad \cos \alpha = \frac{12}{13} = 0,923 \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{12} = 0,417$$

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{12}{13} = 0,923 \quad \cos \beta = \frac{5}{13} = 0,385 \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{12}{5} = 2,4$$

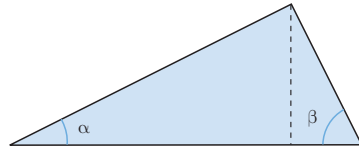
028 Halla las razones trigonométricas de los dos ángulos de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 3 cm, y uno de sus catetos, 1 cm.

$$c = \sqrt{3^2 - 1^2} = \sqrt{8} \text{ cm}$$

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{3} \quad \cos \alpha = \frac{\sqrt{8}}{3} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{8}}$$

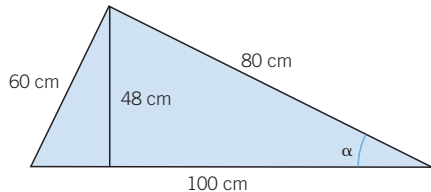
$$\operatorname{sen} \beta = \frac{\sqrt{8}}{3} \quad \cos \beta = \frac{1}{3} \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{\sqrt{8}}{1}$$

- 029** Con ayuda de una regla graduada, halla el valor aproximado de las razones trigonométricas de los ángulos marcados.



$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \alpha &= \frac{2,1}{4,7} = 0,45 & \cos \alpha &= \frac{4,1}{4,7} = 0,87 & \operatorname{tg} \alpha &= \frac{2,1}{4,1} = 0,51 \\ \operatorname{sen} \beta &= \frac{4,1}{4,7} = 0,87 & \cos \beta &= \frac{2,1}{4,7} = 0,45 & \operatorname{tg} \beta &= \frac{4,1}{2,1} = 1,96 \end{aligned}$$

- 030** Dado el siguiente triángulo rectángulo, calcula las razones trigonométricas del ángulo marcado, utilizando los triángulos mayor y menor. ¿Se obtiene el mismo resultado? Razónalo.



Utilizando el triángulo mayor:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{60}{100} = 0,6 \quad \cos \alpha = \frac{80}{100} = 0,8 \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{60}{80} = 0,75$$

Utilizando el triángulo menor:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{48}{80} = 0,6 \quad \cos \alpha = \sqrt{1 - (0,6)^2} = 0,8 \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{0,6}{0,8} = 0,75$$

El resultado es el mismo, ya que los dos triángulos son semejantes.

031 HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE TRANSFORMAN GRADOS EN RADIANES, Y VICEVERSA?

¿Cuántos radianes son n grados? ¿Y cuántos grados son α radianes?

PRIMERO. Se plantea una regla de tres para calcular las cantidades desconocidas.

$$\begin{array}{rcl} 360^\circ & \text{---} & 2\pi \text{ rad} \\ n & \text{---} & x \text{ rad} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} 360^\circ & \text{---} & 2\pi \text{ rad} \\ y & \text{---} & \alpha \text{ rad} \end{array}$$

SEGUNDO. Al resolver las reglas de tres se obtienen las fórmulas para pasar de grados a radianes, y viceversa.

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} 360^\circ \text{ --- } 2\pi \text{ rad} \\ n \text{ --- } x \text{ rad} \end{array} \right\} & \rightarrow x = \frac{n \cdot 2\pi \text{ rad}}{360} = n \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad} \\ \left. \begin{array}{l} 360^\circ \text{ --- } 2\pi \text{ rad} \\ y \text{ --- } \alpha \text{ rad} \end{array} \right\} & \rightarrow y = \frac{360 \cdot \alpha}{2\pi} = \alpha \cdot \frac{180}{\pi} \text{ grados} \end{aligned}$$

Así, por ejemplo:

$$30^\circ = 30 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{6} \text{ rad} \qquad 1 \text{ rad} = 1 \cdot \frac{180}{\pi} = 57,296^\circ = 57^\circ 17' 45''$$

Trigonometría

032 Transforma en radianes estos ángulos.



- a) 45° b) 180° c) 30° d) 60°

a) $45^\circ = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$

c) $30^\circ = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$

b) $180^\circ = \pi \text{ rad}$

d) $60^\circ = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$

033 Pasa a grados los siguientes ángulos.



- a) $\frac{3\pi}{2} \text{ rad}$ b) $0,33 \text{ rad}$ c) $\frac{\pi}{4} \text{ rad}$ d) 2 rad

a) 270°

b) $18,91^\circ$

c) 45°

d) $114,64^\circ$

034 Calcula las razones trigonométricas de estos ángulos, sabiendo que:



- a) $\text{sen } \alpha = 0,6$ b) $\cos \alpha = 0,45$ c) $\text{tg } \alpha = 0,577$ d) $\text{sen } \alpha = \frac{1}{3}$

a) $\text{sen } \alpha = 0,6$

$\cos \alpha = 0,8$

$\text{tg } \alpha = \frac{3}{4}$

c) $\text{sen } \alpha = 0,5$

$\cos \alpha = 0,866$

$\text{tg } \alpha = 0,577$

b) $\text{sen } \alpha = 0,89$

$\cos \alpha = 0,45$

$\text{tg } \alpha = 1,98$

d) $\text{sen } \alpha = \frac{1}{3}$

$\cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\text{tg } \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$

035 Halla el valor de las razones trigonométricas de los ángulos si:



- a) $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ b) $\text{sen } \alpha = \frac{1}{6}$

a) $\text{sen } \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\cos \alpha = \frac{1}{3}$

$\text{tg } \alpha = 2\sqrt{2}$

b) $\text{sen } \alpha = \frac{1}{6}$

$\cos \alpha = \frac{\sqrt{35}}{6}$

$\text{tg } \alpha = \frac{\sqrt{35}}{35}$

036 Comprueba si son ciertas estas afirmaciones.



- a) Si $\text{sen } \alpha = 0,45$; entonces $\cos \alpha = 0,55$.

- b) Si $\text{tg } \alpha = 1$; entonces $\cos \alpha = \text{sen } \alpha$.

- c) Si $\text{sen } \alpha = \frac{\cos \alpha}{2}$; entonces $\text{tg } \alpha = 2$.

- d) Si $\cos \alpha = 0,8$; entonces $\text{tg } \alpha$ es menor que 1.

a) Falsa

b) Verdadera

c) Falsa

d) Falsa

037 HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE CALCULAN LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS CON LA CALCULADORA?



Calcula $\operatorname{sen} \alpha$, $\cos \alpha$ y $\operatorname{tg} \alpha$ si $\alpha = 70^\circ 42' 50''$.

PRIMERO. Se ajusta el Modo **MODE**, según se midan los ángulos en grados o radianes.

Grados $\rightarrow$ **MODE** **DEG**

Radianes $\rightarrow$ **MODE** **RAD**

SEGUNDO. Se introduce el ángulo en la calculadora, especificando los grados, minutos y segundos.

70 **° ' ''** 42 **° ' ''** 50 **° ' ''**

TERCERO. Se teclaea la tecla correspondiente a la razón trigonométrica.

Seno $\rightarrow$ 70 **° ' ''** 42 **° ' ''** 50 **sin** = 0,94388...

Coseno $\rightarrow$ 70 **° ' ''** 42 **° ' ''** 50 **cos** = 0,33028...

Tangente $\rightarrow$ 70 **° ' ''** 42 **° ' ''** 50 **tan** = 2,85777...

En algunos tipos de calculadoras, la secuencia de teclas es diferente; primero se introduce la función (**sin** **cos** **tan**) y, después, el ángulo.

038



Con la ayuda de la calculadora, determina las razones trigonométricas de los siguientes ángulos.

a) $53^\circ 36' 5''$

c) $17^\circ 42' 57''$

b) $50^\circ 12' 41''$

d) $85^\circ 50' 12''$

a) $\operatorname{sen} \alpha = 0,805$

c) $\operatorname{sen} \alpha = 0,304$

$\cos \alpha = 0,593$

$\cos \alpha = 0,953$

$\operatorname{tg} \alpha = 1,356$

$\operatorname{tg} \alpha = 0,319$

b) $\operatorname{sen} \alpha = 0,768$

d) $\operatorname{sen} \alpha = 0,997$

$\cos \alpha = 0,64$

$\cos \alpha = 0,073$

$\operatorname{tg} \alpha = 1,2$

$\operatorname{tg} \alpha = 13,738$

039



Halla con la calculadora las razones trigonométricas de 48° y comprueba que se verifican las igualdades.

a) $\operatorname{sen}^2 48^\circ + \cos^2 48^\circ = 1$

b) $\operatorname{tg} 48^\circ = \frac{\operatorname{sen} 48^\circ}{\cos 48^\circ}$

$\operatorname{sen} \alpha = 0,743$

$\cos \alpha = 0,669$

$\operatorname{tg} \alpha = 1,11$

a) $(0,743)^2 + (0,669)^2 = 0,552 + 0,448 = 1$

b) $\frac{0,743}{0,669} = 1,11$

Trigonometría

040 Razona si existe un ángulo α que cumpla estas igualdades.



$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{5} \quad \text{y} \quad \cos \alpha = \frac{1}{3}$$

No existe ningún ángulo que las cumpla, ya que:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{9} + \frac{1}{25} = \frac{34}{225} \neq 1$$

041 Decide si existe algún ángulo para el que sus razones trigonométricas puedan tomar estos valores.



a) $\operatorname{sen} \alpha = \frac{3}{2}$ b) $\operatorname{sen} \alpha = \pi$ c) $\operatorname{sen} \alpha = \frac{2}{5}$ d) $\operatorname{tg} \alpha = 0,5$

a) No es posible ($\operatorname{sen} \alpha > 1$). c) Es posible ($\operatorname{sen} \alpha < 1$).

b) No es posible ($\operatorname{sen} \alpha > 1$). d) Es posible.

042 Razona si hay un ángulo α que cumpla estas igualdades.



$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{3}{5} \quad \text{y} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$$

Halla las razones trigonométricas del ángulo α , sabiendo que $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{sen} \alpha$.

$$\cos \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{5}$$

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{25}{25} = 1$$

Sí existe un ángulo con esas razones trigonométricas.

$$\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{tg} \alpha \rightarrow \cos \alpha = 1 \rightarrow \operatorname{sen} \alpha = 0 \rightarrow \operatorname{tg} \alpha = 0$$

043 Calcula las razones trigonométricas del ángulo agudo α , si $\operatorname{sen} \alpha = 2 \cdot \cos \alpha$.



$$\operatorname{sen} \alpha = 2 \cdot \cos \alpha$$

$$1 = \operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 4 \cdot \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 5 \cdot \cos^2 \alpha \rightarrow \cos \alpha = 0,447$$

$$\operatorname{sen} \alpha = 2 \cdot 0,447 = 0,894$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \cdot \cos \alpha}{\cos \alpha} = 2$$

044 Si $\cos \alpha = \operatorname{sen} \alpha$, halla cuánto valen sus razones trigonométricas, siendo α un ángulo agudo.



$$\operatorname{sen} \alpha = \cos \alpha$$

$$1 = \operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 2 \cdot \cos^2 \alpha \rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = 1$$

045 Calcula el valor de las expresiones.

- a) $\operatorname{sen} 60^\circ + \operatorname{sen} 30^\circ - \operatorname{tg} 30^\circ$
 b) $\operatorname{sen}^2 45^\circ + \cos^2 60^\circ - \operatorname{sen}^2 30^\circ$
 c) $\operatorname{tg} 60^\circ - \operatorname{tg} 30^\circ$
 d) $\cos 60^\circ \cdot \cos 30^\circ + \operatorname{sen} 60^\circ \cdot \operatorname{sen} 30^\circ$

$$a) \operatorname{sen} 60^\circ + \operatorname{sen} 30^\circ - \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3} + 3}{6}$$

$$b) \operatorname{sen}^2 45^\circ + \cos^2 60^\circ - \operatorname{sen}^2 30^\circ = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$c) \operatorname{tg} 60^\circ - \operatorname{tg} 30^\circ = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$d) \cos 60^\circ \cdot \cos 30^\circ + \operatorname{sen} 60^\circ \cdot \operatorname{sen} 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

046 Razona si estas igualdades son ciertas.

- a) $\operatorname{sen}^2 30^\circ + \cos^2 60^\circ = \frac{1}{2}$
 b) $3 \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = \operatorname{tg} 60^\circ$
 c) $\operatorname{sen} 45^\circ + \cos 45^\circ = 4\sqrt{2}$
 d) $\cos 30^\circ + \operatorname{sen} 60^\circ = \operatorname{tg} 30^\circ$

$$a) \text{ Cierta: } \operatorname{sen}^2 30^\circ + \cos^2 60^\circ = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$b) \text{ Cierta: } 3 \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3} = \operatorname{tg} 60^\circ$$

$$c) \text{ Falsa: } \operatorname{sen} 45^\circ + \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \neq 4\sqrt{2}$$

$$d) \text{ Falsa: } \cos 30^\circ + \operatorname{sen} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \neq \operatorname{tg} 30^\circ$$

047 Comprueba que se verifica esta relación: $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, cuando α mide:

- a) 30° b) 60° c) 45°

$$a) \operatorname{sen}^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$$

$$b) \operatorname{sen}^2 60^\circ + \cos^2 60^\circ = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

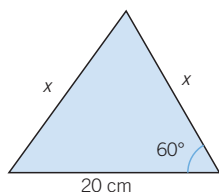
$$c) \operatorname{sen}^2 45^\circ + \cos^2 45^\circ = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Trigonometría

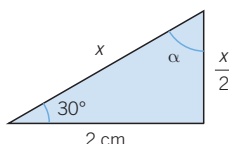
048 Halla el valor del lado x sin aplicar el teorema de Pitágoras.



a)



b)



a) Es un triángulo isósceles con los ángulos iguales que miden 60° , y el tercer ángulo es también de 60° , por lo que es equilátero, y los tres lados miden 20 cm.

$$b) \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30^\circ = \frac{2}{x} \rightarrow x = \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ cm}$$

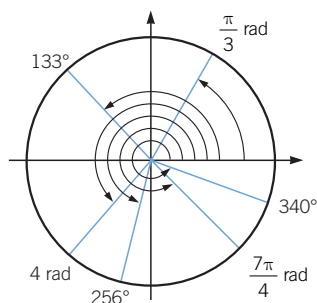
049 Dibuja los siguientes ángulos en la circunferencia goniométrica y di cuál es el signo de sus razones trigonométricas.



a) 340° b) 256° c) $\frac{\pi}{3} \text{ rad}$ d) 133° e) $\frac{7\pi}{4} \text{ rad}$ f) 4 rad

Ángulo	340°	256°	$\frac{\pi}{3} \text{ rad}$
Seno	—	—	+
Coseno	+	—	+
Tangente	—	+	+

Ángulo	133°	$\frac{7\pi}{4} \text{ rad}$	4 rad
Seno	+	—	—
Coseno	—	+	—
Tangente	—	—	+



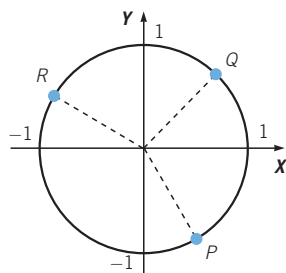
050 Halla las razones trigonométricas de un ángulo si el punto P tiene las siguientes coordenadas. Identifica el ángulo en cada caso.



a) $P\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

b) $Q\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

c) $R\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$



a) $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos \alpha = \frac{1}{2}$

$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$

b) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\operatorname{tg} \alpha = 1$

c) $\sin \alpha = \frac{1}{2}$

$\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

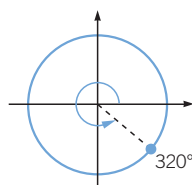
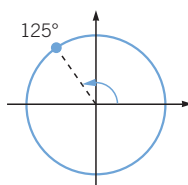
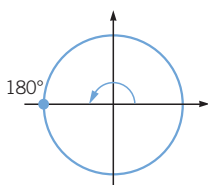
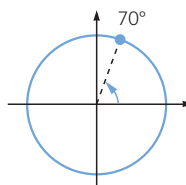
$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$

051

Dibuja los siguientes ángulos en una circunferencia de radio 4 cm.



Mide y calcula las razones trigonométricas, e indica si es relevante que el radio mida 4 cm.

a) 70° b) 180° c) 125° d) 320° 

a) $\text{sen } 70^\circ = 0,94$

$\cos 70^\circ = 0,34$

$\text{tg } 70^\circ = 2,75$

c) $\text{sen } 125^\circ = 0,82$

$\cos 125^\circ = -0,57$

$\text{tg } 125^\circ = -1,43$

b) $\text{sen } 180^\circ = 0$

$\cos 180^\circ = -1$

$\text{tg } 180^\circ = 0$

d) $\text{sen } 320^\circ = -0,64$

$\cos 320^\circ = 0,77$

$\text{tg } 320^\circ = -0,84$

No es relevante que el radio mida 4 cm.

052

Calcula las razones trigonométricas que faltan.



a) $\cos \alpha = -\frac{4}{7}$, para $180^\circ < \alpha < 270^\circ$

b) $\text{sen } \alpha = \frac{1}{3}$, para $0^\circ < \alpha < 90^\circ$

c) $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$, para $90^\circ < \alpha < 180^\circ$

d) $\text{sen } \alpha = -\frac{2}{5}$, para $270^\circ < \alpha < 360^\circ$

a) $\text{sen } \alpha = -\frac{\sqrt{33}}{7}$
 $\text{tg } \alpha = \frac{\sqrt{33}}{4}$

c) $\text{sen } \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$
 $\text{tg } \alpha = 2\sqrt{2}$

b) $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$
 $\text{tg } \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$

d) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}$
 $\text{tg } \alpha = \frac{2\sqrt{21}}{21}$

053

Averigua para qué ángulos son ciertas las siguientes igualdades.



a) $\cos \alpha = \text{sen } \alpha$

b) $\text{tg } \alpha = \text{sen } \alpha$

c) $\cos \alpha = 3 \cdot \text{sen } \alpha$

a) $\alpha = 45^\circ \pm n \cdot 180^\circ$

b) $\alpha = \pm n \cdot 180^\circ$

c) $\alpha = 18^\circ 26' 6''$

Trigonometría

054

¿Cuántos ángulos tienen el mismo seno que un ángulo dado?



Infinitos ángulos, siendo dos ángulos por cada vuelta de circunferencia.

055

Indica el signo que tienen las razones trigonométricas de estos ángulos, identificando el cuadrante en el que se encuentran.

a) 140° b) 653° c) 50° d) 470° e) 9° f) 1.111°

	140°	653°	50°	470°	9°	1.111°
sen	+	-	+	+	+	+
cos	-	+	+	-	+	+
tg	-	-	+	-	+	+

056

Di si las siguientes igualdades son verdaderas o falsas, razonando la respuesta.



- a) $\cos 390^\circ = \sin 60^\circ$ d) $\cos 850^\circ = -\cos 50^\circ$
 b) $\sin 405^\circ = \cos 45^\circ$ e) $\operatorname{tg} 7.200^\circ = \cos 90^\circ$
 c) $\sin 520^\circ = \cos 30^\circ$ f) $\sin 120^\circ = -\sin 60^\circ$

- a) Verdadera; $\cos 390^\circ = \cos (360^\circ + 30^\circ) = \cos 30^\circ = \sin 60^\circ$
 b) Verdadera; $\sin 405^\circ = \sin (360^\circ + 45^\circ) = \sin 45^\circ$
 c) Falsa; $\sin 520^\circ = \sin (360^\circ + 160^\circ) = \sin 160^\circ = \cos 70^\circ$
 d) Verdadera; $\cos 850^\circ = \cos (2 \cdot 360^\circ + 130^\circ) = \cos 130^\circ = -\cos 50^\circ$
 e) Verdadera; $\operatorname{tg} 7.200^\circ = \operatorname{tg} 0^\circ = \cos 90^\circ$
 f) Falsa; $\sin 120^\circ = \sin 60^\circ$

057

Calcula las razones trigonométricas de los ángulos, reduciéndolas a otras razones conocidas de ángulos del 1.º cuadrante.



a) 210° b) 240° c) 315° d) 330°

$$\begin{aligned} \text{a) } \sin 210^\circ &= -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2} & \text{c) } \sin 315^\circ &= -\sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos 210^\circ &= -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} & \cos 315^\circ &= \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \operatorname{tg} 210^\circ &= \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} & \operatorname{tg} 315^\circ &= -\operatorname{tg} 45^\circ = -1 \\ \text{b) } \sin 240^\circ &= -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} & \text{d) } \sin 330^\circ &= -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2} \\ \cos 240^\circ &= -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2} & \cos 330^\circ &= \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \operatorname{tg} 240^\circ &= \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3} & \operatorname{tg} 330^\circ &= -\operatorname{tg} 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

058

Halla las razones trigonométricas de los ángulos, reduciéndolas a otras razones conocidas de ángulos del 1.º cuadrante.



a) 390° b) 480° c) 585° d) 600° e) 690° f) 675°

$$\begin{aligned} \text{a) } \operatorname{sen} 390^\circ &= \operatorname{sen} 30^\circ = \frac{1}{2} \\ \cos 390^\circ &= \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \operatorname{tg} 390^\circ &= \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \operatorname{sen} 480^\circ &= \operatorname{sen} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos 480^\circ &= -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2} \\ \operatorname{tg} 480^\circ &= -\operatorname{tg} 60^\circ = -\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \operatorname{sen} 585^\circ &= -\operatorname{sen} 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos 585^\circ &= -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \operatorname{tg} 585^\circ &= \operatorname{tg} 45^\circ = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \operatorname{sen} 600^\circ &= -\operatorname{sen} 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos 600^\circ &= -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2} \\ \operatorname{tg} 600^\circ &= \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } \operatorname{sen} 690^\circ &= -\operatorname{sen} 30^\circ = -\frac{1}{2} \\ \cos 690^\circ &= \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \operatorname{tg} 690^\circ &= -\operatorname{tg} 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } \operatorname{sen} 675^\circ &= -\operatorname{sen} 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos 675^\circ &= \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \operatorname{tg} 675^\circ &= -\operatorname{tg} 45^\circ = -1 \end{aligned}$$

059 Sabiendo que $\operatorname{sen} 20^\circ = 0,342$; calcula las razones trigonométricas de los siguientes ángulos.

a) 110°

$$\begin{aligned} \text{a) } \operatorname{sen} 110^\circ &= \cos 20^\circ = 0,94 \\ \cos 110^\circ &= -\operatorname{sen} 20^\circ = -0,342 \\ \operatorname{tg} 110^\circ &= -\frac{1}{\operatorname{tg} 20^\circ} = -2,747 \end{aligned}$$

b) 200°

$$\begin{aligned} \text{b) } \operatorname{sen} 200^\circ &= -\operatorname{sen} 20^\circ = -0,342 \\ \cos 200^\circ &= -\cos 20^\circ = -0,94 \\ \operatorname{tg} 200^\circ &= \operatorname{tg} 20^\circ = 0,364 \end{aligned}$$

c) 340°

$$\begin{aligned} \text{c) } \operatorname{sen} 340^\circ &= -\operatorname{sen} 20^\circ = -0,342 \\ \cos 340^\circ &= \cos 20^\circ = 0,94 \\ \operatorname{tg} 340^\circ &= -\operatorname{tg} 20^\circ = -0,364 \end{aligned}$$

d) 380°

$$\begin{aligned} \text{d) } \operatorname{sen} 380^\circ &= \operatorname{sen} 20^\circ = 0,342 \\ \cos 380^\circ &= \cos 20^\circ = 0,94 \\ \operatorname{tg} 380^\circ &= \operatorname{tg} 20^\circ = 0,364 \end{aligned}$$

060 Reduce estos ángulos al 1.^{er} cuadrante.

a) 1.930°

$$\begin{aligned} \text{a) } 1.930^\circ &= 5 \cdot 360^\circ + 130^\circ \\ \text{Sus razones trigonométricas se calculan a partir de las razones de:} \\ 180^\circ - 130^\circ &= 50^\circ. \end{aligned}$$

b) 375°

$$\begin{aligned} \text{b) } 375^\circ &= 360^\circ + 15^\circ \\ \text{Sus razones trigonométricas son las mismas que las razones de } 15^\circ. \end{aligned}$$

c) 5.350°

$$\begin{aligned} \text{c) } 5.350^\circ &= 14 \cdot 360^\circ + 310^\circ \\ \text{Sus razones trigonométricas se calculan a partir de las razones de:} \\ 360^\circ - 310^\circ &= 50^\circ. \end{aligned}$$

d) 999°

$$\begin{aligned} \text{d) } 999^\circ &= 2 \cdot 360^\circ + 279^\circ \\ \text{Sus razones trigonométricas se calculan a partir de las razones de:} \\ 360^\circ - 279^\circ &= 81^\circ. \end{aligned}$$

Trigonometría

061 Si $\text{sen } \alpha = -0,2$ y α pertenece al 4.º cuadrante, calcula $\cos \alpha$ y $\text{tg } \alpha$.



$$\begin{aligned}\text{sen } \alpha &= -0,2 \\ \cos \alpha &= 0,98 \\ \text{tg } \alpha &= -0,205\end{aligned}$$

062 Si $\cos \alpha = -0,5$; ¿qué se puede afirmar del ángulo α ?



Se puede afirmar que el ángulo α está en el segundo o tercer cuadrante, y es un ángulo del tipo $180^\circ \pm 30^\circ$.

063 Si $\text{sen } \alpha = \frac{3}{4}$ y α es un ángulo agudo, halla sin utilizar la calculadora.



- a) $\text{sen } (90^\circ - \alpha)$
- b) $\cos (180^\circ - \alpha)$
- c) $\text{tg } \alpha$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\text{a) } \text{sen } (90^\circ - \alpha) = \cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\text{b) } \cos (180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\text{c) } \text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} = \frac{3\sqrt{7}}{7}$$

064 Si $\cos (180^\circ - \alpha) = -\frac{1}{3}$ y α es un ángulo del 1.º cuadrante, calcula.



- a) $\text{sen } \alpha$
- b) $\cos (90^\circ - \alpha)$
- c) $\text{tg } (-\alpha)$

$$\text{sen } (180^\circ - \alpha) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{a) } \text{sen } \alpha = \text{sen } (180^\circ - \alpha) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{b) } \cos (90^\circ - \alpha) = \text{sen } \alpha = \text{sen } (180^\circ - \alpha) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{c) } \text{tg } (-\alpha) = -\text{tg } \alpha = \text{tg } (180^\circ - \alpha) = -2\sqrt{2}$$

065 Si $\cos \alpha = \frac{5}{6}$ y α es un ángulo agudo, calcula.

a) $\sin(90^\circ + \alpha)$

c) $\cos(-\alpha)$

b) $\cos(180^\circ + \alpha)$

d) $\sin(90^\circ - \alpha)$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{11}}{6}$$

a) $\sin(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha = \frac{5}{6}$

c) $\cos(-\alpha) = \cos \alpha = \frac{5}{6}$

b) $\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha = -\frac{5}{6}$

d) $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha = \frac{5}{6}$

066 Si $\sin 42^\circ = 0,669$ y $\cos 42^\circ = 0,743$; calcula las razones trigonométricas de 48° .

$\sin 48^\circ = 0,743$

$\cos 48^\circ = 0,669$

$\operatorname{tg} 48^\circ = 1,111$

067 Sabiendo que $\sin 35^\circ = 0,574$; halla las razones trigonométricas de 55° y 145° .

$\sin 55^\circ = 0,819$

$\sin 145^\circ = 0,574$

$\cos 55^\circ = 0,574$

$\cos 145^\circ = -0,819$

$\operatorname{tg} 55^\circ = 1,428$

$\operatorname{tg} 145^\circ = -0,7$

068 Dado $\cos 24^\circ = 0,914$; obtén las razones trigonométricas de su ángulo complementario.

$\sin 66^\circ = 0,914$

$\cos 66^\circ = 0,407$

$\operatorname{tg} 66^\circ = 2,246$

069 Calcula las razones trigonométricas de 66° , siendo $\cos 114^\circ = -0,407$.

$\sin 66^\circ = 0,914$

$\cos 66^\circ = 0,407$

$\operatorname{tg} 66^\circ = 2,246$

070 Determina el área de un triángulo, sabiendo que dos de sus lados miden 10 cm y 15 cm, y que los ángulos distintos al comprendido entre esos lados miden 80° y 70° .

El tercer ángulo mide: $180^\circ - 80^\circ - 70^\circ = 30^\circ$.

$$A = \frac{30 \cdot 20 \cdot \sin 30^\circ}{2} = 150 \text{ cm}^2$$

Trigonometría

071 HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE CALCULA EL ÁREA DE UN TRIÁNGULO ISÓSCELES, CONOCIENDO SUS LADOS IGUALES Y SU ÁNGULO DESIGUAL?

Halla el área de un triángulo isósceles de lados iguales 5 cm y el ángulo desigual 30° .

PRIMERO. Se halla la medida de los ángulos iguales.

$$3 + \alpha + \alpha = 180^\circ$$

$$\alpha = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ$$

SEGUNDO. Se calcula la altura.

$$\text{sen } 75^\circ = \frac{h}{5} \rightarrow h = 5 \cdot \text{sen } 75^\circ = 4,83 \text{ cm}$$

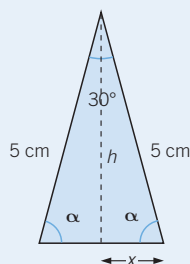
TERCERO. Se determina la longitud de la base.

$$\cos 75^\circ = \frac{x}{5} \rightarrow x = 5 \cdot \cos 75^\circ = 1,29 \text{ cm}$$

Por tanto, la base mide: $1,29 \cdot 2 = 2,58 \text{ cm}$

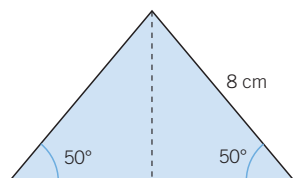
CUARTO. Se halla el área.

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{2,58 \cdot 4,83}{2} = 6,23 \text{ cm}^2$$

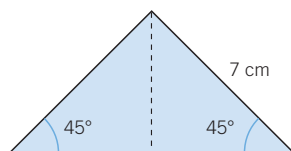


072 ●● Halla el área de estos triángulos isósceles.

a)



b)



a) Llamando b a la base y h a la altura del triángulo:

$$h = 8 \cdot \text{sen } 50^\circ = 6,13 \text{ cm}; \quad \frac{b}{2} = 8 \cdot \cos 50^\circ = 5,14 \text{ cm}$$

$$\text{El área del triángulo es: } A = \frac{b \cdot h}{2} = 5,14 \cdot 6,13 = 31,5 \text{ cm}^2.$$

$$\text{b) } h = 7 \cdot \text{sen } 45^\circ = 7 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 4,95 \text{ cm}$$

$$\frac{b}{2} = 7 \cdot \cos 45^\circ = 7 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 4,95 \text{ cm}$$

$$\text{El área del triángulo es: } A = \frac{b \cdot h}{2} = 4,95 \cdot 4,95 = 24,5 \text{ cm}^2.$$

073 ●● ¿Cuánto miden los catetos de un triángulo rectángulo isósceles si la hipotenusa mide 10 cm?

Denotamos por x a cada cateto, y sabiendo que los ángulos agudos miden 45° :

$$\cos 45^\circ = \frac{x}{10} \rightarrow x = 10 \cdot \cos 45^\circ = 10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2} \text{ cm}$$

074 ●● Calcula el valor de la apotema de un decágono regular de lado 20 cm. ¿Cuál es su área?

El ángulo central del decágono mide: $360^\circ : 10 = 36^\circ$.

$$\operatorname{tg} \left(\frac{36^\circ}{2} \right) = \operatorname{tg} 18^\circ = \frac{10}{a} \rightarrow a = 31,25 \text{ cm}$$

$$A = \frac{20 \cdot 10 \cdot 31,25}{2} = 3.125 \text{ cm}^2$$

075 ●● Halla el área de un decágono regular y de un octógono regular, ambos de 6 cm de lado. ¿Cuál es mayor?

Decágono:

El ángulo central del decágono mide: $360^\circ : 10 = 36^\circ$.

$$\operatorname{tg} \left(\frac{36^\circ}{2} \right) = \operatorname{tg} 18^\circ = \frac{3}{a} \rightarrow a = 9,37 \text{ cm} \quad A_d = \frac{6 \cdot a}{2} \cdot 10 = 281,1 \text{ cm}^2$$

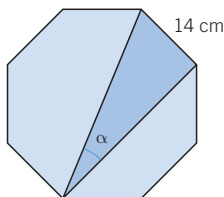
Octógono:

El ángulo central del octógono mide: $360^\circ : 8 = 45^\circ$.

$$\operatorname{tg} \left(\frac{45^\circ}{2} \right) = \operatorname{tg} 22,5^\circ = \frac{3}{a} \rightarrow a = 7,31 \text{ cm} \quad A_o = \frac{6 \cdot a}{2} \cdot 8 = 175,44 \text{ cm}^2$$

Tiene mayor área el decágono.

076 ●●● Determina el área sombreada de este octógono regular.



$$\alpha = \frac{45^\circ}{2} = 22^\circ 30'$$

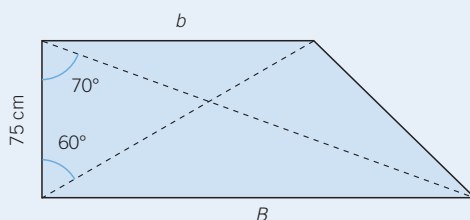
$$A = \frac{14 \cdot \left(14 \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \right)}{2} = 236,59 \text{ cm}^2$$

Trigonometría

077 HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE CALCULA EL ÁREA Y EL PERÍMETRO DE UN TRAPICIO RECTÁNGULO?

Calcula el área del siguiente trapecio rectángulo.



PRIMERO. Se halla la medida de sus bases.

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{b}{75}$$

$$b = 75 \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = 75 \cdot \sqrt{3} = 129,9 \text{ cm}$$

$$\operatorname{tg} 70^\circ = \frac{B}{75}$$

$$B = 75 \cdot \operatorname{tg} 70^\circ = 75 \cdot 2,75 = 206,25 \text{ cm}$$

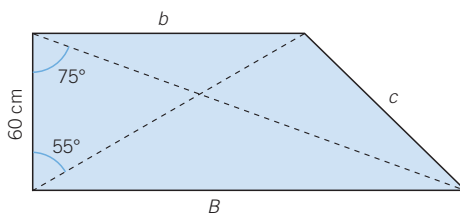
SEGUNDO. Se calcula su área.

$$A = \frac{B + b}{2} \cdot h = \frac{206,25 + 129,9}{2} \cdot 75 = 12.605,625 \text{ cm}^2$$

078



Calcula el área y el perímetro del siguiente trapecio rectángulo.



$$B = 60 \cdot \operatorname{tg} 75^\circ = 223,92 \text{ cm}$$

$$b = 60 \cdot \operatorname{tg} 55^\circ = 85,69 \text{ cm}$$

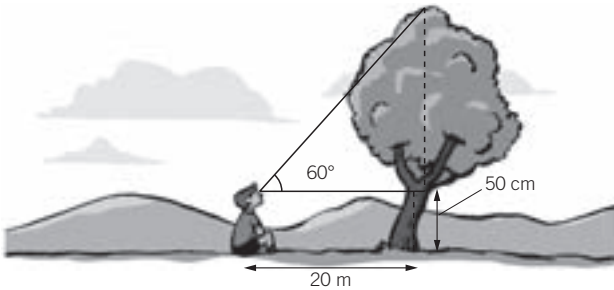
$$c = \sqrt{60^2 + (223,92 - 85,69)^2} = 150,69 \text{ cm}$$

El área es:

$$A = \frac{223,92 + 85,69}{2} \cdot 60 = 9.288,3 \text{ cm}^2$$

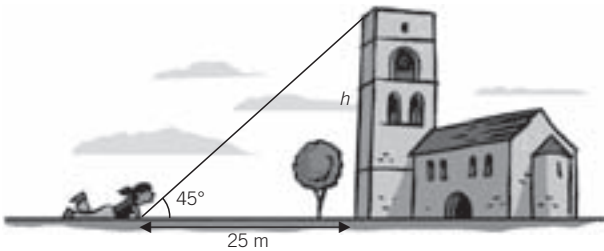
El perímetro mide:

$$P = 223,92 + 85,69 + 60 + 150,69 = 520,3 \text{ cm}$$

079 ¿Cuánto mide el árbol?

$$h = 0,5 + 20 \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = 0,5 + 34,64 = 35,14 \text{ m}$$

El árbol mide 35,14 metros de altura.

080 Calcula la altura de la torre.

Denotando por h a la altura de la torre, se obtiene:

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{h}{25} \rightarrow h = 25 \cdot \operatorname{tg} 45^\circ = 25 \cdot 1 = 25 \text{ m}$$

La torre mide 25 m de altura.

081 ¿A qué distancia me encuentro de un edificio de 50 m de altura si observo su parte más elevada con un ángulo de 60° ?

Siendo d la distancia a la que me encuentro del edificio:

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{50}{d} \rightarrow d = \frac{50}{\operatorname{tg} 60^\circ} = \frac{50}{\sqrt{3}} = 28,87 \text{ m}$$

082 Una cometa está unida al suelo por un hilo de 100 m, que forma con la horizontal del terreno un ángulo de 60° . Suponiendo que el hilo esté completamente estirado, halla la altura a la que está la cometa.

$$h = 100 \cdot \operatorname{sen} 60^\circ = 100 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 50\sqrt{3} \text{ m}$$

Trigonometría

083



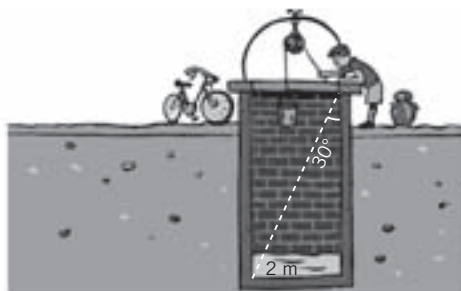
Una lancha está amarrada al muelle por una maroma de 25 m, que forma con la horizontal de la orilla un ángulo de 30° . Suponiendo que la maroma esté completamente estirada, halla la distancia a la que está de la orilla.

$$\text{Distancia} = 25 \cdot \text{sen } 30^\circ = 12,5 \text{ m}$$

084



Calcula la profundidad de un pozo de 2 m de ancho si vemos el borde opuesto del fondo con un ángulo de 30° .



Siendo d la profundidad del pozo:

$$\text{tg } 30^\circ = \frac{2}{d} \rightarrow d = \frac{2}{\text{tg } 30^\circ} = \frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 3,46 \text{ m}$$

El pozo tiene 3,46 m de profundidad.

085



Determina la superficie de un logotipo con forma de pentágono regular inscrito en una circunferencia de 5 cm de radio.

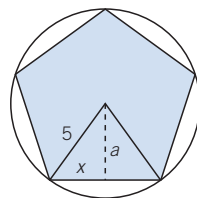
El ángulo central mide 72° y su mitad es 36° .

$$a = 5 \cdot \cos 36^\circ = 4,05 \text{ cm}$$

$$x = 5 \cdot \text{sen } 36^\circ = 2,94 \text{ cm}$$

$$b = 2x = 5,88 \text{ cm}$$

$$A = \frac{4,05 \cdot 5,88}{2} = 11,91 \text{ cm}^2$$



086



Desde un barco vemos la luz de un faro con una inclinación de 20° y, después de avanzar 18 km en esa dirección, se ve con un ángulo de 30° . ¿A qué distancia estamos del faro?

$$\left. \begin{array}{l} x \cdot \text{tg } 30^\circ = h \\ (x + 18) \cdot \text{tg } 20^\circ = h \end{array} \right\} \rightarrow x \cdot 0,58 = (x + 18) \cdot 0,36$$

$$\rightarrow 0,22x = 6,48 \rightarrow x = 29,45 \text{ km}$$

La distancia es: $18 + 29,45 = 47,45 \text{ km}$.

- 087** Halla la cantidad de chapa necesaria para fabricar una señal de STOP de forma octogonal, sabiendo que la diagonal marcada mide 1,25 m.



La cantidad de chapa necesaria para fabricar esta señal es equivalente al área de un octógono regular inscrito en una circunferencia de $1,25 : 2 = 0,625$ m de radio.

Dividimos el octógono en 8 triángulos isósceles iguales. El ángulo desigual de cada triángulo isósceles es un ángulo central de $360^\circ : 8 = 45^\circ$.

Si llamamos $\hat{A}$ y $\hat{B}$ a los otros dos ángulos, se obtiene:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} = \hat{B} \\ \hat{A} + \hat{B} + 45^\circ = 180^\circ \end{array} \right\} \rightarrow \hat{A} = \frac{180^\circ - 45^\circ}{2} = 67,5^\circ$$

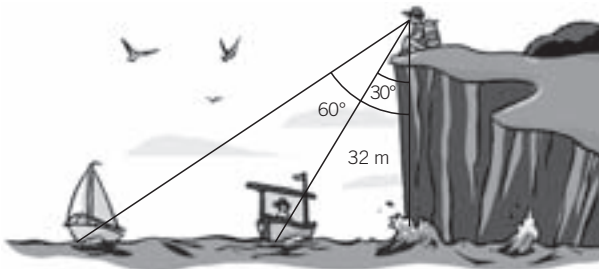
Si h es la altura del triángulo y b es la base:

$$h = 0,625 \cdot \operatorname{sen} 67,5^\circ = 0,58 \text{ m}$$

$$\frac{b}{2} = 0,625 \cdot \cos 67,5^\circ = 0,24 \text{ m}$$

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = 0,24 \cdot 0,58 = 0,14 \text{ m}^2 \rightarrow A_{\text{Total}} = 0,14 \cdot 8 = 1,1 \text{ m}^2$$

- 088** En un acantilado, situado a 32 m sobre el nivel del mar, se divisan dos embarcaciones. Halla la distancia de las mismas si los respectivos ángulos son de 30° y 60° .



Sean x e y las distancias indicadas en el gráfico.

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{x}{32} \rightarrow x = 32 \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = 18,48 \text{ m}$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{y}{32} \rightarrow y = 32 \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = 55,43 \text{ m}$$

La distancia entre las embarcaciones es: $55,43 - 18,48 = 36,95$ m.

Trigonometría

089

Desde cierto punto del suelo se ve la parte superior de una torre formando un ángulo de 30° con la horizontal. Si nos acercamos 75 m hacia el pie de la torre, ese ángulo es de 60° . Halla la altura de la torre.

Llamando h a la altura de la torre y x a la distancia al pie de la torre:

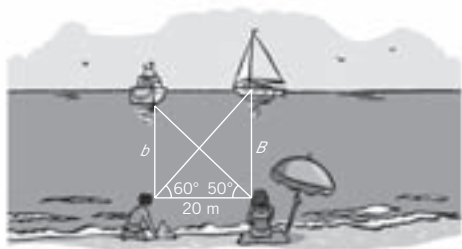
$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} x \cdot \operatorname{tg} 30^\circ &= h \\ (x - 75) \cdot \operatorname{tg} 60^\circ &= h \end{aligned} \right\} &\rightarrow x \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = (x - 75) \cdot \operatorname{tg} 60^\circ \\ &\rightarrow x \cdot \operatorname{tg} 30^\circ - x \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = -75 \cdot \operatorname{tg} 60^\circ \end{aligned}$$

$$\rightarrow x \cdot (\operatorname{tg} 30^\circ - \operatorname{tg} 60^\circ) = -75 \cdot 1,73 \rightarrow x = \frac{-129,75}{0,57 - 1,73} = 112,53 \text{ m}$$

$h = x \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = 112,53 \cdot 0,57 = 64,14 \text{ m}$. La torre mide 64,14 m de altura.

090

Desde la playa se observan dos barcos. Calcula la distancia que hay entre ellos con los ángulos que se indican.



Sea d la distancia que hay entre los dos barcos.

Hallamos la medida de b y B .

$$\operatorname{tg} 50^\circ = \frac{b}{20} \rightarrow b = 20 \cdot \operatorname{tg} 50^\circ = 23,84 \text{ m}$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{B}{20} \rightarrow B = 20 \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = 20 \cdot \sqrt{3} = 34,64 \text{ m}$$

Utilizando el teorema de Pitágoras:

$$d^2 = 20^2 + (34,64 - 23,84)^2 = 516,64 \rightarrow d = \sqrt{516,64} = 22,73 \text{ m}$$

Por tanto, los dos barcos distan 22,73 m.

091

Desde la cima de una montaña, a una altura de 1.114 m, vemos una aldea y una granja situadas en el valle que está a una altura de 537 m sobre el nivel del mar. Si observamos la aldea con un ángulo de 68° y la granja con uno de 83° :

a) ¿Cuál de los dos lugares está más cerca de la montaña?

b) Si la montaña, la aldea y la granja se encuentran alineadas, halla la distancia que hay entre la aldea y la granja.

a) Está más cerca el lugar que se observa con menor grado, es decir, la aldea.

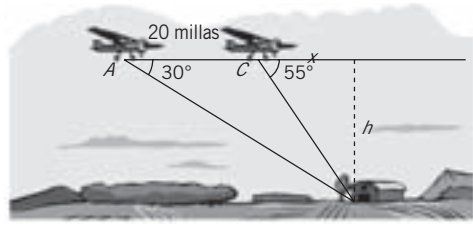
La distancia a la aldea es: $(1.114 - 537) \cdot \operatorname{tg} 68^\circ = 1.428,13 \text{ m}$.

b) La distancia a la granja es: $(1.114 - 537) \cdot \operatorname{tg} 83^\circ = 4.699,29 \text{ m}$.

La distancia entre la aldea y la granja es: $4.699,29 - 1.428,13 = 3.271,16 \text{ m}$.

092

El piloto de un avión observa un punto del terreno con un ángulo de depresión de 30° . Dieciocho segundos más tarde, el ángulo de depresión obtenido sobre el mismo punto es de 55° . Si vuela horizontalmente y a una velocidad de 400 millas/hora, halla la altitud de vuelo.



La distancia recorrida por el avión es: $400 \cdot \frac{18}{3.600} = 20$ millas.

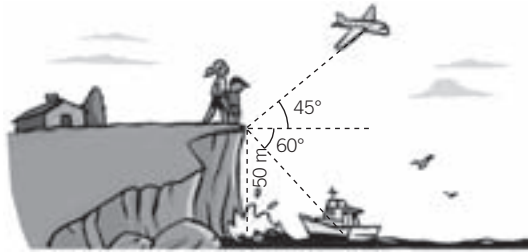
$$\left. \begin{array}{l} x \cdot \operatorname{tg} 55^\circ = h \\ (x + 20) \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = h \end{array} \right\} \rightarrow x \cdot 1,43 = (x + 20) \cdot 0,58$$

$$\rightarrow 0,85x = 11,6 \rightarrow x = 13,65 \text{ millas}$$

$h = 13,65 \cdot 1,43 = 19,52$ millas. La altitud de vuelo es de 19,52 millas.

093

En un acantilado, situado a 50 m sobre el nivel del mar, se encuentran dos amigos. Uno de ellos observa un barco con un ángulo de depresión de 60° , y el otro mira un avión, situado encima del barco, con un ángulo de elevación de 45° .



- a) ¿A qué distancia se encuentra el barco de la costa?
 b) ¿A qué altura vuela el avión?
 c) ¿Cuál de los dos elementos está más lejos?

a) Llamando d a la distancia a la que se encuentra el barco de la costa:

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{d}{50} \rightarrow d = 50 \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = 50 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 28,87 \text{ m}$$

El barco se encuentra a 28,87 m de la costa.

b) Teniendo en cuenta que el avión está situado encima del barco, se obtiene:

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{h}{28,87} \rightarrow h = 28,87 \cdot \operatorname{tg} 45^\circ = 28,87 \text{ m}$$

El avión vuela a: $50 + 28,87 = 78,87$ m de altura sobre el mar.

c) Siendo d_1 la distancia a la que se encuentra el barco, y d_2 , la del avión:

$$d_1 = \frac{50}{\cos 30^\circ} = 50 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = 57,7 \text{ m}$$

$$\operatorname{sen} 45^\circ = \frac{28,87}{d_2} \rightarrow d_2 = \frac{28,87}{\operatorname{sen} 45^\circ} = \frac{28,87}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 40,8 \text{ m}$$

Luego el barco está más lejos de los amigos que el avión.

Trigonometría

094

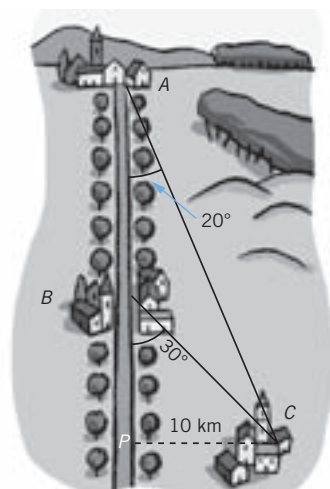
Dos poblaciones, A y B , están situadas en una carretera que va del norte al sur. Otra población, C , a 10 kilómetros en línea recta de la carretera anterior, está situada a 20° al sureste de A y a 30° al sureste de B .

¿Qué distancia separa A de B ?

$$\overline{AP} = \frac{10}{\operatorname{tg} 20^\circ} = 27,47 \text{ km}$$

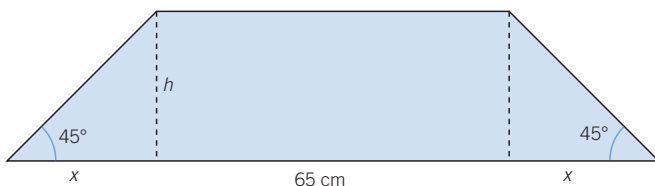
$$\overline{BP} = \frac{10}{\operatorname{tg} 30^\circ} = 17,32 \text{ km}$$

$$\overline{AB} = \overline{AP} - \overline{BP} = 10,15 \text{ km}$$



095

La superficie de un terreno de forma de trapecio es 1.200 m^2 . Sabiendo que tiene dos ángulos de 45° y que la base menor mide 65 m, calcula la base mayor y la distancia entre las bases.



$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{h}{x} \rightarrow x = h$$

$$\frac{65 + (65 + 2x)}{2} \cdot h = 1.200 \xrightarrow{x=h} h^2 + 65h - 1.200 = 0$$

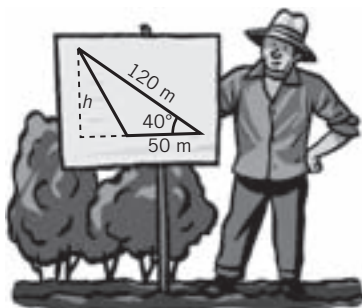
$$\rightarrow \begin{cases} h = 15 \\ h = -80 \text{ (solución no válida)} \end{cases}$$

$$B = 65 + 2x = 5 \text{ m}$$

La base mayor mide 95 m y la distancia entre las bases es 15 m.

096

¿Cuánto se obtendrá por vender esta parcela si se paga a 300 €/m^2 ?



$$A = \frac{120 \cdot (50 \cdot \operatorname{sen} 40^\circ)}{2} = 1.928,36 \text{ m}^2$$

$$\text{Precio} = 1.928,36 \cdot 300 = 578.508 \text{ €}$$

097

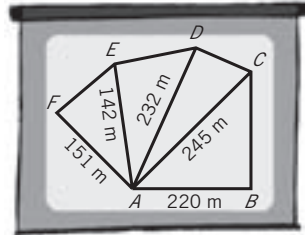
Calcula la superficie de este terreno.

$$\widehat{BAC} = 33^\circ 45'$$

$$\widehat{CAD} = 24^\circ 13'$$

$$\widehat{DAE} = 42^\circ 15'$$

$$\widehat{EAF} = 33^\circ 41'$$



$$A_{BAC} = \frac{220 \cdot 245 \cdot \text{sen } 33^\circ 45'}{2} = 14.972,62 \text{ m}^2$$

$$A_{CAD} = \frac{232 \cdot 245 \cdot \text{sen } 24^\circ 13'}{2} = 11.657,55 \text{ m}^2$$

$$A_{DAE} = \frac{142 \cdot 232 \cdot \text{sen } 42^\circ 15'}{2} = 11.698,17 \text{ m}^2$$

$$A_{EAF} = \frac{151 \cdot 142 \cdot \text{sen } 33^\circ 41'}{2} = 5.945,9 \text{ m}^2$$

$$A = A_{BAC} + A_{CAD} + A_{DAE} + A_{EAF} = 44.274,24 \text{ m}^2$$

098

Sin utilizar la calculadora, ordena de menor a mayor.

a) $\cos 24^\circ$ $\text{sen } 113^\circ$ $\cos 292^\circ$ b) $\text{tg } 242^\circ$ $1,70$

a) $\cos 24^\circ$

$$\text{sen } 113^\circ = \text{sen } (90^\circ + 23^\circ) = \cos 23^\circ$$

$$\cos 292^\circ = \cos (360^\circ - 68^\circ) = \cos 68^\circ$$

En los ángulos agudos, cuanto mayor es el ángulo, menor es el coseno.

$$\cos 292^\circ < \text{sen } 113^\circ < \cos 24^\circ$$

b) $\text{tg } 242^\circ = \text{tg } (180^\circ + 62^\circ) = \text{tg } 62^\circ$

$$\text{tg } 60^\circ = \sqrt{3} > 1,70$$

En los ángulos agudos, cuanto mayor es el ángulo, mayor es la tangente.

$$1,70 < \text{tg } 62^\circ$$

099

Dos lados de un triángulo miden 15 cm y 20 cm.

a) ¿Cuál es el área máxima que puede tener ese triángulo? ¿Por qué?

b) ¿Qué tipo de triángulo es en ese caso?

a) El área de un triángulo es:

$$A = \frac{a \cdot b \cdot \text{sen } \alpha}{2} \xrightarrow{\text{sen } \alpha \leq 1} A \leq \frac{a \cdot b}{2}$$

$$A \leq \frac{15 \cdot 20}{2} = 150$$

El mayor valor que puede tomar es 150 cm^2 , cuando el seno vale 1.

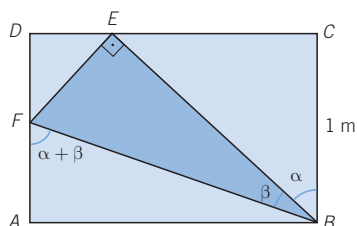
b) El máximo valor se da cuando el seno es igual a 1, es decir, cuando el ángulo mide 90° , luego es un triángulo equilátero.

Trigonometría

100



Deduce una fórmula para $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$ a partir de la longitud de los segmentos de la figura.



$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\overline{AB}}{\overline{AF}}$$

EN LA VIDA COTIDIANA

101



Los datos en los medios de comunicación sobre los incendios que han tenido lugar en el país durante el verano no han sido muy desfavorables. Sin embargo, el último fin de semana se ha producido un incendio en uno de los parques naturales.



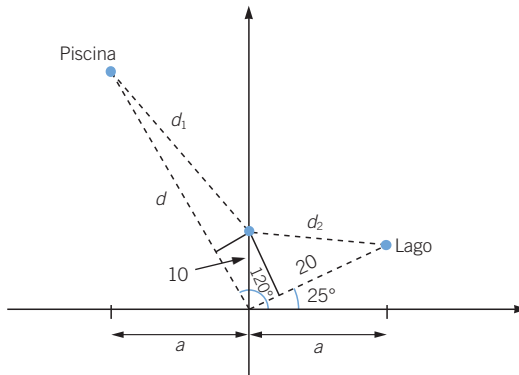
Desde uno de los helicópteros de protección civil, situado en el radar en el origen de coordenadas, el piloto observa un fuego en dirección Norte y la situación del lago más cercano a 25° y de la piscina municipal a 120° .



Desde la torre de control les dan el aviso de que el viento empieza a ser más fuerte, y que es necesario que el incendio sea controlado antes de que se propague.



¿Adónde irán a recoger agua?



Hay que calcular la menor de estas distancias: $20 + d_2$, $d + d_1$.

$$d_2 = \sqrt{(10 \cdot \sin 65^\circ)^2 + (20 - 10 \cdot \cos 65^\circ)^2} = 18,2 \text{ km}$$

$$\rightarrow 20 + d_2 = 38,2 \text{ km}$$

$$a = 20 \cdot \cos 25^\circ = 18,13 \rightarrow d = \frac{a}{\cos 60^\circ} = \frac{18,13}{0,5} = 36,26 \text{ km}$$

$$d_1 = \sqrt{(10 \cdot \sin 30^\circ)^2 + (36,26 - 10 \cdot \cos 30^\circ)^2} = 28,05$$

$$\rightarrow d + d_1 = 64,31 \text{ km}$$

Irán a recoger agua en el lago.

Trigonometría

102



El Ayuntamiento ha decidido construir viviendas de protección oficial en un terreno. Para realizar el proyecto han contratado a un estudio de arquitectos.



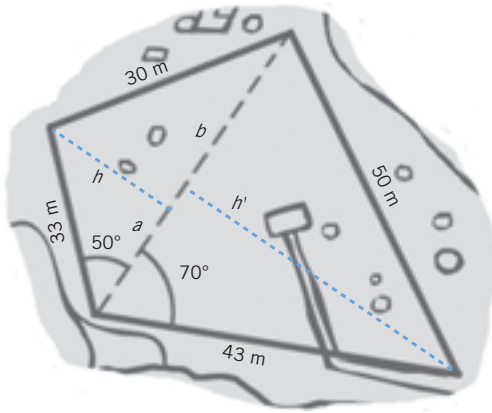
Los encargados municipales no les han proporcionado las dimensiones del recinto, y uno de los aparejadores ha visitado el terreno para hacer las mediciones.



Luego han presentado el estudio incluyendo redes geodésicas del terreno, formadas por puntos desde los cuales se mide con gran precisión y que, además, son los vértices de triángulos adosados unos a otros.



Con estos datos, determina la superficie de terreno que va a ser edificable.



$$h = 33 \cdot \operatorname{sen} 50^\circ = 25,28 \text{ m}$$

$$a = 33 \cdot \cos 50^\circ = 21,21 \text{ m}$$

$$b = \sqrt{30^2 - 25,28^2} = 16,15 \text{ m}$$

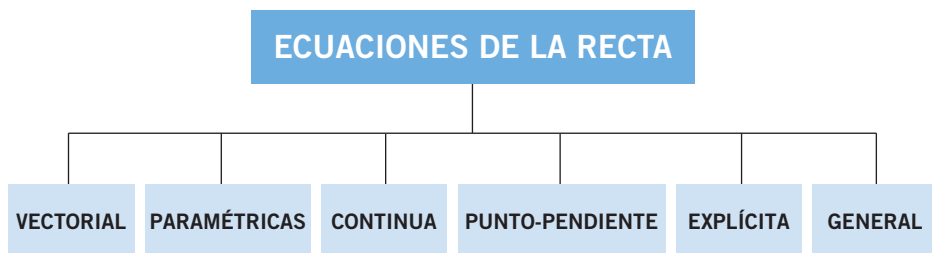
$$h' = 43 \cdot \operatorname{sen} 70^\circ = 40,41 \text{ m}$$

$$A_{ACD} = \frac{(a + b) \cdot h}{2} = \frac{37,36 \cdot 25,28}{2} = 472,23 \text{ m}^2$$

$$A_{ABC} = \frac{(a + b) \cdot h'}{2} = \frac{37,36 \cdot 40,41}{2} = 754,86 \text{ m}^2$$

$$A = A_{ACD} + A_{ABC} = 472,23 + 754,86 = 1.227,09 \text{ m}^2$$

La superficie del terreno que será edificable es de 1.227,09 m².



POSICIONES DE DOS RECTAS
EN EL PLANO

Destino: el futuro

El agudo silbido despertó al monstruo, que comenzó a moverse lentamente entre chirridos metálicos y nubes de vapor.

Apenas la locomotora hubo iniciado la marcha, dos jóvenes, Sonia y Fedia, abandonaron el compartimento donde estaban sus padres y su hermana mayor, y atravesando algunos vagones llegaron al furgón de cola, desde donde vieron alejarse su ciudad, Palibino.

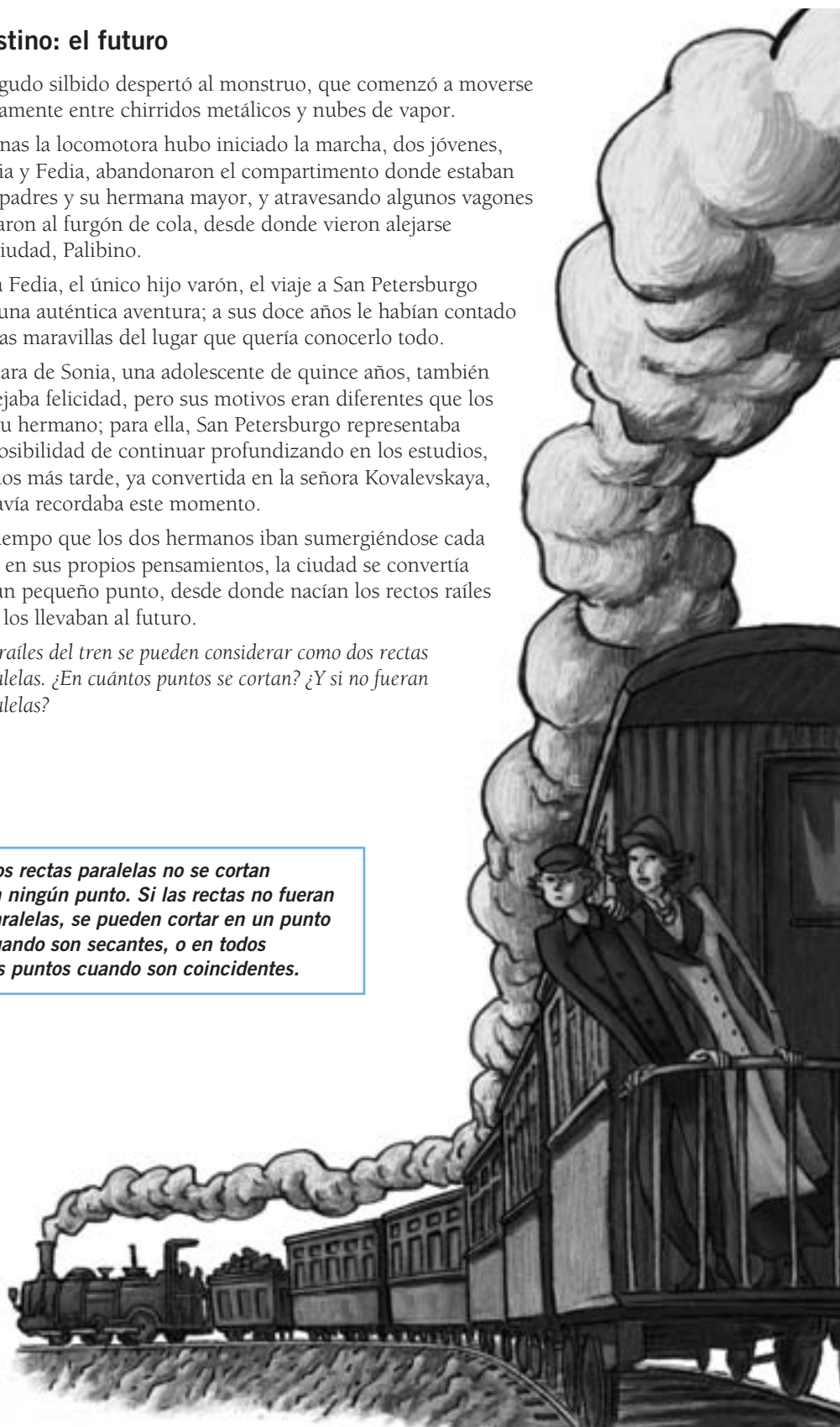
Para Fedia, el único hijo varón, el viaje a San Petersburgo era una auténtica aventura; a sus doce años le habían contado tantas maravillas del lugar que quería conocerlo todo.

La cara de Sonia, una adolescente de quince años, también reflejaba felicidad, pero sus motivos eran diferentes que los de su hermano; para ella, San Petersburgo representaba la posibilidad de continuar profundizando en los estudios, y años más tarde, ya convertida en la señora Kovalevskaya, todavía recordaba este momento.

Al tiempo que los dos hermanos iban sumergiéndose cada uno en sus propios pensamientos, la ciudad se convertía en un pequeño punto, desde donde nacían los rectos raíles que los llevaban al futuro.

Los raíles del tren se pueden considerar como dos rectas paralelas. ¿En cuántos puntos se cortan? ¿Y si no fueran paralelas?

Dos rectas paralelas no se cortan en ningún punto. Si las rectas no fueran paralelas, se pueden cortar en un punto cuando son secantes, o en todos los puntos cuando son coincidentes.



Vectores y rectas

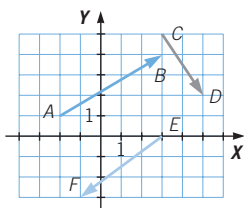
EJERCICIOS

001 ¿Cuáles son las coordenadas de los vectores?

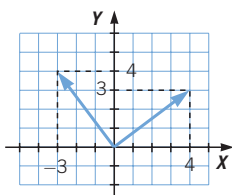
$$\overrightarrow{AB} = (5, 3)$$

$$\overrightarrow{CD} = (2, -3)$$

$$\overrightarrow{EF} = (-4, -3)$$



002 Dibuja dos vectores diferentes que tengan el mismo módulo, distinta dirección y diferente sentido.



003 Expresa estas situaciones con vectores, indicando su módulo, dirección y sentido.

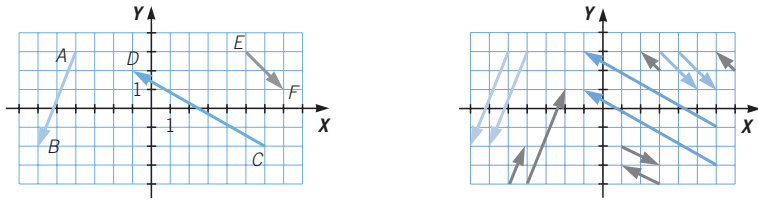
- Un barco sale de Canarias con dirección Norte a una velocidad de 10 nudos.
- Un barco sale de Azores con dirección Sureste y una velocidad de 12 nudos.



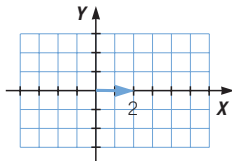
004 ¿Qué diferencias hay entre $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BA}$?

Son vectores con igual módulo y dirección, pero con distinto sentido.

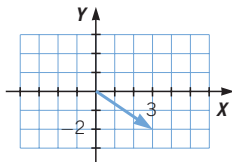
005 Dibuja dos vectores equivalentes a cada vector y otros dos paralelos.



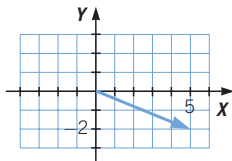
006 Dados los puntos $A(-2, 0)$, $B(0, 0)$ y $C(3, -2)$, representa y calcula las coordenadas y el módulo de los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{AC}$.



$$\overrightarrow{AB} = (2, 0) \quad |\overrightarrow{AB}| = 2$$



$$\overrightarrow{BC} = (3, -2) \quad |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{13}$$



$$\overrightarrow{AC} = (5, -2) \quad |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{29}$$

007 Dados los puntos $A(0, 0)$, $B(1, 1)$ y $C(0, 2)$, halla las coordenadas de un punto D para que los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ sean equivalentes, y también para que sean paralelos.

$$\overrightarrow{AB} = (1, 1)$$

$$\text{Sea } D(a, b) \rightarrow \overrightarrow{CD} = (a - 0, b - 2) = (a, b - 2).$$

Para que los vectores sean equivalentes:

$$(1, 1) = (a, b - 2)$$

Las coordenadas de D son $(1, 3)$.

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2}$ y $|\overrightarrow{CD}| = \sqrt{2}$, porque dos vectores equivalentes tienen el mismo módulo.

Para que los vectores sean paralelos:

$$\frac{a}{1} = \frac{b - 2}{1} \rightarrow a = b - 2$$

Las coordenadas de D son $(b - 2, b)$; por ejemplo, $(2, 4)$.

Vectores y rectas

008 Las coordenadas de los puntos A , B , C y D son:

$$A(0, 0) \quad B(-1, 3) \quad C(-2, -2) \quad D(1, -3)$$

Calcula el resultado de estas operaciones.

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$

c) $\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AB}$

e) $\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CD}$

b) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$

d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}$

f) $-\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$

$$\overrightarrow{AB} = (-1, 3) \quad \overrightarrow{CD} = (3, -1)$$

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = (2, 2)$

d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} = (-2, 6)$

b) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = (-4, 4)$

e) $\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CD} = (0, 0)$

c) $\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AB} = (4, -4)$

f) $-\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = (-2, -2)$

009 Los puntos $A(-1, 1)$, $B(0, 2)$ y $C(2, 0)$ son los vértices de un triángulo. Halla las coordenadas de los vectores que forman sus lados.

$$\overrightarrow{AB} = (1, 1) \quad \overrightarrow{BC} = (2, -2) \quad \overrightarrow{CA} = (-3, 1)$$

010 Si $\vec{u} = (-3, 2)$ y $\vec{w} = (4, -1)$, determina el vector $\vec{v}$ tal que $\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$.

$$\vec{v} = \vec{w} - \vec{u} = (7, -3)$$

011 Sabiendo que $A(3, -4)$ y $B(5, 2)$, calcula $k \cdot \overrightarrow{AB}$.

a) $k = 3$

b) $k = -2$

c) $k = 5$

d) $k = \frac{1}{2}$

$$\overrightarrow{AB} = (2, 6)$$

a) $3 \cdot \overrightarrow{AB} = 3 \cdot (2, 6) = (6, 18)$

b) $-2 \cdot \overrightarrow{AB} = -2 \cdot (2, 6) = (-4, -12)$

c) $5 \cdot \overrightarrow{AB} = 5 \cdot (2, 6) = (10, 30)$

d) $\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2} \cdot (2, 6) = (1, 3)$

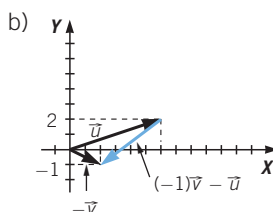
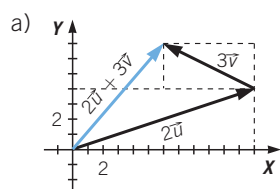
012 Efectúa las siguientes operaciones analítica y gráficamente, si $\vec{u} = (6, 2)$ y $\vec{v} = (-2, 1)$.

a) $2\vec{u} + 3\vec{v}$

b) $(-1) \cdot \vec{v} - \vec{u}$

a) $2 \cdot (6, 2) + 3 \cdot (-2, 1) = (12, 4) + (-6, 3) = (6, 7)$

b) $(-1) \cdot (-2, 1) - (6, 2) = (2, -1) - (6, 2) = (-4, -3)$



- 013** Sabemos que A' es el transformado de A por la traslación de vector $\vec{u}$.
Calcula x e y .

a) $A(0, 2) \xrightarrow{\vec{u} = (x, y)} A'(-2, 4)$ c) $A(x, y) \xrightarrow{\vec{u} = (-2, -3)} A'(-4, 6)$

b) $A(-1, -2) \xrightarrow{\vec{u} = (x, 3)} A'(5, y)$ d) $A(x, 8) \xrightarrow{\vec{u} = (7, y)} A'(10, 5)$

a) $\vec{u} = (x, y) = (-2, 4) - (0, 2) = (-2, 2) \rightarrow x = -2, y = 2$

b) $(-1, -2) + (x, 3) = (5, y) \rightarrow x = 6, y = 1$

c) $(x, y) + (-2, -3) = (-4, 6) \rightarrow x = -2, y = 9$

d) $(x, 8) + (7, y) = (10, 5) \rightarrow x = 3, y = -3$

- 014** Dados los puntos de coordenadas $A(-1, 7)$ y $B(0, 1)$:

a) Calcula el vector director de la recta que pasa por A y B .

b) Halla la ecuación vectorial de dicha recta.

a) $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (1, -6)$

b) Ecuación vectorial de la recta: $(x, y) = (-1, 7) + t \cdot (1, -6)$

- 015** Calcula la ecuación vectorial de la recta que pasa por el punto $A(0, -4)$ y tiene como vector director $\vec{v} = (-1, 7)$.

La ecuación vectorial de la recta es: $(x, y) = (0, -4) + t \cdot (-1, 7)$.

- 016** Determina la ecuación vectorial de la recta que pasa por el punto $A(-2, 3)$ y tiene como vector director:

a) $\vec{v} = (3, 4)$ b) $-\vec{v} = (-3, -4)$ c) $2\vec{v} = (6, 8)$

Escribe cinco puntos de cada una de las rectas. ¿Qué característica tienen en común estas tres rectas?

a) $(x, y) = (-2, 3) + t \cdot (3, 4)$

b) $(x, y) = (-2, 3) + t \cdot (-3, -4)$

c) $(x, y) = (-2, 3) + t \cdot (6, 8)$

Los cinco puntos pueden ser: $(-2, 3)$, $(1, 7)$, $(4, 11)$, $(-5, -1)$ y $(-8, -5)$.

Las tres rectas son coincidentes.

- 017** Calcula las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $A(0, -4)$ y tiene como vector director $\vec{v} = (-1, 7)$.

$$\left. \begin{array}{l} x = 0 + (-1) \cdot t \\ y = -4 + 7 \cdot t \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x = -t \\ y = -4 + 7t \end{array} \right\}$$

- 018** ¿Cuáles son las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $A(2, 3)$ y tiene como vector director $\vec{v} = (-1, 0)$?

Ecuaciones paramétricas:

$$\left. \begin{array}{l} x = 2 + (-1) \cdot t \\ y = 3 + 0 \cdot t \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 2 - t \\ y = 3 \end{array} \right\}$$

Vectores y rectas

019 Dados los puntos $A(-1, 7)$ y $B(0, 1)$, halla:

a) Las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por ellos.

b) Tres puntos que pertenezcan a dicha recta.

a) El vector director de la recta es: $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (1, -6)$.

Las ecuaciones paramétricas son:

$$\left. \begin{array}{l} x = -1 + 1 \cdot t \\ y = 7 + (-6) \cdot t \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x = -1 + t \\ y = 7 - 6t \end{array} \right\}$$

b) $t = 1 \rightarrow x = -1 + 1 = 0 \quad y = 7 - 6 \cdot 1 = 1$

$t = 2 \rightarrow x = -1 + 2 = 1 \quad y = 7 - 6 \cdot 2 = -5$

$t = -1 \rightarrow x = -1 - 1 = -2 \quad y = 7 - 6 \cdot (-1) = 13$

020 La siguiente gráfica muestra una recta.

a) Escribe las ecuaciones paramétricas y la ecuación vectorial.

b) ¿Pertenece el punto $(-6, 4)$ a la recta?

La recta pasa por los puntos $A(-1, 2)$ y $B(3, 1)$.

El vector director de la recta es:

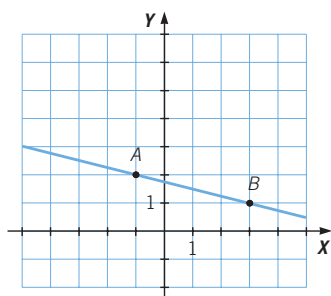
$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (4, -1)$$

a) Las ecuaciones paramétricas son:

$$\left. \begin{array}{l} x = -1 + 4 \cdot t \\ y = 2 + (-1) \cdot t \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x = -1 + 4t \\ y = 2 - t \end{array} \right\}$$

La ecuación vectorial es: $(x, y) = (-1, 2) + t \cdot (4, -1)$.

b) No, ya que no existe ningún valor t para que se cumpla $(-6, 4) = (-1, 2) + t \cdot (4, -1)$.



021 Calcula la ecuación continua de la recta que pasa por estos puntos.

$A(3, -1) \quad B(4, 5)$

Punto: $A(3, -1)$ Vector director: $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (1, 6)$

$$\text{Ecuación continua: } \frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{6}$$

022 Halla la ecuación continua de la siguiente recta expresada en forma paramétrica.

$$\left. \begin{array}{l} x = 2 - 3t \\ y = 2t \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 2 - 3t \rightarrow t = \frac{x-2}{-3} \\ y = 2t \rightarrow t = \frac{y}{2} \end{array} \right\} \rightarrow \frac{x-2}{-3} = \frac{y}{2}$$

- 023** Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(2, 3)$ y tiene como vector director $\vec{v} = (-1, 0)$.

$$\left. \begin{array}{l} x = 2 + (-1) \cdot t \\ y = 3 + 0 \cdot t \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 2 - t \\ y = 3 \end{array} \right\}$$

- 024** Expresa la recta que pasa por los puntos $A(1, -2)$ y $B(1, 2)$ mediante sus ecuaciones:

a) Vectorial.

b) Paramétricas.

¿Se puede expresar en forma continua? ¿Por qué?

El vector director de la recta es: $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (0, 4)$.

a) Ecuación vectorial: $(x, y) = (1, -2) + t \cdot (0, 4)$

b) Ecuaciones paramétricas: $\left. \begin{array}{l} x = 1 + 0 \cdot t \\ y = -2 + 4 \cdot t \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 1 \\ y = -2 + 4t \end{array} \right\}$

La recta no se puede expresar en forma continua, porque una de las coordenadas del vector director es cero.

- 025** Determina las ecuaciones explícita y punto-pendiente de la recta que pasa por $A(0, -4)$ y su vector director es $\vec{v} = (-1, 7)$.

Ecuación explícita: $y = -7x - 4$

La pendiente es: $m = \frac{7}{-1} = -7$.

Ecuación punto-pendiente: $y + 4 = -7x$

- 026** La ecuación de una recta es $y = 3x - 3$. ¿Cuál es la pendiente? Halla un vector director.

La pendiente de la recta es $m = 3$.

Un vector director de la recta es $\vec{v} = (1, 3)$.

- 027** La ecuación de la recta r es $y = -x + 2$.

a) ¿Cuál es el valor de la pendiente? ¿Y el de la ordenada en el origen?

b) Determina las coordenadas de uno de sus vectores directores.

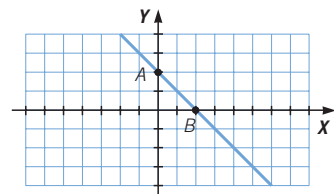
c) Obtén dos puntos de la recta y dibújala.

d) El punto $A(-1, 4)$, ¿pertenece a esa recta?

a) La pendiente es -1 y la ordenada en el origen es 2 .

b) Un vector director es $(1, -1)$.

c) $A = (0, 2)$, $B = (2, 0)$



d) $4 \neq -1 \cdot (-1) + 2$
No pertenece a la recta.

Vectores y rectas

- 028** Calcula la ecuación general de la recta que pasa por los puntos $A(0, -1)$ y $B(3, 2)$.

Vector director: $\vec{v} = (3, 3)$.

La ecuación general es: $-3x + 3y + C = 0$.

Como el punto $B(3, 2)$ pertenece a la recta, resulta:

$$-3 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + C = 0 \rightarrow C = 3$$

La ecuación general o implícita de la recta es: $-x + y + 1 = 0$.

- 029** ¿Cuál es la ecuación general de la recta cuya ecuación vectorial es $(x, y) = (1, 1) + t \cdot (3, 1)$?

Vector director: $\vec{v} = (3, 1)$.

La ecuación general es: $-x + 3y + C = 0$.

Como el punto $(1, 1)$ pertenece a la recta, resulta:

$$-1 + 3 \cdot 1 + C = 0 \rightarrow C = -2$$

La ecuación general o implícita de la recta es: $-x + 3y - 2 = 0$.

- 030** La pendiente de una recta es $m = 2$ y sabemos que pasa por el punto $A(0, -1)$.

a) Escribe su ecuación general.

b) Calcula un vector director y otro paralelo.

a) Vector director: $\vec{v} = (1, 2)$.

La ecuación general es: $-2x + y + C = 0$.

Como el punto $A(0, -1)$ pertenece a la recta, resulta:

$$-2 \cdot 0 - 1 + C = 0 \rightarrow C = 1$$

La ecuación general o implícita de la recta es: $-2x + y + 1 = 0$.

b) Un vector director es: $\vec{v} = (B, -A) = (1, 2)$.

Un vector paralelo es: $\vec{u} = (2, 4)$.

- 031** Indica cuál es la posición relativa de las siguientes rectas en el plano.

a) $r: x + 3y + 3 = 0$

b) $r: x + 3y + 2 = 0$

s: $x - 5y + 3 = 0$

s: $3x + 9y + 6 = 0$

a) El vector director de r es $(3, -1)$ y su pendiente es $m = \frac{-1}{3}$.

El vector director de s es $(-5, -1)$ y su pendiente es $m' = \frac{-1}{-5} \neq \frac{1}{3} = m$.

Las rectas son secantes.

b) El vector director de r es $(3, -1)$ y el vector director de s es $(9, -3)$.

Los vectores directores son proporcionales: $\frac{-1}{3} = \frac{-3}{9}$,

y el punto $(1, -1)$ pertenece a r y s . Las rectas son coincidentes.

- 032** Estudia la posición relativa de las rectas $r: (x, y) = t \cdot (3, 1)$ y $s: x - 5y + 3 = 0$.

El vector director de r es $(3, 1)$ y su pendiente es $m = \frac{1}{3}$.

El vector director de s es $(-5, -1)$ y su pendiente es $m' = \frac{-1}{-5} \neq \frac{1}{3}$.

Las rectas son secantes.

- 033** ¿Cuánto tiene que valer A para que las rectas $r: y = Ax + 6$ y $s: \frac{x}{2} = \frac{y - 6}{4}$ sean paralelas?

Un vector director de s es $(2, 4)$ y su pendiente es 2.

Las rectas son paralelas cuando $A = 2$.

ACTIVIDADES

- 034** Escribe tres ejemplos de magnitudes escalares y otros tres de magnitudes vectoriales.

Magnitudes escalares: la edad de Juan, la altura de María y el precio de la compra.

Magnitudes vectoriales: la gravedad, la aceleración de un móvil y la frenada de un coche.

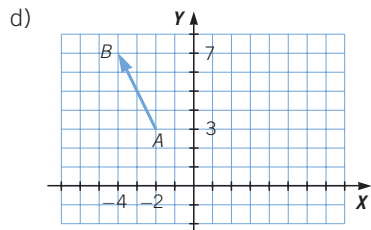
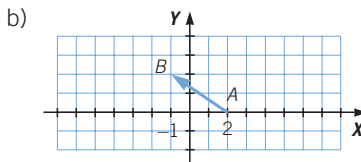
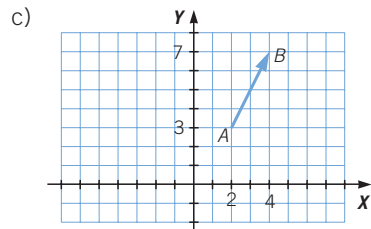
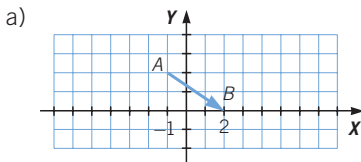
- 035** Dibuja el vector $\overrightarrow{AB}$, cuyo origen y extremo son:

a) $A(-1, 2)$ y $B(2, 0)$

c) $A(2, 3)$ y $B(4, 7)$

b) $A(2, 0)$ y $B(-1, 2)$

d) $A(-2, 3)$ y $B(-4, 7)$



Vectores y rectas

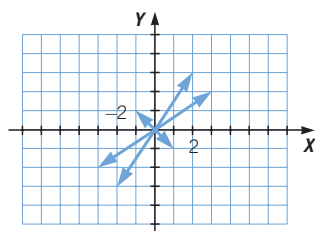
036 Calcula las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$, siendo A y B los siguientes puntos.

- a) $A(0, 2)$ y $B(1, -1)$ c) $A(-2, 1)$ y $B(-5, 1)$
- b) $A(2, 1)$ y $B(4, 3)$ d) $A(0, 0)$ y $B(6, 2)$
- a) $\overrightarrow{AB} = (1, -3)$ c) $\overrightarrow{AB} = (-3, 0)$
- b) $\overrightarrow{AB} = (2, 2)$ d) $\overrightarrow{AB} = (6, 2)$

037 ¿Cuántos vectores se pueden formar con los puntos $A(1, 2)$, $B(3, 5)$ y $C(4, 4)$?
 Describelos y represéntalos.

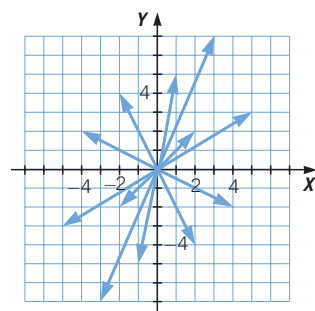
Se pueden formar 6 vectores:

$$\begin{array}{ll} \overrightarrow{AB} = (2, 3) & \overrightarrow{BA} = (-2, -3) \\ \overrightarrow{BC} = (1, -1) & \overrightarrow{CB} = (-1, 1) \\ \overrightarrow{CA} = (-3, -2) & \overrightarrow{AC} = (3, 2) \end{array}$$



038 ¿Cuántos vectores se pueden formar con los puntos $A(4, 1)$, $B(2, 5)$, $C(0, 3)$ y $D(-1, -2)$? Describelos y represéntalos.

$$\begin{array}{ll} \overrightarrow{AB} = (-2, 4) & \overrightarrow{BA} = (2, -4) \\ \overrightarrow{AC} = (-4, 2) & \overrightarrow{CA} = (4, -2) \\ \overrightarrow{AD} = (-5, -3) & \overrightarrow{DA} = (5, 3) \\ \overrightarrow{BC} = (-2, -2) & \overrightarrow{CB} = (2, 2) \\ \overrightarrow{BD} = (-3, -7) & \overrightarrow{DB} = (3, 7) \\ \overrightarrow{CD} = (-1, -5) & \overrightarrow{DC} = (1, 5) \end{array}$$



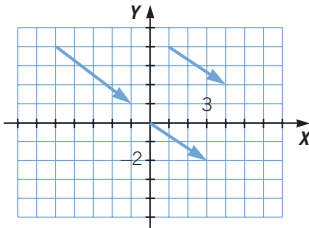
039 Calcula las coordenadas del punto A :

- a) Si $\overrightarrow{AB} = (-1, 3)$ y $B(5, 2)$.
- b) Si $\overrightarrow{AB} = (2, 3)$ y $B(1, 4)$.
- c) Si $\overrightarrow{AB} = (-4, 1)$ y $B(-3, 3)$.
- a) $A = (6, -1)$ b) $A = (-1, 1)$ c) $A = (1, 2)$

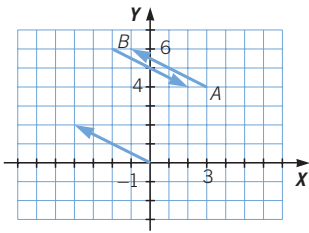
040 Calcula las coordenadas del punto B :

- a) Si $\overrightarrow{AB} = (0, 2)$ y $A(-3, 5)$.
- b) Si $\overrightarrow{AB} = (1, 0)$ y $A(4, 6)$.
- c) Si $\overrightarrow{AB} = (2, 4)$ y $A(-2, 4)$.
- a) $B = (-3, 7)$ b) $B = (5, 6)$ c) $B = (0, 8)$

- 041 Dibuja dos vectores que tengan el mismo sentido que $\overrightarrow{AB} = (3, -2)$.

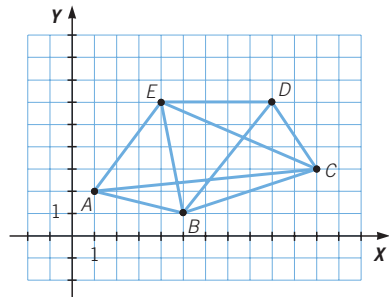


- 042 Dibuja dos vectores que tengan la misma dirección que $\overrightarrow{AB}$, siendo $A(3, 4)$ y $B(-1, 6)$.



- 043 Calcula las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BE}$ y $\overrightarrow{BD}$ en el siguiente gráfico.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} &= (11, 3) - (1, 2) = (10, 1) \\ \overrightarrow{BE} &= (4, 6) - (5, 1) = (-1, 5) \\ \overrightarrow{BD} &= (9, 6) - (5, 1) = (4, 5)\end{aligned}$$



- 044 Si los puntos $A(1, 1)$, $B(1, 3)$ y $C(7, 3)$ son vértices del paralelogramo $ABCD$, calcula.

- a) Las coordenadas de D .
b) El vector $\overrightarrow{BD}$.

a) Por ser paralelogramo, tenemos que:

$$AB = CD, \text{ por lo que: } \overrightarrow{AB} = (0, 2) \rightarrow \overrightarrow{CD} = (0, 2) \rightarrow D = (7, 5).$$

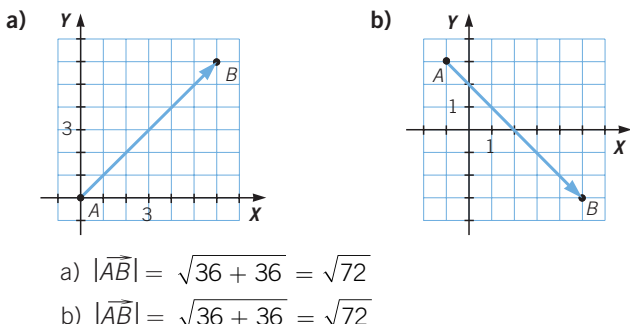
b) $\overrightarrow{BD} = (6, 2)$

Vectores y rectas

045 Encuentra dos vectores que cumplan que:

- a) Tienen la misma dirección y sentido, siendo uno de ellos con origen en $(0, 0)$ y otro en $(2, 4)$.
- b) Tienen la misma dirección y sentido contrario.
 - a) $\overrightarrow{AB}$ con $A = (0, 0)$, $B = (1, 1)$ y $\overrightarrow{CD}$ con $C = (2, 4)$, $D = (4, 6)$.
 - b) $\overrightarrow{AB}$ con $A = (0, 0)$, $B = (1, 1)$ y $\overrightarrow{CD}$ con $C = (2, 4)$, $D = (0, 2)$.

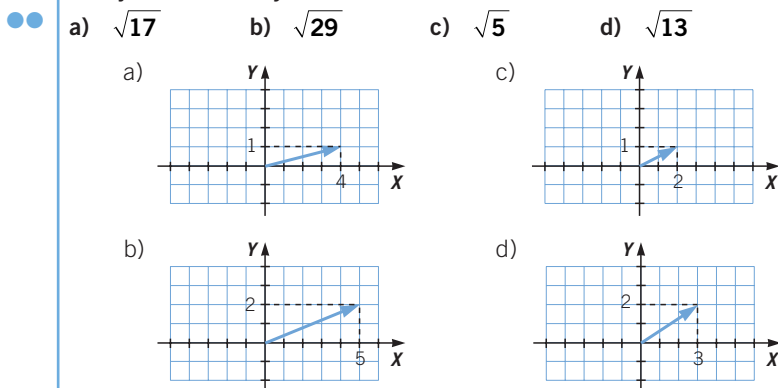
046 Calcula el módulo de los vectores.



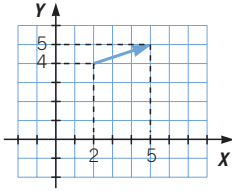
047 Obtén el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$.

- a) $A(1, 1)$ y $B(2, 3)$
 - b) $A(-4, 1)$ y $B(5, -2)$
 - c) $A(3, -2)$ y $B(1, -1)$
 - d) $A(-3, 0)$ y $B(0, 4)$
- a) $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$
- b) $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{81 + 9} = \sqrt{90}$
- c) $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$
- d) $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{9 + 16} = 5$

048 Dibuja un vector cuyo módulo sea:

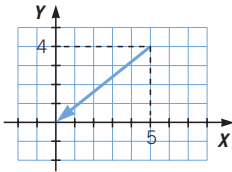


- 049** Dibuja un vector con origen en $(2, 4)$ y módulo $\sqrt{10}$. ¿Existe más de uno?
 Razona la respuesta.



Existen infinitos vectores, tantos como direcciones y sentidos se pueden tomar.

- 050** Dibuja un vector con extremo en $(0, 0)$ y módulo $\sqrt{41}$. ¿Existe más de uno?
 Razona la respuesta.



Existen infinitos vectores, tantos como direcciones y sentidos se pueden tomar.

- 051** Escribe dos vectores equivalentes y otros dos paralelos al vector $\overrightarrow{AB}$, siendo $A(-4, 3)$ y $B(1, -2)$.

$$\overrightarrow{AB} = (5, -5)$$

Equivalentes:

$$C = (2, 8), D = (7, 3)$$

$$E = (1, 5), F = (6, 0)$$

Los vectores son $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{EF}$.

Paralelos:

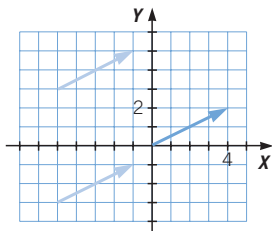
$$G = (0, -3), H = (-5, 2)$$

$$I = (3, -11), J = (13, 1)$$

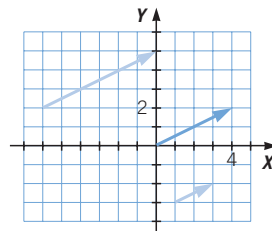
Los vectores son $\overrightarrow{GH}$ e $\overrightarrow{IJ}$.

- 052** Dibuja dos vectores equivalentes a $\overrightarrow{AB} = (4, 2)$ y otros dos paralelos, situados en diferentes cuadrantes.

Equivalentes:

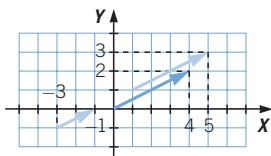


Paralelos:

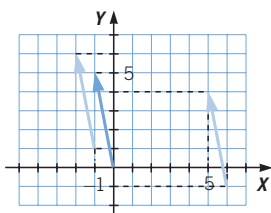


Vectores y rectas

- 053** ●● Dibuja un vector equivalente a $\overrightarrow{AB} = (4, 2)$ y otro paralelo con origen en $(1, 1)$ y en $(-3, -1)$, respectivamente.



- 054** ●● Dibuja un vector equivalente a $\overrightarrow{AB} = (-1, 5)$ y otro paralelo con extremo en $(-2, 6)$ y en $(5, 4)$, respectivamente.



- 055** ●● Halla la suma de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$.

a) $A(0, 2)$, $B(2, 5)$, $C(2, -1)$ y $D(5, -2)$

b) $A(3, 5)$, $B(-1, 6)$, $C(6, 4)$ y $D(5, 0)$

a) $\overrightarrow{AB} = (2, 3)$, $\overrightarrow{CD} = (3, -1) \rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = (5, 2)$

b) $\overrightarrow{AB} = (-4, 1)$, $\overrightarrow{CD} = (-1, -4) \rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = (-5, -3)$

- 056** ●● Obtén la diferencia de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$.

a) $A(-3, 2)$, $B(0, 5)$, $C(3, 1)$ y $D(4, -2)$

b) $A(0, 5)$, $B(-1, 3)$, $C(-2, 4)$ y $D(5, 1)$

a) $\overrightarrow{AB} = (3, 3)$, $\overrightarrow{CD} = (1, -3) \rightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = (2, 6)$

b) $\overrightarrow{AB} = (-1, -2)$, $\overrightarrow{CD} = (7, -3) \rightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = (-8, 1)$

- 057** ●● Dados los vectores $\vec{u} = (-6, 1)$ y $\vec{v} = (2, 3)$, calcula.

a) $\vec{u} + \vec{v}$

b) $\vec{u} - \vec{v}$

a) $\vec{u} + \vec{v} = (-4, 4)$

b) $\vec{u} - \vec{v} = (-8, -2)$

- 058** ●● Determina el módulo del vector que resulta de sumar los vectores $\vec{u} = (3, 7)$ y $\vec{v} = (-6, 2)$.

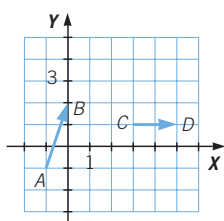
$$\vec{u} + \vec{v} = (-3, 9) \rightarrow |\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{9 + 81} = \sqrt{90}$$

- 059** ●● Calcula el módulo del vector que resulta de restar los vectores $\vec{u} = (4, -2)$ y $\vec{v} = (-3, 1)$.

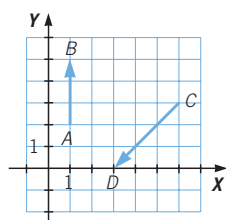
$$\vec{u} - \vec{v} = (7, -3) \rightarrow |\vec{u} - \vec{v}| = \sqrt{49 + 9} = \sqrt{58}$$

060 Obtén gráficamente la suma y la diferencia de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$.

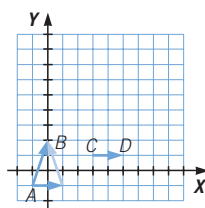
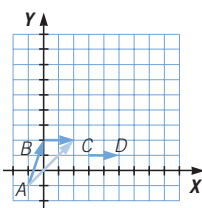
a)



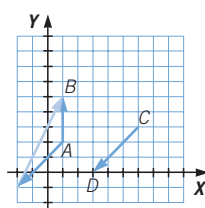
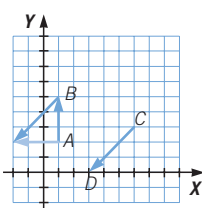
b)



a)



b)



061 Halla $\vec{v}$, si $\vec{u} = (5, 4)$ y $\vec{u} + \vec{v} = (2, 6)$.

$$\vec{v} = (\vec{u} + \vec{v}) - \vec{u} = (2, 6) - (5, 4) = (-3, 2)$$

062 Calcula $\vec{v}$, sabiendo que $\vec{u} = (-1, 6)$ y que $\vec{u} - \vec{v} = (3, -2)$.

$$\vec{v} = \vec{u} - (\vec{u} - \vec{v}) = (-1, 6) - (3, -2) = (-4, 8)$$

063 Halla las coordenadas de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, si $\vec{u} + \vec{v} = (1, 1)$ y $\vec{u} - \vec{v} = (3, 5)$.

$$2 \cdot \vec{u} = (\vec{u} + \vec{v}) + (\vec{u} - \vec{v}) = (1, 1) + (3, 5) = (4, 6) \rightarrow \vec{u} = (2, 3)$$

$$2 \cdot \vec{v} = (\vec{u} + \vec{v}) - (\vec{u} - \vec{v}) = (1, 1) - (3, 5) = (-2, -4) \rightarrow \vec{v} = (-1, -2)$$

Vectores y rectas

064 Representa el vector $k\vec{u}$, con origen en $(0, 0)$, en estos casos.

a) $k = 4$ y $\vec{u} = (1, 2)$

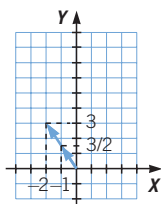
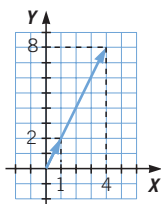
c) $k = \frac{1}{2}$ y $\vec{u} = (-2, 3)$

b) $k = -2$ y $\vec{u} = (-2, 3)$

d) $k = \frac{3}{5}$ y $\vec{u} = (10, 20)$

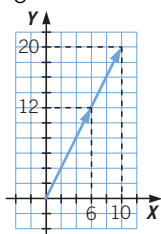
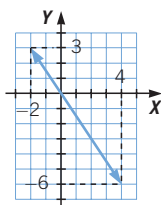
a) $4 \cdot \vec{u} = (4, 8)$

c) $\frac{1}{2} \cdot \vec{u} = \left(-1, \frac{3}{2}\right)$



b) $-2 \cdot \vec{u} = (4, -6)$

d) $\frac{3}{5} \cdot \vec{u} = (6, 12)$



065 Sabiendo que $A(8, -3)$, $B(5, -1)$ y $C(4, 3)$, calcula los siguientes vectores.

a) $3 \cdot \vec{AB}$

c) $-2 \cdot \vec{CA}$

e) $\vec{BA} + 3 \cdot \vec{BC}$

b) $-5 \cdot \vec{BC}$

d) $4 \cdot \vec{AC}$

f) $\vec{AC} - 4 \cdot \vec{AB}$

a) $\vec{AB} = (-3, 2) \rightarrow 3 \cdot \vec{AB} = (-9, 6)$

b) $\vec{BC} = (-1, 4) \rightarrow -5 \cdot \vec{BC} = (5, -20)$

c) $\vec{CA} = (4, -6) \rightarrow -2 \cdot \vec{CA} = (-8, 12)$

d) $\vec{AC} = (-4, 6) \rightarrow 4 \cdot \vec{AC} = (-16, 24)$

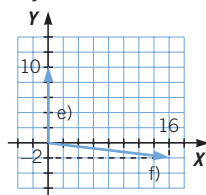
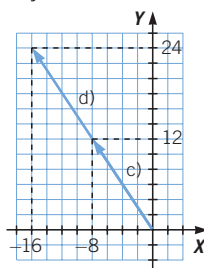
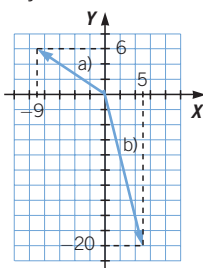
e) $\vec{BA} = (3, -2)$, $\vec{BC} = (-1, 4) \rightarrow \vec{BA} + 3 \cdot \vec{BC} = (3, -2) + (-3, 12) = (0, 10)$

f) $\vec{AC} = (-4, 6)$, $\vec{AB} = (-3, 2) \rightarrow \vec{AC} - 4 \cdot \vec{AB} = (-4, 6) - (-12, 8) = (16, -2)$

a) y b)

c) y d)

e) y f)



066 Halla el punto trasladado del punto $A(4, 5)$ por estos vectores.

a) $\vec{v} = (-2, 5)$

c) $\vec{v} = (1, -3)$

b) $\vec{v} = (0, 4)$

d) $\vec{v} = (-4, 0)$

a) $A' = A + \vec{v} = (2, 10)$

c) $A' = A + \vec{v} = (5, 2)$

b) $A' = A + \vec{v} = (4, 9)$

d) $A' = A + \vec{v} = (0, 5)$

067 HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE CALCULA LA DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS?

Calcula la distancia entre dos puntos $A(-1, 3)$ y $B(2, -1)$.

La **distancia entre dos puntos** coincide con el módulo del vector que tiene como extremos esos puntos.

PRIMERO. Se calculan las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{AB} = (2 - (-1), -1 - 3) = (3, -4)$$

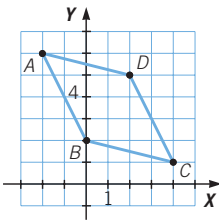
SEGUNDO. Se halla su módulo.

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

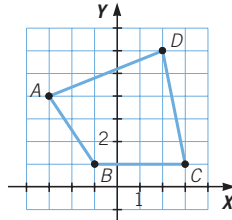
La distancia entre A y B es de 5 unidades.

068 Dadas las siguientes figuras, halla su perímetro.

a)



b)



$$\left. \begin{aligned} a) \quad |\overrightarrow{AB}| &= |(2, -4)| = \sqrt{20} \\ |\overrightarrow{BC}| &= |(4, -1)| = \sqrt{17} \\ |\overrightarrow{CD}| &= |(-2, 4)| = \sqrt{20} \\ |\overrightarrow{DA}| &= |(-4, 1)| = \sqrt{17} \end{aligned} \right\} \rightarrow P = 2 \cdot (\sqrt{20} + \sqrt{17})$$

$$\left. \begin{aligned} b) \quad |\overrightarrow{AB}| &= |(2, -3)| = \sqrt{13} \\ |\overrightarrow{BC}| &= |(4, 0)| = 4 \\ |\overrightarrow{CD}| &= |(-1, 5)| = \sqrt{26} \\ |\overrightarrow{DA}| &= |(-5, -2)| = \sqrt{29} \end{aligned} \right\} \rightarrow P = 4 + \sqrt{13} + \sqrt{26} + \sqrt{29}$$

Vectores y rectas

069 HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE CALCULA EL PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO?

Calcula las coordenadas del punto medio del segmento de extremos $A(-2, 3)$ y $B(2, -1)$.

El **punto medio de un segmento** se calcula sumando al punto A la mitad del vector $\overrightarrow{AB}$.

PRIMERO. Se calculan las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{AB} = (2 - (-2), -1 - 3) = (4, -4)$$

SEGUNDO. Se hallan las coordenadas del punto medio, sumando a A la mitad de $\overrightarrow{AB}$.

$$M = A + \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \rightarrow (x, y) = (-2, 3) + \frac{1}{2} \cdot (4, -4) = (0, 1)$$

Las coordenadas del punto medio son $(0, 1)$.

070 ●●● Calcula el punto medio del segmento AB , cuyos extremos son $A(1, 4)$ y $B(4, 3)$. Si al punto medio le llamamos M , calcula el punto medio de los segmentos AM y MB .

$$M = A + \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} = (1, 4) + \frac{1}{2} \cdot (3, -1) = \left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)$$

$$M_1 = A + \frac{1}{2} \overrightarrow{AM} = (1, 4) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{7}{4}, \frac{15}{4}\right)$$

$$M_1 = M + \frac{1}{2} \overrightarrow{MB} = \left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{13}{4}, \frac{13}{4}\right)$$

071 ●●● Averigua las coordenadas del punto A , sabiendo que el punto medio del segmento AB es $M(5, 2)$ y el punto $B(7, -3)$.

$$A = M + \overrightarrow{BM} = (5, 2) + (-2, 5) = (3, 7)$$

072 ●●● Halla las coordenadas del punto B , si $A(-2, -1)$ y el punto medio es $M\left(\frac{1}{4}, \frac{5}{2}\right)$.

$$B = M + \overrightarrow{AM} = \left(\frac{1}{4}, \frac{5}{2}\right) + \left(\frac{9}{4}, \frac{7}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, 6\right)$$

073 ● Calcula la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(5, 3)$ y $B(4, 7)$ en forma vectorial, paramétrica y continua.

Vector director: $(-1, 4)$

Ecuación vectorial: $(x, y) = (5, 3) + t \cdot (-1, 4)$

Ecuaciones paramétricas:
$$\begin{cases} x = 5 - t \\ y = 3 + 4t \end{cases}$$

Ecuación continua:
$$\frac{x - 5}{-1} = \frac{y - 3}{4}$$

- 074** Obtén la ecuación de la recta, en forma implícita, que pasa por el punto $A(4, 1)$ y tiene como vector director $\vec{v} = (3, 1)$.

$A = -1$ y $B = 3$, la ecuación general es: $-x + 3y + C = 0$.

Como el punto $A(4, 1)$ pertenece a la recta, resulta:

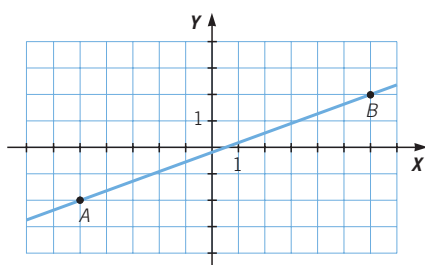
$$-4 + 3 \cdot 1 + C = 0 \rightarrow C = 1$$

La ecuación general o implícita de la recta es: $-x + 3y + 1 = 0$.

- 075** Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(0, 2)$ y tiene como vector director $(-2, 3)$, en forma explícita.

Ecuación explícita: $y = -\frac{3}{2}x + 2$

- 076** A partir de la representación de la siguiente recta, calcula sus ecuaciones de todas las formas posibles.



La recta pasa por los puntos $A(-5, -2)$ y $B(6, 2)$.

El vector director es $\vec{AB} = (11, 4)$.

Ecuación vectorial:

$$(x, y) = (-5, -2) + t \cdot (11, 4)$$

Ecuaciones paramétricas:
$$\left. \begin{aligned} x &= -5 + 11t \\ y &= -2 + 4t \end{aligned} \right\}$$

Ecuación continua:
$$\frac{x + 5}{11} = \frac{y + 2}{4}$$

Ecuación general o implícita: $4x - 11y - 2 = 0$

Ecuación explícita: $y = \frac{4}{11}x - \frac{2}{11}$

Ecuación punto-pendiente: $y + 2 = \frac{4}{11}(x + 5)$

- 077** Escribe la ecuación de estas rectas de todas las formas posibles.

- a) $\left. \begin{aligned} x &= 2 - t \\ y &= 3 + 2t \end{aligned} \right\}$ c) $y = 3x - 1$ e) $2x + y - 5 = 0$
b) $(x, y) = (0, 3) + t \cdot (2, 1)$ d) $y - 3 = 3 \cdot (x - 5)$

a) Ecuación vectorial: $(x, y) = (2, 3) + t \cdot (-1, 2)$

Ecuaciones paramétricas:
$$\left. \begin{aligned} x &= 2 - t \\ y &= 3 + 2t \end{aligned} \right\}$$

Ecuación continua:
$$\frac{x - 2}{-1} = \frac{y - 3}{2}$$

Ecuación general o implícita: $2x + y - 7 = 0$

Ecuación explícita: $y = -2x + 7$

Ecuación punto-pendiente: $y - 3 = -2(x - 2)$

Vectores y rectas

b) Ecuación vectorial: $(x, y) = (0, 3) + t \cdot (2, 1)$

Ecuaciones paramétricas:
$$\left. \begin{array}{l} x = 2t \\ y = 3 + t \end{array} \right\}$$

Ecuación continua: $\frac{x}{2} = \frac{y-3}{1}$

Ecuación general o implícita: $x - 2y + 6 = 0$

Ecuación explícita: $y = \frac{1}{2}x + 3$

Ecuación punto-pendiente: $y - 3 = \frac{1}{2}x$

c) Ecuación explícita: $y = 3x - 1$

Ecuación general o implícita: $3x - y - 1 = 0$

Ecuación continua: $\frac{x}{1} = \frac{y+1}{3}$

Ecuaciones paramétricas:
$$\left. \begin{array}{l} x = t \\ y = -1 + 3t \end{array} \right\}$$

Ecuación vectorial: $(x, y) = (0, -1) + t \cdot (1, 3)$

Ecuación punto-pendiente: $y + 1 = 3x$

d) Ecuación punto-pendiente: $y - 3 = 3 \cdot (x - 5)$

Ecuación explícita: $y = 3x - 12$

Ecuación general o implícita: $3x - y - 12 = 0$

Ecuación continua: $\frac{x-5}{1} = \frac{y-3}{3}$

Ecuaciones paramétricas:
$$\left. \begin{array}{l} x = 5 + t \\ y = 3 + 3t \end{array} \right\}$$

Ecuación vectorial: $(x, y) = (5, 3) + t \cdot (1, 3)$

e) Ecuación general o implícita: $2x + y - 5 = 0$

Ecuación continua: $\frac{x}{1} = \frac{y-5}{-2}$

Ecuaciones paramétricas:
$$\left. \begin{array}{l} x = t \\ y = 5 - 2t \end{array} \right\}$$

Ecuación vectorial: $(x, y) = (0, 5) + t \cdot (1, -2)$

Ecuación explícita: $y = -2x + 5$

Ecuación punto-pendiente: $y - 5 = -2x$

078 Obtén cuatro puntos que pertenezcan a la recta de ecuación:

● $(x, y) = (1, 3) + t \cdot (2, 2)$.

$t = 1 \longrightarrow (x, y) = (1, 3) + 1 \cdot (2, 2) = (3, 5)$

$t = 2 \longrightarrow (x, y) = (1, 3) + 2 \cdot (2, 2) = (5, 7)$

$t = -2 \longrightarrow (x, y) = (1, 3) - 2 \cdot (2, 2) = (-3, -1)$

$t = -3 \longrightarrow (x, y) = (1, 3) - 3 \cdot (2, 2) = (-5, -3)$

079 HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE CALCULA EL PUNTO DE CORTE DE DOS RECTAS SECANTES?

Calcula el punto de corte de estas rectas.

$$\left. \begin{array}{l} \frac{x-3}{2} = \frac{y}{3} \\ x = 2 - 3t \\ y = 1 + t \end{array} \right\}$$

PRIMERO. Se resuelve el sistema que plantean las dos ecuaciones de las rectas.

La segunda ecuación viene dada en forma paramétrica y, como están despejadas las variables x e y , se sustituyen esos valores en la primera ecuación.

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y}{3} \rightarrow \frac{2-3t-3}{2} = \frac{1+t}{3}$$

Se resuelve la ecuación que resulta.

$$3 \cdot (2 - 3t - 3) = 2 \cdot (1 + t)$$

$$6 - 9t - 9 = 2 + 2t$$

$$11t = -5 \rightarrow t = \frac{-5}{11}$$

SEGUNDO. Se sustituye el valor de t en las ecuaciones paramétricas, donde x e y están despejadas.

$$x = 2 - 3 \cdot \frac{-5}{11} = \frac{37}{11}$$

$$y = 1 - \frac{5}{11} = \frac{6}{11}$$

TERCERO. Las coordenadas del punto de corte son la solución del sistema.

Luego el punto de corte es $P\left(\frac{37}{11}, \frac{6}{11}\right)$.

080 ●● Halla el punto de corte de estas rectas.

$$\left. \begin{array}{l} r: \frac{x}{1} = \frac{y-2}{2} \\ s: \frac{x}{y} = \frac{4-t}{t} \end{array} \right\}$$

Para hallar el punto de corte hay que resolver el sistema.

$$\frac{4-t}{1} = \frac{t-2}{2} \rightarrow 8 - 2t = t - 2 \rightarrow t = \frac{10}{3}$$

$$x = 4 - \frac{10}{3} = \frac{2}{3} \quad y = \frac{10}{3}$$

El punto de corte es $P\left(\frac{2}{3}, \frac{10}{3}\right)$.

Vectores y rectas

081

●●● **Calcula las coordenadas de los vértices del triángulo, cuyos lados están contenidos en las rectas que vienen expresadas mediante estas ecuaciones.**

$$r: x - y - 1 = 0 \quad s: x + y + 2 = 0 \quad p: 3x - y + 2 = 0$$

Los vértices del triángulo son los puntos de intersección de las rectas:

$$\left. \begin{array}{l} r: x - y - 1 = 0 \\ s: x + y + 2 = 0 \end{array} \right\} \rightarrow x = -\frac{1}{2} \quad y = -\frac{3}{2}$$

Un vértice es el punto de coordenadas $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$.

$$\left. \begin{array}{l} r: x - y - 1 = 0 \\ p: 3x - y + 2 = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} y = x - 1 \\ y = 3x + 2 \end{array} \right\} \rightarrow x = -\frac{3}{2} \quad y = -\frac{3}{2} - 1 = -\frac{5}{2}$$

Otro vértice es el punto de coordenadas $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right)$.

$$\left. \begin{array}{l} s: x + y + 2 = 0 \\ p: 3x - y + 2 = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} y = -x - 2 \\ y = 3x + 2 \end{array} \right\} \rightarrow x = -1 \quad y = 1 - 2 = -1$$

Otro vértice es el punto de coordenadas $(-1, -1)$.

082

●● **Halla las coordenadas de los vértices del cuadrilátero, cuyos lados están contenidos en las rectas que tienen por ecuación:**

$$\begin{array}{ll} r: 3x - 4y - 8 = 0 & p: 2x + y + 2 = 0 \\ s: x - 2y + 12 = 0 & q: 2x + y + 5 = 0 \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} r: 3x - 4y - 8 = 0 \\ p: 2x + y + 2 = 0 \end{array} \right\} \rightarrow x = 0 \quad y = -2$$

$$\left. \begin{array}{l} r: 3x - 4y - 8 = 0 \\ q: 2x + y + 5 = 0 \end{array} \right\} \rightarrow x = -\frac{12}{11} \quad y = -\frac{31}{11}$$

$$\left. \begin{array}{l} s: x - 2y + 12 = 0 \\ p: 2x + y + 2 = 0 \end{array} \right\} \rightarrow x = -\frac{16}{5} \quad y = \frac{22}{5}$$

$$\left. \begin{array}{l} s: x - 2y + 12 = 0 \\ q: 2x + y + 5 = 0 \end{array} \right\} \rightarrow x = -\frac{22}{5} \quad y = \frac{24}{5}$$

083

●● **¿Cuáles son las ecuaciones que corresponden a las rectas que forman los ejes de coordenadas? Razona si puedes escribirlas de todas las formas.**

- Eje de abscisas

$$\text{Ecuación vectorial: } (x, y) = (0, 0) + t \cdot (1, 0)$$

$$\text{Ecuaciones paramétricas: } \left. \begin{array}{l} x = t \\ y = 0 \end{array} \right\} \text{ Ecuación general: } y = 0$$

- Eje de ordenadas

Ecuación vectorial: $(x, y) = (0, 0) + t \cdot (0, 1)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 0 \\ y = t \end{cases}$ Ecuación general: $x = 0$

Ninguna de estas rectas se puede escribir en forma continua, porque ambas tienen algún componente de su vector director igual a cero.

084 Dos rectas tienen por ecuaciones:

$$r: y = 3x - 1$$

$$s: (x, y) = (1, 3) + t \cdot (-3, 2)$$

- Escribe las rectas en forma paramétrica.
- ¿Cuáles son sus vectores directores?
- Calcula cuatro puntos distintos de cada una de las rectas.
- Halla, si lo tienen, un punto común de ambas rectas.

$$a) \quad r: \begin{cases} x = t \\ y = 3t - 1 \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 3 + 2t \end{cases}$$

b) El vector director de r es $\vec{u} = (1, 3)$ y el vector director de s es $\vec{v} = (-3, 2)$.

c) Puntos de la recta r :

$$t = 1 \rightarrow (1, 2); t = 0 \rightarrow (0, -1); t = 2 \rightarrow (2, 5); t = -1 \rightarrow (-1, -4)$$

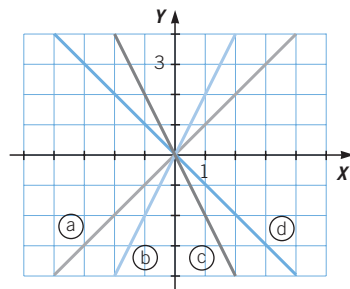
Puntos de la recta s :

$$t = 1 \rightarrow (-2, 5); t = -2 \rightarrow (7, -1); t = 0 \rightarrow (1, 3); t = -1 \rightarrow (4, 1)$$

$$d) \quad r: y = 3x - 1 \quad \left. \begin{array}{l} x: y = -\frac{2}{3}x + \frac{11}{3} \end{array} \right\} \rightarrow x = \frac{14}{11} \quad y = \frac{-31}{11}$$

085 Las rectas que no tienen término independiente en su forma general, verifican la propiedad de que pasan todas por el origen de coordenadas.

Halla las ecuaciones explícita e implícita de estas rectas, y comprueba que se verifica la propiedad.



$$a) \quad y = x \rightarrow x - y = 0$$

$$b) \quad y = 2x \rightarrow 2x - y = 0$$

$$c) \quad y = -2x \rightarrow -2x - y = 0 \rightarrow 2x + y = 0$$

$$d) \quad y = -x \rightarrow -x - y = 0 \rightarrow x + y = 0$$

No hay término independiente y el punto $(0, 0)$ pertenece a todas las rectas.

Vectores y rectas

086 Estudia la posición de estas rectas en el plano.

$$r: 2x + 3y - 1 = 0$$

$$s: 3x - 4y + 4 = 0$$

El vector director de r es $(3, -2)$ y su pendiente es $m = -\frac{2}{3}$.

El vector director de s es $(-4, -3)$ y su pendiente es $m' = \frac{3}{4}$.

Las pendientes son distintas, luego las rectas son secantes.

087 Estudia la posición relativa en el plano de las siguientes parejas de rectas.

a) $r: 3x + y - 7 = 0$

$s: 3x + y + 5 = 0$

b) $r: x + y - 3 = 0$

$s: 2x + 2y - 6 = 0$

c) $r: x + 3y - 4 = 0$

$s: x + 2y + 5 = 0$

d) $r: -5x + 10y - 8 = 0$

$s: 10x - 20y + 16 = 0$

e) $r: -x + 2y - 1 = 0$

$s: 2 - x + 3y - 8 = 0$

f) $r: \frac{1}{2}x + y - 3 = 0$

$s: x - \frac{1}{5}y + 8 = 0$

a) El vector director de r y de s es $(1, -3)$. Los vectores directores son iguales, pero el punto $(0, 7)$ de r no pertenece a s : $3 \cdot 0 + 7 + 5 \neq 0$. Las rectas son paralelas.

b) El vector director de r es $(1, -1)$ y el de s es $(2, -2)$. Los vectores directores son proporcionales y también los coeficientes: $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{-3}{-6}$. Las rectas son coincidentes.

c) El vector director de r es $(3, -1)$ y su pendiente es $m = -\frac{1}{3}$.
El vector director de s es $(2, -1)$ y su pendiente es $m' = \frac{-1}{2}$.
Las pendientes son distintas, luego las rectas son secantes.

d) El vector director de r es $(10, 5)$ y el de s es $(-20, -10)$.
Los vectores directores son proporcionales y también los coeficientes: $\frac{-5}{10} = \frac{10}{-20} = \frac{-8}{16}$. Las rectas son coincidentes.

e) El vector director de r es $(2, 1)$ y su pendiente es $m = \frac{1}{2}$.
El vector director de s es $(3, 1)$ y su pendiente es $m' = \frac{1}{3}$.
Las pendientes son distintas, y las rectas son secantes.

f) El vector director de r es $\left(1, -\frac{1}{2}\right)$ y su pendiente es $m = -\frac{1}{2}$.
El vector director de s es $\left(-\frac{1}{5}, -1\right)$ y su pendiente es $m' = \frac{-1}{-\frac{1}{5}} = 5$.
Las pendientes son distintas, por lo que las rectas son secantes.

088 Estudia la posición relativa de los siguientes pares de rectas en el plano.

$$\begin{array}{ll}
 \text{a) } r: (x, y) = (1, 3) + t \cdot (1, 2) & s: \frac{x-2}{1} = \frac{y-5}{2} \\
 \text{b) } r: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = t \end{cases} & s: (x, y) = (2, 0) + t \cdot (2, -1) \\
 \text{c) } r: \begin{cases} x = 3 + 5t \\ y = 2 - 2t \end{cases} & s: \frac{x-8}{10} = \frac{y}{-4} \\
 \text{d) } r: 2x - 3y = 0 & s: (x, y) = t \cdot (1, -1) \\
 \text{e) } r: \begin{cases} x = -2t \\ y = -3 + 2t \end{cases} & s: x + 3y - 2 = 0
 \end{array}$$

a) El vector director de r y s es $(1, 2)$. El punto $(1, 3)$ de r pertenece

$$a: s: \frac{1-2}{1} = \frac{3-5}{2}. \text{ Las rectas son coincidentes.}$$

b) El vector director de r es $(-1, 1)$ y su pendiente es $m = -1$.

$$\text{El vector director de } s \text{ es } (2, -1) \text{ y su pendiente es } m' = \frac{-1}{2}.$$

Las pendientes son distintas, por lo que las rectas son secantes.

c) El vector director de r es $(5, -2)$ y el de s es $(10, -4)$. Los vectores directores son proporcionales. El punto $(3, 2)$ de r pertenece también a s :

$$\frac{3-8}{10} = \frac{2}{-4}. \text{ Las rectas son coincidentes.}$$

d) El vector director de r es $(-3, -2)$ y su pendiente es $m = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$.

$$\text{El vector director de } s \text{ es } (1, -1) \text{ y su pendiente es } m' = \frac{-1}{1} = -1.$$

Las pendientes son distintas, y las rectas son secantes.

e) El vector director de r es $(-2, 2)$ y su pendiente es $m = \frac{2}{-2} = -1$.

$$\text{El vector director de } s \text{ es } (3, -1) \text{ y su pendiente es } m' = \frac{-1}{3}.$$

Las pendientes son distintas, luego las rectas son secantes.

089 Calcula las coordenadas del vértice A de un triángulo isósceles, cuyo lado desigual coincide con el segmento de extremos $B(3, 1)$ y $C(9, 3)$, y sabiendo que la altura sobre BC es de 4 cm.

El vértice $A = (x, y)$ está a la misma distancia de B y de C .

$$\begin{aligned}
 (x-3)^2 + (y-1)^2 &= (x-9)^2 + (y-3)^2 \rightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 = \\
 &= x^2 + 18x + 81 + y^2 - 6y + 9 \rightarrow 12x + 4y - 40 = 0 \rightarrow y = 10 - 3x
 \end{aligned}$$

Por ser un triángulo isósceles, la base mide: $\overline{BC} = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{20}$, y por el teorema de Pitágoras, la distancia de A a B y C es: $\overline{AC} = \overline{AB} = \sqrt{4^2 + 5} = \sqrt{16}$.

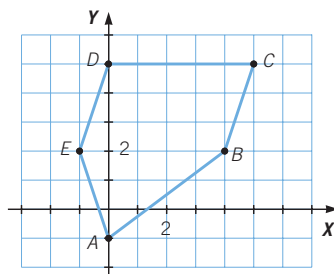
$$(x-3)^2 + (y-1)^2 = 21 \xrightarrow{y=10-3x} 10x^2 - 120x + 349 = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = 7,05 \rightarrow y = -1,15 \\ x = 4,95 \rightarrow y = 5,15 \end{cases} \rightarrow A = (7,05; -1,15) \quad A = (4,95; 5,15)$$

Vectores y rectas

090

Halla la suma de los vectores que forman los lados AB , BC , CD , DE y EA del siguiente polígono.



¿Ocurre lo mismo en todos los polígonos?

La suma de los vectores es $(0, 0)$. Esto ocurre en todos los polígonos cerrados.

091

Si dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen distinta dirección y $a \cdot \vec{u} = b \cdot \vec{v}$, siendo a y b números reales, ¿qué puedes afirmar sobre los números a y b ?

$$\vec{u} = (u_1, u_2) \quad \vec{v} = (v_1, v_2)$$

Por tener los vectores distinta dirección: $\frac{v_1}{u_1} \neq \frac{v_2}{u_2}$

$$a \cdot \vec{u} = b \cdot \vec{v} \rightarrow (a \cdot u_1, a \cdot u_2) = (b \cdot v_1, b \cdot v_2) \rightarrow (a \cdot u_1 - b \cdot v_1, a \cdot u_2 - b \cdot v_2) = (0, 0)$$

$$\rightarrow \begin{cases} a \cdot u_1 - b \cdot v_1 = 0 \\ a \cdot u_2 - b \cdot v_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \frac{b \cdot v_1}{u_1} \\ a = \frac{b \cdot v_2}{u_2} \end{cases} \rightarrow b \cdot \frac{v_1}{u_1} = b \cdot \frac{v_2}{u_2} \xrightarrow{\frac{v_1}{u_1} \neq \frac{v_2}{u_2}} b = 0 \rightarrow a = 0$$

Los números reales a y b son 0.

092

Utilizando vectores, demuestra que las diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio.

El punto de corte es el corte de las rectas $A + a \cdot (\vec{u} + \vec{v})$
y $B + b \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = A + \vec{u} + b \cdot (\vec{u} - \vec{v})$.

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} \quad \vec{v} = \overrightarrow{AD}$$

$$A + a \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = A + \vec{u} + b \cdot (\vec{u} - \vec{v}) \rightarrow a \cdot \vec{u} + a \cdot \vec{v} = (b + 1) \cdot \vec{u} - b \cdot \vec{v} \rightarrow (a + b) \cdot \vec{v} = (b + 1 - a) \cdot \vec{u}$$

Como $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no son vectores paralelos:

$$a + b = 0 \rightarrow a = -b$$

$$b + 1 - a = 0 \xrightarrow{a = -b} 2b + 1 = 0 \rightarrow b = -\frac{1}{2} \rightarrow a = \frac{1}{2}$$

El punto de corte es: $A + \frac{1}{2} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = A + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC}$, que es el punto medio.

093

Calcula la ecuación de la recta vertical que divide al triángulo, de vértices $A(0, 0)$, $B(2, 2)$ y $C(10, 2)$, en dos regiones con igual área.

Tomando como base el lado horizontal y como altura la distancia al eje X :

$$\text{Área} = \frac{(10 - 2) \cdot 2}{2} = 8$$

La ecuación de los lados que no forman la base es: $\left. \begin{array}{l} y = x \\ y = \frac{x}{5} \end{array} \right\}$

La base del nuevo triángulo es: $10 - a$.

La altura del nuevo triángulo es $2 - \frac{a}{5}$.

$$\text{Por tanto, el área será: } 4 = \frac{(10 - a) \cdot \left(2 - \frac{a}{5}\right)}{2} \rightarrow a = \left\{ \begin{array}{l} 10 + 2\sqrt{10} \\ 10 - 2\sqrt{10} \end{array} \right.$$

La recta vertical es: $x = 10 - 2\sqrt{10}$.

EN LA VIDA COTIDIANA

094

Algunas especies de ballenas se encuentran en peligro de extinción.



Pedro es biólogo marino y forma parte de una de las plataformas en defensa de estos mamíferos. En su equipo de trabajo han decidido colocar localizadores en algunas de las crías para seguir sus desplazamientos y asegurarse de que no sufren ningún daño.



Vectores y rectas

Se le ha implantado uno de los localizadores a una hembra joven y se ha anotado su recorrido desde ese momento.



- a) ¿Qué dirección debe tomar el barco del equipo de Pedro desde el punto inicial para volver a encontrar a la ballena?
b) ¿Cuántas millas deberá recorrer?

a) El barco debe tomar dirección Noroeste.

b) $2.500 + \sqrt{(5.000)^2 + (4.500)^2} = 6.726,81$ millas

095

En el radar de la torre de control de un aeropuerto se ve, en un instante $t = 0$, la posición de tres aviones.



Transcurrida una unidad de tiempo, es decir, cuando $t = 1$, los aviones aparecen en el radar en las siguientes posiciones.



La torre de control informa a dos de los aviones de que tienen que cambiar su trayectoria o su velocidad para evitar una colisión.

- a) ¿Cuáles son los aviones que van a chocar?
- b) Si estuvieras en la torre de control, ¿qué órdenes darías a cada uno de los aviones para evitar un accidente?

- a) Los aviones parten de los puntos A , B y C , para llegar a A' , B' y C' .

$$\text{Avión 1: } A = (-2, 4); A'(0, 3) \rightarrow \vec{u}_1 = (2, -1)$$

$$\text{La trayectoria que sigue es } A + t \cdot \vec{u}_1.$$

$$\text{Avión 2: } B = (-3, 1); B'(1, 1) \rightarrow \vec{u}_2 = (4, 0)$$

$$\text{La trayectoria que sigue es } B + t \cdot \vec{u}_2.$$

$$\text{Avión 3: } C = (1, -3); C'(4, 2) \rightarrow \vec{u}_3 = (3, 1)$$

$$\text{La trayectoria que sigue es } C + t \cdot \vec{u}_3.$$

Para que los aviones chocaran tendrían que llegar al mismo punto en el mismo momento.

Aviones 2 y 3:

$$B + t \cdot \vec{u}_2 = C + t \cdot \vec{u}_3 \rightarrow (-3, 1) + t \cdot (4, 0) = (1, -3) + t \cdot (3, 1)$$

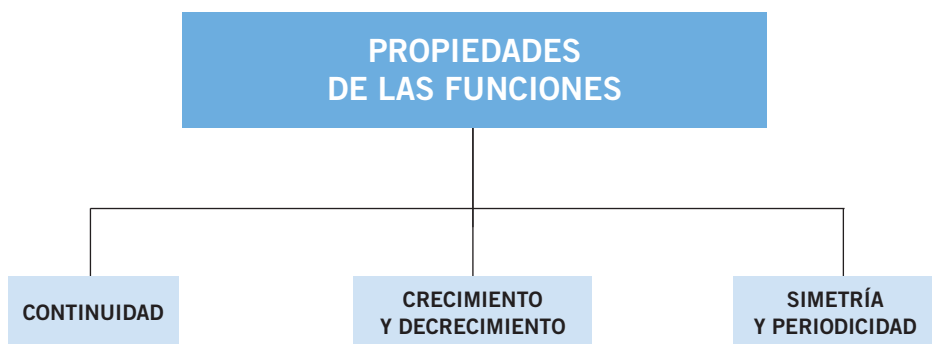
$$\rightarrow (-2, 2) = t \cdot (-1, 1) \rightarrow t = 2$$

Los aviones 2 y 3 se chocarían para $t = 2$.

- b) Para que los aviones no se choquen es suficiente con indicarle a uno de ellos que cambie la trayectoria o modifique su velocidad.



FUNCIONES DEFINIDAS A TROZOS



Alimento de parásitos

Otra vez se producía la misma situación, cada vez que cambiaban el destacamento encargado de vigilar el Centro de Investigación ocurría lo mismo: los nuevos soldados con su brillante uniforme del ejército nazi los insultaban, los humillaban y, si se atrevían a protestar, llegaban incluso al castigo físico.

Stefan Banach y su compañero Piotr agacharon la cabeza, y como si los comentarios no fueran con ellos, atravesaron la entrada disponiéndose a comenzar su trabajo.

Abrieron las cajas y, con meticulosa precisión, empezaron a alimentar a los diminutos parásitos.

Al verlo, los guardias se reían a la vez que hacían comentarios claramente ofensivos hacia los dos operarios.

—¿Qué es eso, Hans? —preguntó un soldado.

El otro contestó entre risotadas:

—¡Dos cucarachas alimentando a los piojos!

Piotr miró a Banach, intentando transmitirle su enfado.

—Esta es la forma de sentirse superiores que tienen los que, en absoluto, lo son —susurró Banach—.

Por más oscura que sea la noche siempre llega la mañana.

La respuesta arrancó una sonrisa a Piotr, que asintió con la cabeza.

Stefan Banach fue un matemático polaco que contribuyó notablemente al análisis funcional. Propón tú un ejemplo de función y describe sus principales características.

**La función $f(x) = 2\pi \cdot x$ es lineal.
Para cada valor de x , $f(x)$ es la longitud
de la circunferencia cuyo radio es x .**

**Teniendo esto en cuenta, decimos
que el dominio de la función es $(0, +\infty)$,
el recorrido es $(0, +\infty)$, y que es siempre
creciente.**



Funciones

EJERCICIOS

- 001** Expresa, de forma algebraica y mediante una tabla de valores, la función que asigna a cada número su cubo menos dos veces su cuadrado.

Expresión algebraica: $y = x^3 - 2x^2$ o $f(x) = x^3 - 2x^2$

Tabla de valores:

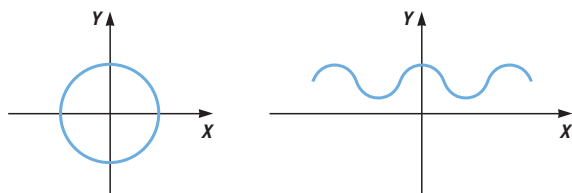
x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-16	-3	0	-1	0

- 002** Expresa, mediante un enunciado y una tabla de valores, la función $y = 2x - 1$.

En el aula hay el doble de chicas menos uno que de chicos.

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	1	3	5	7	9

- 003** Averigua si estas gráficas representan a una función.



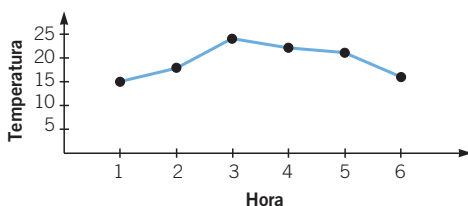
La primera gráfica no es una función, porque a cada valor de la variable x le corresponden dos valores de la variable y .

La segunda gráfica es una función, pues a cada valor de la variable x le corresponde un único valor de la variable y .

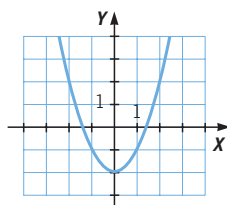
- 004** Se ha medido la temperatura de una sala durante 6 horas y se ha construido una tabla con los resultados. Realiza una gráfica asociada a dicha tabla.

Hora	1	2	3	4	5	6
Temperatura (°C)	15	18	24	22	21	16

¿Se pueden unir los puntos?



- 005 Elabora una tabla de valores que se corresponda con la siguiente gráfica.

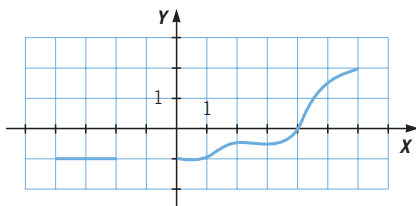


x	-2	-1	0	1	2
y	2	-1	-2	-1	2

- 006 Pon un ejemplo de función en cuya gráfica no se puedan unir los puntos.

Cualquier función discreta; por ejemplo, el precio de la compra, dependiendo de la cantidad de artículos que adquiramos.

- 007 A partir de la gráfica de esta función, determina su dominio y su recorrido.



$$\text{Dom } f = [-4, -2] \cup [0, 6]; \text{Im } f = [-1, 2]$$

- 008 Halla el dominio y el recorrido de esta función.

$$f(x) = \frac{5}{x-1}$$

El dominio está formado por todos los valores de x menos $x = 1$.

$$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{1\}$$

El recorrido está formado por todos los valores de y menos $y = 0$,

pues no hay ningún número, a , tal que $0 = \frac{5}{a-1}$.

$$\text{Im } f = \mathbb{R} - \{0\}$$

- 009 ¿Cuál es el dominio y el recorrido de la función que a cada valor de x le hace corresponder su raíz cuadrada positiva?

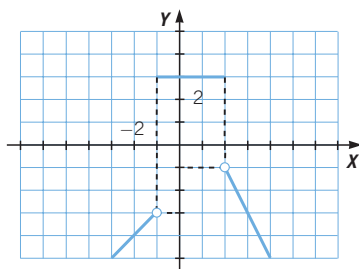
El dominio está formado por todos los valores positivos de x : $\mathbb{R}^+$.

El recorrido está formado por todos los valores positivos de y : $\mathbb{R}^+$.

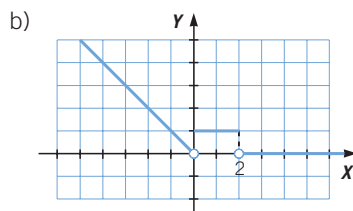
Funciones

010 Representa estas funciones definidas a trozos.

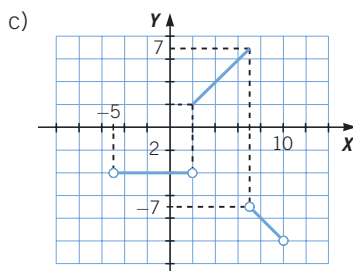
a) $f(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{si } -\infty < x < -1 \\ 3 & \text{si } -1 \leq x \leq 2 \\ 3 - 2x & \text{si } 2 < x < +\infty \end{cases}$ a)



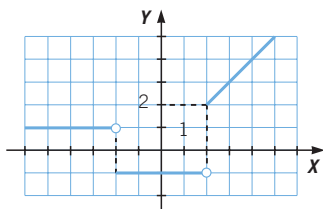
b) $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } -\infty < x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{si } 2 < x < +\infty \end{cases}$



c) $f(x) = \begin{cases} -4 & \text{si } -5 < x < 2 \\ x & \text{si } 2 \leq x \leq 7 \\ -x & \text{si } 7 < x < 10 \end{cases}$



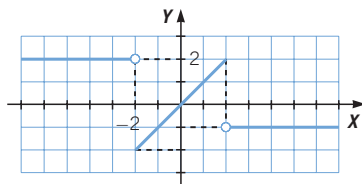
011 Determina la expresión algebraica que corresponde a la siguiente gráfica.

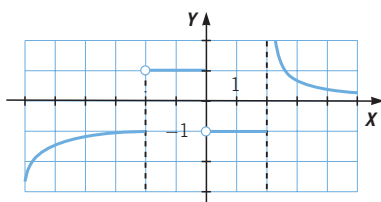


$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } -\infty < x < -2 \\ -1 & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ x & \text{si } 2 < x < +\infty \end{cases}$

012 Escribe la expresión de una función definida a trozos y represéntala.

$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } -\infty < x < -2 \\ x & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ -1 & \text{si } 2 < x < +\infty \end{cases}$



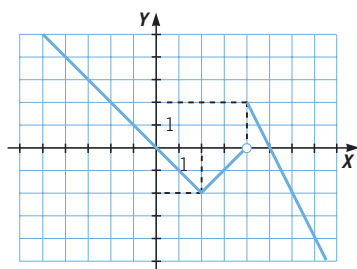
013 Estudia la continuidad de esta función. ¿Tiene puntos de corte con los ejes?

La función es continua en todos los puntos menos en $x = -2$, $x = 0$ y $x = 2$.
 En $x = -2$, la función tiene un salto, y vale -1 a la izquierda y 1 a la derecha.
 En $x = 0$, la función tiene otro salto, y vale 1 a la izquierda y -1 a la derecha.
 En $x = 2$, la función no está definida a la derecha.
 El único punto de corte con los ejes es $(0, 2)$.

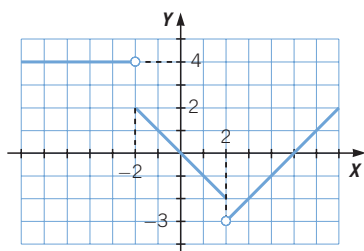
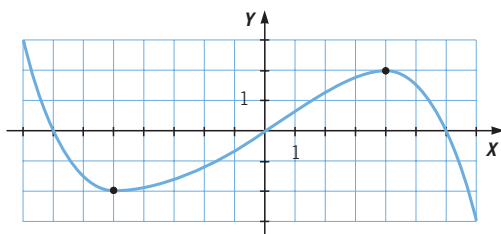
014 Representa $f(x)$ y estudia su continuidad.

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } -\infty < x \leq 2 \\ x - 4 & \text{si } 2 < x < 4 \\ 10 - 2x & \text{si } 4 \leq x < +\infty \end{cases}$$

La función es continua en todos los puntos menos en $x = 4$, donde tiene un salto.

**015** Inventa una función que tenga dos puntos de discontinuidad y que corte dos veces al eje X .

$$f(x) = \begin{cases} 4 & \text{si } -\infty < x < -2 \\ -x & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ x - 5 & \text{si } 2 < x < +\infty \end{cases}$$

**016** Estudia el crecimiento de la función y la existencia de máximos y mínimos.

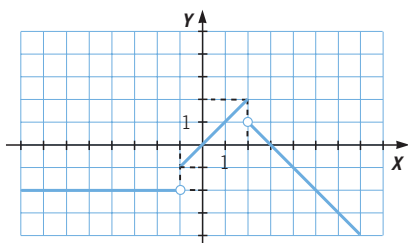
La función es decreciente en el intervalo $(-\infty, -5)$, es creciente en $(-5, 4)$ y es decreciente en $(4, +\infty)$.

La función presenta un mínimo en $x = -5$ y un máximo en $x = 4$.

Funciones

017 Estudia la continuidad, el crecimiento y los máximos y mínimos de la función.

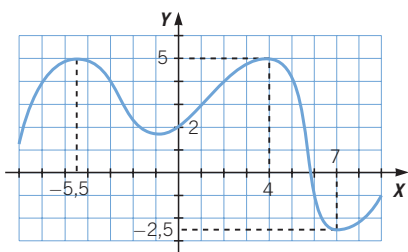
$$f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } -\infty < x < -1 \\ x & \text{si } -1 \leq x \leq 2 \\ 3 - x & \text{si } 2 < x < +\infty \end{cases}$$



La función es continua en todos los puntos menos en $x = -1$ y $x = 2$.

La función es constante en el intervalo $(-\infty, -1)$, es creciente en $(-1, 2)$ y es decreciente en $(2, +\infty)$. Presenta un máximo absoluto en $x = 2$.

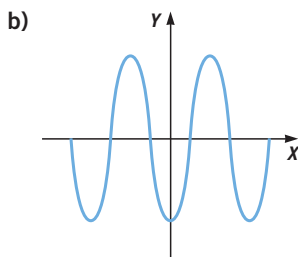
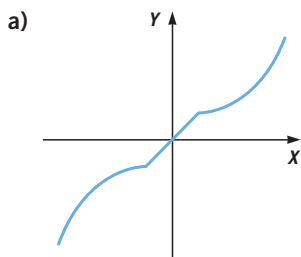
018 Dibuja una función que tenga dos máximos y dos mínimos.



Máximos: $(-5, 5)$ y $(4, 5)$

Mínimos: $(-1, 2)$ y $(7, -2,5)$

019 Estudia la simetría de las siguientes funciones.



a) Esta función es simétrica respecto del origen, pues la parte del semieje negativo se puede obtener girando 180° , respecto del origen, la parte correspondiente del semieje positivo.

b) Esta función es simétrica respecto del eje de ordenadas porque, si doblamos por el eje Y , las dos ramas de la función coinciden.

020 Determina algebraicamente si estas funciones presentan algún tipo de simetría.

a) $f(x) = x^5 + x$

c) $h(x) = \frac{2}{x^5}$

e) $j(x) = \sqrt{x^3}$

b) $g(x) = x^3 - x^2$

d) $i(x) = 5$

f) $h(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

a) $f(x) = x^5 + x$

$$f(-x) = (-x)^5 - x = -x^5 - x = -(x^5 + x) = -f(x)$$

Como $f(-x) = -f(x)$, es una función impar y simétrica respecto del origen de coordenadas.

b) $g(x) = x^3 - x^2$

$$g(-x) = (-x)^3 - (-x)^2 = -x^3 - x^2$$

Como $g(-x) \neq g(x)$ y $g(-x) \neq -g(x)$, la función no es simétrica.

c) $h(x) = \frac{2}{x^5}$ $h(-x) = \frac{2}{(-x)^5} = \frac{2}{-x^5} = -h(x)$

Como $h(-x) = -h(x)$, es una función impar y simétrica respecto del origen de coordenadas.

d) $i(x) = 5$ $i(-x) = 5 = i(x)$

Como $i(-x) = i(x)$, la función es par y simétrica respecto del eje de ordenadas.

e) $j(x) = \sqrt{x^3}$ $j(-x) = \sqrt{(-x)^3} = \sqrt{-x^3}$

Como $j(-x) \neq j(x)$ y $j(-x) \neq -j(x)$, la función no es simétrica.

f) $g(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$ $g(-x) = \frac{(-x)^2 + 1}{(-x)^2 - 1} = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = g(x)$

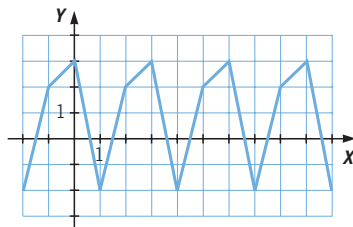
Como $g(-x) = g(x)$, la función es par y simétrica respecto del eje de ordenadas.

021 ¿Puede ser una función simétrica respecto del eje Y y, a la vez, respecto del origen?

Si la función es par, $f(x) = f(-x)$. Y si la función es impar, $-f(x) = f(-x)$.

Por tanto, si la función es par e impar, $f(x) = f(-x) = -f(x)$. La única opción es $f(x) = 0$, que corresponde a la función constante 0.

022 Determina si la función es periódica y calcula su período.

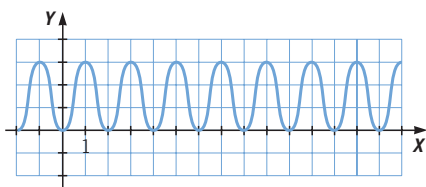


La función es periódica, de período 3.

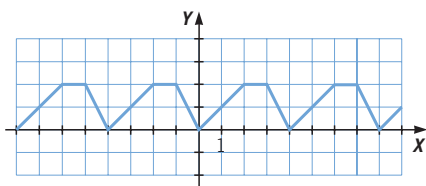
Funciones

023 Dibuja una función de período 2 y otra función de período 4.

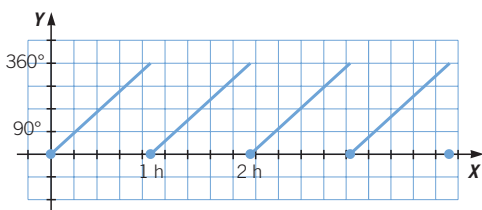
Con período 2:



Con período 4:



024 Dibuja la gráfica de la función que mide el ángulo formado por las manecillas del reloj. ¿Es una función periódica?



Es una función periódica, con período de $1,09$ h.

ACTIVIDADES

025 Para cada una de las funciones, calcula la imagen de 2, -2, 3, -3, 1 y -1.

a) $f(x) = 5x^2 - 1$

c) $f(x) = x^2 - x - 1$

b) $f(x) = 2x^2 - x$

d) $f(x) = -x^2 + 1$

a) $f(2) = 19$; $f(-2) = 19$; $f(3) = 44$; $f(-3) = 44$; $f(1) = 4$; $f(-1) = 4$

b) $f(2) = 6$; $f(-2) = 10$; $f(3) = 15$; $f(-3) = 21$; $f(1) = 1$; $f(-1) = 3$

c) $f(2) = 1$; $f(-2) = 5$; $f(3) = 5$; $f(-3) = 11$; $f(1) = -1$; $f(-1) = 1$

d) $f(2) = -3$; $f(-2) = -3$; $f(3) = -8$; $f(-3) = -8$; $f(1) = 0$; $f(-1) = 0$

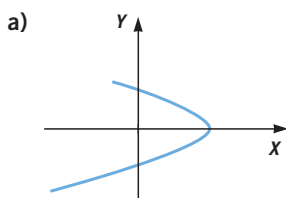
026 Razona cuáles de las siguientes relaciones corresponden a funciones.

- a) El tamaño de una pared y la cantidad de pintura necesaria para pintarla.
b) Cada mes del año y su número de días.

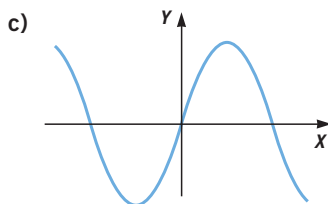
a) Es una función. Son variables numéricas y para cada tamaño de pared se necesita una única cantidad de pintura.

b) No es una función. La variable independiente, x , que corresponde a cada mes del año, no es una variable numérica; además, al mes de febrero le podrían corresponder dos valores, 28 o 29 días.

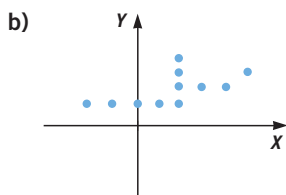
027 Justifica si las gráficas corresponden a una función.



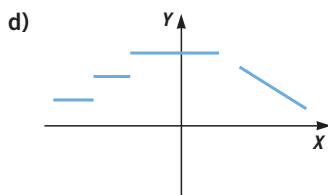
No es una función, porque a un valor de x le corresponden dos valores de y .



Es una función, pues a cada valor de x le corresponde un único valor de y .



No es una función, porque a $x = 2$ le corresponde más de un valor de y .



Es una función, porque a cada valor de x le corresponde un único valor de y .

028 HAZLO ASÍ

¿QUÉ ES Y CÓMO SE CALCULA LA TASA DE VARIACIÓN MEDIA DE UNA FUNCIÓN?

Halla la tasa de variación media de la función $f(x) = x^2$, en el intervalo $[2, 4]$.

La **tasa de variación media** de una función en un intervalo $[a, b]$ mide el aumento o la disminución de dicha función en $[a, b]$.

PRIMERO. Se halla la variación de x y la variación de la función.

Variación de x : $4 - 2 = 2$ Variación de $f(x)$: $f(4) - f(2) = 16 - 4 = 12$

SEGUNDO. Se calcula el cociente que resulta al dividir la variación de $f(x)$ entre la variación de x .

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = \frac{16 - 4}{2} = 6$$

Este cociente es la tasa de variación media de $f(x)$ en el intervalo $[2, 4]$.

029 Halla la tasa de variación media de las siguientes funciones, en el intervalo $[1, 3]$.

a) $f(x) = x^3$

b) $f(x) = x - 2$

a) $\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{9 - 1}{2} = 4 \rightarrow$ La tasa de variación media es 4.

b) $\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{1 - (-1)}{2} = 1 \rightarrow$ La tasa de variación media es 1.

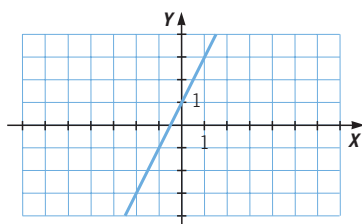
Funciones

- 030 Completa la tabla de valores correspondiente a la función $f(x) = x^2 - 3$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	6	1	-2	-3	-2	1	6

- 031 Dada la función $f(x) = 2x + 1$, haz una tabla con seis valores y dibuja su gráfica.

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-3	-1	1	3	5	7



- 032 Elabora una tabla de valores para estas funciones.

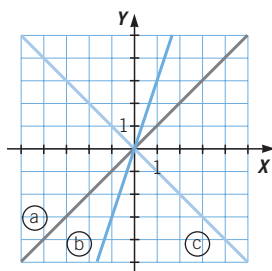
a) $f(x) = \frac{1}{x+3}$

b) $f(x) = \frac{7x}{x^2 + 3}$

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	1	$\frac{1}{2} = 0,5$	$\frac{1}{3} = 0,33$	$\frac{1}{4} = 0,25$	$\frac{1}{5} = 0,2$

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-2	$-\frac{7}{4} = -1,75$	0	$\frac{7}{4} = 1,75$	$\frac{14}{5} = 2$

- 033 Realiza una tabla de valores y encuentra la expresión algebraica correspondiente a estas funciones.



a) $f(x) = x$

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-2	-1	0	1	2

b) $f(x) = 3x$

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-6	-3	0	3	6

c) $f(x) = -x$

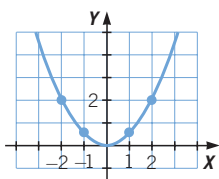
x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	2	1	0	-1	-2

- 034 Representa la función que relaciona el área de un triángulo rectángulo isósceles y la longitud del cateto.

a) ¿Cuál es la variable dependiente?

b) ¿Y la variable independiente?

$$y = \frac{x^2}{2}$$



a) La variable independiente es la longitud del cateto.

b) La variable dependiente es el área del triángulo.

035 Dada la función que asocia a cada número entero su cuarta parte más cinco unidades:

- a) Halla su expresión algebraica.
 b) Calcula los valores de la función para $x = 2$ y $x = 0$.
 c) ¿Existe valor de la función en $x = \frac{2}{3}$?

a) $y = \frac{x}{4} + 5$

b) $f(2) = 5,5$; $f(0) = 5$

c) No, ya que la función solo está definida para los números enteros.

036 Señala si la relación que asocia a cada número su raíz cuadrada positiva es una función.

- a) ¿Cuál el valor de la variable dependiente para los valores 0, 1, 2 y 3 de x ?
 b) ¿Qué ocurre con los valores negativos de la variable independiente?
 c) Halla el dominio y el recorrido de la función.

Es una función, ya que cada número solo tiene una única raíz positiva.

a) $f(0) = 0$; $f(1) = 1$; $f(2) = +\sqrt{2}$; $f(3) = +\sqrt{3}$

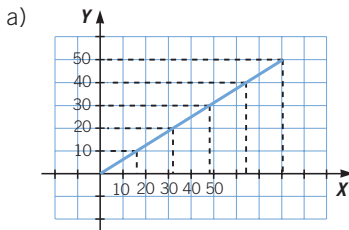
b) Cuando la variable es negativa, la función no está definida.

c) Dominio: $\mathbb{R}^+$, recorrido: $\mathbb{R}^+$.

037 Esta tabla muestra la conversión de la velocidad medida en kilómetros por hora a millas por hora.

Velocidad (km/h)	16,1	32,2	48,3	64,4	80,5	...
Velocidad (millas/h)	10	20	30	40	50	...

- a) Representala gráficamente.
 b) Escribe la expresión algebraica que relaciona la velocidad en kilómetros por hora y en millas por hora.



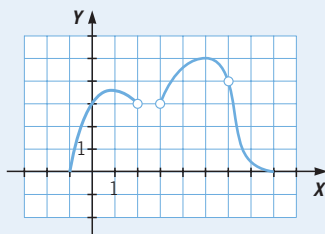
b) $y = \frac{x}{1,61}$

Funciones

038 HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE CALCULA EL DOMINIO Y EL RECORRIDO DE UNA FUNCIÓN A PARTIR DE SU REPRESENTACIÓN GRÁFICA?

Calcula el dominio y el recorrido de esta función.



1. DOMINIO

PRIMERO. Observando el eje X , se establece el primer y el último valor de x para el que está definida la función.

En este caso, el primer valor es $x = -1$ y el último valor es $x = 8$.

SEGUNDO. Observando la gráfica de la función, se determinan los tramos y los puntos en los que no está definida la función.

La función no está definida en el intervalo $[2, 3]$ y en el punto $x = 6$.

TERCERO. Se expresa el dominio con los datos obtenidos

$$\text{Dom } f = [-1, 8] - [2, 3] - \{6\}$$

2. RECORRIDO

PRIMERO. Observando la gráfica se establece en qué valores de y la función alcanza el valor máximo y el valor mínimo.

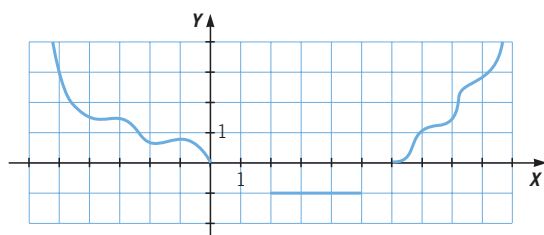
El valor mínimo está en $y = 0$ y el valor máximo está en $y = 5$.

SEGUNDO. El recorrido de la función será el intervalo formado por esos valores.

$$\text{Im } f = [0, 5]$$

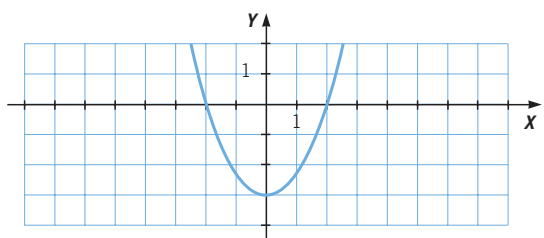
039 ●● Calcula el dominio y el recorrido de estas funciones.

a)



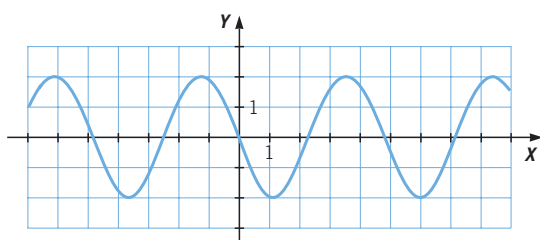
$$\text{Dom } f = (-\infty, 0] \cup [2, 5] \cup [6, +\infty) \quad \text{Im } f = \{-1\} \cup [0, +\infty)$$

b)



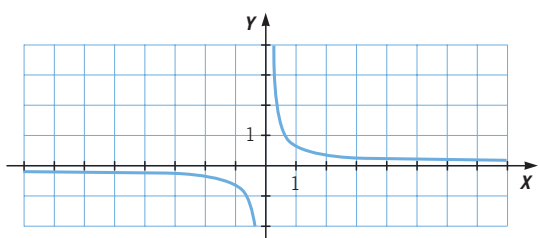
$$\text{Dom } f = \mathbb{R} \quad \text{Im } f = [-3, +\infty)$$

c)



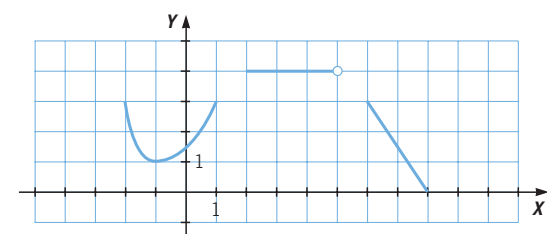
$$\text{Dom } f = \mathbb{R} \quad \text{Im } f = [-2, 2]$$

d)



$$\text{Dom } (f) = \mathbb{R} - \{0\} \quad \text{Im } (f) = \mathbb{R} - \{0\}$$

e)



$$\text{Dom } f = [-2, 1] \cup [2, 5) \cup [6, 8] \quad \text{Im } f = [0, 3] \cup \{5\}$$

040 Determina el dominio y el recorrido de las funciones.

a) $f(x) = 3x + 2$

c) $f(x) = 5x^2$

b) $f(x) = \frac{1}{x-2}$

d) $f(x) = \sqrt{x-1}$

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R}; \text{Im } f = \mathbb{R}$

b) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{2\}; \text{Im } f = \mathbb{R} - \{0\}$

c) $\text{Dom } f = \mathbb{R}; \text{Im } f = \mathbb{R}^+$

d) $\text{Dom } f = [1, +\infty); \text{Im } f = \mathbb{R}^+$

041 Halla el dominio y el recorrido de las siguientes funciones.

a) $f(x) = 3x - 1$

b) $g(x) = x^2 + 4x$

c) $h(x) = \frac{2}{x-5}$

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R}; \text{Im } f = \mathbb{R}$

b) $\text{Dom } g; \text{Im } g = [-4, +\infty)$

c) $\text{Dom } h = \mathbb{R} - \{5\}; \text{Im } h = \mathbb{R} - \{0\}$

Funciones

042 Calcula el dominio de las siguientes funciones definidas a trozos.

$$a) f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{2-2x}{x} & \text{si } 1 < x \leq 3 \\ \sqrt{x-4} & \text{si } x > 3 \end{cases} \quad b) f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{2-2x}{x} & \text{si } 0 < x \leq 4 \\ \sqrt{x-4} & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - (3, 4)$

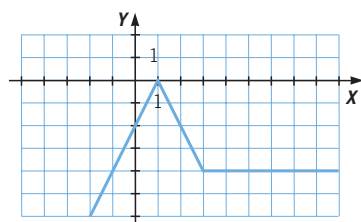
b) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

043 Representa la función y obtén el dominio y el recorrido.

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 2 & \text{si } x \leq 1 \\ 2 - 2x & \text{si } 1 < x \leq 3 \\ -4 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

$\text{Dom } f = \mathbb{R}$

$\text{Im } f = (-\infty, 0]$

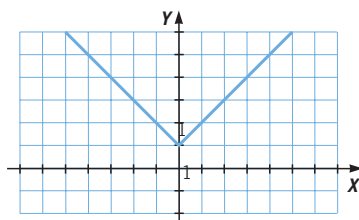


044 Representa esta función sobre unos ejes de coordenadas, y halla su dominio y recorrido.

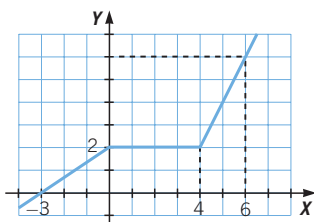
$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ -x + 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$\text{Dom } f = \mathbb{R}$

$\text{Im } f = [1, +\infty)$



045 Calcula la expresión algebraica de la función, y halla su dominio y recorrido.



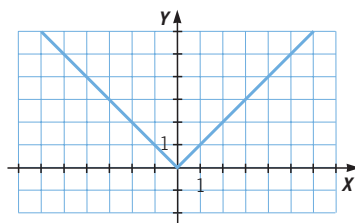
$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x + 2 & \text{si } -\infty < x \leq 0 \\ 2 & \text{si } 0 < x \leq 4 \\ 2x - 6 & \text{si } 4 < x < +\infty \end{cases}$$

$\text{Dom } f = \mathbb{R} \quad \text{Im } f = \mathbb{R}$

046 La función que asigna a cada número su valor absoluto, $f(x) = |x|$, se puede expresar como una función definida a trozos de la forma:

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } -\infty < x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x < +\infty \end{cases}$$

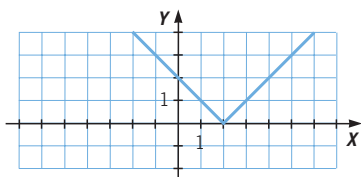
Representa gráficamente esta función.



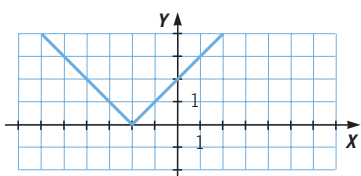
047 Escribe, en forma de función definida a trozos, y representa estas funciones.

a) $f(x) = |x - 2|$ b) $g(x) = |x + 2|$ c) $h(x) = |2x|$ d) $i(x) = |-2x|$

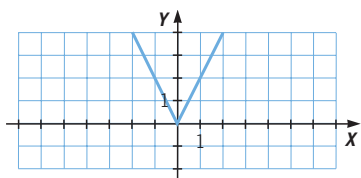
$$a) f(x) = \begin{cases} -x + 2 & \text{si } x - 2 < 0 \rightarrow -\infty < x < 2 \\ x - 2 & \text{si } x - 2 \geq 0 \rightarrow 2 \leq x < +\infty \end{cases}$$



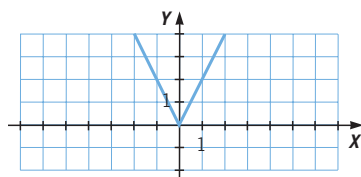
$$b) g(x) = \begin{cases} -x - 2 & \text{si } x + 2 < 0 \rightarrow -\infty < x < -2 \\ x + 2 & \text{si } x + 2 \geq 0 \rightarrow -2 \leq x < +\infty \end{cases}$$



$$c) h(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } 2x < 0 \rightarrow -\infty < x < 0 \\ 2x & \text{si } 2x \geq 0 \rightarrow 0 \leq x < +\infty \end{cases}$$



$$d) i(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } -2x < 0 \rightarrow 0 \leq x < +\infty \\ -2x & \text{si } -2x \geq 0 \rightarrow -\infty < x < 0 \end{cases}$$



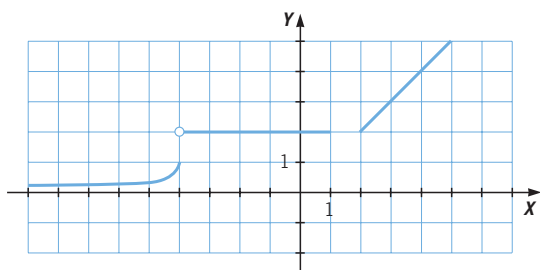
048 Determina una función definida a trozos cuya gráfica pase por $(-3, 2)$, $(-2, 1)$ y $(3, 2)$. ¿Cuántas funciones pasan por los tres puntos?

Existen infinitas funciones que pasan por los tres puntos. Por ejemplo:

$$f(x) = \begin{cases} -x - 1 & \text{si } -\infty < x < 0 \\ 2 & \text{si } 0 \leq x < +\infty \end{cases}$$

Funciones

049 Estudia la continuidad de esta función.



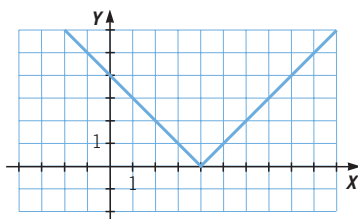
La función es continua en todos los puntos excepto en $x = -4$ y en el intervalo $(1, 2)$.

En $x = -4$, la función tiene un salto, y vale 1 a la izquierda y 2 a la derecha.

En el intervalo $(1, 2)$, la función no está definida, y estos puntos no pertenecen al dominio.

050 Representa la función: $f(x) = \begin{cases} 4 - x & \text{si } x \leq 4 \\ x - 4 & \text{si } x > 4 \end{cases}$

- Estudia su continuidad.
- ¿Dónde crece y decrece la función?
- Escribe sus máximos y mínimos relativos.

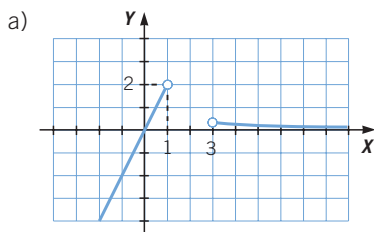


- La función es continua en $\mathbb{R}$.
- La función crece en el intervalo $(4, +\infty)$ y decrece en el intervalo $(-\infty, 4)$.
- La función tiene un mínimo relativo en $x = 4$.

051 Estudia y representa estas funciones.

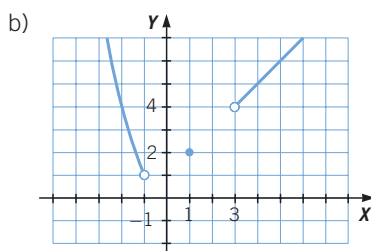
a) $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x > 3 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < -1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \\ x + 1 & \text{si } x > 3 \end{cases}$



$$\text{Dom } f = (-\infty, 1) \cup (3, +\infty) \quad \text{Im } f = (-\infty, 2)$$

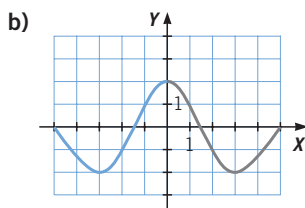
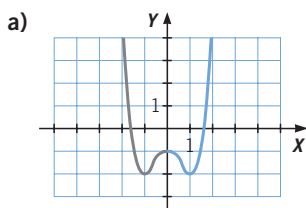
La función es continua en todo su dominio.



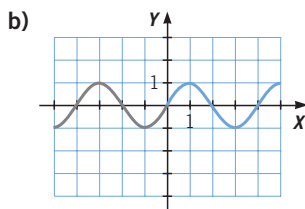
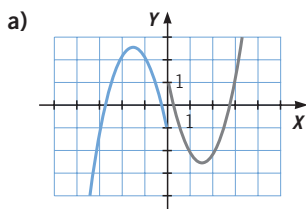
$$\text{Dom } f = (-\infty, -1) \cup \{1\} \cup (3, +\infty) \quad \text{Im } f = (1, +\infty)$$

La función es continua en $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$.

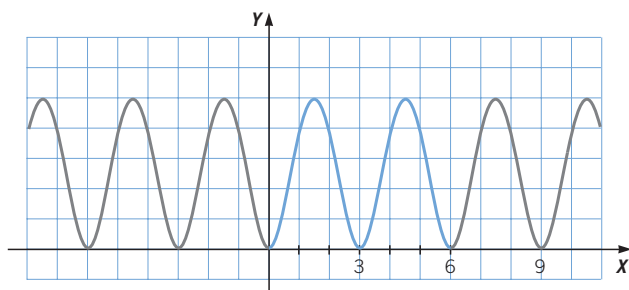
052 Completa las gráficas para que las funciones sean simétricas respecto del eje Y .



053 Completa las gráficas para que estas funciones sean impares.



054 La gráfica pertenece a una función periódica, de período $T = 3$. Completa la gráfica a ambos lados y justifica cómo lo haces.

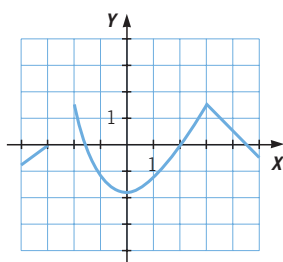


Lo hacemos mediante una traslación.

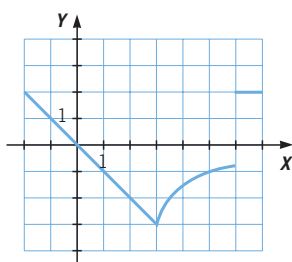
055

Estudia las siguientes funciones.

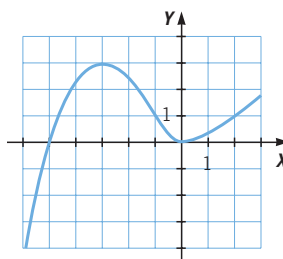
a)



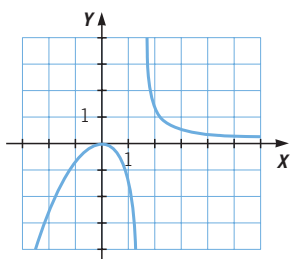
c)



b)



d)



a) Dominio: $\text{Dom } f = \mathbb{R} - (-3, -2)$

Recorrido: $\text{Im } f = (-\infty; 1,5]$

Cortes con los ejes de coordenadas: corta al eje X en los puntos $x = -3$; $x = -1,5$; $x = 2$; $x = 4,5$; y al eje Y , en $y = -1,8$.

Continuidad: la función es continua en todos los puntos, menos en el intervalo $(-3, -2)$, donde no está definida.

b) Dominio: $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

Recorrido: $\text{Im } f = \mathbb{R}$

Cortes con los ejes de coordenadas: corta al eje X en $x = -5$ y en $(0, 0)$.

Continuidad: la función es continua en todos los puntos.

Es creciente en $(-\infty, -3) \cup (0, +\infty)$ y es decreciente en $(-3, 0)$.

Tiene un máximo relativo en $x = -3$ y un mínimo relativo en $x = 0$.

No presenta ningún tipo de simetría y no es periódica.

c) Dominio: $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

Recorrido: $\text{Im } f = (-3, +\infty)$

Cortes con los ejes de coordenadas: corta al eje X y al eje Y en el punto $(0, 0)$.

Continuidad: la función es continua en todos los puntos, menos en $x = 6$.

Es decreciente en $(-\infty, 3)$, es creciente en $(3, 6)$ y es constante en $(6, +\infty)$.

Tiene un mínimo relativo en $x = 3$.

No presenta ningún tipo de simetría y no es periódica.

d) Dominio: $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{1,5\}$

Recorrido: $\text{Im } f = \mathbb{R}$

Cortes con los ejes de coordenadas: corta al eje X y al eje Y en el punto $(0, 0)$.

Continuidad: la función es continua en todos los puntos, menos en $x = 1,5$; donde no está definida.

Es creciente en $(-\infty, 0)$ y es decreciente en $(0; 1,5) \cup (1,5; +\infty)$.

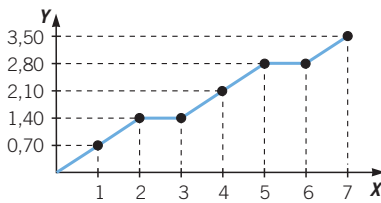
Tiene un máximo relativo en $x = 0$.

No presenta ningún tipo de simetría y no es periódica.

056 En un centro comercial, al comprar 3 kg de naranjas solo pagas 2 kg.

Si el kilo de naranjas cuesta 0,70 €, representa la función que relaciona el peso de naranjas (x) y su precio (y). ¿Es una función definida a trozos? ¿Por qué?

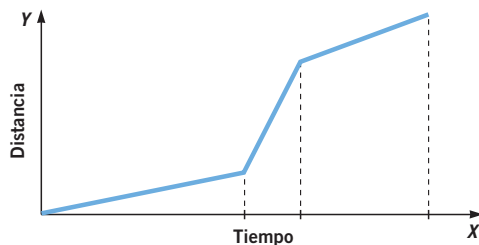
N.º de kilos	1	2	3	4	5	6	7
Precio	0,70	1,40	1,40	2,10	2,80	2,80	3,50



No es una función definida a trozos, porque la expresión algebraica de la función, para cualquier valor de x , es: $f(x) = 0,70x$.

057 Para ir a su centro escolar, Concha realiza cada día este trayecto y tarda el mismo tiempo aproximadamente: sale de casa y sube una cuesta para llegar a la parada del autobús; se traslada en él y se baja en la tercera parada, donde la espera una amiga, para ir desde allí andando juntas. Dibuja una gráfica que se ajuste a esta situación.

Indica los tramos crecientes y constantes, siendo x el tiempo en minutos, e y la distancia recorrida.



En los tres tramos, la función es creciente.

Funciones

058



Un electrocardiograma presenta la variación de actividad coronaria, marcando los movimientos del corazón. ¿Es una función periódica?



La función es periódica cuando el ritmo cardíaco es constante, y en la gráfica vemos que no lo es.

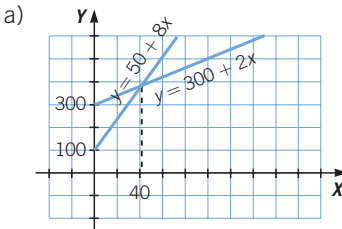
059



Queremos hacer un viaje al extranjero y preguntamos en dos agencias.



- a) Representa las funciones que relacionan los kilómetros recorridos y el precio.
b) ¿Con qué agencia interesa contratar el viaje?



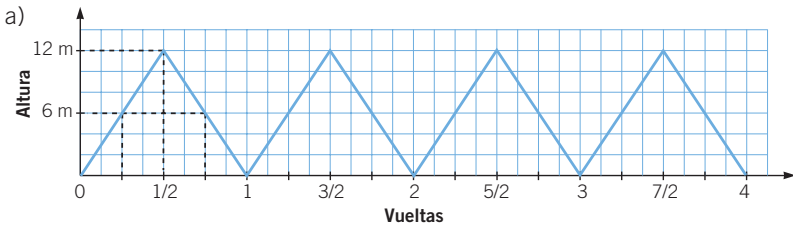
- b) Viajes Águila: $y = 300 + 2x$
Viajes Princesa: $y = 50 + 8x$
 $300 + 2x = 50 + 8x \rightarrow x = 41,67$

Para viajes con trayecto inferior a 41,67 km, nos interesa contratar Viajes Princesa. Y como queremos viajar al extranjero, será mejor contratar Viajes Águila.

060

En un parque de atracciones hay una noria de 12 m de diámetro.

- a) Representa la altura que alcanza un niño que monta en la noria, en cada momento, durante 4 vueltas.
- b) Realiza un boceto de la función, estudiando su periodicidad. ¿Cuál es su período?

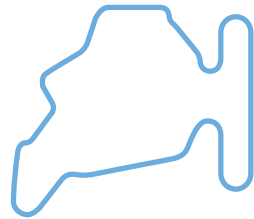


- b) La función es creciente hasta alcanzar la altura de 12 m (media vuelta) y, después, es decreciente hasta estar a nivel del suelo (otra media vuelta). El período de la función es una vuelta.

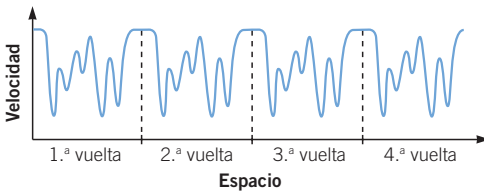
061

En el Gran Premio de Hungría de Automovilismo, el piloto Fernando Alonso obtuvo su primera victoria en Fórmula 1, en un circuito de 4.381 m de longitud.

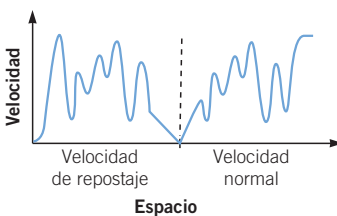
- a) Representa aproximadamente la evolución de la velocidad del coche durante 4 vueltas. ¿Es una función periódica?
- b) Dibuja la gráfica que corresponda a la vuelta en la que el piloto se detiene a repostar.



- a) Gráfica correspondiente a 4 vueltas:



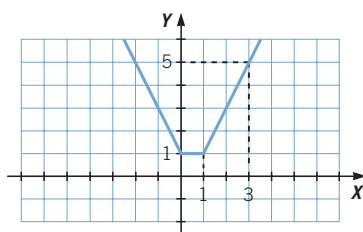
- b) Gráfica correspondiente a la vuelta en la que se detiene a repostar:



Funciones

062

Representa la función $y = |x| + |x - 1|$.



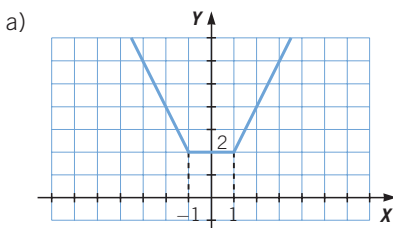
$$f(x) = \begin{cases} -2x + 1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 2x - 1 & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

063

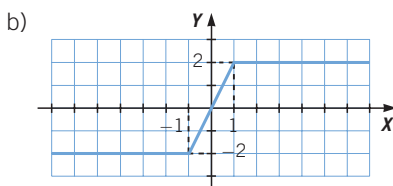
A partir de $|x - 1| = \begin{cases} -x + 1 & \text{si } x < 1 \\ x - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ representa estas funciones.

a) $y = |x + 1| + |x - 1|$

b) $y = |x + 1| - |x - 1|$



$$f(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x < -1 \\ 2 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 2x & \text{si } 1 < x \end{cases}$$



$$f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < -1 \\ 2x & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 2 & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

064

Si $f(f(x)) = 5x - 2.008$ para cualquier valor de x , demuestra que existe un número entero n tal que $f(n) = 5n - 2.008$. ¿Cuánto vale n ?

Sabemos que $f(f(x)) = 5x - 2.008$ para cualquier valor de x .

Vamos a demostrar que existe un valor tal que $f(f(x)) = x$.

$$x = 5x - 2.008 \rightarrow x = \frac{2.008}{4} = 502 \rightarrow f(f(502)) = 502$$

$$\begin{aligned} f(f(502)) = 502 &\rightarrow f(f(f(502))) = f(502) \rightarrow 5f(502) - 2.008 = f(502) \\ &\rightarrow f(502) = \frac{2.008}{4} = 502 \end{aligned}$$

Por tanto, se ha demostrado que existe un valor $n = 502$ tal que $f(n) = n$

$$\rightarrow f(f(n)) = f(n) \text{ y como } f(f(n)) = 5n - 2.008 \text{ para cualquier } n.$$

Para el valor $n = 512$ tenemos que $f(f(512)) = 5 \cdot 512 - 2.008$.

065

Una función $f(x)$ es creciente, su dominio es $[-6, 3]$ y su recorrido es $[3, 6]$.

a) ¿Cuánto valen $f(-6)$ y $f(3)$?

b) ¿Tiene máximos o mínimos relativos?

a) $f(-6) = 3$; $f(3) = 6$

b) No tiene máximos ni mínimos relativos por ser una función creciente.

EN LA VIDA COTIDIANA

066

Un grupo de alumnos va a publicar una revista escolar. Los profesores de los departamentos de Lengua y Literatura y de Matemáticas van a ser los coordinadores.

Tenemos papel para realizar los dos primeros números de la revista.

A partir del tercer número, tendremos que comprar el papel de cada revista a 0,20 €.



Los profesores de Matemáticas les proponen simular lo que ocurriría si decidieran vender la revista. Para ello deben preguntar al resto de alumnos y profesores del centro escolar cuánto dinero estarían dispuestos a pagar.



Funciones

Con la información recogida por los alumnos, ¿a qué precio deberían vender la revista para poder comprar el papel necesario para imprimirla?

Hay $150 + 95 + 47 + 18 = 310$ alumnos, y si queremos dar una revista a cada uno harán falta 310 revistas, cuyo coste en papel asciende a:

$$310 \cdot 0,20 = 62 \text{ €}.$$

Si vendieran la revista a 1 €, la pagarían 18 personas, de modo que obtendrían 18 €, que es una cantidad insuficiente para comprar el papel de la próxima tirada.

Si vendieran la revista a 0,50 €, la pagarían $18 + 47 = 65$ personas, de modo que obtendrían 32,50 €, que es una cantidad insuficiente para comprar el papel de la próxima tirada.

Y si vendieran la revista a 0,25 €, la pagarían $18 + 47 + 95 = 160$ personas, de modo que obtendrían 40 €, que es una cantidad insuficiente para comprar el papel de la próxima tirada.

La solución es que cada persona pague lo que considera justo, de manera que la cantidad recaudada ascenderá a:

$$18 \cdot 1 + 47 \cdot 0,50 + 95 \cdot 0,25 = 65,25 \text{ €}.$$

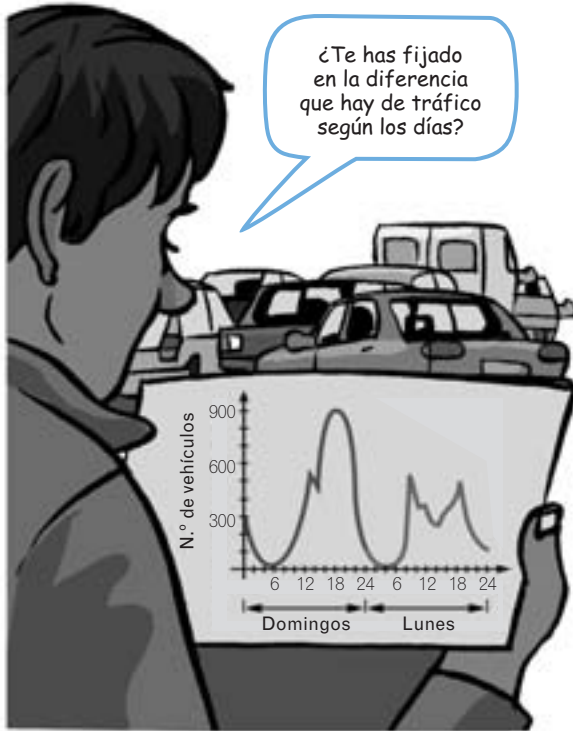
067



Como respuesta a las críticas realizadas por los medios de comunicación en relación con los atascos de cada fin de semana, la Dirección General de Tráfico va a elaborar un informe sobre el volumen de tráfico en las principales carreteras.



Los resultados se han publicado en forma de gráfica. En ella se muestra la media de vehículos que circulaban en la carretera durante los domingos y los lunes del último mes.

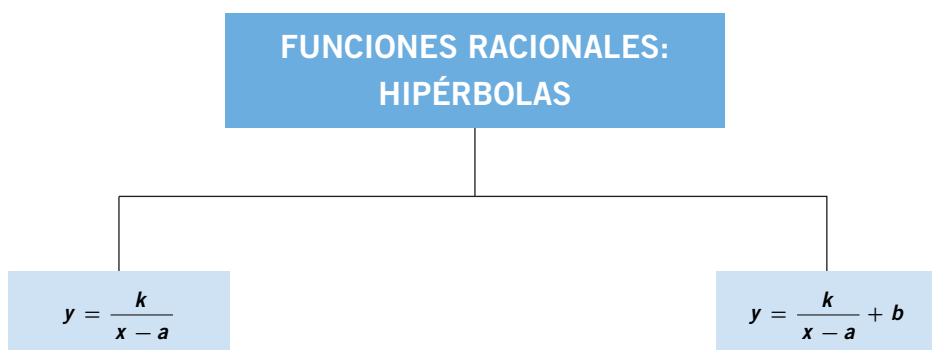
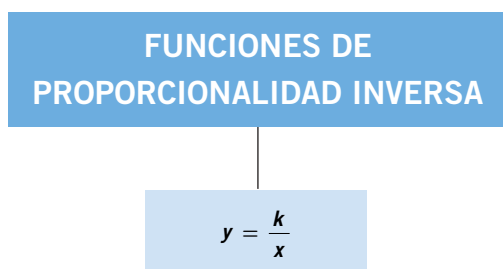
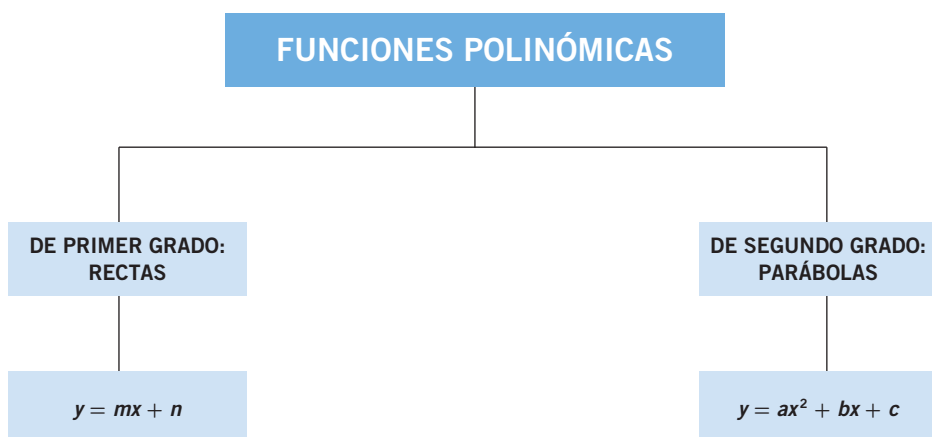


¿En qué momento se han producido más retenciones? ¿A qué horas se presentan menos problemas de tráfico? Ayúdalos a resolver la situación, y di quién tiene razón.

El mayor número de atascos se produce en la tarde de los domingos, a las 18:00 h.

Los menores problemas de tráfico se producen en la madrugada.

Por tanto, los medios de comunicación tienen razón en que se producen atascos en ciertos momentos del día. Para evitar estos atascos se debería recomendar a los conductores evitar esos tramos horarios: el domingo, entre las 16:00 h y las 20:00 h, y el lunes, en torno a las 8:00 h y las 19:00 h.



Funesto presagio

Moscú amaneció plomizo, tan negro que más parecía la continuación de la noche que el nuevo día.

Esa misma sensación tuvo Christian Goldbach cuando, como cada mañana, se dirigió al palacio donde el joven zar Pedro II lo esperaba para recibir su formación. Tras un corto trayecto, su carruaje se detuvo ante el puesto de la guardia real.

–La entrada está prohibida hasta nueva orden.

–¡Soy el tutor del zar! –dijo Goldbach asomándose a la ventanilla del carruaje.

El jefe de la guardia ni siquiera se inmutó y con voz impersonal, casi metálica, le dijo de manera tajante:

–Su trabajo en palacio ha terminado.

–¿Por qué? ¿No está contento el zar con mi trabajo?

–Pretendéis decirme que no habéis oído los cañones, ni las campanas de las iglesias... Ni habéis visto a los correos ir y venir como locos, ni oís los lamentos de toda Rusia –espetó el soldado con furia contenida.

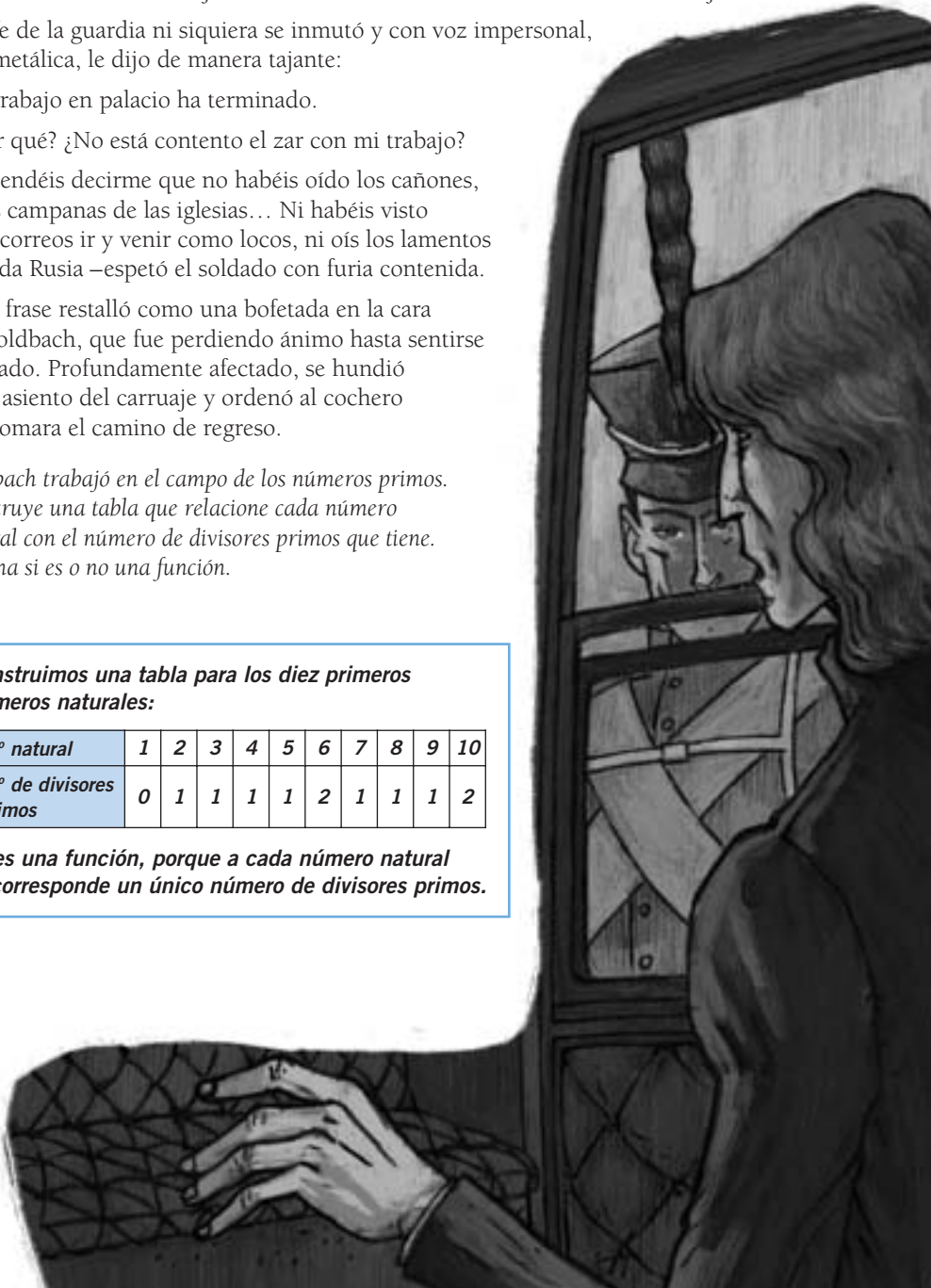
Cada frase restalló como una bofetada en la cara de Goldbach, que fue perdiendo ánimo hasta sentirse mareado. Profundamente afectado, se hundió en el asiento del carruaje y ordenó al cochero que tomara el camino de regreso.

*Goldbach trabajó en el campo de los números primos.
Construye una tabla que relacione cada número natural con el número de divisores primos que tiene.
Razona si es o no una función.*

Construimos una tabla para los diez primeros números naturales:

N.º natural	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
N.º de divisores primos	0	1	1	1	1	2	1	1	1	2

Sí es una función, porque a cada número natural le corresponde un único número de divisores primos.



Funciones polinómicas y racionales

EJERCICIOS

001 Decide si las siguientes funciones son polinómicas o no.

a) $y = -x + 2$

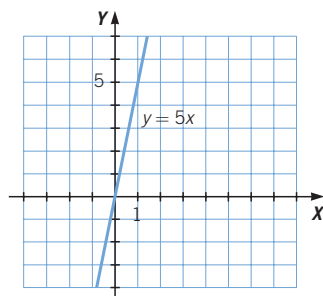
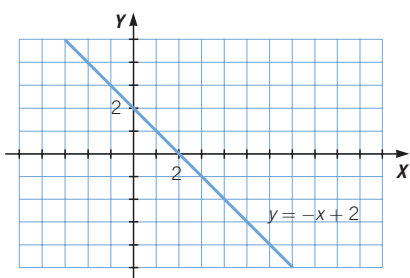
c) $y = 5x$

b) $y = -x + \frac{2}{x}$

d) $y = 5\sqrt{x} + 2$

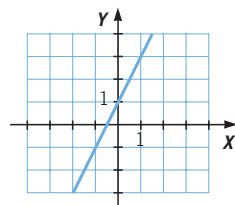
Son funciones polinómicas las de los apartados a) y c).

002 Representa gráficamente las funciones polinómicas del ejercicio anterior.



003 Razona de qué tipo es la función representada, y determina su expresión algebraica y su pendiente.

Es una función afín, de ecuación $y = 2x + 1$.
Su pendiente es 2.



004 Decide de qué tipo son estas funciones polinómicas y represéntalas.

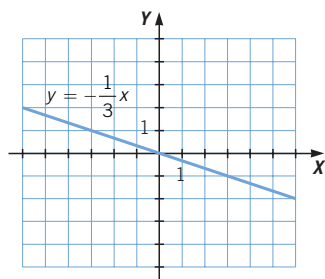
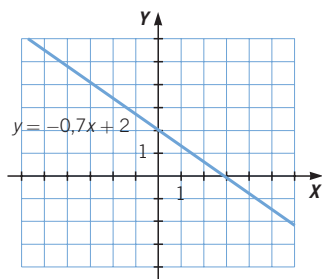
a) $f(x) = -0,7x + 2$

b) $f(x) = -\frac{1}{3}x$

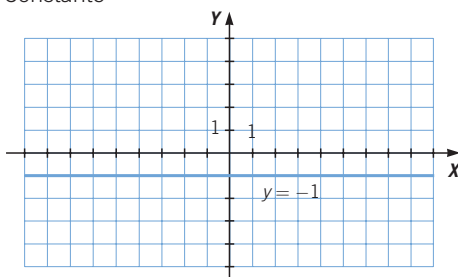
c) $f(x) = -1$

a) Afín

b) Lineal



c) Constante

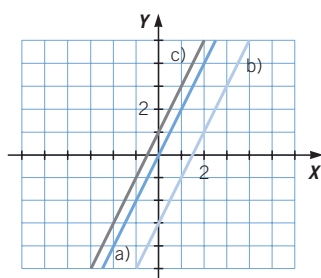


005 Representa, en unos mismos ejes, estas funciones y explica sus diferencias.

a) $y = 2x$

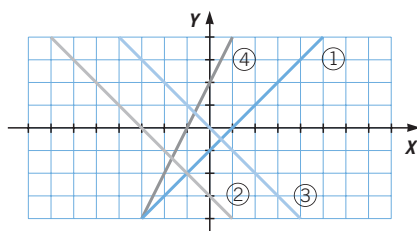
b) $y = 2x - 3$

c) $y = 2x + 1$



Son rectas paralelas, con la misma pendiente. Se diferencian en su ordenada en el origen.

006 Asocia cada recta con su expresión algebraica.



a) $y = 2x + 2$

c) $y = -\frac{1}{2}$

b) $y = -x - 3$

d) $y = -x$

a) ④

b) ②

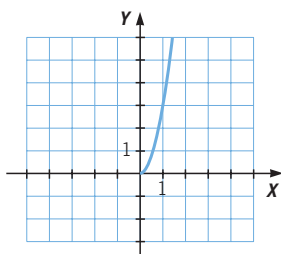
c) No se corresponde con ninguna de las rectas dibujadas en el gráfico.

d) ③

La recta ① tiene por ecuación $y = x - 1$ y tampoco tiene correspondencia con ninguna de las ecuaciones.

Funciones polinómicas y racionales

007 Completa esta parábola y señala sus elementos y sus propiedades.



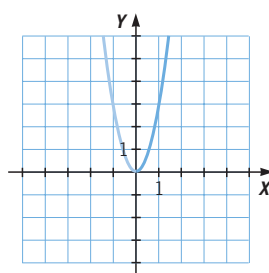
El dominio de la función es todos los números reales: $\mathbb{R}$.

Es continua en todo su dominio.

La función es simétrica respecto del eje de ordenadas.

El vértice es el punto $(0, 0)$, donde tiene un mínimo.

Pasa por los puntos $(-1, 3)$ y $(1, 3)$.



008 Representa las siguientes funciones.

a) $y = 3x^2$

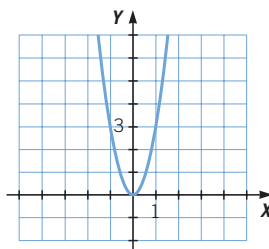
c) $y = -2x^2$

b) $y = -\frac{1}{3}x^2$

d) $y = -\frac{1}{2}x^2$

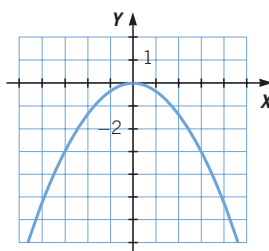
a) Construimos una tabla con valores alrededor del vértice.

x	-2	-1	0	1	2
y	12	3	0	3	12



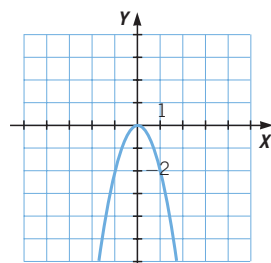
b) Construimos una tabla con valores alrededor del vértice.

x	-6	-3	0	3	6
y	-12	-3	0	-3	-12



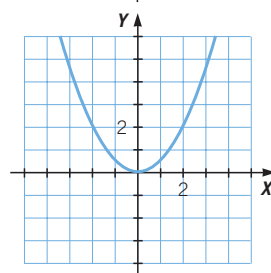
- c) Construimos una tabla con valores alrededor del vértice.

x	-2	-1	0	1	2
y	-8	-2	0	-2	-8



- d) Construimos una tabla con valores alrededor del vértice.

x	-2	-1	0	1	2
y	2	0,5	0	0,5	2



009 ¿Qué ocurre si $a = 0$ en $f(x) = ax^2 + bx + c$?

Si $a = 0$, sería la ecuación de una recta en vez de la ecuación de una parábola.

010 Representa las siguientes funciones.

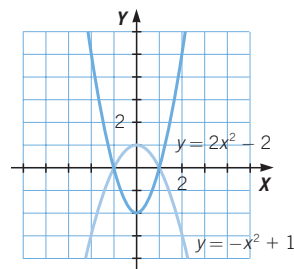
a) $y = 2x^2 - 2$

b) $y = -x^2 + 1$

- a) El vértice es el punto $(0, -2)$.

Las ramas de la parábola van hacia arriba y es más cerrada que la parábola de ecuación $y = x^2$.

- b) El vértice es el punto $(0, 1)$ y se obtiene trasladando la parábola $y = x^2$ una unidad hacia arriba e invirtiendo el sentido de las ramas.

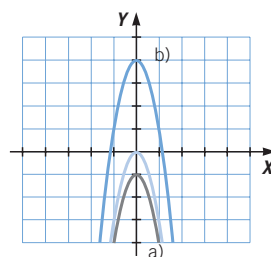


011 Representa la función $y = -3x^2$, a partir de ella, explica cómo se pueden representar estas funciones.

a) $y = -3x^2 - 1$

b) $y = -3x^2 + 4$

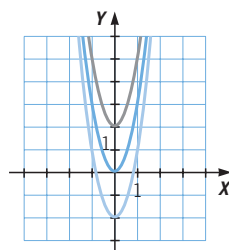
Las parábolas que corresponden a las funciones del tipo $y = -3x^2 + c$ se obtienen trasladando verticalmente la parábola $y = -3x^2$, c unidades hacia arriba si $c > 0$, o c unidades hacia abajo si $c < 0$.



Funciones polinómicas y racionales

- 012** Si la parábola de color naranja corresponde a la función $y = 3x^2$, ¿a qué funciones corresponden las otras dos?

La parábola roja corresponde a $y = 3x^2 + 2$
y la parábola verde corresponde a $y = 3x^2 - 2$.



- 013** Representa las siguientes funciones.

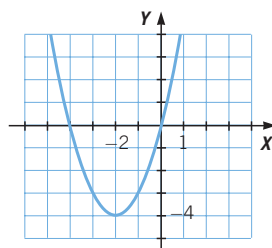
a) $y = x^2 + 4x$

b) $y = -2x^2 + 6x$

a) El eje de simetría es la recta $x = -2$.

El vértice de la parábola es el punto $(-2, -4)$.

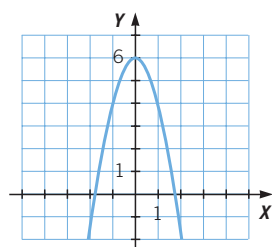
x	-4	-3	-2	-1	0
y	0	-3	-4	-3	0



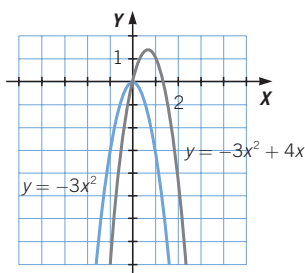
b) El eje de simetría es la recta $x = 0$.

El vértice de la parábola es el punto $(0, 6)$.

x	-2	-1	0	1	2
y	-2	4	6	4	-2



- 014** Dibuja las parábolas de las funciones $y = -3x^2$ e $y = -3x^2 + 4x$.
Estudia el desplazamiento que presenta la última con respecto a la primera.



Se deslaza de forma oblicua $y = -3x^2$,
pasando a ser el vértice

$$\left(\frac{-4}{-6}, \frac{-16}{-12} \right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3} \right).$$

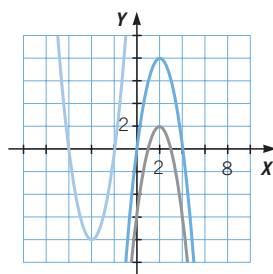
- 015** La parábola de color verde corresponde a $y = -2x^2 + 8x$. ¿Qué funciones representan las otras dos?

La parábola de color rojo es:

$$y = -2x^2 + 8x - 6$$

La parábola de color amarillo es:

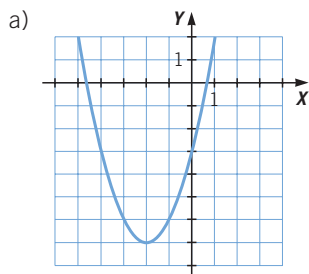
$$y = 2(x + 6)^2 - 8(x + 6) = 2x^2 + 16x + 24$$



016 Representa las siguientes funciones.

a) $y = x^2 + 4x - 3$

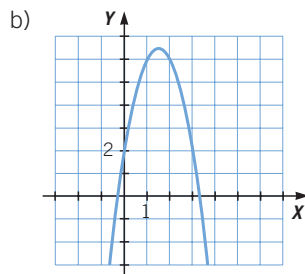
b) $y = -2x^2 + 6x + 2$



El vértice está en $(-2, -7)$.

La tabla de valores es:

x	y
-4	-3
-3	-6
-2	-7
-1	-6
0	-3



El vértice está en

$$\left(\frac{-6}{-4}, \frac{-36 - 16}{8} \right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{13}{2} \right).$$

La tabla de valores es:

x	y
0	2
0,5	4,5
1	6
1,5	6,5
2	6
2,5	4,5
3	2

017 Representa estas funciones y compara sus gráficas.

a) $y = x^2$

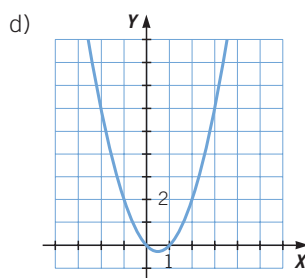
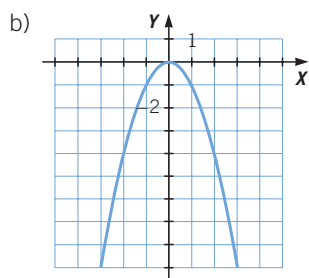
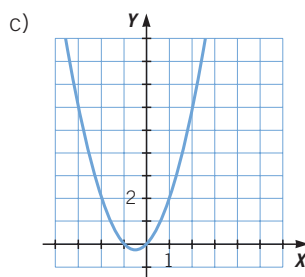
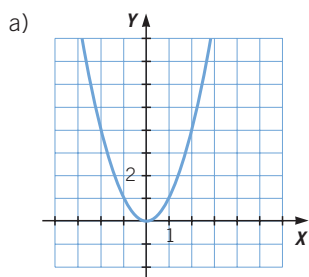
c) $y = x^2 + x$

e) $y = x^2 + x + 1$

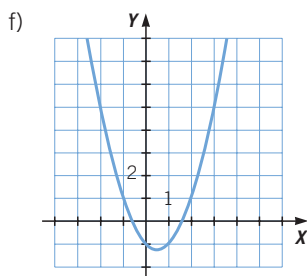
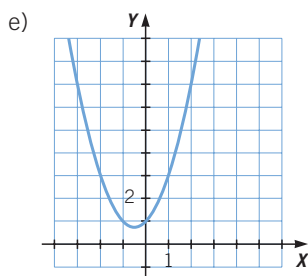
b) $y = -x^2$

d) $y = x^2 - x$

f) $y = x^2 - x - 1$

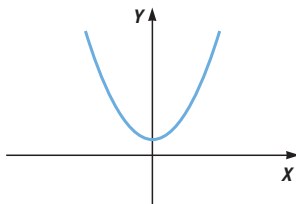


Funciones polinómicas y racionales



Todas las parábolas son similares, tienen como base $y = x^2$, y se consiguen trasladando la parábola inicial, excepto $y = -x^2$, que se obtiene por simetría.

018 Explica cómo son los coeficientes de la función cuya gráfica es esta parábola. ¿Hay alguno que sea cero? ¿Qué pasaría si cambiamos de signo a todos?

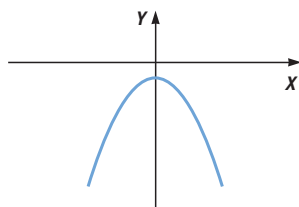


La gráfica tiene un mínimo en el vértice, luego $a > 0$.

El eje de ordenadas coincide con el eje de simetría, por lo que $b = 0$.

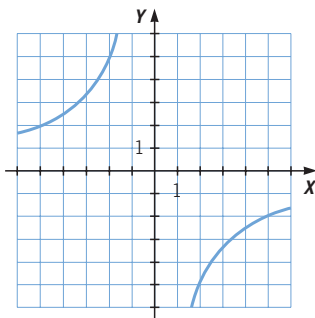
El vértice está desplazado hacia arriba respecto de la parábola $y = ax^2$, luego $c > 0$.

Si cambiamos todos los coeficientes de signo obtendríamos la parábola.



019 Representa la función $y = -\frac{10}{x}$.

x	y
-5	2
-4	2,5
-3	3,3333
-2	5
-1	10
1	-10
2	-5
3	-3,3333
4	-2,5
5	-2

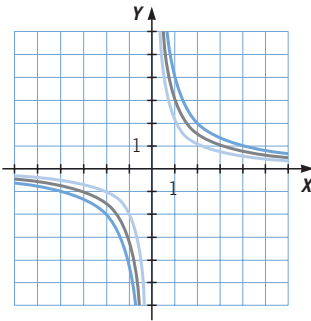


020

Dadas las funciones: $y = \frac{2}{x}$ $y = \frac{3}{x}$ $y = \frac{4}{x}$

- a) Representálas en los mismos ejes.
b) ¿Qué gráfica está más lejos del origen?

a)



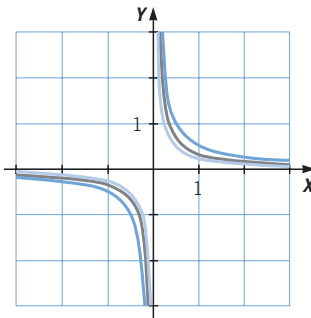
- b) La gráfica que está más lejos del origen es $y = \frac{4}{x}$.

021

Dadas las funciones: $y = \frac{1}{2x}$ $y = \frac{1}{3x}$ $y = \frac{1}{4x}$

- a) Representálas en los mismos ejes.
b) ¿Cuál de ellas se aleja más del origen?

a)



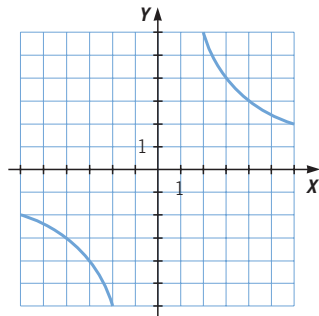
- b) La gráfica que está más lejos del origen es $y = \frac{1}{4x}$.

022

El producto de x e y es 12. Realiza una tabla de valores y representa la función correspondiente.

$$x \cdot y = 12 \rightarrow y = \frac{12}{x}$$

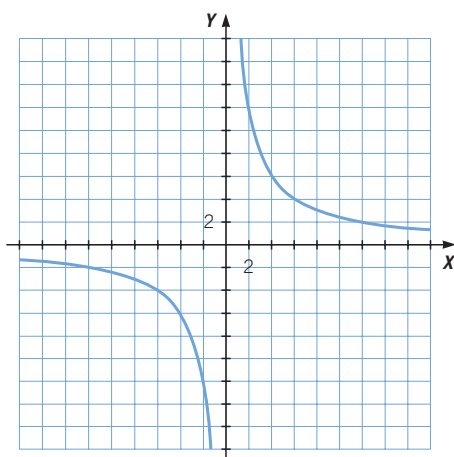
x	y
-10	-1,2
-8	-1,5
-6	-2
-4	-3
-2	-6
2	6
4	3
6	2
8	1,5
10	1,2



Funciones polinómicas y racionales

023 Representa la función $y = \frac{24}{x}$ y escribe sus características.

x	y
-16	-1,5
-12	-2
-8	-3
-6	-4
-4	-6
-3	-8
-2	-12
-1	-24
1	24
2	12
3	8
4	6
6	4
8	3
12	2
16	1,5



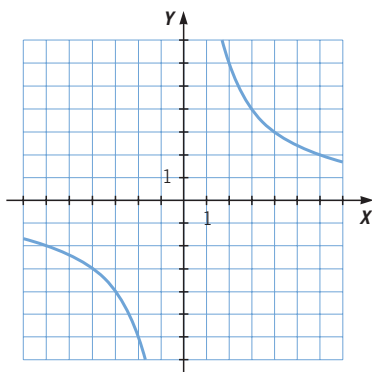
- El dominio lo forman todos los números reales menos 0: $\mathbb{R} - \{0\}$.
- La función no es continua en $x = 0$.
- La gráfica no corta a los ejes de coordenadas.
- Tiene una asíntota vertical en $x = 0$.
- Tiene una asíntota horizontal en $y = 0$.
- La función es simétrica respecto del origen de coordenadas.
- La función es decreciente y la gráfica está situada en los cuadrantes 1.º y 3.º.

024 El área de un triángulo es 12 m². Escribe la expresión de la función que relaciona su base con su altura, y represéntala.

La expresión en función de la base (x) y la altura (y) es:

$$x \cdot y = 12 \rightarrow y = \frac{12}{x}$$

x	y
-10	-1,2
-8	-1,5
-6	-2
-4	-3
-2	-6
2	6
4	3
6	2
8	1,5
10	1,2



025 Responde a estas preguntas para la función $y = -\frac{k}{x}$, con $k > 0$.

a) ¿Cuál es su dominio?

b) ¿Es creciente o decreciente?

c) Si pasa por el punto $(1, -1)$, ¿puede pasar por el punto $(-1, 2)$?

a) El dominio es todos los números reales menos 0: $\mathbb{R} - \{0\}$.

b) La función es creciente.

c) No puede pasar por $(-1, 2)$, y por simetría pasará por $(-1, 1)$.

026 Representa las siguientes funciones.

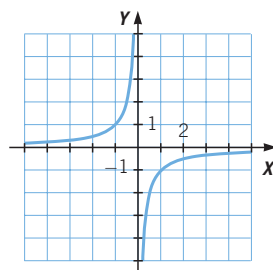
a) $y = \frac{-1}{x}$

b) $y = \frac{-1}{x-1}$

c) $y = \frac{-1}{x+1}$

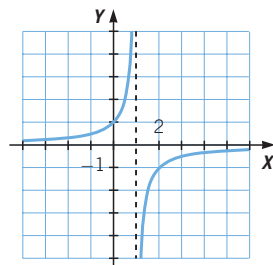
a) Como el numerador tiene signo negativo, la hipérbola ocupa los cuadrantes 2.º y 4.º. Los ejes son las rectas $x = 0$ e $y = 0$.

x	-2	-1	1	2
y	1/2	1	-1	-1/2



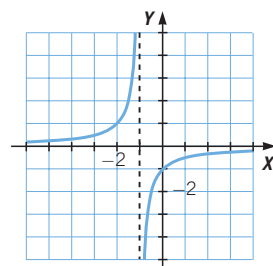
b) Como el numerador tiene signo negativo, la hipérbola ocupa los cuadrantes 2.º y 4.º. Los ejes son las rectas $x = 1$ e $y = 0$.

x	-1	0	2	3
y	1/2	1	-1	-1/2



c) Como el numerador tiene signo negativo, la hipérbola ocupa los cuadrantes 2.º y 4.º. Los ejes son las rectas $x = -1$ e $y = 0$.

x	-3	-2	0	1
y	1/2	1	-1	-1/2



Funciones polinómicas y racionales

- 027** A partir de la gráfica de la función $y = \frac{-1}{x}$, representa la gráfica de:

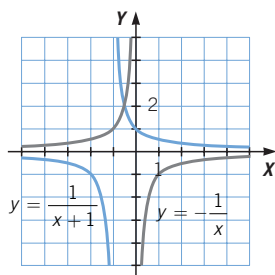
$$y = \frac{1}{x+1}$$

Dibujamos $y = \frac{-1}{x}$, la trasladamos

para conseguir $y = \frac{-1}{x+1}$

y la invertimos respecto del eje X

para conseguir $y = \frac{1}{x+1}$.



- 028** Conocida la gráfica de la función $y = \frac{1}{x}$, representada en rojo, ¿qué expresión algebraica tiene la gráfica verde?

La gráfica de color verde es una traslación

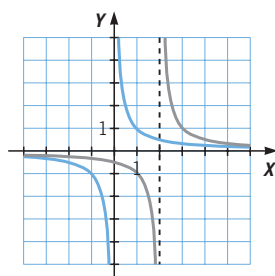
de $y = \frac{1}{x}$, dos unidades a la derecha.

Los ejes de la gráfica de color verde son las rectas $x = 2$ e $y = 0$, por lo que su expresión algebraica será de la forma

$y = \frac{k}{x-2}$, con $k > 0$.

Además, la gráfica pasa por el punto (3, 1), luego $k = 1$.

La ecuación de la hipérbola es $y = \frac{1}{x-2}$.



- 029** Representa las siguientes funciones.

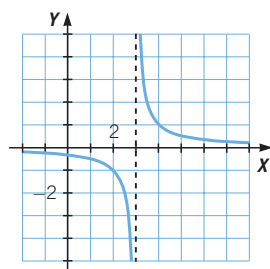
a) $y = \frac{1}{x-3}$

b) $y = \frac{1}{x-3} + 3$

a) La hipérbola ocupa los cuadrantes 1.º y 3.º.

Los ejes son las rectas $x = 3$ e $y = 0$.

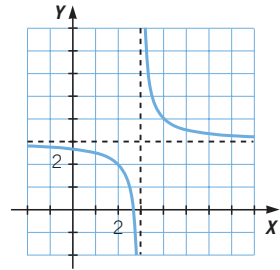
x	1	2	4	5
y	-1/2	-1	1	1/2



- b) Como el numerador tiene signo positivo, la hipérbola ocupa los cuadrantes 1.º y 3.º.

Los ejes son las rectas $x = 3$ e $y = 3$.

x	1	2	4	5
y	5/2	2	4	7/2



030 Representa gráficamente estas funciones.

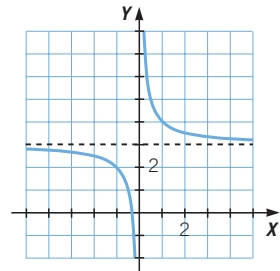
a) $y = \frac{1}{x} + 3$

b) $y = \frac{-1}{x - 3} + 3$

- a) Como el numerador tiene signo positivo, la hipérbola ocupa los cuadrantes 1.º y 3.º.

Los ejes son las rectas $x = 0$ e $y = 3$.

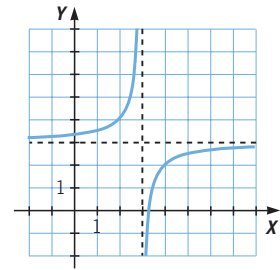
x	-2	-1	1	2
y	5/2	2	4	7/2



- b) Como el numerador tiene signo negativo, la hipérbola ocupa los cuadrantes 2.º y 4.º.

Los ejes son las rectas $x = 3$ e $y = 3$.

x	1	2	4	5
y	7/2	4	2	5/2



031 Conocida la hipérbola $y = \frac{1}{x}$, representada en color rojo, ¿cuál es la expresión algebraica de la hipérbola de color verde?

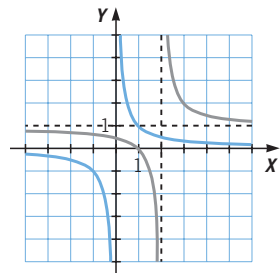
La gráfica de color verde es una traslación de $y = \frac{1}{x}$ dos unidades hacia la derecha y una unidad hacia arriba.

Los ejes de la gráfica de color verde son las rectas $x = 2$ e $y = 1$,

por lo que su expresión algebraica será de la forma $y = \frac{k}{x - 2} + 1$, con $k > 0$.

Además, la gráfica pasa por el punto $(1, 0)$, luego $k = 1$.

La ecuación de la hipérbola es $y = \frac{1}{x - 2} + 1$.



Funciones polinómicas y racionales

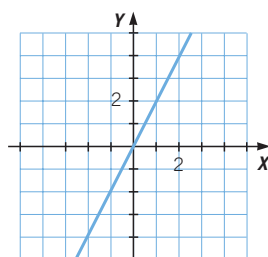
ACTIVIDADES

032 Estudia y representa las siguientes funciones polinómicas de primer grado.

- a) $y = 2x$ b) $y = -2x$ c) $y = 2x - 3$ d) $y = -2x + 3$

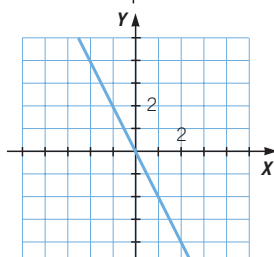
a) Su pendiente es 2, luego es creciente.

x	-2	-1	0	1	2
y	-4	-2	0	2	4

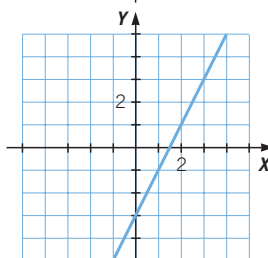


b) Su pendiente es -2 , y es decreciente.

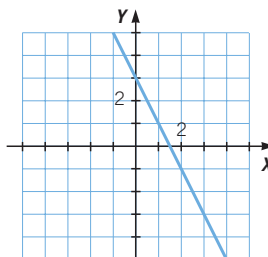
x	-2	-1	0	1	2
y	4	2	0	-2	-4



c) Esta recta se obtiene trasladando tres unidades hacia abajo la gráfica de la recta $y = 2x$.
Es creciente y su pendiente es 2.



d) Esta recta se obtiene trasladando tres unidades hacia arriba la gráfica de la recta $y = -2x$.
Es decreciente y su pendiente es -2 .



033 Pon un ejemplo de función lineal, otro de función afín y otro de función constante. Enumera sus semejanzas y diferencias.

Función lineal: $y = -3x$

Función constante: $y = -4$

Función afín: $y = -2x + 1$

Todas las funciones son rectas, la función constante no depende de x , la función lineal pasa por el origen de coordenadas y la función afín no pasa por el origen de coordenadas; estas dos últimas tienen pendiente distinta de cero.

034 Representa estas funciones.

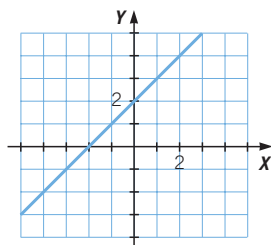
a) $f(x) = x + 2$

b) $g(x) = -x - 2$

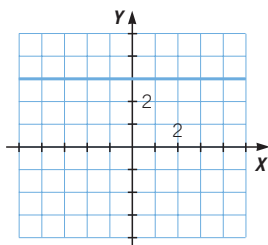
c) $h(x) = 3$

d) $i(x) = \frac{1}{3}x + \frac{5}{4}$

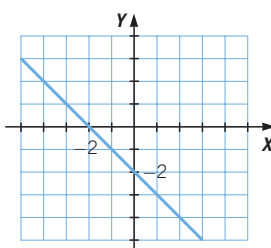
x	-2	0
$f(x) = x + 2$	0	2



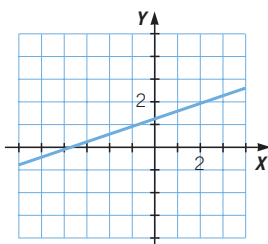
x	-2	0
$h(x) = 3$	3	3



x	0	1
$g(x) = -x - 2$	-2	-3



x	0	3
$i(x) = \frac{1}{3}x + \frac{5}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{9}{4}$



035 Representa en los mismos ejes de coordenadas estas funciones.

Explica sus diferencias.

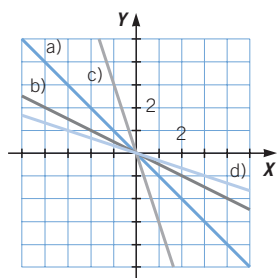
a) $y = -x$

b) $y = -\frac{1}{2}x$

c) $y = -3x$

d) $y = -\frac{1}{3}x$

Todas son funciones lineales que se diferencian en el valor de su pendiente.



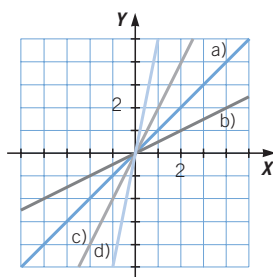
Funciones polinómicas y racionales

036 Representa estas funciones en los mismos ejes de coordenadas.

● ¿Qué diferencias hay?

- a) $y = x$ c) $y = 2x$
b) $y = \frac{1}{2}x$ d) $y = 5x$

Todas son funciones lineales que se diferencian en el valor de su pendiente.



037 HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE CALCULA LA ECUACIÓN DE UNA FUNCIÓN AFÍN A PARTIR DE SU GRÁFICA?

¿A qué función corresponde esta gráfica?

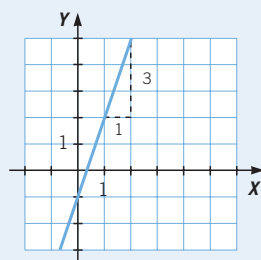
PRIMERO. Se halla la pendiente. Para ello, se calcula la variación de las variables x e y entre dos puntos de la recta:

$$m = \frac{3}{1} = 3$$

SEGUNDO. Se determina la ordenada en el origen. El punto de corte de la función con el eje Y es $(0, -1)$.

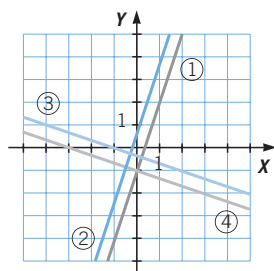
TERCERO. Se escribe la expresión algebraica de la función con los datos obtenidos.

$$y = mx + n \rightarrow y = 3x - 1$$



038 Relaciona cada expresión algebraica con su gráfica.

- a) $y = 3x - 1$
b) $y = -\frac{1}{3}x - 1$
c) $y = 3x + \frac{2}{3}$
d) $y = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$



Las rectas son paralelas dos a dos, luego tienen pendientes iguales dos a dos.

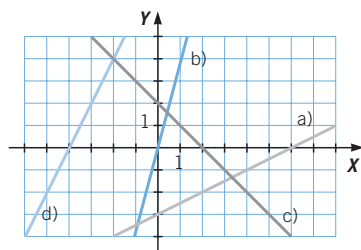
Las rectas ① y ② son crecientes, es decir, tienen pendiente positiva y sus expresiones algebraicas serán a) y c).

Para distinguir una gráfica de otra calculamos su punto de corte con el eje Y . Deducimos que la gráfica ① corresponde a a) y la gráfica ② a c).

Con un razonamiento análogo deducimos que la gráfica ③ corresponde a d) y la gráfica ④ corresponde a b).

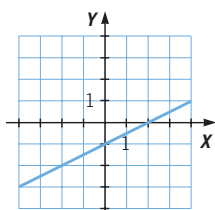
- 039 ● Calcula las expresiones algebraicas de las funciones representadas por estas rectas.

- a) $y = \frac{1}{2}x - 3$
 b) $y = 4x$
 c) $y = -x + 2$
 d) $y = 2x + 8$

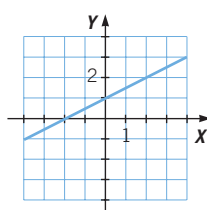


- 040 ● ¿Cuál de las rectas tiene por ecuación $y = -\frac{1}{2}x - 1$?

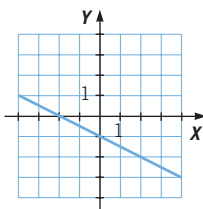
a)



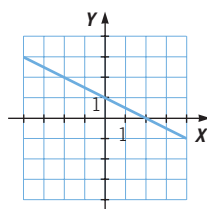
c)



b)

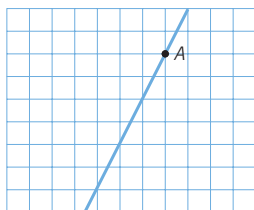


d)



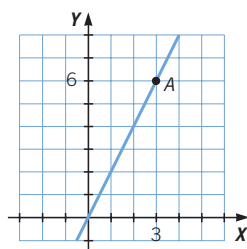
La recta que tiene por ecuación $y = -\frac{1}{2}x - 1$ es la del apartado b), ya que es decreciente y pasa por el punto $(0, -1)$.

- 041 ● Esta gráfica corresponde a una función de proporcionalidad directa. Dibuja los ejes si la abscisa del punto A es 3.



- a) ¿Cuál es la ordenada del punto A?
 b) ¿Y la expresión algebraica de la función?

- a) La ordenada del punto A es 6.
 b) $y = 2x$



Funciones polinómicas y racionales

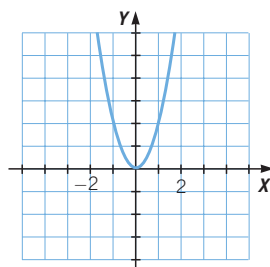
042 Estudia y representa las siguientes funciones polinómicas de segundo grado.

a) $y = 2x^2$ b) $y = -2x^2$ c) $y = \frac{1}{2}x^2$ d) $y = \frac{x^2}{4}$

a) La función es simétrica respecto del eje de ordenadas.

El vértice es el punto (0, 0), donde tiene un mínimo.

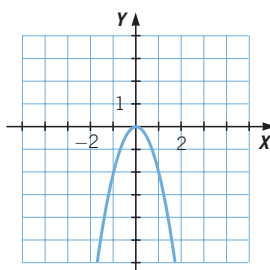
x	-2	-1	0	1	2
y	8	2	0	2	8



b) La función es simétrica respecto del eje de ordenadas.

El vértice es el punto (0, 0), donde tiene un máximo.

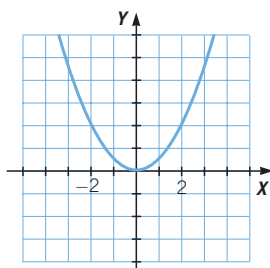
x	-2	-1	0	1	2
y	-8	-2	0	-2	-8



c) La función es simétrica respecto del eje de ordenadas.

El vértice es el punto (0, 0), donde tiene un mínimo.

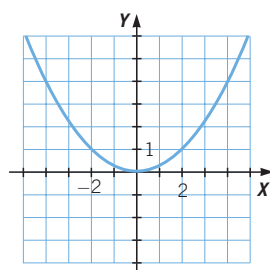
x	-2	-1	0	1	2
y	2	0,5	0	0,5	2



d) La función es simétrica respecto del eje de ordenadas.

El vértice es el punto (0, 0), donde tiene un mínimo.

x	-2	-1	0	1	2
y	1	0,25	0	0,25	1



043 Representa la función polinómica de segundo grado $y = \frac{1}{3}x^2$ a partir de una tabla de valores.

a) ¿Cuál es el vértice de la parábola?

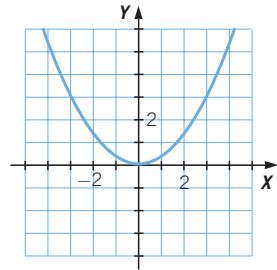
b) Determina la ecuación de la recta que es su eje de simetría.

La función es simétrica respecto del eje de ordenadas.

x	-2	-1	0	1	2
y	4/3	1/3	0	1/3	4/3

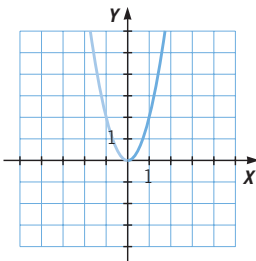
a) El vértice es el punto (0, 0), donde tiene un mínimo.

b) El eje de simetría es la recta de ecuación $x = 0$.

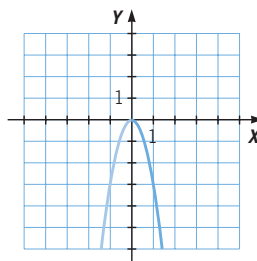


044 Completa las siguientes parábolas, teniendo en cuenta que son simétricas respecto de un eje que pasa por su vértice.

a)



b)



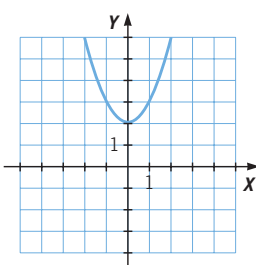
Escribe la expresión algebraica de cada una de las funciones.

a) $y = 2x^2$

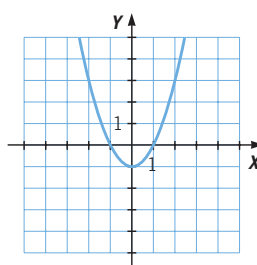
b) $y = -3x^2$

045 Calcula cuál es el valor de la constante c en la expresión $y = x^2 + c$ de estas parábolas. Explica cómo lo haces.

a)



b)



a) El vértice de la parábola es el punto (0, 2), y sustituyendo en $y = x^2 + c$, resulta que $c = 2$. Luego la ecuación de la parábola es $y = x^2 + 2$.

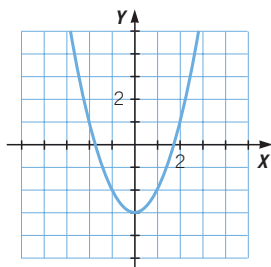
b) El vértice de la parábola es el punto (0, -1), y sustituyendo en la expresión $y = x^2 + c$, resulta que $c = -1$. Por tanto, la ecuación de la parábola es $y = x^2 - 1$.

Funciones polinómicas y racionales

046



Determina el recorrido de la función $y = x^2 - 3$, representando primero la parábola correspondiente. ¿Existe alguna función polinómica de segundo grado cuyo recorrido sea todos los números reales? ¿Por qué?



El recorrido de la parábola es el intervalo $[-3, +\infty)$.

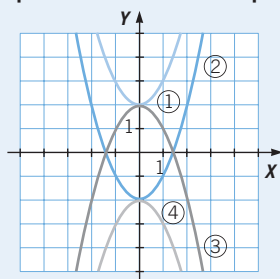
No existe ninguna parábola cuyo recorrido sea todos los números reales, porque siempre está limitado por el vértice.

047

HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE PUEDEN RELACIONAR ALGUNAS PARÁBOLAS CON LAS ECUACIONES?

Relaciona cada parábola con su correspondiente expresión algebraica.



a) $y = x^2 + 2$

b) $y = x^2 - 2$

c) $y = -x^2 + 2$

d) $y = -x^2 - 2$

PRIMERO.

Se relaciona la existencia de máximos o mínimos con el valor de a .

Las parábolas ① y ② presentan un mínimo $\rightarrow a > 0$

Las parábolas ③ y ④ presentan un máximo $\rightarrow a < 0$

Por tanto, las parábolas ① y ② corresponden a las ecuaciones c) y d), y las parábolas ③ y ④ a a) y b).

SEGUNDO. Se estudian sus ejes de simetría. El eje de simetría de todas las parábolas es $x = 0$. Por tanto, resulta que $b = 0$.

TERCERO. Se estudian las traslaciones de cada parábola.

La parábola ① está trasladada 2 unidades hacia arriba respecto de $y = x^2$. Su ecuación es $y = x^2 + 2$.

La parábola ② está trasladada 2 unidades hacia abajo respecto de $y = x^2$. Su ecuación es $y = x^2 - 2$.

La parábola ③ está trasladada 2 unidades hacia arriba respecto de $y = -x^2$. Su ecuación es $y = -x^2 + 2$.

La parábola ④ está trasladada 2 unidades hacia abajo respecto de $y = -x^2$. Su ecuación es $y = -x^2 - 2$.

048 Relaciona cada parábola con su correspondiente expresión algebraica.

a) $y = x^2 - 3$

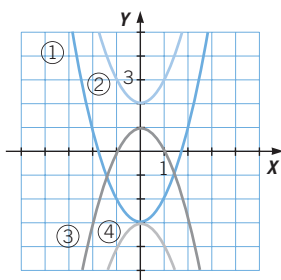
c) $y = x^2 + 2$

b) $y = -x^2 + 1$

d) $y = -x^2 - 3$

Las dos parábolas que tienen un mínimo relativo son ① y ②, que se corresponden con las expresiones $y = x^2 - 3$ e $y = x^2 + 2$, respectivamente.

Las gráficas ③ y ④, que poseen un máximo relativo, se corresponden con las expresiones $y = -x^2 + 1$ e $y = -x^2 - 3$, respectivamente.



049 Calcula la expresión algebraica de la siguiente parábola.

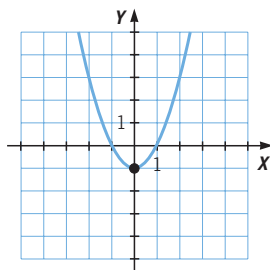
Esta parábola tiene un mínimo, luego el coeficiente de x^2 es $a > 0$.

El eje de simetría es el eje de ordenadas, por lo que su expresión es de la forma $y = ax^2 + c$, con $a > 0$.

El vértice está en el punto $(0, -1)$, siendo $c = -1$.

Corta al eje de abscisas en $x = 1$ y $x = -1$.

La expresión algebraica de la parábola es $y = x^2 - 1$.



050 Halla los cortes con los ejes, el vértice y la ecuación del eje de simetría de estas parábolas.

a) $y = -x^2 - 3x$

c) $y = \frac{3}{2}x^2 - x$

b) $y = x^2 - \frac{2}{3}x$

d) $y = x^2 + 2x$

a) Corta a los ejes en los puntos $(0, 0)$ y $(-3, 0)$.

El eje de simetría es la recta $x = -\frac{3}{2}$ y el vértice es el punto $\left(-\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$.

b) Corta a los ejes en los puntos $(0, 0)$ y $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$.

El eje de simetría es la recta $x = \frac{1}{3}$ y el vértice es el punto $\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{9}\right)$.

c) Corta a los ejes en los puntos $(0, 0)$ y $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$.

El eje de simetría es la recta $x = \frac{1}{3}$ y el vértice es el punto $\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}\right)$.

d) Corta a los ejes en los puntos $(0, 0)$ y $(-2, 0)$.

El eje de simetría es la recta $x = -1$ y el vértice es el punto $(-1, -1)$.

Funciones polinómicas y racionales

051 Analiza cómo será la gráfica de estas funciones polinómicas sin representarlas.



a) $y = x^2 - 3x^2 + 4$

b) $y = -x - 3$

a) La función $y = x^2 - 3x^2 + 4$ es un polinomio de segundo grado, luego su gráfica es una parábola.

El coeficiente de x^2 es $-2 < 0$, por lo que la parábola tiene un máximo en el vértice.

El coeficiente de x es 0, y el eje de la parábola es la recta $x = 0$.

Su vértice es el punto $(0, 4)$.

b) La función $y = -x - 3$ es un polinomio de primer grado, y su gráfica es una recta.

El coeficiente de x es $-1 < 0$, la recta es decreciente, su pendiente es negativa y pasa por el punto $(0, -3)$.

052 Realiza, analizando el valor de los coeficientes, una aproximación de la gráfica de esta función polinómica.



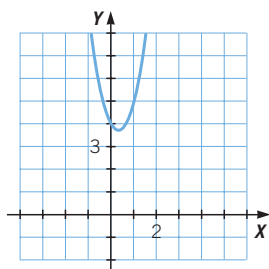
$$y = 3x^2 - 2x + 4$$

La función $y = 3x^2 - 2x + 4$ es un polinomio de segundo grado y su representación gráfica es una parábola.

El coeficiente de x^2 es positivo, por lo que la parábola tiene un mínimo en el vértice. Como este coeficiente, en valor absoluto, es mayor que 1, sus ramas están más cerradas que las de la parábola $y = x^2$.

El eje es la recta $x = \frac{1}{3}$ y su vértice es el punto $\left(\frac{1}{3}, \frac{11}{3}\right)$.

053 Representa la parábola $y = 3x^2 - 2x + 4$, y comprueba que la aproximación de la actividad anterior es correcta.



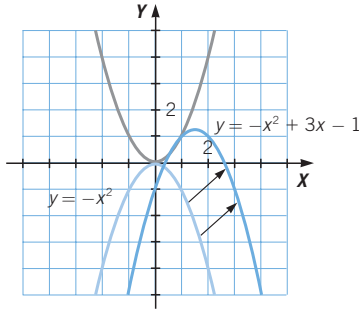
054 A partir de la gráfica de la función $y = x^2$, describe cómo realizarías la gráfica de la función polinómica $y = -x^2 + 3x - 1$.



Como son funciones polinómicas de segundo grado, sus representaciones son parábolas. Analizando el coeficiente de x^2 observamos que son iguales en valor absoluto, $|1| = |-1|$, pero de signo contrario.

Esto quiere decir que las dos parábolas son iguales en cuanto a la abertura de sus ramas, pero $y = -x^2 + 3x - 1$ tiene un máximo en el vértice, pues es una traslación de la parábola $y = -x^2$.

El eje de la parábola es la recta $x = \frac{3}{2}$, y el vértice es el punto de coordenadas $V\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{4}\right)$. Para representarla hay que trasladar el vértice de la parábola $y = -x^2$ al nuevo vértice.

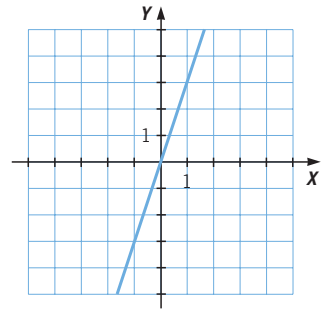


055

Discute cómo serán los coeficientes de la expresión algebraica que corresponde a cada una de estas parábolas o rectas.

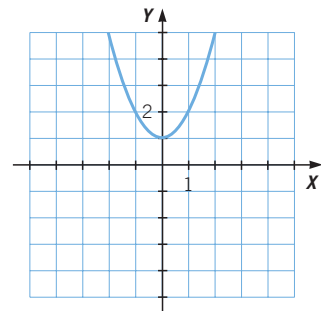
a) Es una recta $\rightarrow y = mx + n$.

- Pasa por el origen de coordenadas, luego la función es lineal $\rightarrow n = 0$.
- La función es creciente $\rightarrow m > 0$.
- La pendiente es 3, porque al aumentar una unidad en el eje X , se aumentan tres unidades en el eje $Y \rightarrow m = 3$.
- La ecuación es $y = 3x$.



b) Es una parábola $\rightarrow y = ax^2 + bx + c$.

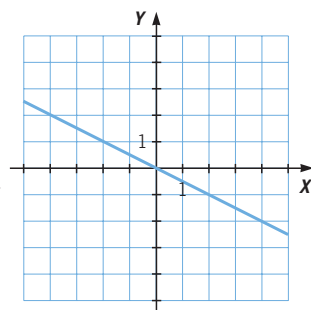
- Tiene un mínimo relativo en el vértice $\rightarrow a > 0$.
- Es igual de cerrada que $y = x^2 \rightarrow |a| = 1$.
- El eje de simetría es el eje de ordenadas $Y \rightarrow b = 0$.
- El vértice es el punto de coordenadas $V(0, 1) \rightarrow c = 1$.
- La ecuación de la parábola es por tanto $y = x^2 + 1$.



Funciones polinómicas y racionales

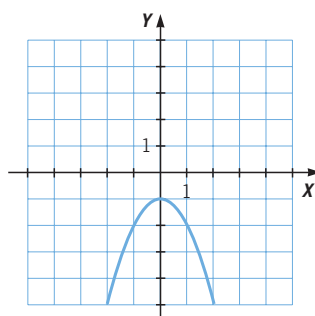
c) Es una recta $\rightarrow y = mx + n$.

- Pasa por el origen de coordenadas, luego la función es lineal $\rightarrow n = 0$.
- La función es decreciente $\rightarrow m < 0$.
- La pendiente es $-\frac{1}{2}$, ya que al aumentar una unidad en el eje X se disminuye media unidad en el eje $Y \rightarrow m = -\frac{1}{2}$.
- La ecuación es $y = -\frac{x}{2}$.



d) Es una parábola $\rightarrow y = ax^2 + bx + c$.

- Tiene un máximo en el vértice $\rightarrow a < 0$.
- Es igual de cerrada que $y = x^2 \rightarrow |a| = 1$.
- El eje de simetría es el eje $Y \rightarrow b = 0$.
- El vértice es $V(0, -1) \rightarrow c = -1$.
- La ecuación es $y = -x^2 - 1$.



056 HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE CALCULAN LOS PUNTOS DE INTERSECCIÓN ENTRE UNA RECTA Y UNA PARÁBOLA?

Calcula los puntos de intersección de la recta $y = -x + 3$ y la parábola $y = 2x^2 - x + 1$.

PRIMERO.

Se plantea un sistema de ecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} y = -x + 3 \\ y = 2x^2 - x + 1 \end{array} \right\} \rightarrow -x + 3 = 2x^2 - x + 1$$

SEGUNDO. Se resuelve el sistema.

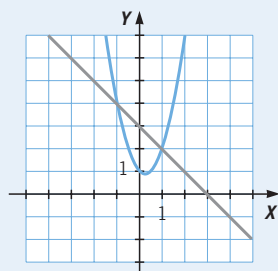
$$-x + 3 = 2x^2 - x + 1 \rightarrow 2x^2 - 2 = 0$$

$$x^2 = 1 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

TERCERO. Se sustituyen estos valores en las ecuaciones y se obtienen los puntos de corte.

$$\begin{aligned} y &= -x + 3 \xrightarrow{x=1} y = 2 \rightarrow A(1, 2) \\ &\xrightarrow{x=-1} y = 4 \rightarrow B(-1, 4) \end{aligned}$$

Los puntos de corte de la parábola y la recta son $(1, 2)$ y $(-1, 4)$.

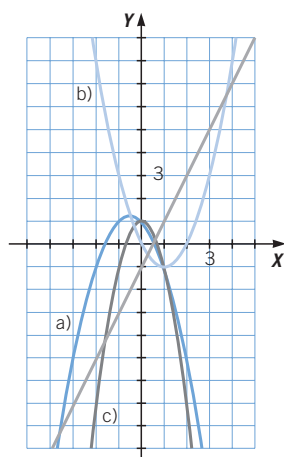


057 Calcula la intersección de la recta $y = 2x - 1$ y estas parábolas.

a) $y = -x^2 - x + 1$

b) $y = x^2 - 2x$

c) $y = -2x^2 + 1$



$$\begin{aligned} \text{a) } \left. \begin{aligned} y &= 2x - 1 \\ y &= -x^2 - x + 1 \end{aligned} \right\} &\rightarrow 2x - 1 = -x^2 - x + 1 \\ &\rightarrow x^2 + 3x - 2 = 0 \\ &\rightarrow \begin{cases} x = \frac{-3 + \sqrt{17}}{2} \rightarrow y = -4 + \sqrt{17} \\ x = \frac{-3 - \sqrt{17}}{2} \rightarrow y = -4 - \sqrt{17} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \left. \begin{aligned} y &= 2x - 1 \\ y &= x^2 - 2x \end{aligned} \right\} &\rightarrow 2x - 1 = x^2 - 2x \rightarrow x^2 - 4x + 1 = 0 \\ &\rightarrow \begin{cases} x = \frac{4 + \sqrt{12}}{2} = 2 + \sqrt{3} \rightarrow y = 3 + 2\sqrt{3} \\ x = \frac{4 - \sqrt{12}}{2} = 2 - \sqrt{3} \rightarrow y = 3 - 2\sqrt{3} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \left. \begin{aligned} y &= 2x - 1 \\ y &= -2x^2 + 1 \end{aligned} \right\} &\rightarrow 2x - 1 = -2x^2 + 1 \rightarrow 2x^2 + 2x - 2 = 0 \\ &\rightarrow \begin{cases} x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \rightarrow y = -2 + \sqrt{5} \\ x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \rightarrow y = -2 - \sqrt{5} \end{cases} \end{aligned}$$

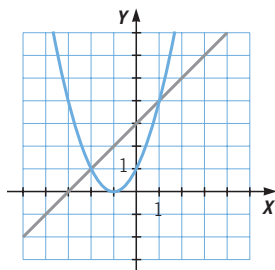
058 Determina las ecuaciones de la recta y la parábola, y calcula sus puntos de intersección.

Recta: $y = x + 4$

Parábola: $y = (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$

Puntos de corte:

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} y &= x + 3 \\ y &= x^2 + 2x + 1 \end{aligned} \right\} &\rightarrow x + 3 = x^2 + 2x + 1 \rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \\ &\rightarrow \begin{cases} x = -2 \rightarrow y = 1 \\ x = 1 \rightarrow y = 4 \end{cases} \end{aligned}$$



Funciones polinómicas y racionales

059

Halla la ecuación de una recta que corte a la parábola $y = -x^2 + 2$ en cada punto.

a) (0, 2)

b) (1, 1)

c) (2, -2)

Además de este punto, ¿se cortan en algún otro punto? Cálculalo.

Las rectas que pasan por un punto $P(a, b)$ son de la forma $y - b = m(x - a)$, con $m \in \mathbb{R}$, y dando distintos valores a m , obtenemos diferentes rectas que pasan por ese punto.

a) Las rectas que cortan a la parábola $y = -x^2 + 2$ en el punto (0, 2) son de la forma $y - 2 = m(x - 0) \rightarrow y = mx + 2$, ($y = x + 2$).

La recta $y = mx + 2$ corta a la parábola en dos puntos: (0, 2) y $(-m, -m^2 + 2)$. Para $m = 1 \rightarrow (-1, 1)$.

b) Las rectas que cortan a la parábola $y = -x^2 + 2$ en el punto (1, 1) son $y - 1 = m(x - 1) \rightarrow y = mx + (1 - m)$, ($y = x$).

La recta $y = mx + (1 - m)$ corta a la parábola en dos puntos: (1, 1) y $(-m - 1, -m^2 - 2m + 1)$. Para $m = 1 \rightarrow (-2, -2)$.

c) Las rectas que cortan a la parábola $y = -x^2 + 2$ en el punto (2, -2) son $y + 2 = m(x - 2) \rightarrow y = mx - (2m + 2)$, ($y = x - 4$).

La recta $y = mx - (2m + 2)$ corta a la parábola en dos puntos: (2, -2) y $(-m - 2, -m^2 - 4m - 2)$. Para $m = 1 \rightarrow (-3, -7)$.

060

La siguiente tabla corresponde a una función de proporcionalidad inversa.

x	1	2	3	4	5	...
y			$\frac{1}{4}$			

a) Completa la tabla.

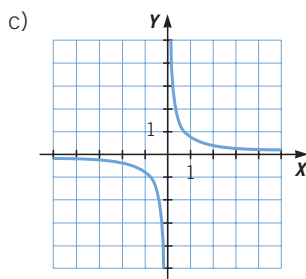
b) Escribe la expresión algebraica de la función.

c) Representa la función.

a)

x	1	2	3	4	5	...
y	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{20}$	...

b) $y = \frac{3}{x}$

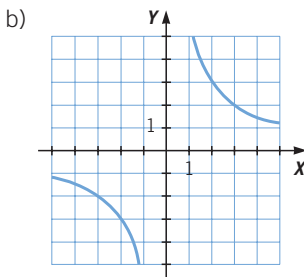


061 La relación entre dos números positivos viene establecida por la tabla.

x	0,02	0,1	0,2	0,5	1	2	...
y	300	60	30	12	6	3	...

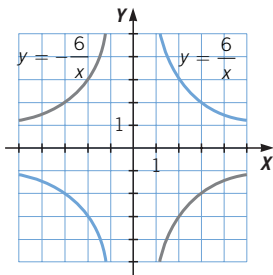
- a) ¿Cuál es su expresión algebraica?
 b) Representala gráficamente.
 c) Da valores a x próximos a cero. ¿Qué ocurre con los valores de y ?

a) $xy = 6 \rightarrow y = \frac{6}{x}$



- c) Cuando x toma valores cercanos a cero, y toma valores muy elevados.

062 Representa las funciones $y = \frac{6}{x}$ e $y = -\frac{6}{x}$, y escribe sus diferencias.



Son funciones simétricas respecto del eje horizontal.

A cada valor de x le corresponden valores opuestos para y .

$y = \frac{6}{x}$ es decreciente y su representación está en los cuadrantes 1.º y 3.º.

$y = -\frac{6}{x}$ es creciente y su representación está en los cuadrantes 2.º y 4.º.

Funciones polinómicas y racionales

063

Estudia y representa las siguientes funciones de proporcionalidad inversa.

a) $y = \frac{1}{3x}$

b) $y = -\frac{1}{3x}$

a)

x	1	2	3	4	5	...
y	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{20}$	...

Dominio: todos los números reales menos 0: $\mathbb{R} - \{0\}$.

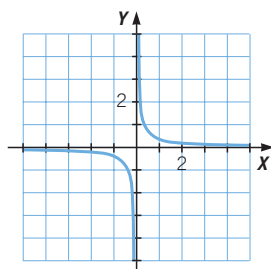
Recorrido: todos los números reales menos el 0: $\mathbb{R} - \{0\}$.

Continuidad: la gráfica es continua en todos los puntos excepto en $x = 0$.

Crecimiento y decrecimiento: la función es decreciente.

No tiene máximos ni mínimos relativos.

Presenta una simetría respecto del origen de coordenadas.



b)

x	-2	-1	1	2
y	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$

Dominio: todos los números reales menos 0: $\mathbb{R} - \{0\}$.

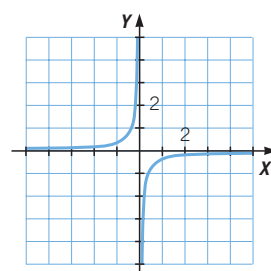
Recorrido: todos los números reales menos 0: $\mathbb{R} - \{0\}$.

Continuidad: la gráfica es continua en todos los puntos excepto en $x = 0$.

Crecimiento y decrecimiento: la función es creciente.

No tiene máximos ni mínimos relativos.

Presenta una simetría respecto del origen de coordenadas.



064

Dada la función $y = -\frac{5}{x}$:

a) ¿Para qué valores es creciente la función?

b) ¿Tiene máximo o mínimo?

c) Haz una tabla de valores donde x tome valores de -1 a 0 y de 1 a 0 cercanos a 0 . ¿A qué valores se acerca la función?

a) Es creciente en toda la recta real, menos en 0 , donde no está definida.

b) No tiene máximos ni mínimos, por ser siempre creciente.

c)

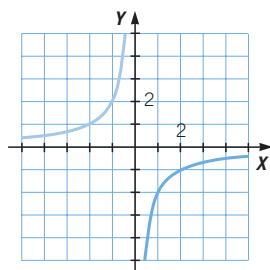
x	-1	-0,1	-0,01	-0,001	-0,0001	0,0001	0,001	0,01	0,1	1
y	5	50	500	5.000	50.000	-50.000	-5.000	-500	-50	-5

Cuando toma valores negativos próximos a 0 y valores positivos muy grandes, se acerca a infinito.

Cuando toma valores positivos próximos a 0 y valores negativos muy grandes, se acerca a menos infinito.

065 Completa la gráfica correspondiente a una hipérbola.

Como la gráfica de la hipérbola es simétrica respecto del origen de coordenadas, la otra rama pasa por los puntos $(-2, 1)$ y $(-1, 2)$.

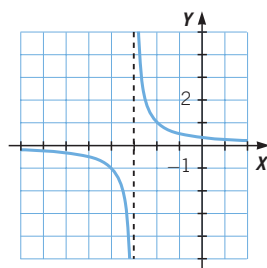
**066** Realiza la gráfica de las hipérbolas.

a) $y = \frac{1}{x+3}$ b) $y = \frac{1}{x-1}$

¿Cuáles son los ejes de cada una?

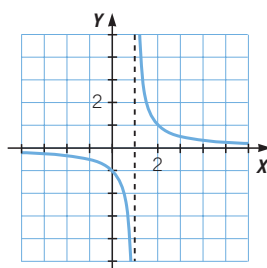
- a) Como el numerador es positivo, la hipérbola ocupa los cuadrantes 1.º y 3.º.
Los ejes son $x = -3$ e $y = 0$.

x	-5	-4	-2	-1
y	$-\frac{1}{2}$	-1	1	$\frac{1}{2}$



- b) Como el numerador es positivo, la hipérbola ocupa los cuadrantes 1.º y 3.º.
Los ejes son $x = 1$ e $y = 0$.

x	-1	0	2	3
y	$-\frac{1}{2}$	-1	1	$\frac{1}{2}$

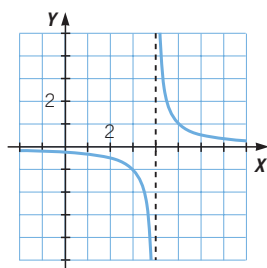
**067** Dibuja la gráfica de las hipérbolas.

a) $y = \frac{1}{x-4}$ b) $y = \frac{-1}{x-4}$

¿Cuáles son los ejes de cada una?

- a) Como el numerador es positivo, la hipérbola ocupa los cuadrantes 1.º y 3.º.
Los ejes son las rectas $x = 4$ e $y = 0$.

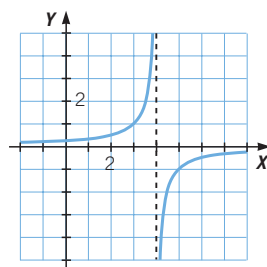
x	2	3	5	6
y	$-\frac{1}{2}$	-1	1	$\frac{1}{2}$



Funciones polinómicas y racionales

- b) Como el numerador es negativo, la hipérbola ocupa los cuadrantes 2.º y 4.º. Los ejes son las rectas $x = 4$ e $y = 0$.

x	2	3	5	6
y	$\frac{1}{2}$	1	-1	$-\frac{1}{2}$



068 Representa las hipérbolas.

a) $y = \frac{1}{x+2}$

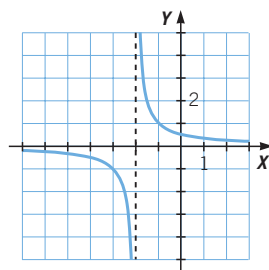
c) $y = \frac{1}{x+2} + 2$

b) $y = \frac{1}{x} + 2$

d) $y = \frac{-1}{x+2} + 2$

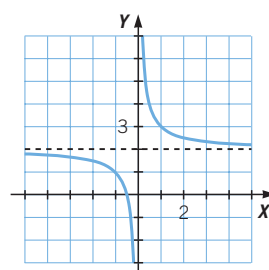
- a) Los ejes son las rectas $x = -2$ e $y = 0$.

x	-4	-3	-1	0
y	$-\frac{1}{2}$	-1	1	$\frac{1}{2}$



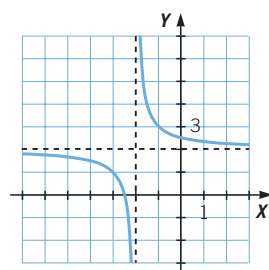
- b) Los ejes son las rectas $x = 0$ e $y = 2$.

x	-2	-1	1	2
y	$\frac{3}{2}$	1	3	$\frac{5}{2}$



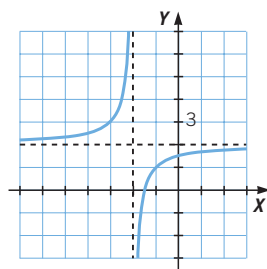
- c) Los ejes son las rectas $x = -2$ e $y = 2$.

x	-4	-3	-1	0
y	$\frac{3}{2}$	1	3	$\frac{5}{2}$



d) Los ejes son las rectas $x = -2$ e $y = 2$.

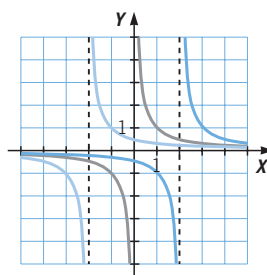
x	-4	-3	-1	0
y	$\frac{5}{2}$	1	3	$\frac{3}{2}$



069 Conocida la hipérbola $y = \frac{1}{x}$, representada en color azul, escribe la expresión algebraica de las hipérbolas de color rojo y verde.

Roja: $y = \frac{1}{x - 2}$

Verde: $y = \frac{1}{x + 2}$



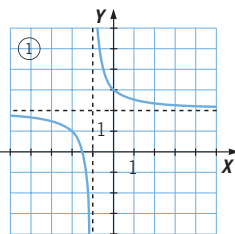
070 Relaciona cada gráfica con su expresión algebraica.

a) $y = \frac{1}{x + 1} + 2$ c) $y = \frac{1}{x - 2} - 4$

b) $y = \frac{-1}{x + 3}$ d) $y = \frac{-1}{x} + 2$

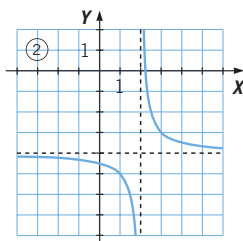
La gráfica ① ocupa los cuadrantes 1.º y 3.º, por lo que el numerador será positivo.

Los ejes son $x = -1$ e $y = 2$, luego su expresión es a).



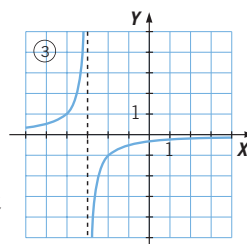
La gráfica ② ocupa los cuadrantes 1.º y 3.º, luego el numerador es positivo.

Los ejes son $x = 2$ e $y = -4$, y su expresión es c).



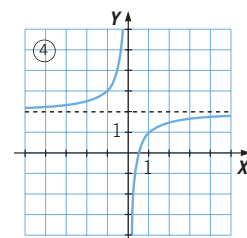
La gráfica ③ ocupa los cuadrantes 2.º y 4.º, luego el numerador es negativo.

Los ejes son $x = -3$ e $y = 0$, y su expresión algebraica será b).



La gráfica ④ ocupa los cuadrantes 2.º y 4.º, y el numerador es negativo.

Los ejes son $x = 0$ e $y = 2$, y su expresión algebraica es d).



Funciones polinómicas y racionales

071

Representa las siguientes hipérbolas.

a) $y = \frac{1}{x-2} + 2$

c) $y = \frac{-1}{x-1} + 4$

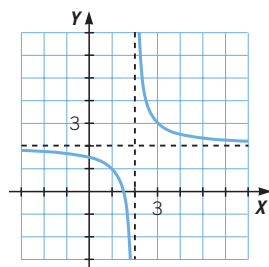
b) $y = \frac{1}{x-3} - 3$

d) $y = \frac{-1}{x-4} - 2$

a) La función es decreciente.

Los ejes son las rectas $x = 2$ e $y = 2$.

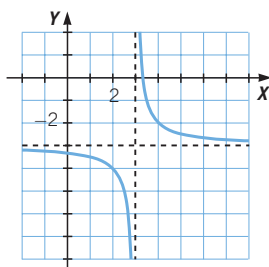
x	0	1	3	4
y	$\frac{3}{2}$	1	3	$\frac{5}{2}$



b) La función es decreciente.

Los ejes son las rectas $x = 3$ e $y = -3$.

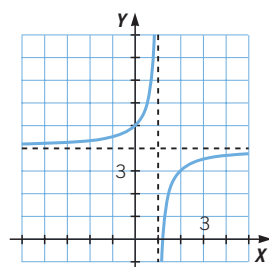
x	1	2	4	5
y	$-\frac{7}{2}$	-4	-2	$-\frac{5}{2}$



c) La función es creciente.

Los ejes son las rectas $x = 1$ e $y = 4$.

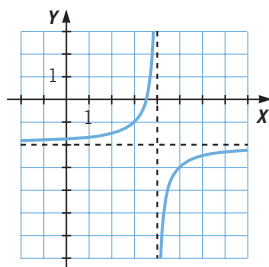
x	-1	0	2	3
y	$\frac{9}{2}$	5	3	$\frac{7}{2}$



d) La función es creciente.

Los ejes son las rectas $x = 4$ e $y = -2$.

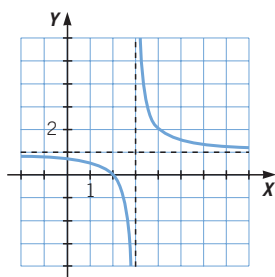
x	2	3	5	6
y	$-\frac{3}{2}$	-1	-3	$-\frac{7}{2}$



- 072** Dibuja una hipérbola que corte a los dos ejes de coordenadas, y escribe su expresión algebraica.

Respuesta abierta.

$$y = \frac{1}{x-3} + 1$$



073 HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE REPRESENTAN LAS FUNCIONES DEL TIPO $y = \frac{x-a}{x-b}$?

Representa la función $y = \frac{x-3}{x-4}$.

PRIMERO.

Se dividen los polinomios.

$$\begin{array}{r} x-3 \\ -x+4 \\ \hline 1 \end{array} \bigg| \frac{x-4}{1} \rightarrow y = \frac{x-3}{x-4} = 1 + \frac{1}{x-4}$$

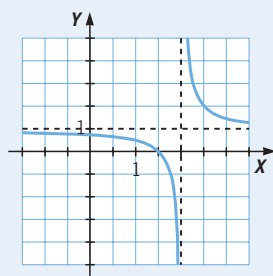
SEGUNDO. Se presenta la función racional del tipo $y = \frac{k}{x-a} + b$ que resulta.

La función $y = \frac{1}{x-4} + 1$ es una hipérbola semejante a la hipérbola $y = \frac{1}{x}$, cuyos ejes son:

$$x = 4 \rightarrow \text{Eje vertical}$$

$$y = 1 \rightarrow \text{Eje horizontal}$$

La representación de la hipérbola es la siguiente.



Funciones polinómicas y racionales

074

Representa las siguientes funciones.

a) $y = \frac{x-6}{x-5}$

c) $y = \frac{x+2}{x+1}$

b) $y = \frac{3x+7}{x+2}$

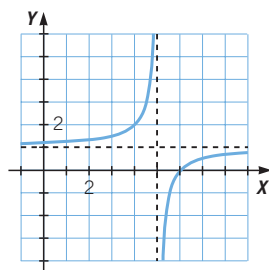
d) $y = \frac{2x-15}{x-7}$

a) Hacemos la división: $y = \frac{x-6}{x-5} = 1 - \frac{1}{x-5}$.

La función $y = 1 - \frac{1}{x-5}$ es una hipérbola

semejante a $y = -\frac{1}{x}$. Los nuevos ejes.

de esta hipérbola son: $x = 5$ e $y = 1$.

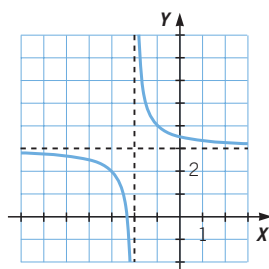


b) Hacemos la división: $y = \frac{3x+7}{x+2} = 3 + \frac{1}{x+2}$.

La función $y = 3 + \frac{1}{x+2}$ es una hipérbola

semejante a $y = \frac{1}{x}$. Los nuevos ejes.

de esta hipérbola son: $x = -2$ e $y = 3$.

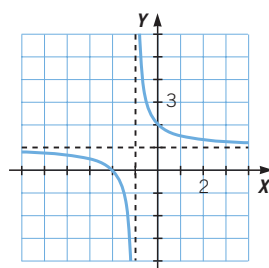


c) Hacemos la división: $y = \frac{x+2}{x+1} = 1 + \frac{1}{x+1}$.

La función $y = 1 + \frac{1}{x+1}$ es una hipérbola

semejante a $y = \frac{1}{x}$. Los nuevos ejes.

de esta hipérbola son: $x = -1$ e $y = 1$.

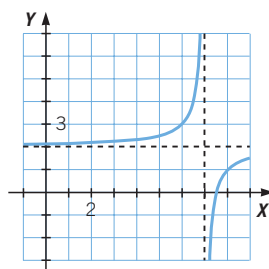


d) Hacemos la división: $y = \frac{2x-15}{x-7} = 2 - \frac{1}{x-7}$.

La función $y = 2 - \frac{1}{x-7}$ es una hipérbola

semejante a $y = -\frac{1}{x}$. Los nuevos ejes.

de esta hipérbola son: $x = 7$ e $y = 2$.



075 A nivel del mar, el agua hierve a 100 °C, pero cada incremento de 100 m en la altitud supone una décima de grado menos para hervir.

- a) Calcula el punto de ebullición en las cimas del Aneto (3.404 m) y del Everest (8.844 m).
 b) Indica la expresión algebraica de la función *Temperatura de ebullición del agua–Altitud*.

$$a) T_{\text{Aneto}} = 100 - \frac{3.404}{100} \cdot 0,1 = 96,596 \text{ °C}$$

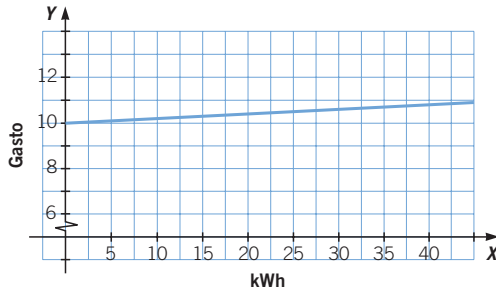
$$T_{\text{Everest}} = 100 - \frac{8.844}{100} \cdot 0,1 = 91,156 \text{ °C}$$

b) Temperatura: y Altura: x

$$y = 100 - 0,1 \cdot \frac{x}{100} \rightarrow y = 100 - \frac{x}{1.000}$$

076 El coste fijo de la factura mensual de electricidad es de 10 €. Además, cada kilowatio cuesta 0,02 €. Haz una tabla que relacione el gasto mensual, en kWh, y el importe, en €. Escribe la función y represéntala.

kWh	Gasto
0	10
10	10,2
20	10,4
30	10,6
40	10,8
50	11



Gasto: y kWh: x

$$y = 10 + 0,02x$$

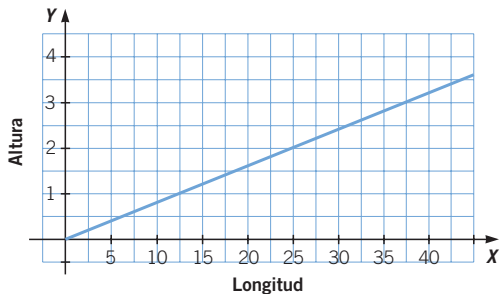
077 La relación entre la longitud recorrida y la altura alcanzada al subir un puerto de montaña se determina por la señal de tráfico que informa de la pendiente.

Si en un puerto de montaña la pendiente es del 8 %, expresa la relación entre la longitud recorrida y la altura alcanzada de forma algebraica, y representa la función.

Altura: y

Longitud: x

$$y = 0,08x$$



Funciones polinómicas y racionales

078



Los taxis de una ciudad cobran 1 € por bajada de bandera y 0,80 € por cada kilómetro recorrido.

a) Haz una tabla que exprese el precio del viaje en función de los kilómetros recorridos.

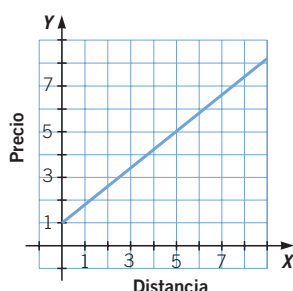
b) Escribe la función que relaciona ambas magnitudes y represéntala.



a)

x	y
0	1
1	1,8
2	2,6
3	3,4
4	4,2
5	5
6	5,8
7	6,6
8	7,4
9	8,2
10	9

b) $y = 1 + 0,8x$



079



Existen varias escalas numéricas para medir la temperatura. Escribe una expresión algebraica que transforme:

a) Grados Celsius a grados Kelvin.

b) Grados Celsius a grados Fahrenheit.

Escala	Agua	
	$P_{\text{fusión}}$	$P_{\text{ebullición}}$
Celsius	0	100
Fahrenheit	32	212
Kelvin	273,15	373,15

Representa ambas funciones y determina la temperatura a la que coinciden ambas escalas.

a) $y = 32 + \frac{180}{100}x$

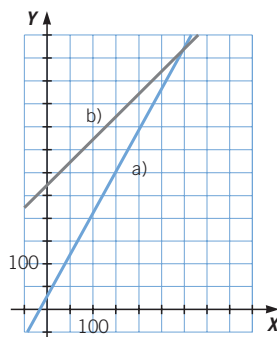
b) $y = 273,15 + x$

$$\left. \begin{array}{l} y = 32 + \frac{180}{100}x \\ y = 273,15 + x \end{array} \right\}$$

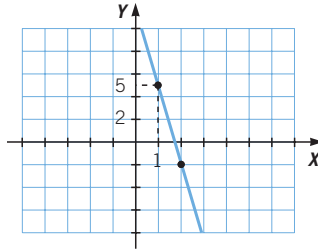
$$\rightarrow 32 + \frac{180}{100}x = 273,15 + x$$

$$\rightarrow x = 301,39375 \text{ °C} \rightarrow y = 574,54375$$

Las escalas Kelvin y Fahrenheit coinciden en $574,54375 \text{ °F} = 574,54375 \text{ °K}$.



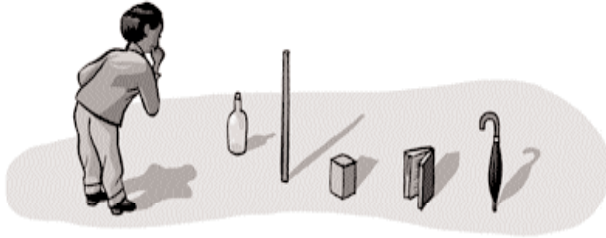
- 080** La gráfica refleja la temperatura del aire, en $^{\circ}\text{C}$, en función de los kilómetros de altitud.



- a) Escribe la expresión algebraica de la función *Altitud-Temperatura*.
 b) ¿Cuál es su ordenada en el origen? ¿Qué significado tiene?
 c) ¿Qué temperatura habrá a 9 km de altitud?

- a) La función es $y = -6x + 11$.
 b) La ordenada en el origen es 11, y esto significa que, a nivel de mar, la temperatura es de 11°C .
 c) A 9 km de altura habrá: $11 - 6 \cdot 9 = -43^{\circ}\text{C}$.

- 081** En un momento del día, la sombra de un palo de 1 m de altura es de 0,3 m.

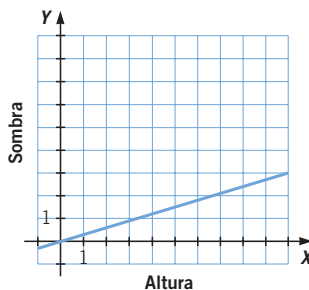


- a) Haz una tabla donde se refleje la longitud de la sombra de varios objetos, en función de su altura, para ese instante.
 b) Escribe la función y represéntala.

a)

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
y	0	0,15	0,3	0,45	0,6	0,75	0,9	1,05	1,2	1,35	1,5

- b) $y = 0,3x$



Funciones polinómicas y racionales

082



Queremos construir un depósito prismático de base rectangular, 2 metros de altura y cuya capacidad sea 500 litros.

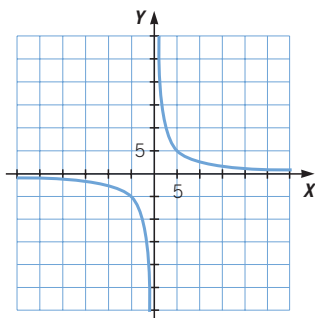
a) Haz una tabla con los diferentes valores de las dimensiones que puede tener.

b) Escribe la función correspondiente y represéntala.

a)

Base	1	5	10	20	25
Altura	25	5	2,5	1,25	1

b) $y = \frac{25}{x}$



Realmente la representación corresponde a la parte del 1.º cuadrante, ya que la longitud de la base del rectángulo nunca puede ser negativa.

083



Los alumnos de 4.º ESO quieren ir de viaje de estudios. Para obtener fondos compran 360 cajas de polvorones que han de vender entre todos los alumnos.

a) Haz una tabla que relacione el número de alumnos que van a viajar con el número de cajas que ha de vender cada uno.

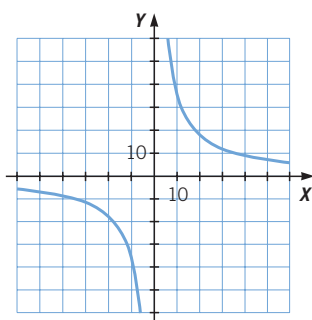
b) Escribe su expresión algebraica y representa la función.

c) Comprueba que el producto del número de alumnos y el de cajas es constante. ¿Cuál es ese valor?

a)

N.º de alumnos	1	10	20	60	120	360
Cajas	360	36	18	6	3	1

b) $y = \frac{360}{x}$

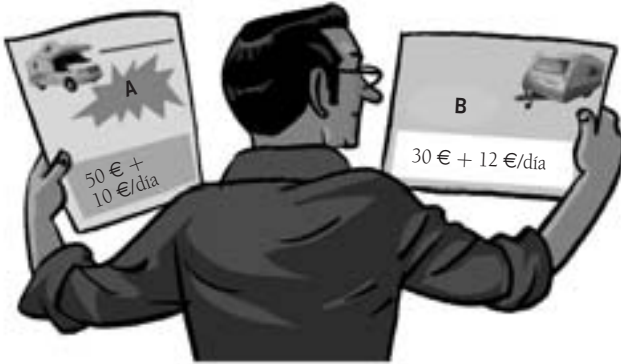


Realmente la representación corresponde a la parte del 1.º cuadrante, ya que el número de alumnos nunca puede ser negativo.

c) El producto siempre vale 360.

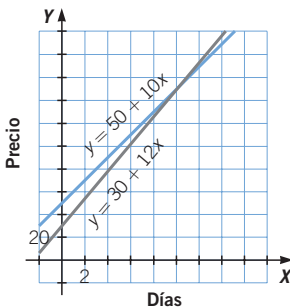
084

Carlos se va de vacaciones y quiere alquilar una caravana. Por ello, acude a dos empresas de alquiler de caravanas que le ofrecen diferentes posibilidades.



- a) Si Carlos va a viajar 8 días con la caravana, ¿en qué empresa le resulta más barato hacerlo?
- b) ¿Y si va a viajar 15 días?
- c) Escribe las funciones *Precio—Tiempo* y represéntalas en los mismos ejes. ¿Dónde se cortan? ¿Qué representa el punto de corte?

- a) Precio en la compañía A: $50 + 10 \cdot 8 = 130 \text{ €}$
 Precio en la compañía B: $30 + 12 \cdot 8 = 126 \text{ €}$
 Le resulta más barato hacerlo en la compañía B.
- b) Precio en la compañía A: $50 + 10 \cdot 15 = 200 \text{ €}$
 Precio en la compañía B: $30 + 12 \cdot 15 = 210 \text{ €}$
 Le resulta más barato hacerlo en la compañía A.
- c) Función de la compañía A: $y = 50 + 10x$
 Función de la compañía B: $y = 30 + 12x$



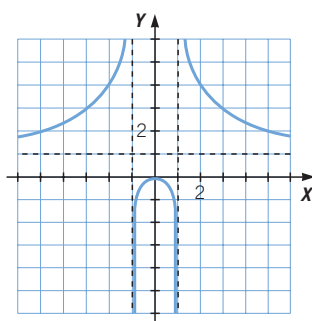
Las funciones se cortan en el punto (10, 150), y esto significa que el precio de las dos compañías coincide para un alquiler de 10 días, y sería de 150 €.

Funciones polinómicas y racionales

085

Haz la gráfica de $f(x)$ que cumpla que:

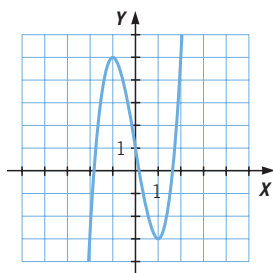
- Es continua en todo $\mathbb{R}$, salvo en $x = -1$ y en $x = 1$.
- Es creciente en $x < 0$ y es decreciente en $x > 0$.
- Tiende a 1 cuando x tiende a $+\infty$.
- Tiende a 1 cuando x tiende a $-\infty$.
- Tiene dos asíntotas verticales, una en $x = -1$ y otra en $x = 1$.
- Pasa por el origen y por el punto $(2, 4)$.



086

A partir de la gráfica de $f(x) = 2x^3 - 6x + 1$ razona cuántas soluciones tienen estas ecuaciones.

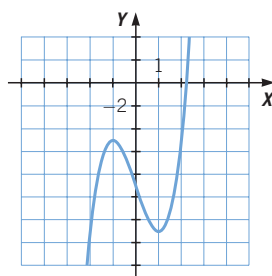
- $2x^3 - 6x + 1 = 10$
- $2x^3 - 6x + 1 = 2$
- $2x^3 - 6x + 1 = -3$



Las soluciones de las ecuaciones coinciden con los cortes de las funciones con el eje X , y la representación de cada función se consigue trasladando la gráfica de la función.

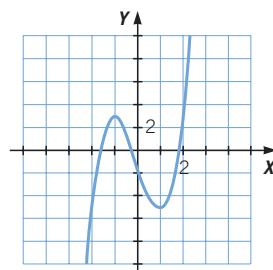
- La gráfica de $y = 2x^3 - 6x - 9$ se realiza desplazando diez unidades hacia abajo la gráfica de $y = 2x^3 - 6x + 1$.

La ecuación solo tiene una raíz y está en el intervalo $(2, 3)$.



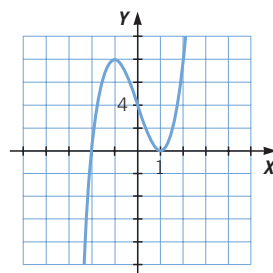
- b) La gráfica de $y = 2x^3 - 6x - 2$ se realiza desplazando dos unidades hacia abajo la gráfica de $y = 2x^3 - 6x + 1$

La ecuación tiene tres soluciones, en los intervalos $(-2, -1)$, $(-1, 0)$ y $(1, 2)$



- c) La gráfica de $y = 2x^3 - 6x + 4$ se realiza desplazando tres unidades hacia arriba la gráfica de $y = 2x^3 - 6x + 1$.

La ecuación tiene tres soluciones, una solución doble en $x = 1$ y otra en $x = -2$.



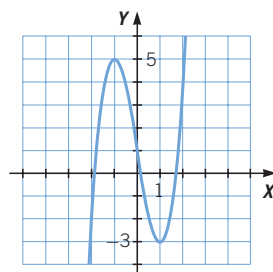
087

¿Para qué valores del parámetro a tiene 3 soluciones la ecuación

$2x^3 - 6x + 1 = a$? ¿Y para qué valores tiene 4 o más soluciones?

Tiene tres soluciones para todos los valores comprendidos entre el máximo relativo ($y = 5$) y el mínimo relativo ($y = -3$).

Nunca puede tener más de tres soluciones por ser una ecuación de grado 3. Tiene tres soluciones para cualquier valor a del intervalo $(-3, 5)$.



088

De una función polinómica sabemos que:

$$f(0) = 3 \quad f(1) = 2 \quad f(-1) = 8$$

a) ¿Cuántas funciones polinómicas de grado 2 cumplen estas condiciones?

b) ¿Y cuántas de grado superior a 2?

- a) Una ecuación de grado 2 es de la forma $y = Ax^2 + Bx + C$, por lo que sustituyendo resulta el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, que tiene una sola solución.

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= 3 \rightarrow C = 3 \\ f(1) &= 2 \rightarrow A + B + C = 2 \\ f(-1) &= 8 \rightarrow A - B + C = 8 \end{aligned} \right\} \rightarrow A = 2, B = -3, C = 3$$

$$\rightarrow 2x^2 - 3x + 3 = 0$$

- b) Para ecuaciones de grado mayor que 2 se obtienen sistemas con tres ecuaciones y, al menos, con cuatro incógnitas, por lo que habrá infinitas soluciones.

Funciones polinómicas y racionales

EN LA VIDA COTIDIANA

089

Los alumnos de 4.º ESO están organizando su viaje de fin de curso y acuden a distintas agencias de viajes para tener varios presupuestos de las ciudades que podrían visitar.



En una de las agencias les sugieren viajar a Francia durante 11 días. Tienen una oferta que ya habían visto en el escaparate, y la directora de la agencia les ofrece una promoción especial, dependiendo del número de alumnos que contraten el viaje.

El precio por alumno será de 400 euros, pero si el grupo rebasa los 30 estudiantes, rebajaremos 10 euros por cada alumno que supere ese número.



Cuando vuelven al centro escolar para contárselo al resto de alumnos, todos tienen claro que les conviene ser el mayor número de alumnos posible.

Entonces, si nos apuntamos 32, cada uno pagaremos 380 euros.

Eso es, cuantos más alumnos nos apuntemos mejor.



¿Qué número de alumnos le interesa a la agencia que contrate el viaje?

Número de alumnos: x

Precio de cada alumno:

$$\begin{cases} 400 - 10 \cdot (x - 32) = 720 - 10x & \text{si } x > 32 \\ 400 & \text{si } x \leq 32 \end{cases}$$

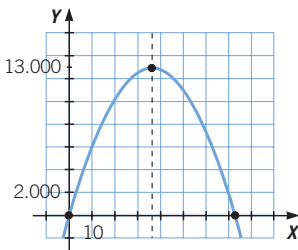
Gasto a partir de 32 alumnos:

$$y = x \cdot (720 - 10x)$$

A la agencia le interesa que se realice el mayor gasto posible, y que se corresponde con el vértice de la función. El vértice está en el eje que pasa por el punto medio de los dos puntos de corte con el eje X .

$$x \cdot (720 - 10x) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 72 \end{cases}$$

$$\text{El eje es: } x = \frac{72}{2} = 36$$



A la agencia le interesa que vayan 36 alumnos.

090

Un estanque ha sido contaminado con un residuo orgánico, y el equipo de biólogos encargado de estudiar la gravedad de la situación va a realizar un estudio en el que se analice el impacto ambiental que puede tener.



Funciones polinómicas y racionales

Para sacar conclusiones, el equipo va a medir el nivel de concentración de oxígeno en el estanque.

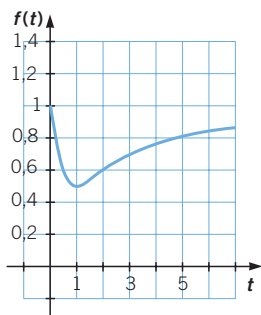
Vamos a establecer la relación entre la concentración de oxígeno en el agua y el tiempo.



La relación entre las dos magnitudes que van a estudiar viene dada por la función:

$$f(t) = \frac{t^2 - t + 1}{t^2 + 1}$$

donde t representa el tiempo en semanas y $t \geq 0$.



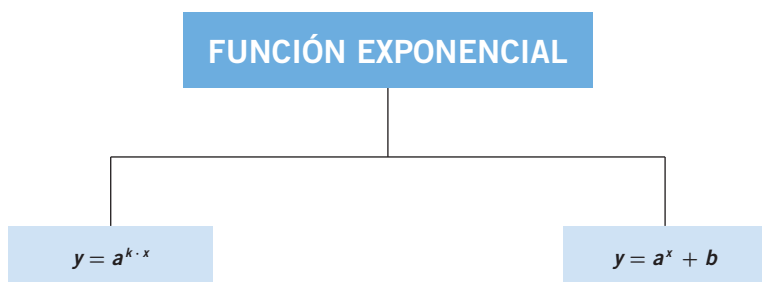
- a) Si una semana aparecieron bastantes peces muertos, ¿cuál crees que fue?
- b) Según va transcurriendo el tiempo, ¿hacia qué valor tiende la concentración?

a) La semana en que aparecen más peces muertos es cuando la concentración de oxígeno es menor, y eso ocurre en las dos primeras semanas, especialmente de la mitad de la primera semana a la mitad de la segunda.

- b) Si hacemos una tabla de valores sobre la evolución de la concentración de oxígeno, se observa que la concentración tiende al valor 1 con el paso del tiempo.

t	$f(t)$
1	0,5
6	0,8378
11	0,9098
16	0,9377
21	0,9525
26	0,9616
31	0,9678
36	0,9722
41	0,9756
46	0,9783
51	0,9804
56	0,9821
61	0,9836
66	0,9849
71	0,9859
76	0,9868
81	0,9877
86	0,9884
91	0,989
96	0,9896
101	0,9901

Funciones exponenciales y logarítmicas



APLICACIÓN:
INTERÉS COMPUESTO

LOGARITMOS

PROPIEDADES

FUNCIÓN LOGARÍTMICA

RELACIONES ENTRE FUNCIONES
EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

El camino

El camino partía en dos el bosque de hayas; mientras, el sonido del viento susurrando entre los árboles, y los trinos de algún pájaro que no logró reconocer, se mezclaron con el suave quejido de las ruedas del carro y la acompasada respiración de su padre que, a su lado, dormitaba en el pescante.

El niño, Gaspard Monge, se acurrucó contra su padre mientras pensaba en que seguramente el Cielo sería así.

Poco tiempo después, llegaban a su destino, un pequeño grupo de casas que se agrupaban alrededor de una venta, donde su padre, Jacques, entró dejándole encargado de vigilar el carro. Desde allí Gaspard podía ver cómo su padre discutía con el ventero por el precio del vino que transportaban en los barriles.

Tras descargar el vino y cobrar, Jacques anotó las cantidades en un cuaderno que volvió a guardar en el interior de su levita.

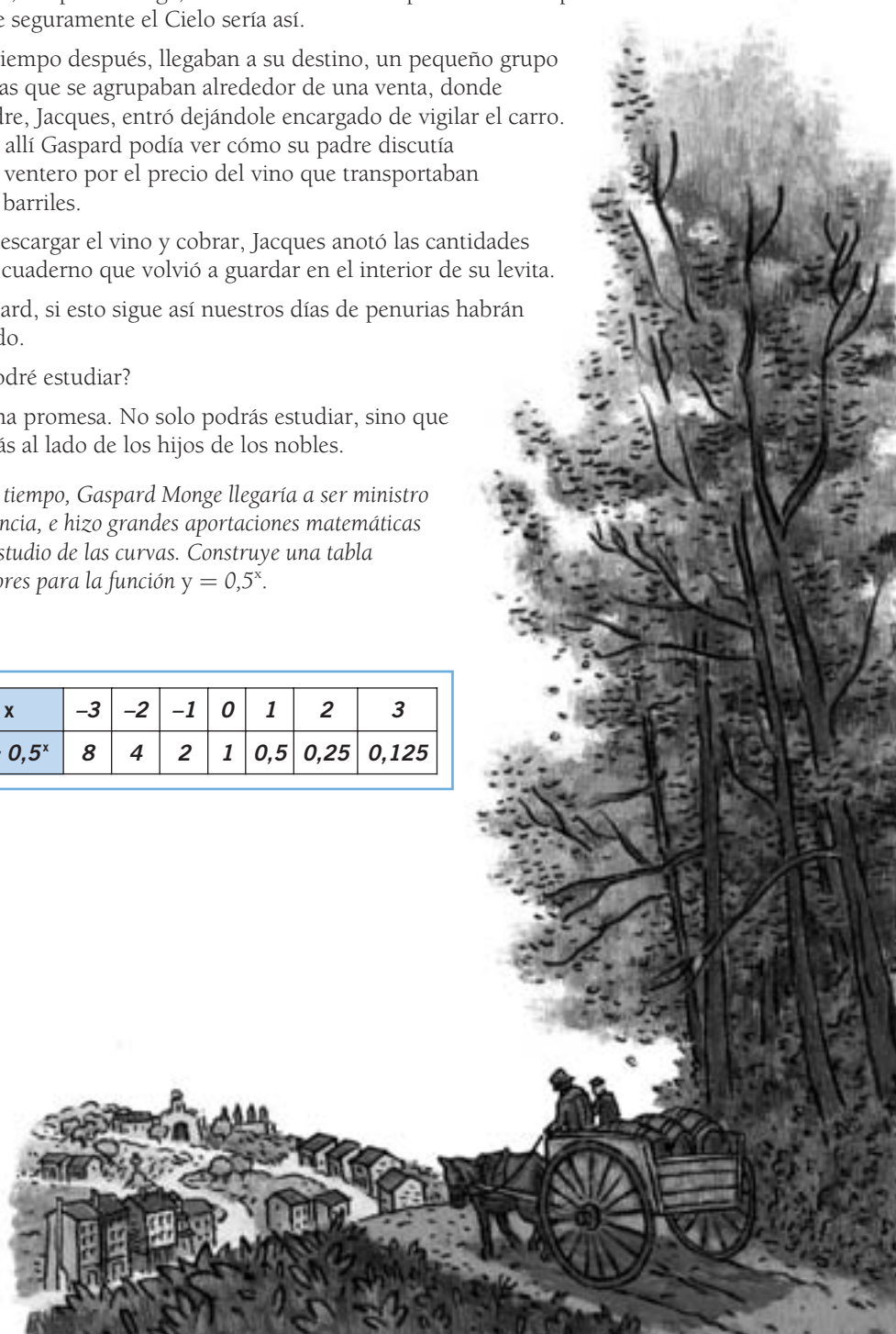
—Gaspard, si esto sigue así nuestros días de penurias habrán acabado.

—¿Y podré estudiar?

—Es una promesa. No solo podrás estudiar, sino que lo harás al lado de los hijos de los nobles.

Con el tiempo, Gaspard Monge llegaría a ser ministro de Francia, e hizo grandes aportaciones matemáticas en el estudio de las curvas. Construye una tabla de valores para la función $y = 0,5^x$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = 0,5^x$	8	4	2	1	0,5	0,25	0,125



Funciones exponenciales y logarítmicas

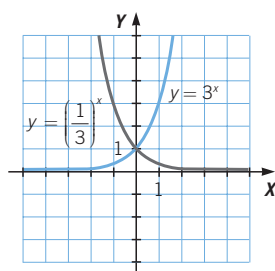
EJERCICIOS

001 Realiza una tabla de valores y representa las funciones exponenciales.

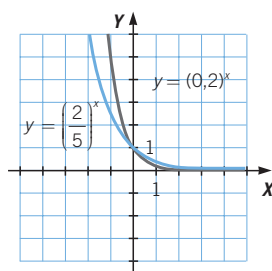
a) $y = 3^x$ b) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ c) $y = \left(\frac{2}{5}\right)^x$ d) $y = (0,2)^x$

	x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
a)	$y = 3^x$	0,0123	0,037	0,111	0,333	1	3	9	27	81
b)	$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$	81	27	9	3	1	0,333	0,111	0,037	0,0123
c)	$y = \left(\frac{2}{5}\right)^x$	39,0625	15,625	6,25	2,5	1	0,4	0,16	0,064	0,0256
d)	$y = (0,2)^x$	625	125	25	5	1	0,2	0,04	0,008	0,0016

a) y b)



c) y d)

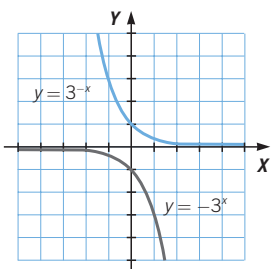


002 Estudia y representa estas funciones.

a) $y = -3^x$ b) $y = 3^{-x}$

	x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
a)	$y = -3^x$	-0,0123	-0,037	-0,111	-0,333	-1	-3	-9	-27	-81
b)	$y = 3^{-x}$	81	27	9	3	1	0,333	0,111	0,037	0,0123

a) y b)



003 ¿Qué ocurre si $a = 1$ en una función exponencial? ¿Y si $a < 0$?

Si $a = 1$, la función exponencial es de la forma $y = 1^x = 1$, siendo una función constante igual a 1.

Y si $a < 0$, la función no está definida.

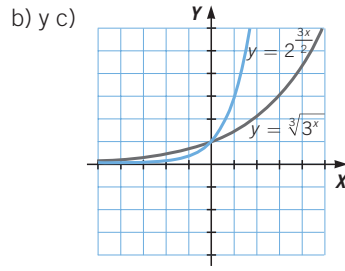
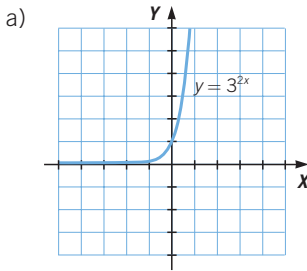
004 Realiza una tabla de valores, y representa estas funciones exponenciales.

a) $y = 3^{2x}$

b) $y = \sqrt[3]{3^x}$

c) $y = 2^{\frac{3x}{2}}$

	x	-2	-1	0	1	2
a)	$y = 3^{2x}$	0,0123	0,111	3	9	81
b)	$y = \sqrt[3]{3^x}$	0,48	0,693	1	1,442	2,08
c)	$y = 2^{\frac{3x}{2}}$	0,125	0,3536	1	2,828	8

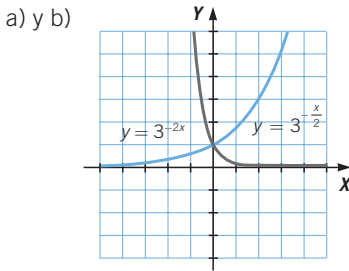


005 Representa las funciones.

a) $y = 3^{-2x}$

b) $y = 3^{-\frac{x}{2}}$

	x	-2	-1	0	1	2
a)	$y = 3^{-2x}$	81	9	1	0,111	0,012
b)	$y = 3^{-\frac{x}{2}}$	3	1,732	1	0,577	0,333



006 Estudia y representa las funciones exponenciales.

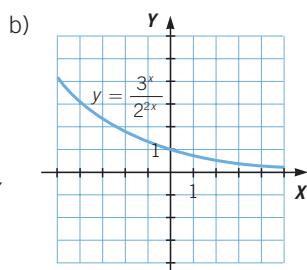
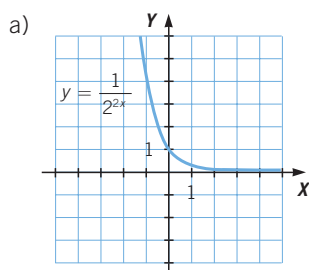
a) $y = \frac{1}{2^{2x}}$

b) $y = \frac{3^x}{2^{2x}}$

Razona si son decrecientes o no.

	x	-2	-1	0	1	2
a)	$y = \frac{1}{2^{2x}} = \left(\frac{1}{4}\right)^x$	16	4	1	0,25	0,0625
b)	$y = \frac{3^x}{2^{2x}} = \left(\frac{3}{4}\right)^x$	1,777	1,333	1	0,75	0,5625

Funciones exponenciales y logarítmicas



Las dos funciones son decrecientes, porque son funciones exponenciales con bases menores que 1.

007 Dibuja la gráfica de la función $y = 4^x$, y a partir de ella, representa estas funciones exponenciales sin realizar las tablas de valores.

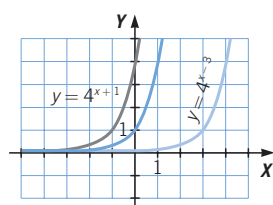
a) $y = 4^{x-3}$

b) $y = 4^{x+1}$

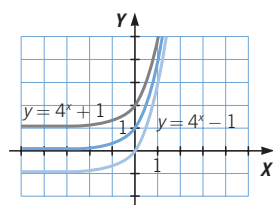
c) $y = 4^x + 1$

d) $y = 4^x - 1$

a) y b) La gráfica de la función $y = 4^{x-3}$ se obtiene trasladando la gráfica de la función $y = 4^x$ tres unidades hacia la derecha, y la gráfica de la función $y = 4^{x+1}$, una unidad hacia la izquierda.



c) y d) La gráfica de la función $y = 4^x + 1$ se obtiene trasladando la gráfica de la función $y = 4^x$ una unidad hacia arriba, y la gráfica de la función $y = 4^x - 1$, una unidad hacia abajo.

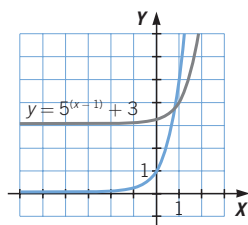


008 Representa estas funciones ayudándote de la gráfica de la función $y = 5^x$.

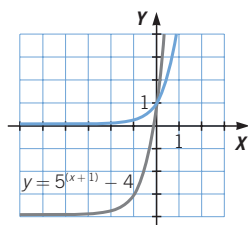
a) $y = 5^{(x-1)} + 3$

b) $y = 5^{(x+1)} - 4$

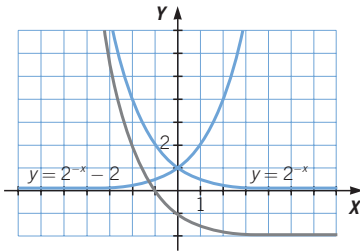
a) La gráfica de la función $y = 5^{(x-1)} + 3$ se obtiene trasladando la gráfica de la función $y = 5^x$ una unidad hacia la derecha y tres unidades hacia arriba.



b) La gráfica de la función $y = 5^{(x+1)} - 4$ se obtiene trasladando la gráfica de la función $y = 5^x$ una unidad hacia la izquierda y cuatro unidades hacia abajo.



009 Representa $y = 2^{-x} - 2$ a partir de $y = 2^x$.



010 Halla el capital que obtendríamos en los 5 primeros años al invertir, a interés compuesto, un capital de 300 € a un rédito del 3,5 %.

$$C_t = 300 \cdot \left(1 + \frac{3,5}{100}\right)^5 = 300 \cdot (1,035)^5 = 356,30 \text{ €}$$

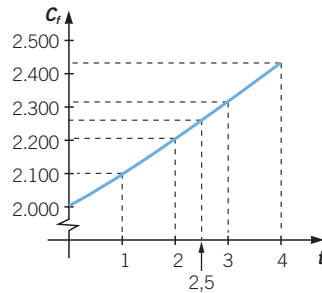
011 Calcula, gráficamente, el capital que obtendremos al cabo de 2 años y 6 meses al invertir, a interés compuesto, 2.000 € a un rédito del 5 %.

$$C_t = 2.000 \cdot \left(1 + \frac{5}{100}\right)^t = 2.000 \cdot (1,05)^t$$

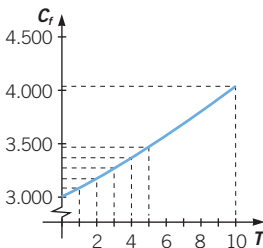
El capital, en cada instante, es una función exponencial.

t	0	1	2	3	4
$C_t = 2.000 \cdot (1,05)^t$	2.000	2.100	2.205	2.315,25	2.431,01

Para conocer cuál es el capital al cabo de 2 años y 6 meses hay que ver en la gráfica el valor correspondiente a $x = 2,5$; que es 2.260 €.



012 La siguiente gráfica muestra la evolución de un capital invertido a interés compuesto. Calcula cuál es el capital que hemos invertido y explica cómo lo haces.



En la gráfica se observa que se han invertido 3.000 €, porque es el valor que le corresponde a $t = 0$.

Funciones exponenciales y logarítmicas

013 Calcula, mediante la definición, los logaritmos.

a) $\log_2 8$

b) $\log_3 81$

c) $\log 1.000$

a) $\log_2 8 = x \rightarrow 2^x = 8$ y $8 = 2^3 \rightarrow 2^x = 2^3 \rightarrow \log_2 8 = 3$

b) $\log_3 81 = x \rightarrow 3^x = 81$ y $81 = 3^4 \rightarrow 3^x = 3^4 \rightarrow \log_3 81 = 4$

c) $\log 1.000 = x \rightarrow 10^x = 1.000 \rightarrow 10^x = 10^3 \rightarrow \log 1.000 = 3$

014 Halla, mediante la definición, estos logaritmos.

a) $\ln e^{-4}$

b) $\log 0,0001$

c) $\log_4 0,25$

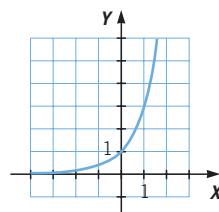
a) $\ln e^{-4} = x \rightarrow e^x = e^{-4} \rightarrow x = -4$

b) $\log 0,0001 = x \rightarrow 10^x = 0,0001 = \frac{1}{10.000} = 10^{-4} \rightarrow 10^x = 10^{-4} \rightarrow x = -4$

c) $\log_4 0,25 = x \rightarrow 4^x = 4^{-1} \rightarrow x = -1$

015 Calcula, utilizando la gráfica de la función $y = 3^x$, el valor aproximado de $\log_3 2$.

Como $\log_3 2$ es, en la gráfica de la función $y = 3^x$, el valor de la abscisa que le corresponde al valor 2 de la ordenada, entonces $\log_3 2 = 0,6$.



016 Halla los logaritmos, aplicando sus propiedades y dejando indicado el resultado final.

a) $\log_8 32$

c) $\log_3 100$

e) $\log_{32} 4$

g) $\log_6 1$

b) $\log_2 32$

d) $\log_5 32$

f) $\log_2 304$

h) $\log_7 7$

a) $\log_8 32 = \frac{\log_2 32}{\log_2 8} = \frac{5}{3}$

b) $\log_2 32 = \log_2 2^5 = 5$

c) $\log_3 100 = \frac{\log 100}{\log 3} = \frac{2}{0,477} = 4,19$

d) $\log_5 32 = \log_5 2^5 = 5 \log_5 2 = 5 \cdot \frac{\log 2}{\log 5} = 2,15$

e) $\log_{32} 4 = \frac{\log_2 4}{\log_2 32} = \frac{2}{5}$

f) $\log_2 304 = \log_2 16 \cdot 19 = \log_2 16 + \log_2 19 = 4 + \frac{\log 19}{\log 2} = 4 + 4,25 = 8,25$

g) $\log_6 1 = 0$

h) $\log_7 7 = 1$

- 017** Sabiendo que $\log 2 = 0,3010$, $\log 3 = 0,4771$ y $\log 7 = 0,8451$, calcula los logaritmos decimales de los primeros 10 números naturales. ¿Sabrías calcular $\log 3,5$? ¿Y el logaritmo de 1,5?

$$\begin{aligned}\log 1 &= 0 & \log 2 &= 0,3010 & \log 3 &= 0,4771 \\ \log 4 &= \log 2^2 = 2 \log 2 = 2 \cdot 0,3010 = 0,602 \\ \log 5 &= \log \frac{7}{2} = \log 7 - \log 2 = 1 - 0,3010 = 0,699 \\ \log 6 &= \log (2 \cdot 3) = \log 2 + \log 3 = 0,3010 + 0,4771 = 0,7781 \\ \log 7 &= 0,8451 & \log 8 &= \log 2^3 = 3 \log 2 = 0,903 \\ \log 9 &= \log 3^2 = 2 \log 3 = 0,9542 & \log 10 &= 1 \\ \log 3,5 &= \log \frac{7}{2} = \log 7 - \log 2 = 0,8451 - 0,3010 = 0,5441 \\ \log 1,5 &= \log \frac{3}{2} = \log 3 - \log 2 = 0,4771 - 0,3010 = 0,1761\end{aligned}$$

- 018** Halla, sin ayuda de la calculadora, $\log_2 5$ y $\log_5 2$. Comprueba que su producto es 1.

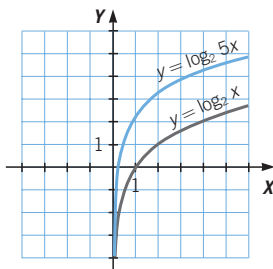
$$\left. \begin{aligned}\log_2 5 &= \frac{\log 5}{\log 2} = 2,322 \\ \log_5 2 &= \frac{\log 2}{\log 5} = 0,4306\end{aligned} \right\} \rightarrow \log_2 5 \cdot \log_5 2 = \frac{\log 5}{\log 2} \cdot \frac{\log 2}{\log 5} = 1$$

- 019**  Representa las siguientes funciones logarítmicas, ayudándote de la calculadora para encontrar los valores de puntos por los que pasan.

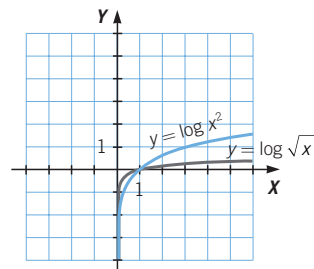
- a) $f(x) = \log_2 x$ c) $h(x) = \log \sqrt{x}$
b) $g(x) = \log_2 5x$ d) $i(x) = \log x^2$

x	1	2	4	6	8	10
a) $f(x) = \log_2 x$	0	1	2	2,585	3	3,3219
b) $g(x) = \log_2 5x$	2,3219	3,3219	4,3219	4,9069	5,3219	5,6439
c) $h(x) = \log \sqrt{x}$	0	0,1505	0,3010	0,3890	0,4515	0,5
d) $i(x) = \log x^2$	0	0,6020	1,2041	1,5563	1,8062	2

a) y b)



c) y d)



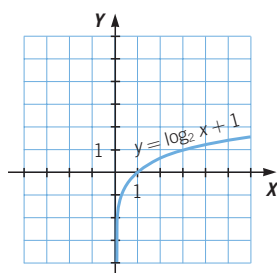
Funciones exponenciales y logarítmicas

020 Estudia y representa la siguiente función.

$$y = \log_2 x + 1$$

El dominio es $\mathbb{R}^+$. La imagen es $\mathbb{R}$.

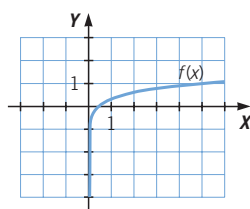
x	1	2	4	6	8	10
$f(x) = \log_2 x + 1$	1	2	3	3,585	4	4,3219



021 Sin construir una tabla de valores, representa la función logarítmica $f(x) = \log 2x$.

$$\log 2x = \log 2 + \log x = 0,3010 + \log x$$

Por tanto, para construir la gráfica de la función $f(x) = \log 2x$ hay que trasladar la gráfica de la función $\log x$ hacia arriba 0,3010 unidades.



022 Comprueba si los siguientes pares de funciones exponenciales y logarítmicas son o no funciones inversas.

a) $y = 3^x$ $y = \log_3 x$ b) $y = -x$ $y = -\frac{1}{x}$

a)

x	-1	0	1	3
$y = 3^x$	0,3333	1	3	27
$y = \log_3 x$			0	1

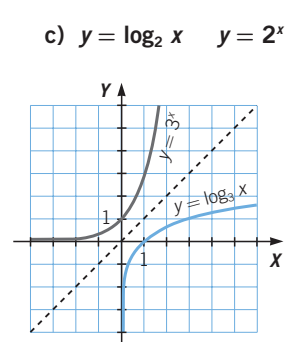
Las gráficas son simétricas respecto de la bisectriz del primer y tercer cuadrantes y, por tanto, son inversas.

b)

x	-2	-1	0	1	2
$y = -x$	2	1	0	-1	-2
$y = -\frac{1}{x}$	$\frac{1}{2}$	1		-1	$-\frac{1}{2}$

Estas funciones no son inversas, porque, por ejemplo, el punto $(-2, 2)$ pertenece a la función $y = -x$, y, sin embargo, el punto $(2, -2)$

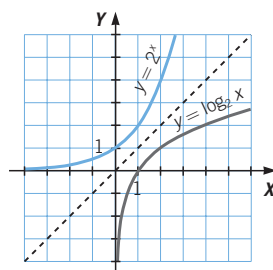
no pertenece a la función $y = -\frac{1}{x}$.



c)

x	0	1	2	4
$y = \log_2 x$		0	1	2
$y = 2^x$	1	2	4	16

Las gráficas son simétricas respecto de la bisectriz del primer y tercer cuadrantes y, por tanto, son inversas.



023 Comprueba, sin representarlas, que la función $y = \log x$ es la inversa de $y = 10^x$.

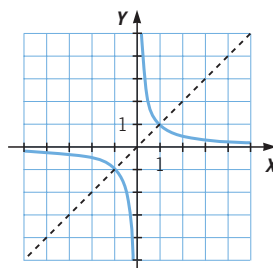
Sea un punto (a, b) que pertenezca a la función $y = \log x$.

$b = \log a \rightarrow 10^b = a \rightarrow (b, a)$ es un punto de la función $y = 10^x$.

024 Según la definición de función inversa que hemos visto, ¿tiene inversa la función de proporcionalidad inversa $y = \frac{1}{x}$?

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	2
$y = \frac{1}{x}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	2	1	$\frac{1}{2}$

La inversa de $y = \frac{1}{x}$ es la misma función.



ACTIVIDADES

025 Con ayuda de la calculadora, halla los valores que toma la función $y = 2,5^x$ para estos valores de x .

a) $x = -3$

d) $x = 0$

g) $x = 3$

b) $x = -2$

e) $x = 1$

h) $x = 4$

c) $x = -1$

f) $x = 2$

i) $x = -4$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = 2,5^x$	0,0256	0,064	0,16	0,4	1	2,5	6,25	15,625	39,0625

026 Copia y completa la tabla de valores para la función $y = \left(\frac{5}{3}\right)^x$.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = \left(\frac{5}{3}\right)^x$	0,1296	0,216	0,36	0,6	1	1,6667	2,7778	4,6296	7,7160

Funciones exponenciales y logarítmicas

027

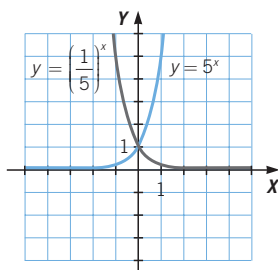


Realiza una tabla de valores y representa las funciones exponenciales.

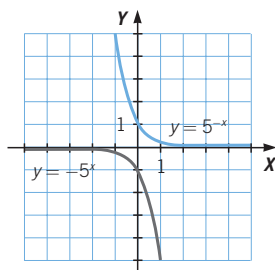
- a) $y = 5^x$ b) $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ c) $y = -5^x$ d) $y = 5^{-x}$

x	-2	-1	0	1	2
a) $y = 5^x$	0,04	0,2	1	5	25
b) $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$	25	5	1	0,2	0,04
c) $y = -5^x$	-0,04	-0,2	-1	-5	-25
d) $y = 5^{-x}$	25	5	1	0,2	0,4

a) y b)



c) y d)



028

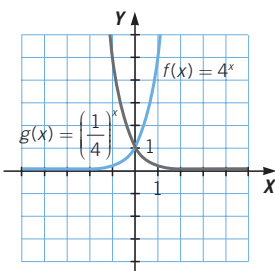
Analiza las semejanzas y diferencias de estas funciones exponenciales.

$$f(x) = 4^x$$

$$g(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$$

x	-2	-1	0	1	2
$f(x) = 4^x$	0,0625	0,25	1	4	16
$g(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$	16	4	1	0,25	0,0625

Las gráficas de ambas funciones son simétricas respecto del eje de ordenadas. El dominio de ambas funciones es $\mathbb{R}$ y el recorrido es $(0, +\infty)$. Las gráficas de ambas funciones son continuas. La función $f(x)$ es creciente y la función $g(x)$ es decreciente.



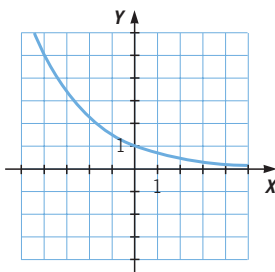
029

Estudia y representa la función exponencial.

$$y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$$

x	-2	-1	0	1	2
$y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$	2,25	1,5	1	0,67	0,4

La función es continua en $\mathbb{R}$, su recorrido es $(0, +\infty)$, y es monótona decreciente.



030



Haz una tabla de valores de las funciones.

a) $y = 2 \cdot 10^x$ b) $y = \frac{1}{2} \cdot 10^x$

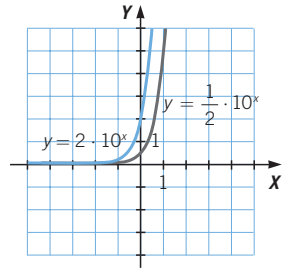
Representa las funciones en los mismos ejes de coordenadas, y enumera sus propiedades.

	x	-2	-1	0	1	2
a)	$y = 2 \cdot 10^x$	0,02	0,2	2	20	200
b)	$y = \frac{1}{2} \cdot 10^x$	0,005	0,05	0,5	5	50

El dominio de ambas funciones es $\mathbb{R}$ y el recorrido es $(0, +\infty)$.

Las gráficas de ambas funciones son continuas y crecientes.

La gráfica de la función $y = 2 \cdot 10^x$ corta al eje de ordenadas en el punto $(0, 2)$, y la gráfica de $y = \frac{1}{2} \cdot 10^x$ lo corta en $(0, 0,5)$.

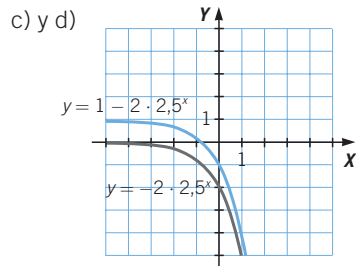
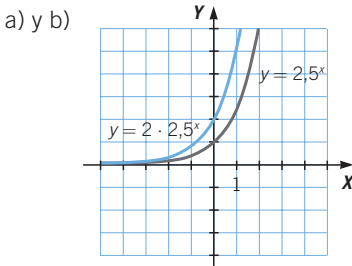


031

Representa gráficamente y enumera las propiedades de las funciones.

a) $y = 2,5^x$ b) $y = 2 \cdot 2,5^x$ c) $y = -2 \cdot 2,5^x$ d) $y = 1 - 2 \cdot 2,5^x$

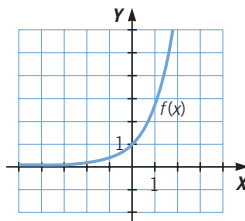
	x	-1	-0,5	-0,25	0	0,25	0,5	1
a)	$y = 2,5^x$	0,4	0,63	0,8	1	1,3	1,58	2,5
b)	$y = 2 \cdot 2,5^x$	0,8	1,26	1,6	2	2,6	3,16	5
c)	$y = -2 \cdot 2,5^x$	-0,8	-1,26	-1,6	-2	-2,6	-3,16	-5
d)	$y = 1 - 2 \cdot 2,5^x$	0,2	-0,26	-0,6	-1	-1,6	-2,16	-4



032

Representa la función $y = e^x$. Recuerda que el número e es un número irracional cuyo valor aproximado es $e = 2,718281...$

La gráfica $f(x) = e^x$ es:



Funciones exponenciales y logarítmicas

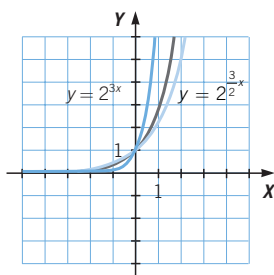
033

Representa las siguientes funciones de tipo exponencial.

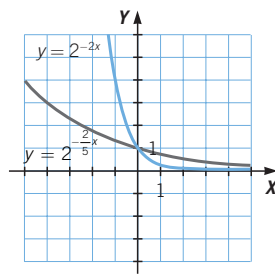
- a) $y = 2^{3x}$ b) $y = 2^{\frac{3}{2}x}$ c) $y = 2^{-2x}$ d) $y = 2^{-\frac{2}{5}x}$

x	-2	-1	0	1	2
a) $y = 2^{3x}$	0,015625	0,125	1	8	64
b) $y = 2^{\frac{3}{2}x}$	0,125	0,3536	1	2,8284	8
c) $y = 2^{-2x}$	16	4	1	0,25	0,0625
d) $y = 2^{-\frac{2}{5}x}$	1,7411	1,3195	1	0,7579	0,5744

a) y b)



c) y d)



034

HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE CALCULA LA EXPRESIÓN ALGEBRAICA DE UNA FUNCIÓN EXPONENCIAL A PARTIR DE SU GRÁFICA?

Determina la expresión algebraica de esta función exponencial.

PRIMERO. Se determina uno de los puntos, distinto del punto (0, 1), por el que pasa la gráfica.

En este caso, la gráfica pasa por el punto (-2, 4).

SEGUNDO. Se sustituyen estas coordenadas en la expresión algebraica de la función exponencial.

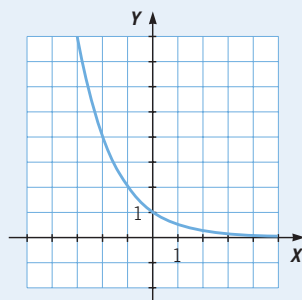
$$y = a^x \xrightarrow{x=-2, y=4} 4 = a^{-2} = \frac{1}{a^2}$$

TERCERO. Se calcula el valor de a .

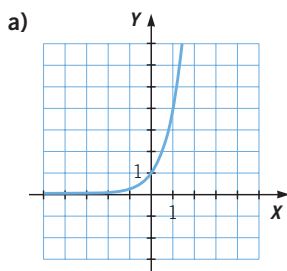
$$4 = \frac{1}{a^2} \rightarrow a^2 = \frac{1}{4} \rightarrow a = \pm \frac{1}{2}$$

CUARTO. No se considera la solución negativa, pues en una función exponencial sucede que $a > 0$.

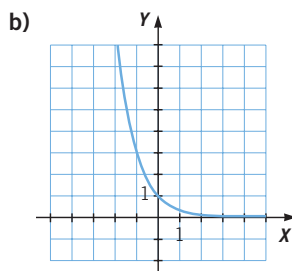
La expresión algebraica de la función es $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.



035 Determina la expresión algebraica de estas funciones exponenciales.

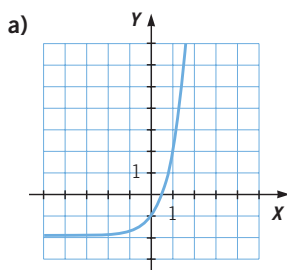


a) $y = 4^x$

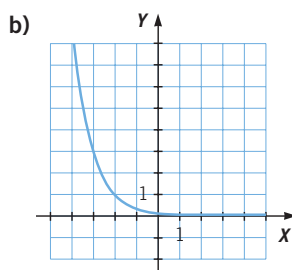


b) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

036 Halla la expresión algebraica de las funciones.



a) $y = 4^x - 2$



b) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}$

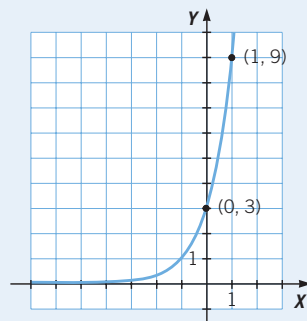
037 HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE REPRESENTA GRÁFICAMENTE UNA FUNCIÓN EXPONENCIAL, CONOCIENDO ALGUNAS DE SUS CARACTERÍSTICAS?

Dibuja la gráfica de una función exponencial del tipo $y = a^{(x+b)}$ que es creciente, no corta el eje X y pasa por los puntos $(0, 3)$ y $(1, 9)$.

PRIMERO. Se representan los puntos por los que pasa la función.

SEGUNDO. Si la función es creciente, la parte situada junto al eje X será la parte izquierda de la gráfica. Y si es decreciente, será su parte derecha.

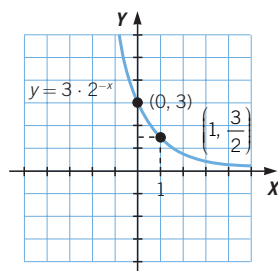


Funciones exponenciales y logarítmicas

038 Dibuja la gráfica de una función exponencial que verifique estas condiciones.

- Ser decreciente.
- Cortar al eje Y en el punto $(0, 3)$.
- No cortar al eje X en ningún punto.
- Pasar por el punto $\left(1, \frac{3}{2}\right)$.

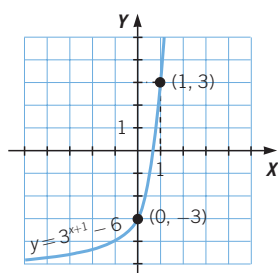
Conociendo la forma que tiene la gráfica de la función exponencial, y teniendo en cuenta las condiciones del enunciado, una posible gráfica sería:



039 Realiza la gráfica de una función exponencial que tenga las siguientes propiedades.

- Es creciente.
- Corta al eje Y en el punto $(0, -3)$.
- Pasa por el punto $(1, 3)$.

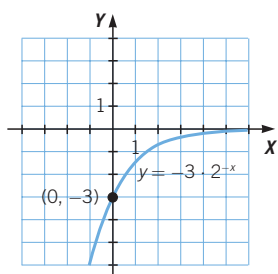
Conociendo la forma que tiene la gráfica de la función exponencial, y teniendo en cuenta las condiciones del enunciado, una posible gráfica sería:



040 Construye la gráfica de la función exponencial que tiene estas propiedades.

- Es creciente.
- Corta al eje Y en el punto $(0, -3)$.
- No corta al eje X .

Conociendo la forma que tiene la gráfica de la función exponencial, y teniendo en cuenta las condiciones del enunciado, una posible gráfica sería:



041 Representa estas funciones.

a) $y = 2^{x-2}$

b) $y = 2^x - 2$

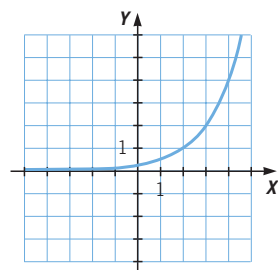
c) $y = -2^x + 5$

d) $y = -2^{-x+1}$

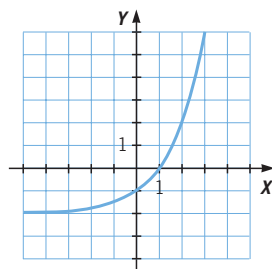
Estas funciones se pueden representar trasladando las gráficas de las funciones $y = 2^x$ e $y = -2^x$.

x	-2	-1	0	1	2
$y = 2^x$	0,25	0,5	1	2	4
$y = -2^x$	-0,25	-0,5	-1	-2	-4

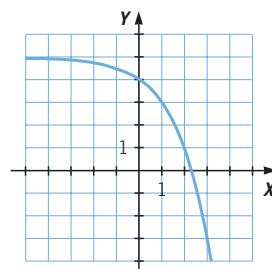
- a) La gráfica de la función $y = 2^{x-2}$ se obtiene trasladando la gráfica de la función $y = 2^x$ dos unidades a la derecha.



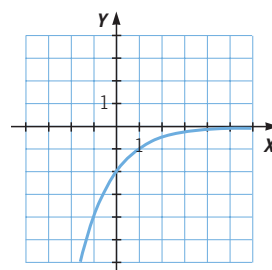
- b) La gráfica de la función $y = 2^x - 2$ se obtiene trasladando la gráfica de la función $y = 2^x$ dos unidades hacia abajo.



- c) La gráfica de la función $y = -2^x + 5$ se obtiene trasladando la gráfica de la función $y = -2^x$ cinco unidades hacia arriba.



- d) La gráfica de la función $y = -2^{-x+1}$ se obtiene trasladando la gráfica de la función $y = -2^{-x}$ una unidad a la derecha.



Funciones exponenciales y logarítmicas

042 Estudia y representa las funciones.

a) $y = 3^{-x+2} + 1$

c) $y = 3^{x-1} - 5$

e) $y = 2 - 3^x + \frac{2}{3}$

b) $y = 3 - 3^{x+\frac{2}{3}}$

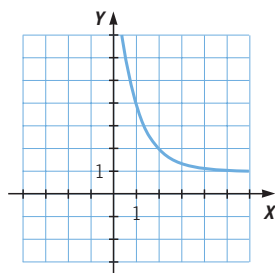
d) $y = \frac{2}{3} - 3^{x+3}$

f) $y = 1 - \frac{1}{3} + 4^x$

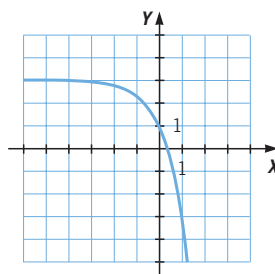
Estas funciones se pueden representar trasladando las gráficas de las funciones $y = 3^x$, $y = -3^x$, $y = 3^{-x}$ e $y = 4^x$.

x	-2	-1	0	1	2
$y = 3^x$	0,111	0,333	1	3	9
$y = -3^x$	-0,111	-0,333	-1	-3	-9
$y = 3^{-x}$	9	3	1	0,333	0,111
$y = 4^x$	0,0625	0,25	1	4	16

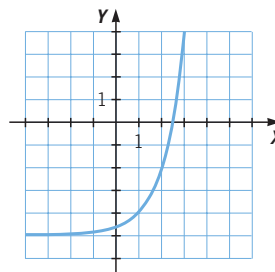
- a) La gráfica de la función $y = 3^{-x+2} + 1$ se obtiene trasladando la gráfica de la función $y = 3^{-x}$ dos unidades hacia la derecha y una unidad hacia arriba.



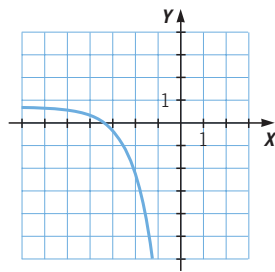
- b) La gráfica de la función $y = 3 - 3^{x+\frac{2}{3}}$ se obtiene trasladando la gráfica de la función $y = -3^x$ en $\frac{2}{3}$ hacia la izquierda y tres unidades hacia arriba.



- c) La gráfica de la función $y = 3^{x-1} - 5$ se obtiene trasladando la gráfica de la función $y = 3^x$ una unidad hacia la derecha y cinco unidades hacia abajo.



- d) La gráfica de la función $y = \frac{2}{3} - 3^{x+3}$ se obtiene trasladando la gráfica de la función $y = -3^x$ tres unidades hacia la izquierda y $\frac{2}{3}$ hacia arriba.

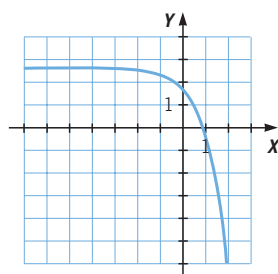


e) La gráfica de la función

$$y = 2 - 3^x + \frac{2}{3} = -3^x + \frac{8}{3}$$

se obtiene trasladando
la gráfica de la función

$$y = -3^x \text{ en } \frac{8}{3} \text{ hacia arriba.}$$

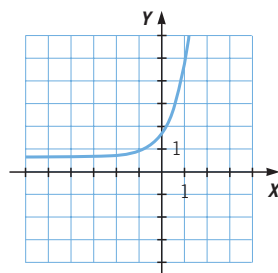


f) La gráfica de la función

$$y = 1 - \frac{1}{3} + 4^x = \frac{2}{3} + 4^x$$

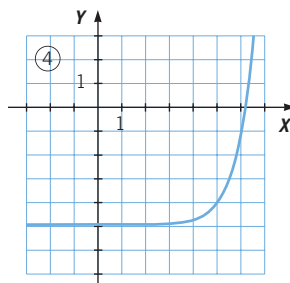
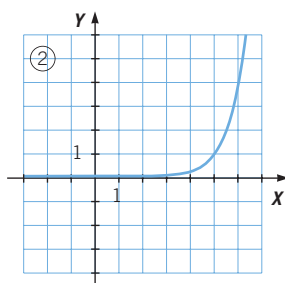
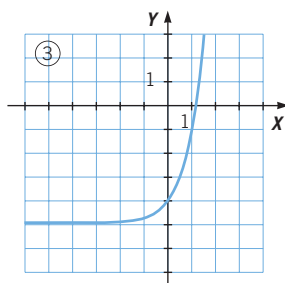
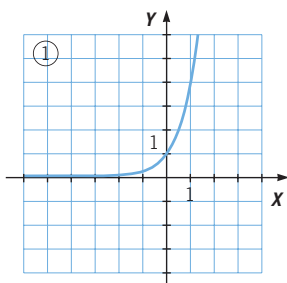
se obtiene trasladando
la gráfica de la función

$$y = 4^x \text{ en } \frac{2}{3} \text{ hacia arriba.}$$



043 Relaciona cada función con su gráfica.

- a) $f(x) = 4^x$ b) $g(x) = 4^x - 5$ c) $h(x) = 4^{x-5}$ d) $i(x) = 4^{x-5} - 5$



La gráfica de la función $f(x) = 4^x$ se corresponde con la gráfica ①.

La gráfica de la función $g(x) = 4^x - 5$ se corresponde con la gráfica ②.

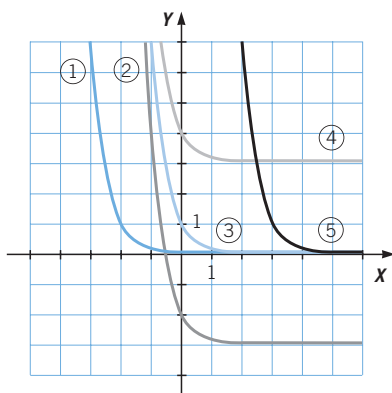
La gráfica de la función $h(x) = 4^{x-5}$ se corresponde con la gráfica ③.

La gráfica de la función $i(x) = 4^{x-5} - 5$ se corresponde con la gráfica ④.

Funciones exponenciales y logarítmicas

044

Las gráficas de estas funciones son traslaciones de la gráfica de $y = \left(\frac{1}{7}\right)^x$.



Identifícala y escribe la expresión algebraica que corresponde a cada una de las gráficas.

La gráfica ① es: $y = \left(\frac{1}{7}\right)^{x+2}$

La gráfica ② es: $y = \left(\frac{1}{7}\right)^x - 3$

La gráfica ③ es: $y = \left(\frac{1}{7}\right)^x$

La gráfica ④ es: $y = \left(\frac{1}{7}\right)^{x-3}$

La gráfica ⑤ es: $y = \left(\frac{1}{7}\right)^x + 3$

045

Decide cuáles de las siguientes funciones son crecientes y cuáles son decrecientes sin representarlas. Explica cómo lo haces.

a) $y = \frac{2^{2x}}{3^x}$

c) $y = \frac{2^{-2x}}{3^x}$

b) $y = -2^{x+5}$

d) $y = 2^{-x+5}$

a) $y = \frac{2^{2x}}{3^x} = \frac{4^x}{3^x} = \left(\frac{4}{3}\right)^x \rightarrow$ La función es creciente, pues la base es $\frac{4}{3} > 1$.

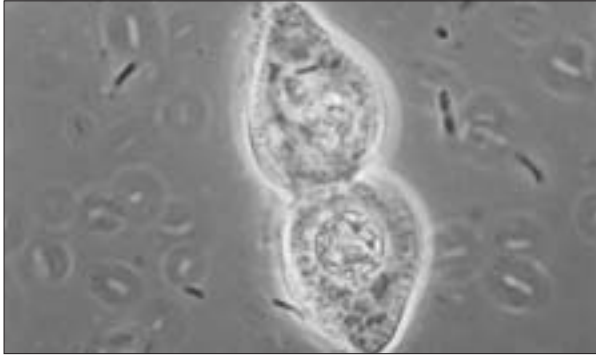
b) $y = -2^{x+5} = -2^5 \cdot 2^x \rightarrow$ La función es decreciente.

c) $y = \frac{2^{-2x}}{3^x} = \frac{1}{2^{2x} \cdot 3^x} = \frac{1}{12^x} = \left(\frac{1}{12}\right)^x \rightarrow$ La función es decreciente.

d) $y = 2^{-x+5} = 2^5 \cdot 2^{-x} = 2^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x \rightarrow$ La función es decreciente.

046

Una especie de paramecio se reproduce por bipartición, completando su ciclo reproductivo cada hora.



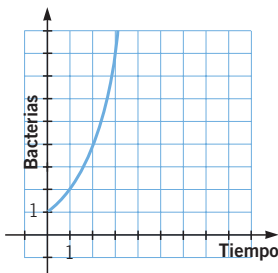
a) Calcula la expresión de la función que relaciona los paramecios, y , que hay en función del tiempo, t , en horas, que ha transcurrido desde que el primero comienza a dividirse.

b) Representa la función.

a) La función que relaciona el número de bacterias, y , con el tiempo que ha transcurrido desde que empezó a dividirse, t , es $y = 2^t$.

b)

t	0	1	2
$y = 2^t$	1	2	4



Aunque dibujamos la gráfica continua, esta gráfica tiene sentido solo para valores naturales de la variable y .

047

Calcula el capital que obtendríamos en los 5 primeros años al invertir, a interés compuesto, un capital de 30.000 € a un rédito del 3,65 %.

$$C_t = 30.000 \cdot \left(1 + \frac{3,65}{100}\right)^t = 30.000 \cdot (1,0365)^t$$

t	0	1	2	3	4	5
$C_t = 30.000 \cdot (1,0365)^t$	30.000	31.095	32.230	33.406	34.626	35.890

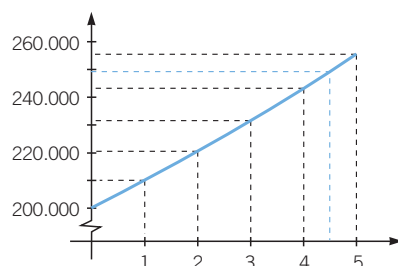
Funciones exponenciales y logarítmicas

- 048** ●● Halla gráficamente el capital que tendremos al cabo de 4 años y 6 meses al invertir, a interés compuesto, 200.000 € a un rédito del 5 %.

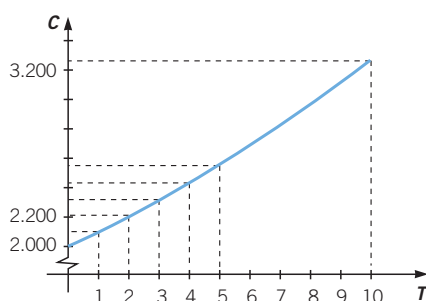
$$C_t = 200.000 \cdot \left(1 + \frac{5}{100}\right)^t = 200.000 \cdot (1,05)^t$$

t	0	1	2	3	4	5
$C_t = 200.000 \cdot (1,05)^t$	200.000	210.000	220.500	231.525	243.101	255.256

Si queremos saber cuál será el capital al cabo de 4 años y 6 meses tendremos que hallar, en la gráfica, el valor de la ordenada correspondiente al valor 4,5 de la abscisa. Observando la gráfica se ve que el capital es 249.178 €.



- 049** ● La siguiente gráfica muestra la evolución de un capital invertido, en €, a interés compuesto. Calcula cuál es el capital invertido y explica cómo lo haces.



¿Cuánto tiempo, en años, es necesario mantener la inversión para duplicar el capital?

Observando la gráfica se ve que se han invertido 2.000 €, porque es el valor que le corresponde a $t = 0$. Además, para $t = 1$ el capital es 2.100 €, luego el rédito es del 5 %, y para duplicar el capital, como la gráfica es exponencial, y crece cada vez más deprisa, podemos calcular que se obtendrán 4.000 € en 14 años aproximadamente.

Si queremos calcularlo de forma exacta usamos logaritmos:

$$4.000 = 2.000 \cdot (1,05)^t \rightarrow 2 = (1,05)^t \rightarrow t = \frac{\log 2}{\log 1,05} = 14,20 \text{ años}$$

050 Calcula, mediante su definición, los siguientes logaritmos.

- | | |
|---------------------|--------------------|
| a) $\log_3 243$ | e) $\ln e^2$ |
| b) $\log_9 81$ | f) $\ln e^{-14}$ |
| c) $\log 1.000.000$ | g) $\log_7 343$ |
| d) $\log 0,00001$ | h) $\log_4 0,0625$ |
-
- | | |
|---------------------------------------|---|
| a) $\log_3 243 = \log_3 3^5 = 5$ | e) $\ln e^2 = 2$ |
| b) $\log_9 81 = \log_9 9^2 = 2$ | f) $\ln e^{-14} = -14$ |
| c) $\log 1.000.000 = \log 10^6 = 6$ | g) $\log_7 343 = \log_7 7^3 = 3$ |
| d) $\log 0,00001 = \log 10^{-5} = -5$ | h) $\log_4 0,0625 = \log_4 4^{-2} = -2$ |

051 HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE CALCULAN ALGUNOS LOGARITMOS UTILIZANDO SUS PROPIEDADES?

Calcula $\log_2 24$ si $\log_2 3 = 1,5850$.

PRIMERO. Se descompone el número en factores primos.

$$24 = 2^3 \cdot 3$$

SEGUNDO. Se aplican las propiedades del logaritmo de un producto.

$$\log_2 24 = \log_2 (2^3 \cdot 3) = \log_2 2^3 + \log_2 3 = 3 + \log_2 3 = 4,5850$$

052 Halla $\log_3 24$ utilizando las propiedades de los logaritmos.

$$\begin{aligned} \log_3 24 &= \log_3 (2^3 \cdot 3) = \log_3 2^3 + \log_3 3 = 3 \log_3 2 + 1 = \\ &= 3 \cdot 0,6309 + 1 = 2,8927 \end{aligned}$$

053 Calcula $\log_4 256$, mediante las propiedades de los logaritmos, y da un resultado exacto.

$$\log_4 256 = \log_4 2^8 = \log_4 (2^2)^4 = \log_4 4^4 = 4$$

054 Halla el resultado de estas expresiones, utilizando las propiedades de los logaritmos.

a) $2 \log_4 16 + \log_2 32 - 3 \log_7 49$

b) $\log_2 8 + \log_3 27 + \log_5 125$

c) $\log_5 625 - \log_9 81 + \log_8 64$

a) $2 \log_4 4^2 + \log_2 2^5 - 3 \log_7 7^2 = 2 \cdot 2 + 5 - 3 \cdot 2 = 3$

b) $\log_2 2^3 + \log_3 3^3 + \log_5 5^3 = 3 + 3 + 3 = 9$

c) $\log_5 5^4 - \log_9 9^2 + \log_8 8^2 = 4 - 2 + 2 = 4$

Funciones exponenciales y logarítmicas

055

Desarrolla las siguientes expresiones.

a) $\log_3 \frac{a^2 \cdot b^5 \cdot c}{d^2}$

b) $\log_2 \frac{a^3 \cdot \sqrt[5]{b^6}}{\sqrt[3]{c^7}}$

c) $\log_{10} \frac{x \cdot \sqrt{x}}{\sqrt{y^2 \cdot z^3}}$

a) $\log_3 a^2 + \log_3 b^5 + \log_3 c - \log_3 d^2 = 2 \log_3 a + 5 \log_3 b + \log_3 c - 2 \log_3 d$

b) $\log_2 a^3 + \log_2 \sqrt[5]{b^6} - \log_2 \sqrt[3]{c^7} = 3 \log_2 a + \frac{6}{5} \log_2 b - \frac{7}{3} \log_2 c$

c) $\log_{10} x + \log_{10} \sqrt{x} - \log_{10} \sqrt{y^2} - \log_{10} \sqrt{z^3} =$
 $= \log_{10} x + \frac{1}{2} \log_{10} x - \log_{10} y - \frac{3}{2} \log_{10} z =$
 $= \frac{3}{2} \log_{10} x - \log_{10} y - \frac{3}{2} \log_{10} z$

056

HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE CALCULA UN LOGARITMO MEDIANTE UN CAMBIO DE BASE?

Calcula $\log_3 4$, sabiendo que $\log_2 3 = 1,5850$.

PRIMERO. Se realiza un cambio de base.

$$\log_3 4 = \frac{\log_2 4}{\log_2 3}$$

SEGUNDO. Se sustituyen el numerador y el denominador por sus valores.

$$\log_3 4 = \frac{\log_2 4}{\log_2 3} = \frac{\log_2 2^2}{\log_2 3} = \frac{2}{1,5850} = 1,2618$$

057

Si $\log e = 0,4343$; ¿cuánto vale $\ln 10$?

$$\log e \cdot \ln 10 = 1 \rightarrow \ln 10 = \frac{1}{0,4343} = 2,3026$$

058

 Expresa en función de logaritmos neperianos, y obtén el resultado con la calculadora.

a) $\log_5 36^2$

b) $\log_2 \sqrt{31}$

c) $\log_6 100$

d) $\log_4 31^5$

a) $\log_5 36^2 = \log_5 6^4 = 4 \cdot \frac{\ln 6}{\ln 5} = 4,4531$

b) $\log_2 \sqrt{31} = \log_2 31^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_2 31 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\ln 31}{\ln 2} = 2,4771$

c) $\log_6 100 = \log_6 10^2 = 2 \log_6 10 = 2 \cdot \frac{\ln 10}{\ln 6} = 2,5702$

d) $\log_4 31^5 = 5 \log_4 31 = 5 \cdot \frac{\ln 31}{\ln 4} = 12,3855$

059



Si el valor del logaritmo decimal de 2 es 0,3010; calcula el valor de los siguientes logaritmos decimales.

a) $\log 20$

c) $\log 1.250$

e) $\log 0,2$

b) $\log 0,125$

d) $\log 1,6$

f) $\log 0,04$

$$a) \log 20 = \log (2 \cdot 10) = \log 2 + \log 10 = 0,3010 + 1 = 1,3010$$

$$b) \log 0,125 = \log 2^{-3} = -3 \log 2 = (-3) \cdot 0,3010 = -0,903$$

$$c) \log 1.250 = \log (10 \cdot 5^3) = \log 10 + \log 5^3 = 1 + 3 \log 5 = 1 + 3 \cdot 0,699 = 3,097$$

$$d) \log 1,6 = \log \frac{16}{10} = \log 16 - \log 10 = \log 2^4 - 1 = 4 \log 2 - 1 = 4 \cdot 0,3010 - 1 = 0,204$$

$$e) \log 0,2 = \log \frac{2}{10} = \log 2 - \log 10 = 0,3010 - 1 = -0,699$$

$$f) \log 0,04 = \log \frac{4}{100} = \log 4 - \log 100 = \log 2^2 - \log 10^2 = 2 \log 2 - 2 \log 10 = 2 \cdot 0,3010 - 2 = -1,398$$

060



Representa las siguientes funciones logarítmicas, ayudándote de la calculadora.

a) $f(x) = \log_3 x$

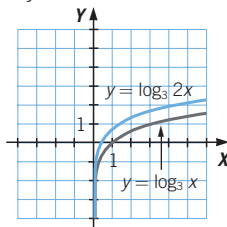
c) $h(x) = \log \sqrt[5]{x}$

b) $g(x) = \log_3 2x$

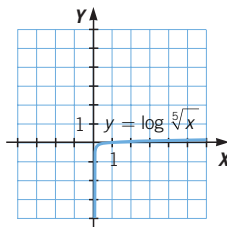
d) $i(x) = \log_2 x^2$

	x	1	2	4	6	8	10
a)	$f(x) = \log_3 x$	0	0,6309	1,2619	1,6309	1,8928	2,0959
b)	$g(x) = \log_3 2x$	0,6309	1,2619	1,8928	2,2619	2,5237	2,7268
c)	$h(x) = \log \sqrt[5]{x} = \frac{1}{5} \log x$	0	0,0602	0,1204	0,1556	0,1806	0,2
d)	$i(x) = \log_2 x^2 = 2 \log_2 x$	0	2	4	5,1699	6	6,6439

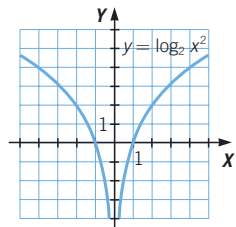
a) y b)



c)



d)



Observamos que $i(x)$ es una función simétrica respecto del eje de ordenadas por ser una función par; y como $\log_2 x^2 = \log_2 (-x)^2$, existe para valores negativos.

Funciones exponenciales y logarítmicas

061

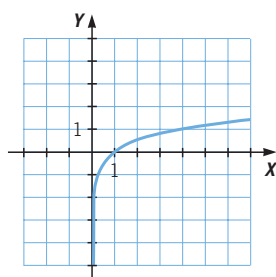


Haz una tabla de valores correspondiente a la función $y = \log_4 x$.
Representa la función y estudia sus propiedades.

x	1	2	4	6	8	10
$y = \log_4 x$	0	0,5	1	1,2	1,5	1,6

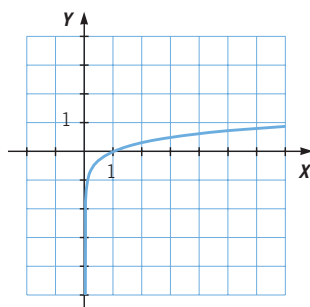
La función $y = \log_4 x$ verifica que:

- Dom $f = (0, +\infty)$
- La imagen de 1 es 0: $\log_4 1 = 0$
- La imagen de 4 es 1: $\log_4 4 = 1$
- La función es creciente porque $4 > 1$.



062

Esta gráfica pertenece a $y = \log x$.



Dibuja las gráficas de estas funciones a partir de ella.

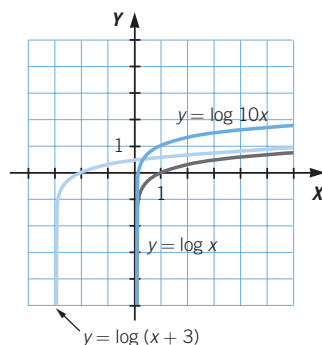
a) $y = \log 10x$

b) $y = \log (x + 3)$

a) $y = \log 10x = \log 10 + \log x = 1 + \log x$

La gráfica de la función $y = \log 10x$ se obtiene desplazando la gráfica de la función $y = \log x$ una unidad hacia arriba.

- b) La gráfica de la función $y = \log (x + 3)$ se obtiene desplazando la gráfica de la función $y = \log x$ tres unidades a la izquierda.



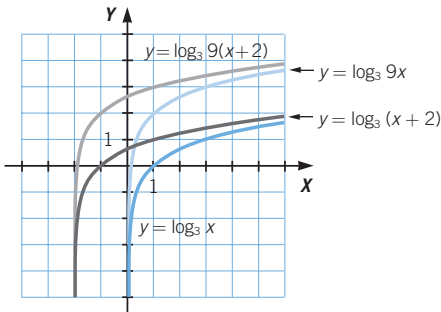
063

Representa estas funciones logarítmicas sobre los mismos ejes de coordenadas.

- a) $y = \log_3 x$
 b) $y = \log_3 9x$
 c) $y = \log_3 (x + 2)$
 d) $y = \log_3 9(x + 2)$

Halla la relación existente entre sus gráficas.

	x	1	2	4	6	8	10
a)	$y = \log_3 x$	0	0,6309	1,2619	1,6309	1,8928	2,0959
b)	$y = \log_3 9x = 2 + \log_3 x$	2	2,6309	3,2619	3,6309	3,8928	4,0959
c)	$y = \log_3 (x + 2)$	1	1,2619	1,6309	1,8928	2,0959	2,2619
d)	$y = \log_3 9(x + 2) = 2 + \log_3 (x + 2)$	3	3,2619	3,6309	3,8928	4,0959	4,2619

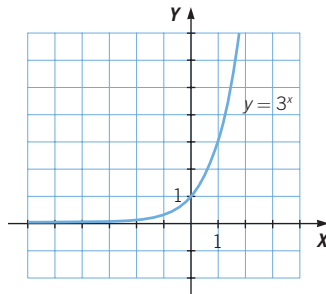


La función $y = \log_3 9x$ se obtiene trasladando la función $y = \log_3 x$ dos unidades hacia arriba.

La función $y = \log_3 (x + 2)$ se obtiene trasladando la función $y = \log_3 x$ tres unidades hacia la izquierda.

La función $y = \log_3 9(x + 2)$ se obtiene trasladando la función $y = \log_3 (x + 2)$ dos unidades hacia arriba.

064

Calcula el valor aproximado de $\log_3 \frac{3}{2}$, utilizando la gráfica de la función $y = 3^x$.

$$\log_3 \frac{3}{2} = \log_3 1,5 \simeq 0,4$$

Funciones exponenciales y logarítmicas

065

Relaciona cada gráfica con su expresión algebraica.

a) $y = \ln 3x$

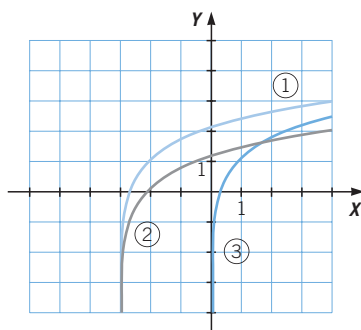
b) $y = \ln (x + 3)$

c) $y = \ln 3(x + 3)$

a) Gráfica ③

b) Gráfica ②

c) Gráfica ①



066

Comprueba, gráfica y analíticamente, si los siguientes pares de funciones son inversos entre sí. Justifica tu respuesta.

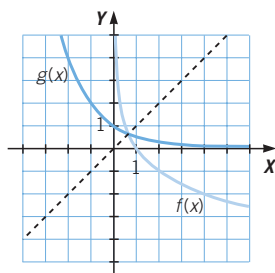
a) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ y $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

b) $h(x) = 3x - 2$ y $t(x) = \frac{x + 2}{3}$

a)

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$				0	-1	-1,5850	-2
$g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	4	2	1	0,5	0,25	0,125	0,0625

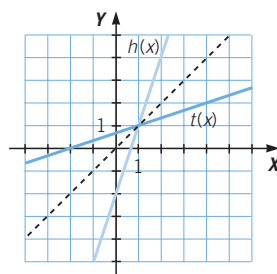
Las gráficas son simétricas respecto de la bisectriz del primer y tercer cuadrantes y, por tanto, son inversas.



b)

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$h(x) = 3x - 2$	-8	-5	-2	1	4	7	10
$t(x) = \frac{x + 2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	2

Estas funciones son inversas, porque las gráficas son simétricas respecto de la bisectriz del primer y tercer cuadrantes.



067 ●● ¿Para cuáles de los siguientes valores de p y q se verifica la igualdad $\log(p+q) = \log p + \log q$?

a) $p = q = 0$ o $p = q = 1$

c) $p = \frac{q}{1-q}$

b) $p = \frac{q^2}{1-q}$

d) $p = \frac{q}{q+1}$

$$\log p + \log q = \log(p \cdot q)$$

$$\log(p+q) = \log p + \log q \xrightarrow{\log p + \log q = \log(p \cdot q)} \log(p+q) = \log(p \cdot q)$$

$$\rightarrow p+q = p \cdot q \rightarrow p - p \cdot q = -q \rightarrow p \cdot (1-q) = -q \rightarrow p = \frac{-q}{1-q}$$

a) $p = q = 0$ es imposible, porque el logaritmo de 0 no existe.

$$p = q = 1 \rightarrow \log(p+q) = \log p + \log q$$

$$\rightarrow \log(1+1) \neq \log 1 + \log 1 \rightarrow \log 2 \neq 0$$

$$b) \quad p = \frac{q^2}{1-q} \rightarrow \frac{q^2}{1-q} = \frac{-q}{1-q} \rightarrow q^2 = -q \rightarrow q^2 + q = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} q = 0 \rightarrow \text{Solución no válida} \\ q = -1 \rightarrow \text{Solución no válida} \end{cases}$$

$$c) \quad p = \frac{q}{1-q} \rightarrow \frac{q}{1-q} = \frac{-q}{1-q} \rightarrow q = -q \rightarrow q + q = 0 \rightarrow q = 0$$

$\rightarrow$ Solución no válida

$$d) \quad p = \frac{q}{q+1} \rightarrow \frac{q}{q+1} = \frac{-q}{1-q} \rightarrow q(1-q) = -q(1+q)$$

$$\rightarrow q = 0 \rightarrow \text{Solución no válida}$$

Aunque operando en cada caso aparecen soluciones, estas soluciones no son válidas al sustituir en la ecuación logarítmica.

068 ●● Averigua cuál de estas afirmaciones es verdadera si $x > 0$.

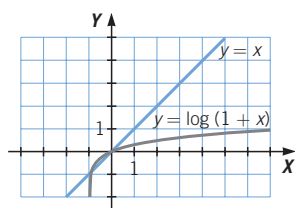
a) $\log(1+x) < \frac{x}{1+x}$

b) $\log(1+x) < x$

c) $\log(1+x) > \frac{x}{1+x}$

a) Es falso, pues para $x = 99$: $\log(1+99) = 2 > \frac{99}{100}$

b) Para comprobarlo representamos las funciones $y = \log(1+x)$, $y = x$.
Así, comprobamos que, para $x > 0$, la recta $y = x$ siempre está por encima de la función logarítmica $y = \log(1+x)$.



c) Es falso, porque para $x = 1$:

$$\log(1+1) = 0,3010 < \frac{1}{1+1} = 0,5$$

Funciones exponenciales y logarítmicas

069

Escribe cuántas cifras tiene el número $4^{16} \cdot 5^{25}$ escrito en el sistema decimal.

El número de cifras es igual a la parte entera del logaritmo decimal más uno.

$\log 4^{16} = 16 \log 4 = 16 \cdot 0,60206 = 9,63$; por lo que 4^{16} tiene 10 cifras.

$\log 5^{25} = 25 \log 5 = 25 \cdot 0,69897 = 17,47$; por lo que 5^{25} tiene 18 cifras.

070

Calcula el valor de a , sabiendo que a y b son números positivos que verifican que $a^b = b^a$ y $b = 9a$.

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} a^b &= b^a \\ b &= 9a \end{aligned} \right\} & \xrightarrow{b=9a} a^{9a} = (9a)^a \rightarrow a^{9a} = 9^a \cdot a^a \rightarrow a^{8a} = 9^a \rightarrow a^8 = 9 \rightarrow a = \sqrt[4]{3} \\ & \xrightarrow{a=\sqrt[4]{3}} b = 9a = 9 \cdot \sqrt[4]{3} \end{aligned}$$

071

La suma de las cifras del número $(10^{2.009n} + 1)^2$, siendo $n > 0$, no es un número extraordinariamente grande. ¿Crees que la suma de las cifras de ese número depende de n ? ¿Cuánto vale exactamente?

$$(10^{2.009n} + 1)^2 = 10^{4.018n} + 2 \cdot 10^{2.009n} + 1$$

Considerando que n es un número entero positivo, la suma de las cifras no depende del valor de n .

La suma de las cifras de cada sumando es: $1 + 2 + 1 = 4$

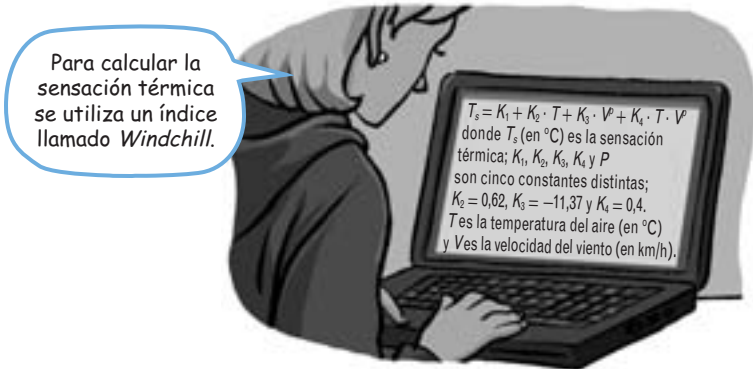
EN LA VIDA COTIDIANA

072

Como habrás observado, a la misma temperatura no todos sentimos igualmente el frío o el calor. Por ejemplo, a una temperatura de 2°C sentirás más frío si sopla un viento fuerte que si no hay viento. Este fenómeno se llama sensación térmica y depende de cada persona.



Belén tiene una beca para estudiar en Moscú y está preocupada por la intensidad del frío en esa ciudad. Para calcular la sensación térmica en zonas frías, los parámetros que se tienen en cuenta son la temperatura y la velocidad del viento, siempre que la temperatura sea menor que 5°C y la velocidad de viento sea mayor que 5 km/h .



En Internet, Belén no ha encontrado los valores de K_1 y P , pero sí ha localizado en los periódicos estos datos para determinarlos.

Día	T (°C)	V (km/h)	T_s
Lunes	-13	40	-24,8
Miércoles	-15	35	-26,9
Viernes	-7	55	-18,1

Si esta mañana ha escuchado por la radio que la sensación térmica en Moscú es de -7 °C, ¿cuál es la temperatura?



Tomando el sistema de ecuaciones obtenido con los datos del lunes, del miércoles y del viernes tenemos que:

$$\left. \begin{aligned} -24,8 &= k_1 + 0,62 \cdot (-13) + (-11,37) \cdot 40^p + 0,4 \cdot (-13) \cdot 40^p \\ -26,9 &= k_1 + 0,62 \cdot (-15) + (-11,37) \cdot 35^p + 0,4 \cdot (-15) \cdot 35^p \\ -18,1 &= k_1 + 0,62 \cdot (-7) + (-11,37) \cdot 55^p + 0,4 \cdot (-7) \cdot 55^p \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} -24,8 &= k_1 - 8,06 - 16,57 \cdot 40^p \\ -26,9 &= k_1 - 9,3 - 17,37 \cdot 35^p \\ -18,1 &= k_1 - 4,34 - 14,17 \cdot 55^p \end{aligned} \right\} \rightarrow \left. \begin{aligned} -16,74 &= k_1 - 16,57 \cdot 40^p \\ -17,6 &= k_1 - 17,37 \cdot 35^p \\ -13,76 &= k_1 - 14,17 \cdot 55^p \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} -16,74 &= k_1 - 16,57 \cdot 40^p \\ -17,6 &= k_1 - 17,37 \cdot 35^p \end{aligned} \right\} \rightarrow 0,86 = -16,57 \cdot 40^p + 17,37 \cdot 35^p$$

$$\left. \begin{aligned} -16,74 &= k_1 - 16,57 \cdot 40^p \\ -13,76 &= k_1 - 14,17 \cdot 55^p \end{aligned} \right\} \rightarrow -2,98 = -16,57 \cdot 40^p + 14,17 \cdot 55^p$$

Calculamos p a partir de cualquiera de las ecuaciones, por ejemplo en la segunda:

$$-2,98 = -16,57 \cdot 40^p + 14,17 \cdot 55^p \rightarrow -2,98 + 16,57 \cdot 40^p = 14,17 \cdot 55^p$$

Funciones exponenciales y logarítmicas

Consideramos las funciones $f(p) = -2,98 + 16,57 \cdot 40^p$ y $g(p) = 14,17 \cdot 55^p$, y obtenemos mediante tanteo el valor de p donde coinciden:

p	$f(p)$	$g(p)$
0	13,59	14,17
0,1	20,982	21,155
0,2	31,672	31,582
0,3	47,132	47,15

p	$f(p)$	$g(p)$
0,1	20,982	21,155
0,11	21,883	22,02
0,12	22,817	22,92
0,13	23,786	23,857
0,14	24,792	24,833
0,15	25,836	25,848
0,16	26,919	26,905
0,17	28,042	28,005

Es decir, las funciones se hacen iguales para un valor de p comprendido entre 0,16 y 0,17.

Si tomamos como solución un valor aproximado $p = 0,16$; calculamos el valor de k_1 .

$$-16,74 = k_1 - 16,57 \cdot 40^{0,16} \rightarrow k_1 = -16,74 + 16,57 \cdot 40^{0,16} = 13,16$$

La fórmula del índice Windchill es:

$$T_s = 13,16 + 0,62 \cdot T - 11,37 \cdot V^{0,16} + 0,4 \cdot T \cdot V^{0,16}$$

Para $T = -7^\circ\text{C}$ y $V = 32\text{ km/h}$:

$$T_s = 13,16 + 0,62 \cdot (-7) + 11,37 \cdot 32^{0,16} + 0,4 \cdot (-7) \cdot 32^{0,16} = -15,85$$

073



Una granja avícola está contaminando el agua de un río cercano con ácido úrico. Las autoridades le han comunicado que si los niveles de ácido úrico no bajan, en el próximo control, dentro de 6 meses cerrarán la granja.



Lucía, la responsable de seguridad de la granja, ha hecho un seguimiento del nivel de ácido úrico del río durante varios meses.

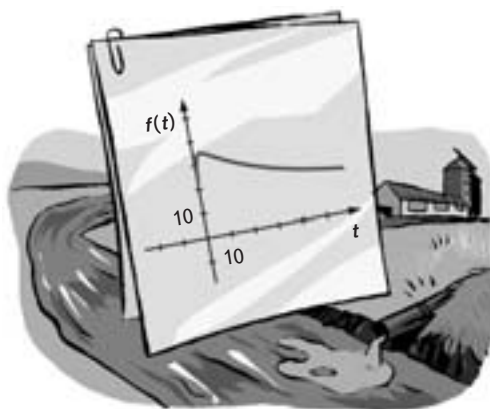


El nivel máximo permitido de ácido úrico es 33,9.

En el informe que presenta detalla cómo el nivel de ácido úrico se puede describir mediante esta función.

$$f(t) = 40 \ln(t + 1) - 50 \ln(t + 2) + 60$$

La función $f(t)$ da el nivel de ácido úrico, siendo t el tiempo, en meses.



El nivel baja a partir del tercer mes desde el vertido. ¿Bajará lo suficiente como para que la granja pase los controles programados? ¿Qué sucederá al cabo de un año?

La concentración de ácido úrico dentro de seis meses será:

$$f(6) = 40 \cdot \ln 7 - 50 \cdot \ln 8 + 60 = 33,86$$

Como la concentración es menor de 33,9, la fábrica seguirá funcionando.

La concentración dentro de un año será:

$$f(12) = 40 \cdot \ln 13 - 50 \cdot \ln 14 + 60 = 30,64$$

VARIABLES ESTADÍSTICAS**GRÁFICOS ESTADÍSTICOS**DIAGRAMA
DE BARRAS

HISTOGRAMA

POLÍGONO DE
FRECUENCIASDIAGRAMA
DE SECTORES**MEDIDAS DE CENTRALIZACIÓN**MEDIA
ARITMÉTICA

MEDIANA

MODA

MEDIDAS DE POSICIÓN

CUARTILES

PERCENTILES

MEDIDAS DE DISPERSIÓN

RANGO

VARIANZA

DESVIACIÓN
TÍPICACOEFICIENTE
DE VARIACIÓN

El cirujano

El agua se volvió rojiza a medida que el joven se frotaba enérgicamente las manos, eliminando los restos de sangre y jabón; después, vació la pila y continuó el proceso de limpieza de forma casi convulsiva.

A su espalda, la voz de su tío intentaba consolarlo:

–Tranquilo, una operación tiene estos riesgos, pero con el tiempo aprenderás a superarlo.

El joven, Simèon Poisson, observó con detenimiento sus manos todavía húmedas como queriendo descubrir algún fallo y contestó:

–¡Un hombre ha muerto! Tío, mira mis manos, todavía tiemblan, y esto en un cirujano es la sentencia de muerte de su paciente.

–Piensa, querido sobrino, que tu paciente probablemente morirá si no lo operas. Si todo sale bien le ganas la batalla a la muerte, y si no es así tan solo se adelanta lo inevitable.

–Lo siento, tío, pero mi determinación es firme, carezco de la vocación y la habilidad necesarias para ser un cirujano. Regreso a casa.

Pocos años más tarde, Poisson enseñaba en la Escuela Politécnica de París y su carrera como científico fue muy notable. Desarrolló algunos modelos que se ajustan a estudios estadísticos.

Al hacer un estudio estadístico, ¿qué utilizamos, la población o una muestra?

Debemos utilizar una muestra que sea representativa, es decir, que nos asegure que las conclusiones del estudio son válidas para toda la población.

La elección de dicha muestra se puede realizar de forma «aleatoria», si todos los individuos de la población tienen la misma probabilidad de ser elegidos, o de forma «proporcional», donde los individuos de la muestra conserven la misma proporción que en la población.

Por ejemplo, si queremos hacer un estudio de una población en la que hay un 70 % de hombres, la muestra representativa debería tener un 70 % de hombres y un 30 % de mujeres.



EJERCICIOS

001 Señala en qué caso es más conveniente estudiar la población o una muestra.

- a) La longitud de los tornillos que fabrica una máquina de manera continua.
 b) El peso de un grupo de cinco amigos.
- a) Una muestra, pues la población es excesivamente grande.
 b) La población, ya que es pequeña.

002 Determina las variables estadísticas que se estudian en el ejercicio anterior.

En el caso de los tornillos, la variable estadística es la longitud, y en el caso de los amigos, es el peso. En ambos casos son variables cuantitativas continuas.

003 Este es el titular de un periódico:

«EL PESO MEDIO DE LOS ESPAÑOLES ES 69 KG».

- a) ¿Cómo se ha llegado a esta conclusión? ¿Se habrá estudiado a toda la población?
- b) ¿Qué características debería tener la muestra elegida? ¿Podrían ser todos los individuos de la muestra de la misma edad? Y si todos fueran mujeres, ¿sería representativa la muestra?
- a) Se ha llegado a la conclusión a partir del estudio de una muestra.
 b) La muestra debe ser representativa de los sectores que forman la población española, respetando la proporción de cada uno de ellos. Si todos los individuos fueran de la misma edad o el mismo sexo no sería representativa, ya que no se mantendría la proporción de los sectores en la población.

004 Las notas en Inglés de 20 alumnos son:

6 5 3 1 2 5 6 5 9 8
 7 4 9 5 7 7 8 6 5 10

Obtén la tabla de frecuencias.

Notas	f_i	h_i	F_i	H_i
1	1	0,05	1	0,05
2	1	0,05	2	0,1
3	1	0,05	3	0,15
4	1	0,05	4	0,2
5	5	0,25	9	0,45
6	3	0,15	12	0,6
7	3	0,15	15	0,75
8	2	0,1	17	0,85
9	2	0,1	19	0,95
10	1	0,05	20	1

005 El número de horas diarias de estudio de 30 alumnos es:

3 4 3 5 5 1 1 1 1 2 3 4 5 0 2
0 3 2 2 1 2 1 3 2 0 1 2 1 4 3

Construye una tabla de frecuencias.

Horas	f_i	h_i	F_i	H_i
0	3	0,1	3	0,1
1	8	0,27	11	0,37
2	7	0,23	18	0,6
3	6	0,2	24	0,8
4	3	0,1	27	0,9
5	3	0,1	30	1

006 El color de pelo de 30 personas elegidas al azar es:

M = moreno
 R = rubio
 P = pelirrojo

M R P M M
 M M R R P
 P M M M M
 M P R R R
 P M M M R
 M M M R P



Construye su tabla de frecuencias.

Color	f_i	h_i
Moreno	16	0,53
Rubio	8	0,27
Pelirrojo	6	0,2

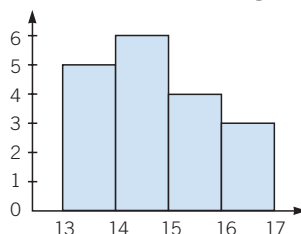
007 Estas son las edades, en años, de 18 alumnos:

13 15 14 16 13 15 14 16 15
14 13 13 13 15 14 16 14 14

Realiza un gráfico de sus frecuencias relativas.

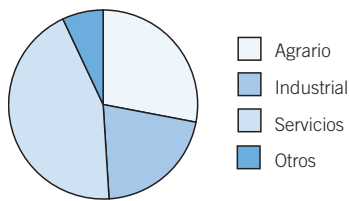
Antes de dibujar el gráfico es necesario hacer la tabla de frecuencias. Aunque los valores parecen discretos, al representarlos consideramos que alguien que afirma tener 14 años, realmente tiene más de 14 años y menos de 15 años. Por esta razón utilizamos un histograma.

x_i	f_i	h_i
13	5	0,278
14	6	0,333
15	4	0,222
16	3	0,167



008 Representa estos datos con el gráfico adecuado.

Sector	Agrario	Industrial	Servicios	Otros
Trabajadores	28 %	21 %	44 %	7 %

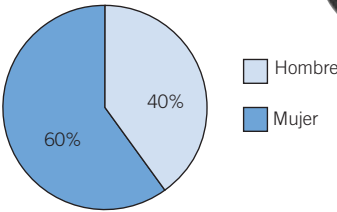


009 El sexo de 20 bebés nacidos en un hospital ha sido:

H M H H M M H H M M
M M M H M M H H M M

Construye la tabla asociada a estos datos, y represéntalos.

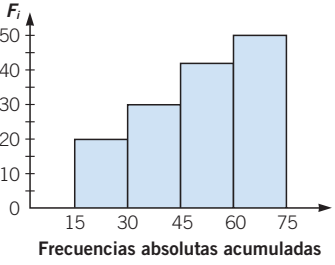
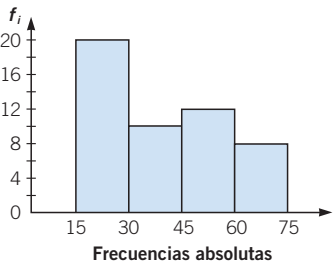
Sexo	f_i	h_i
Hombre	8	0,4
Mujer	12	0,6



010 Completa la tabla de frecuencias y dibuja el histograma de frecuencias absolutas y acumuladas con los datos de esta tabla.

Edad	[15, 30)	[30, 45)	[45, 60)	[60, 75)
N.º de personas	20	10	12	8

Edad	f_i	h_i	F_i	H_i
[15, 30)	20	0,4	20	0,4
[30, 45)	10	0,2	30	0,6
[45, 60)	12	0,24	42	0,84
[60, 75)	8	0,16	50	1

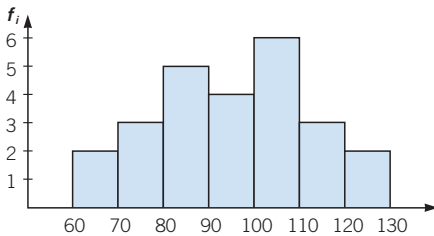


011 Los resultados de un test de inteligencia realizado a 25 personas fueron:

100 80 92 101 65 72 121 68 75 93 101 100
102 97 89 73 121 114 113 113 106 84 94 83 82

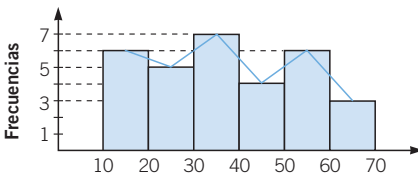
Obtén la tabla de frecuencias y de porcentajes, tomando intervalos de amplitud 10. Representa los datos en un histograma.

Resultados	f_i	%	h_i	F_i	H_i
[60, 70)	2	8	0,08	2	0,08
[70, 80)	3	12	0,12	5	0,2
[80, 90)	5	20	0,2	10	0,4
[90, 100)	4	16	0,16	14	0,56
[100, 110)	6	24	0,24	20	0,8
[110, 120)	3	12	0,12	23	0,92
[120, 130)	2	8	0,08	25	1



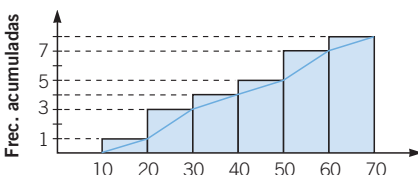
012 Construye las tablas de frecuencias que corresponden a los siguientes gráficos estadísticos, indicando de qué tipo es cada uno.

a) En este histograma están representados las frecuencias absolutas y el polígono de frecuencias. La tabla de frecuencias correspondiente es:



Intervalos	f_i	h_i
[10, 20)	6	0,19
[20, 30)	5	0,16
[30, 40)	7	0,23
[40, 50)	4	0,13
[50, 60)	6	0,19
[60, 70)	3	0,1

b) En este histograma están representados las frecuencias acumuladas y el polígono de frecuencias. La tabla de frecuencias correspondiente es:



Intervalos	F_i	H_i
[10, 20)	1	0,125
[20, 30)	3	0,375
[30, 40)	4	0,5
[40, 50)	5	0,625
[50, 60)	7	0,875
[60, 70)	8	1

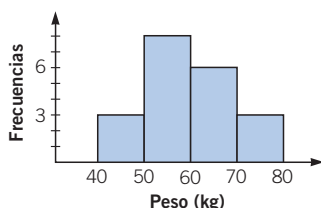
- 013** Organiza en una tabla de frecuencias estos datos relativos al peso, en kg, de 20 personas.

42 51 56 66 75 47 51 45 63 79
69 59 50 70 59 62 54 60 63 58

- a) Representa los datos mediante el gráfico más adecuado.
b) Calcula sus medidas de centralización.

a)

Peso	x_i	f_i
[40, 50)	45	3
[50, 60)	55	8
[60, 70)	65	6
[70, 80)	75	3



- b) La media aritmética es:

$$\bar{x} = \frac{3 \cdot 45 + 8 \cdot 55 + 6 \cdot 65 + 3 \cdot 75}{20} = 59,5$$

La frecuencia mayor es 8, que corresponde al intervalo [50, 60).

Intervalo modal = [50, 60)

Ordenamos los datos: 42, 45, 47, 50, 51, 51, 54, 56, 58, 59, 59, 60, 62, 63, 63, 66, 69, 70, 75, 79

$$Me = \frac{59 + 59}{2} = 59$$

- 014** Halla las medidas de centralización.

[0, 5)	[5, 10)	[10, 15)	[15, 20)
10	12	37	21

La media aritmética es:

$$\bar{x} = \frac{10 \cdot 2,5 + 12 \cdot 7,5 + 37 \cdot 12,5 + 21 \cdot 17,5}{80} = 11,8$$

La frecuencia mayor es 37, que corresponde al intervalo [10, 15).

Intervalo modal = [10, 15)

Intervalo mediano = [10, 15)

- 015** Decide qué valores podemos añadir a este conjunto de datos: 18, 8, 7, 9, 12, 15, 21 y 12 para que la mediana siga siendo la misma.

Ordenamos los datos: 7, 8, 9, 12, 12, 15, 18, 21

La mediana es 12.

Si solo añadimos un valor, independientemente de cuál sea, la mediana seguirá siendo 12.

016 Con los datos de la tabla del ejemplo anterior, calcula los siguientes percentiles.

- a) P_{22} b) P_7 c) P_{98} d) P_{66}

Datos	f_i	h_i	F_i	H_i
1	11	0,18	11	0,18
2	27	0,45	38	0,63
3	4	0,07	42	0,7
4	18	0,3	60	1

- a) $P_{22} = 2$ b) $P_7 = 1$ c) $P_{98} = 4$ d) $P_{66} = 3$

017 ¿Qué tipo de frecuencias se utilizan para calcular las medidas de posición?
¿Es la mediana una medida de posición?

Para calcular las medidas de posición se utilizan las frecuencias acumuladas.

La mediana se puede considerar una medida de posición, ya que divide la distribución de los datos en dos partes iguales:

$$Me = Q_2 = P_{50}$$

018 Salen 20 plazas a concurso por oposición y se presentan 200 personas.

Notas	3	4	5	6	7	8	9	10
f_i	6	25	34	42	50	27	13	3

¿Con qué nota se obtiene una de las plazas mediante el concurso por oposición?
¿Qué percentil es la nota 5?

Hay $200 - 20 = 180$ personas que suspenden la oposición. Como 180 es el 90 % de 200, y $P_{10} = 8$, siendo 8 la nota mínima para aprobar.

Ordenados los datos, del 32.º al 65.º tienen de nota 5, luego 5 es el percentil P_{16} , P_{17} , ..., hasta P_{32} .

019 Lidia ha obtenido las siguientes notas en Matemáticas: 7, 5, 6, 10, 9, 7 y 6. Halla las medidas de dispersión.

$$\bar{x} = 7,14 \quad \sigma^2 = 2,69 \quad \sigma = 1,64 \quad CV = 0,23$$

020 Calcula las medidas de dispersión de estos datos.

N.º de vehículos	0	1	2	3
N.º de familias	115	456	268	161

x_i	f_i	$ x_i - \bar{x} $	$(x_i - \bar{x})^2$	$f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2$
0	115	1,475	2,175	250,125
1	456	0,475	0,225	102,6
2	268	0,525	0,275	140,7
3	161	1,525	2,325	374,325
	1.000			867,75

$$\begin{aligned}\bar{x} &= 1,475 \\ \sigma^2 &= 0,867 \\ \sigma &= 0,931 \\ CV &= 0,631\end{aligned}$$

021 Compara la dispersión en estas dos variables: la primera mide el peso de los elefantes, con $\bar{x} = 2.000$ kg y $\sigma = 100$ kg, y la otra mide el peso de los ratones, con $\bar{x} = 0,05$ kg y $\sigma = 0,02$ kg.

$$CV_e = \frac{100}{2.000} = 0,05 \quad CV_r = \frac{0,02}{0,05} = 0,4$$

La dispersión en los ratones es mayor, ya que su coeficiente de variación es mayor.

022 Obtén y comenta las medidas estadísticas de estos datos: 1, 3, 2, 5, 2 y 5.

x_i	f_i	F_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$	$f_i \cdot x_i - \bar{x} $
1	1	1	1	1	2
2	2	3	4	8	2
3	1	4	3	9	0
5	2	6	10	50	4
Total	6		18	68	8

Las medidas de centralización son:

$$\bar{x} = \frac{18}{6} = 3 \quad Me = 2,5 \quad Mo = 2 \text{ y } 5$$

Las medidas de dispersión son:

$$\text{Rango: } R = \text{máximo} - \text{mínimo} = 5 - 1 = 4$$

$$\text{Desviación media: } DM = \frac{\sum f_i \cdot |x_i - \bar{x}|}{N} = \frac{8}{6} = 1,333...$$

$$\text{Varianza: } \sigma^2 = \frac{\sum f_i \cdot x_i^2}{N} - \bar{x}^2 = \frac{68}{6} - 9 = \frac{14}{6} = 2,333...$$

$$\text{Desviación típica: } \sigma = \sqrt{\sigma^2} = 1,5275$$

$$\text{Coeficiente de variación: } CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{1,5275}{3} = 0,509 = 50,9 \%$$

Los datos presentan una agrupación pequeña respecto de las medidas de centralización.

023 Varía las frecuencias del ejercicio anterior para obtener una conclusión distinta.

Por ejemplo, con 1, 2, 2, 2, 3, 4 se obtendría una agrupación bastante mayor.

024 La tabla muestra el número de accidentes laborales que han tenido lugar en el último año.

N.º de accidentes	[0, 10)	[10, 20)	[20, 30)	[30, 40)
N.º de meses	1	5	4	2

Calcula las medidas de dispersión.

N.º de accidentes	x_i	f_i	F_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$	$f_i \cdot x_i - \bar{x} $
[0, 10)	5	1	1	5	25	15,83
[10, 20)	15	5	6	75	1.125	29,15
[20, 30)	25	4	10	100	2.500	16,68
[30, 40)	35	2	12	70	2.450	28,34
Total		12		250	6.100	90

Las medidas de centralización son:

$$\bar{x} = \frac{250}{12} = 20,83$$

Intervalo mediano = [20, 30)

Intervalo modal = [10, 20)

Las medidas de dispersión son:

Rango: $R = \text{máximo} - \text{mínimo} = 40 - 0 = 40$

$$\text{Desviación media: } DM = \frac{\sum f_i \cdot |x_i - \bar{x}|}{N} = \frac{90}{12} = 7,5$$

$$\text{Varianza: } \sigma^2 = \frac{\sum f_i \cdot x_i^2}{N} - \bar{x}^2 = \frac{6.100}{12} - 433,89 = 74,44$$

$$\text{Desviación típica: } \sigma = \sqrt{\sigma^2} = 8,63$$

$$\text{Coeficiente de variación: } CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{8,63}{20,83} = 0,414 = 41,4 \%$$

ACTIVIDADES

- 025** Indica el tipo de variable estadística que estudiamos y razona, en cada caso, si sería mejor analizar una muestra o la población.

- La talla de los alumnos de un IES.
- La temperatura de tu provincia.
- La edad de los habitantes de un país.
- El sexo de los habitantes de un pueblo.
- El dinero gastado a la semana por tus amigos.
- Los efectos de un nuevo medicamento en el ser humano.
- El color del pelo de tus compañeros de clase.

- Cuantitativa discreta, estudiar la población.
- Cuantitativa continua, estudiar una muestra.
- Cuantitativa continua, estudiar una muestra.
- Cualitativa, estudiar una muestra.
- Cuantitativa continua, estudiar la población.
- Cualitativa, estudiar una muestra.
- Cualitativa, estudiar la población.

Estadística

026

El número de horas diarias de estudio de 30 alumnos es:

3 4 3 5 5 1 1 1 1 2 3 4 5 0 2
0 3 2 2 1 2 1 3 2 0 1 2 1 4 3

- a) Efectúa un recuento y organiza los resultados en una tabla de frecuencias.
b) ¿Qué significan las frecuencias acumuladas que has calculado?

a)

N.º de horas	f_i	h_i	F_i	H_i
0	3	0,1	3	0,1
1	8	0,267	11	0,367
2	7	0,233	18	0,6
3	6	0,2	24	0,8
4	3	0,1	27	0,9
5	3	0,1	30	1

- b) Veamos el significado de las frecuencias acumuladas relativas mediante un ejemplo:
 $F_3 = 24$ quiere decir que hay 24 alumnos que estudian tres horas o menos cada día.
 $H_2 = 0,6$ significa que el 60 % de los alumnos estudia dos horas o menos cada día.

027

Completa la siguiente tabla de frecuencias.

x_i	h_i	F_i	Porcentaje
10	4	4	8
20	5	9	10
30	7	16	14
40	10	26	20
50	15	41	30
60	9	50	18

028

En una evaluación, de los 30 alumnos de una clase, el 10 % aprobó todo, el 20 % suspendió una asignatura, el 50 % suspendió dos asignaturas y el resto más de dos asignaturas.

- a) Realiza la tabla de frecuencias correspondiente.
b) ¿Hay algún tipo de frecuencia que responda a la pregunta de cuántos alumnos suspendieron menos de dos asignaturas? Razona tu respuesta.

a)

N.º de asignaturas suspendas	f_i	h_i	F_i	H_i
0	3	0,1	3	0,1
1	6	0,2	9	0,3
2	15	0,5	24	0,8
Más de 2	6	0,2	30	1

- b) La frecuencia que nos proporciona la respuesta a la pregunta de cuántos alumnos suspendieron menos de dos asignaturas, es la frecuencia acumulada, $F_1 = 9$.

- 029** Explica cómo completarías una tabla de frecuencias conociendo solo las frecuencias absolutas acumuladas. ¿Podrías hacer lo mismo con las frecuencias relativas acumuladas?

Para completar una tabla de frecuencias, conociendo las frecuencias absolutas acumuladas, es necesario tener en cuenta que:

$$F_1 = f_1$$

$$F_i = f_{i-1} + f_i \rightarrow f_i = F_i - F_{i-1}, \text{ para } i > 1$$

Conociendo las frecuencias relativas acumuladas, las frecuencias relativas se calculan de forma análoga, ya que se verifica:

$$H_1 = h_1$$

$$H_i = H_{i-1} + h_i \rightarrow h_i = H_i - H_{i-1}, \text{ para } i > 1$$

- 030** Para realizar un estudio hacemos una encuesta entre los jóvenes de un barrio, y les preguntamos por el número de veces que van al cine por semana. Los resultados de la encuesta son:



- ¿Cuál y de qué tipo es la variable estadística que estamos estudiando?
- Construye una tabla de frecuencias.
- ¿Cuántos jóvenes van al cine más de dos veces por semana?
- ¿Y cuántos van, al menos, una vez por semana?

a) La variable estadística que estamos estudiando es «el número de veces que los jóvenes van al cine por semana», y es una variable cuantitativa discreta.

b)

x_i	f_i	F_i	h_i	H_i
0	7	7	0,14	0,14
1	16	23	0,32	0,46
2	13	36	0,26	0,72
3	7	43	0,14	0,86
4	4	47	0,08	0,94
5	3	50	0,06	1

- c) 14 jóvenes van al cine más de dos veces por semana.
 d) Al menos una vez por semana van al cine 43 jóvenes.

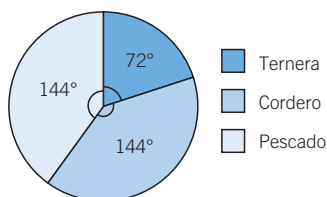
031

De los 30 asistentes a una cena, el 20 % comió ternera, el 40 % cordero y el resto pescado.

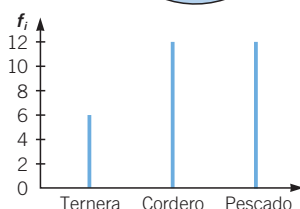
- a) Organiza los resultados en una tabla de frecuencias, y representa los datos en un diagrama de sectores.
b) Realiza un diagrama de barras y explica cómo lo haces. ¿Cuál de los dos gráficos prefieres? ¿Por qué?

a)

Comida	f_i	F_i	h_i	H_i
Ternera	6	6	0,2	0,2
Cordero	12	18	0,4	0,6
Pescado	12	30	0,4	1



- b) Representamos, en el diagrama de barras, las frecuencias absolutas. En este caso es preferible utilizar el gráfico de sectores porque es más fácil de comprender.



032

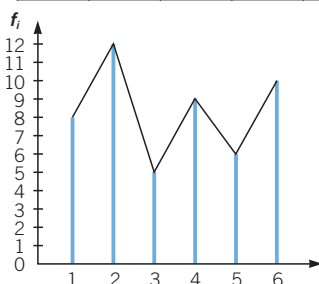
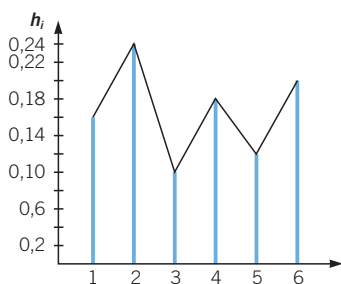
La siguiente tabla muestra los resultados de lanzar 50 veces un dado.

Cara	1	2	3	4	5	6
N.º de veces	8	12	5	9	6	10

- a) Representa los diagramas de barras de frecuencias relativas y absolutas. ¿Qué observas?
b) Sobre los gráficos anteriores, dibuja su polígono de frecuencias.
c) ¿Podrías representar los datos en un histograma? Razona tu respuesta.

- a) y b) Al representar los dos diagramas se observa que el gráfico es el mismo, y lo único que cambia es el eje vertical; en un caso son frecuencias absolutas, y el en otro caso, son relativas.

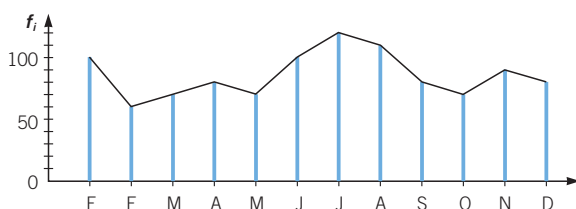
Cara	f_i	F_i	h_i	H_i
1	8	8	0,16	0,16
2	12	20	0,24	0,4
3	5	25	0,1	0,5
4	9	34	0,18	0,68
5	6	40	0,12	0,8
6	10	50	0,2	1



- c) Estos datos no pueden representarse mediante un histograma porque la variable no es continua.

033

La venta de turismos durante un año en un concesionario viene representada por el siguiente gráfico.



a) Halla las frecuencias absolutas y relativas.

b) Obtén las frecuencias acumuladas.

a) y b)

Mes	f_i	F_i	h_i	H_i
Enero	100	100	0,09	0,09
Febrero	60	160	0,05	0,14
Marzo	70	230	0,06	0,2
Abril	80	310	0,07	0,27
Mayo	70	380	0,06	0,33
Junio	100	480	0,09	0,42
Julio	120	600	0,11	0,52
Agosto	110	710	0,1	0,62
Septiembre	80	790	0,07	0,69
Octubre	70	860	0,06	0,75
Noviembre	90	950	0,08	0,83
Diciembre	80	1.030	0,07	0,9

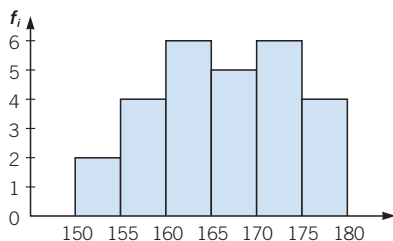
034

Las estaturas, en cm, de 27 jóvenes son las siguientes.

155 178 170 165 173 168 160 166 176
 169 158 170 179 161 164 156 170 171
 167 151 163 158 164 174 176 164 154

Utiliza intervalos de amplitud 5, comenzando con el intervalo [150, 155), forma una tabla, efectúa el recuento y obtén las marcas de clase. Representa los datos en un histograma.

Estatura	x_i	f_i	h_i	F_i	H_i
[150, 155)	152,5	2	0,074	2	0,074
[155, 160)	157,5	4	0,148	6	0,222
[160, 165)	162,5	6	0,222	12	0,444
[165, 170)	167,5	5	0,185	17	0,629
[170, 175)	172,5	6	0,222	23	0,851
[175, 180)	177,5	4	0,148	27	1



035



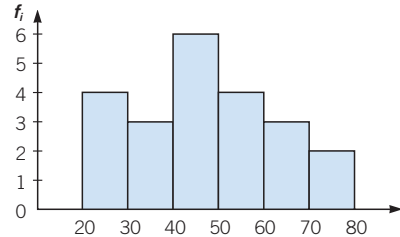
Hemos estudiado el contenido en sales de 22 botellas de agua, y obtenemos los siguientes datos expresados en miligramos.

46 25 27 30 48 40
27 44 37 62 56 29
76 75 49 59 33 52
54 45 66 69



- a) Clasifica la variable estadística estudiada.
- b) Justifica el hecho de tomar o no intervalos al hacer una tabla.
- c) Realiza el gráfico que consideres más adecuado.
- a) La variable estadística es cuantitativa continua.
- b) Debido al tamaño de la muestra, es conveniente tomar intervalos.
- c) Para realizar cualquier representación gráfica es necesario construir primero la tabla de frecuencias. Construimos el histograma.

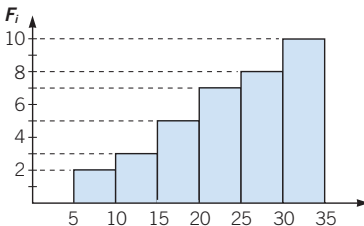
Sales	x_i	f_i
[20, 30)	25	4
[30, 40)	35	3
[40, 50)	45	6
[50, 60)	55	4
[60, 70)	65	3
[70, 80)	75	2



036



Reconstruye la tabla de frecuencias asociada a este gráfico de frecuencias acumuladas.



Intervalos	x_i	f_i	h_i	F_i	H_i
[5, 10)	7,5	2	0,2	2	0,2
[10, 15)	12,5	1	0,1	3	0,3
[15, 20)	17,5	2	0,2	5	0,5
[20, 25)	22,5	2	0,2	7	0,7
[25, 30)	27,5	1	0,1	8	0,8
[30, 35)	32,5	2	0,2	10	1

037 HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE DIBUJA UN DIAGRAMA DE CAJAS?

Un diagrama de cajas es un gráfico en el que se dibuja una caja central, que indica el intervalo en el que se concentra el 50 % de los datos (sus extremos son el 1.^{er} y 3.^{er} cuartiles) y una línea central que marca la mediana. A partir de él podemos detectar datos atípicos que se alejan del resto. Con esta información, representa estos datos mediante un diagrama de cajas.

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
f_i	1	7	8	2	1	1	6	4
F_i	1	8	16	18	19	20	26	30

PRIMERO. Se calcula la mediana, Q_1 y Q_3 .

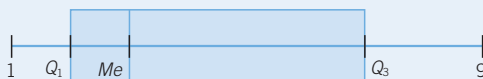
$$Me = 3$$

$$Q_1 = 2$$

$$Q_3 = 7$$

SEGUNDO. Se representan estos datos en una recta.

TERCERO. Se dibuja un rectángulo de anchura comprendida entre Q_1 y Q_3 , una línea que pase por la mediana y rectas exteriores que marcan el rango de los datos.



038 Dibuja un diagrama de cajas para estos datos.

x_i	1	2	3	4	5	6
f_i	3	1	2	1	4	1

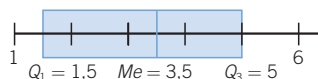
x_i	12	13	14	15
f_i	11	9	8	62

x_i	f_i	h_i	F_i	H_i
1	3	0,25	3	0,25
2	1	0,08	4	0,33
3	2	0,17	6	0,5
4	1	0,08	7	0,58
5	4	0,33	11	0,92
6	1	0,08	12	1

$$Q_1 = 1,5$$

$$Me = 3,5$$

$$Q_3 = 5$$



Estadística

039 Obtén las medidas de centralización de la siguiente serie de datos.

7	3	2	4	5	1	8	6	1	5
3	2	4	9	8	1	0	2	4	1
2	5	6	5	4	7	1	3	0	5
8	6	3	4	0	9	2	5	7	4
0	2	1	5	6	4	3	5	2	3

x_i	f_i	F_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$	$f_i \cdot x_i - \bar{x} $
0	4	4	0	0	15,44
1	6	10	6	6	17,16
2	7	17	14	28	13,02
3	6	23	18	54	5,16
4	7	30	28	112	0,98
5	8	38	40	200	9,12
6	4	42	24	144	8,56
7	3	45	21	147	9,42
8	3	48	24	192	12,42
9	2	50	18	162	10,28
Total	50		193	1.045	101,56

Las medidas de centralización son: $\bar{x} = \frac{193}{50} = 3,86$ $Me = 4$ $Mo = 5$

Las medidas de dispersión son: Rango: $R = \text{máximo} - \text{mínimo} = 9 - 0 = 9$

Desviación media: $DM = \frac{\sum f_i \cdot |x_i - \bar{x}|}{N} = \frac{101,56}{50} = 2,0312$

Varianza: $\sigma^2 = \frac{\sum f_i \cdot x_i^2}{N} - \bar{x}^2 = \frac{1.045}{50} - 14,9 = 6$

Desviación típica: $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = 2,45$

Coefficiente de variación: $CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{2,45}{3,86} = 0,63 = 63\%$

040 Realiza la actividad anterior, pero agrupa en intervalos de amplitud 2, comenzando en cero. ¿Obtienes los mismos resultados? ¿Por qué?

Intervalos	x_i	f_i	F_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$	$f_i \cdot x_i - \bar{x} $
[0, 2)	1	10	10	10	10	33,6
[2, 4)	3	13	23	39	117	17,68
[4, 6)	5	15	38	75	375	9,6
[6, 8)	7	7	45	49	343	18,48
[8, 10)	9	5	50	45	405	23,2
Total		50		218	1.250	102,56

Las medidas de centralización son:

$\bar{x} = 4,36$ Intervalo mediano = [4, 6) Intervalo modal = [4, 6)

Las medidas de dispersión son: Rango: $R = \text{máximo} - \text{mínimo} = 9 - 0 = 9$

Desviación media: $DM = \frac{\sum f_i \cdot |x_i - \bar{x}|}{N} = \frac{102,56}{50} = 2,05$

$$\text{Varianza: } \sigma^2 = \frac{\sum f_i \cdot x_i^2}{N} - \bar{x}^2 = \frac{1.250}{50} - 19 = 6$$

$$\text{Desviación típica: } \sigma = \sqrt{\sigma^2} = 2,45$$

$$\text{Coeficiente de variación: } CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{2,45}{4,36} = 0,56 = 56 \%$$

Se observa que no se obtienen los mismos resultados. Hemos trabajado con marcas de clase debido a la agrupación de los datos.

- 041** Una cadena de televisión ha realizado un estudio entre 200 espectadores para determinar el grado de satisfacción de un programa, obteniendo estos resultados.

Opinión	Muy bueno	Bueno	Regular	Malo	Muy malo
Porcentaje	15	25	30	25	5

Calcula e interpreta las medidas de centralización.

$Me = \text{Regular} \rightarrow$ Significa que la mitad de los datos son peores o iguales que Regular y la otra mitad son mejores o iguales que Regular.

$Mo = \text{Regular} \rightarrow$ Significa que Regular es la opinión en la que coinciden más espectadores.

042 HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE PUEDEN AÑADIR O SUPRIMIR DATOS PARA OBTENER UNA MEDIA DETERMINADA?

Añade un dato a este conjunto para que:

3 3 3 4 4 4 4 5 5 6 6 7 7 7 7

- a) La media no varíe. b) La media sea 6.

PRIMERO. Se calcula la media de los datos.

$$N = 15 \rightarrow \bar{x} = \frac{75}{15} = 5$$

SEGUNDO. Se multiplica la media que se quiere obtener por el nuevo número de datos, $N = 16$.

- a) $16 \cdot 5 = 80$ b) $16 \cdot 6 = 96$

TERCERO. Se resta $\sum_{i=1}^n f_i \cdot x_i$ a este resultado y se obtiene el nuevo resultado.

- a) $80 - 75 = 5$. Hay que añadir un 5. b) $96 - 75 = 21$. Hay que añadir un 21.

043 Añade dos datos a este conjunto para que la media cumpla estas condiciones.

5 5 5 5 8 8 8 8 8 10

- a) No varíe. b) Sea 8. c) Sea 4.

$$\bar{x} = 7$$

- a) Los dos números deben sumar 14, por ejemplo 7 y 7.

- b) $8 \cdot 12 = 96$; $96 - 70 = 26$. La suma de los dos números debe ser 26.
Por ejemplo, 10 y 16.

- c) $4 \cdot 12 = 48$; $48 - 70 = -22$. La suma de los dos números debe ser -22.
Por ejemplo, -10 y -12.

044 HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE PUEDEN AÑADIR O SUPRIMIR DATOS PARA OBTENER UNA MEDIANA DETERMINADA?

Añade un dato a este conjunto para que la mediana no varíe.

3 3 3 4 4 4 5 5 5 6 6 7 7 7 7

PRIMERO. Se calcula la mediana: $Me = 5$

SEGUNDO. Al añadir datos, la mediana se desplazará tantos lugares como datos se añadan.

Al añadir un dato, $N = 16$ y la mediana será la media entre los datos colocados en el 8.º y 9.º lugares (5 y 5). Por tanto, la mediana será siempre 5.

045 Añade dos datos a esta distribución para que la mediana:



8 8 8 8 8 9 9 10 10 10

a) No varíe.

b) Sea 8.

c) Sea 9.

- a) Uno de los datos debe ser mayor o igual a 9 y el otro dato debe ser menor o igual a 8. Por ejemplo, 5 y 11.
- b) Los dos datos deben ser menores o iguales que 8. Por ejemplo, 2 y 6.
- c) Los datos deben ser mayores o iguales a 9. Por ejemplo, 10 y 11.

046 Un corredor entrena, de lunes a viernes, recorriendo las siguientes distancias: 2, 5, 5, 7 y 3 km, respectivamente. Si el sábado también entrena:



a) ¿Cuántos kilómetros debe recorrer para que la media sea la misma?

b) ¿Y para que la mediana no varíe?

c) ¿Y para que la moda no varíe?

- a) La distancia media que recorre, de lunes a viernes, es:

$$\frac{2 + 5 + 5 + 7 + 3}{5} = \frac{22}{5} = 4,4 \text{ km}$$

Suponiendo que el sábado recorre d kilómetros, para que se conserve la media se ha de cumplir que:

$$\frac{2 + 5 + 5 + 7 + 3 + d}{6} = 4,4 \rightarrow \frac{22 + d}{6} = 4,4$$

$$\rightarrow d = 4,4 \cdot 6 - 22 = 4,4 \text{ km}$$

El sábado deberá recorrer 4,4 km.

- b) La mediana es $Me = 5$.

2 3 5 5 7

Para que la mediana no varíe, el sábado debe recorrer 5 km o más.

- c) Para que la moda no varíe es necesario que el sábado recorra cualquier distancia excepto 2, 3 o 7 kilómetros. De esta manera, la moda seguirá siendo 5.



- 047** La tabla muestra las notas obtenidas por 120 alumnos en una prueba de 100 preguntas.

Notas	x_i	f_i	F_i
[30, 40)	35	1	1
[40, 50)	45	3	4
[50, 60)	55	11	15
[60, 70)	65	21	36
[70, 80)	75	43	79
[80, 90)	85	32	111
[90, 100)	95	9	120
Total		$N = 120$	

- a) Calcula los tres cuartiles.** **b) Halla los percentiles P_{23} , P_{46} y P_{90} .**

Para hallar los cuartiles y percentiles es necesario calcular primero las frecuencias acumuladas.

- a) El 25 % de 120 es 30, luego Q_1 debe dejar 30 datos por debajo y el resto por encima. En la columna de frecuencias acumuladas, el primer número mayor o igual que 30 es 36, por lo que $Q_1 = 65$.

Como el 50 % de 120 es 60, repitiendo el proceso, tenemos que $Q_2 = 75$.

Análogamente, como el 75 % de 120 es 90, resulta que $Q_3 = 85$.

- b) El 23 % de 120 es 27,6; y la primera frecuencia acumulada mayor o igual que 27,6 es 36, que se corresponde con la marca de clase: 65, luego $P_{23} = 65$.

Como el 46 % de 120 es 55,2; repitiendo el proceso, resulta que $P_{46} = 75$.

Análogamente, como el 90 % de 120 es 108, tenemos que $P_{90} = 85$.

- 048** Contesta razonadamente a las siguientes cuestiones sobre medidas estadísticas.

- a) ¿Es la media siempre mayor que la desviación típica?**
b) En un estudio estadístico, ¿qué cantidad de datos es mayor que el cuartil primero, Q_1 , y menor que el cuartil tercero, Q_3 ?
c) ¿Qué significa que el peso de un niño está situado en P_{90} ?

- a) No, por ejemplo, si todos los datos fueran negativos, la media sería negativa, pero la desviación típica es siempre positiva.

- b) Sabemos que, entre dos cuartiles consecutivos cualesquiera, hay un 25 % de los datos, luego entre el cuartil primero, Q_1 , y el cuartil tercero, Q_3 , está el 50 % de los datos.

- c) Si el peso de un niño está situado en el percentil P_{90} , esto quiere decir que el 90 % de los niños pesa menos que lo que este indica.

049 ●● **Calcula e interpreta las medidas de dispersión de los siguientes datos, que expresan los días de baja por enfermedad de 10 trabajadores de una fábrica.**

0 2 3 4 2 1 1 0 0 3

x_i	f_i	F_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$	$f_i \cdot x_i - \bar{x} $
0	3	3	0	0	4,8
1	2	5	2	2	1,2
2	2	7	4	8	0,8
3	2	9	6	18	2,8
4	1	10	4	16	2,4
Total	10		16	44	12

$$\bar{x} = \frac{16}{10} = 1,6$$

Las medidas de dispersión son:
Rango: $R = \text{máximo} - \text{mínimo} = 4 - 0 = 4$

Desviación media:

$$DM = \frac{\sum f_i \cdot |x_i - \bar{x}|}{N} = \frac{12}{10} = 1,2$$

$$\text{Varianza: } \sigma^2 = \frac{\sum f_i \cdot x_i^2}{N} - \bar{x}^2 = \frac{44}{10} - 2,56 = 1,84$$

$$\text{Desviación típica: } \sigma = \sqrt{\sigma^2} = 1,36$$

$$\text{Coeficiente de variación: } CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{1,36}{1,6} = 0,85 = 85\%$$

050 ●● **Una persona ingresa 6.000 € en un fondo de inversión el 1 de enero de 2002. Las rentabilidades anuales del fondo durante los años siguientes han sido:**

Año	2002	2003	2004	2005
Rentabilidad (%)	5	4	-3	5

Si no ha retirado el capital, ¿cuál ha sido la rentabilidad media de dicho fondo durante estos años?

$$\text{La rentabilidad media ha sido: } \bar{x} = \frac{5 + 4 + (-3) + 5}{4} = 2,75\%$$

051 ●● **Realiza el estudio del peso, en kg, de 20 alumnos que se muestra en la tabla.**

Peso	x_i	f_i	F_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$	$f_i \cdot x_i - \bar{x} $
[36, 42)	39	4	4	156	6.084	50,4
[42, 48)	45	4	8	180	8.100	26,4
[48, 54)	51	5	13	255	13.005	3
[54, 60)	57	2	15	114	6.498	10,8
[60, 66)	63	3	18	189	11.907	34,2
[66, 72)	69	2	20	138	9.522	34,8
Total		20		1.032	55.116	159,6

Las medidas de centralización son:

$$\bar{x} = \frac{1.032}{20} = 51,6 \quad \text{Intervalo mediano} = [48, 54) \quad \text{Intervalo modal} = [48, 54)$$

Las medidas de dispersión son:

$$\text{Rango: } R = \text{máximo} - \text{mínimo} = 72 - 36 = 36$$

$$\text{Desviación media: } DM = \frac{\sum f_i \cdot |x_i - \bar{x}|}{N} = \frac{159,6}{20} = 7,98$$

$$\text{Varianza: } \sigma^2 = \frac{\sum f_i \cdot x_i^2}{N} - \bar{x}^2 = \frac{55.116}{20} - 51,6^2 = 93,24$$

$$\text{Desviación típica: } \sigma = \sqrt{\sigma^2} = 9,65$$

$$\text{Coeficiente de variación: } CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{9,65}{51,6} = 0,19 = 19\%$$

052

Los salarios, en euros, en una empresa son los siguientes.

Mujeres: 1.200, 1.300, 1.000, 900, 900, 1.100, 1.200, 1.100, 1.400, 1.200, 1.000, 1.300, 1.200, 1.100, 1.100

Hombres: 1.200, 1.300, 1.500, 1.300, 1.400, 900, 1.700, 1.600, 1.400, 1.300, 1.500, 1.300, 1.900, 1.700, 1.200

- Calcula la distribución de frecuencias, la media, la mediana y la desviación típica, de cada grupo: hombres y mujeres.
- Calcula sus medidas de dispersión.
- Compara ambos grupos. ¿Cómo lo haces?
- Si consideramos todos los datos en el mismo grupo, ¿qué resultados obtenemos?

a) y b) Mujeres:

x_i	f_i	F_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$
900	2	2	1.800	1.620.000
1.000	2	4	2.000	2.000.000
1.100	4	8	4.400	4.840.000
1.200	4	12	4.800	5.760.000
1.300	2	14	2.600	3.380.000
1.400	1	15	1.400	1.960.000
Total	15		17.000	19.580.000

Las medidas de centralización son:

$$\bar{x} = \frac{17.000}{15} = 1.133 \quad Me = 1.100 \quad Mo = 1.100 \text{ y } 1.200$$

Las medidas de dispersión son:

$$\text{Rango: } R = \text{máximo} - \text{mínimo} = 1.400 - 900 = 500$$

$$\text{Varianza: } \sigma^2 = \frac{\sum f_i \cdot x_i^2}{N} - \bar{x}^2 = \frac{19.580.000}{15} - 1.133^2 = 21.644$$

$$\text{Desviación típica: } \sigma = \sqrt{\sigma^2} = 147$$

$$\text{Coeficiente de variación: } CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{147}{1.133} = 0,13 = 13\%$$

Estadística

Hombres:

x_i	f_i	F_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$
900	1	1	900	810.000
1.200	2	3	2.400	2.880.000
1.300	4	7	5.200	6.760.000
1.400	2	9	2.800	3.920.000
1.500	2	11	3.000	4.500.000
1.600	1	12	1.600	2.560.000
1.700	2	14	3.400	5.780.000
1.900	1	15	1.900	3.610.000
Total	15		21.200	30.920.000

Las medidas de centralización son:

$$\bar{x} = \frac{21.200}{15} = 1.413 \quad Me = 1.400 \quad Mo = 1.300$$

Las medidas de dispersión son:

$$\text{Rango: } R = \text{máximo} - \text{mínimo} = 1.900 - 900 = 1.000$$

$$\text{Varianza: } \sigma^2 = \frac{\sum f_i \cdot x_i^2}{N} - \bar{x}^2 = \frac{30.920.000}{15} - 1.413^2 = 64.764$$

$$\text{Desviación típica: } \sigma = \sqrt{\sigma^2} = 254$$

$$\text{Coeficiente de variación: } CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{254}{1.413} = 0,18 = 18\%$$

- c) A la vista de los resultados, podemos afirmar que el salario medio en los hombres es mayor que en las mujeres. En ambos casos, la desviación típica es pequeña con relación a la media. Esto significa que los datos están bastante próximos al respectivo valor medio, estando más próximos en las mujeres que en los hombres, ya que el coeficiente de variación en los hombres es mayor que en las mujeres. En el caso de los hombres, los datos están más dispersos que en el caso de las mujeres.

d)

x_i	f_i	F_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$
900	3	3	2.700	2.430.000
1.000	2	5	2.000	2.000.000
1.100	4	9	4.400	4.840.000
1.200	6	15	7.200	8.640.000
1.300	6	21	7.800	10.140.000
1.400	3	24	4.200	5.880.000
1.500	2	26	3.000	4.500.000
1.600	1	27	1.600	2.560.000
1.700	2	29	3.400	5.780.000
1.900	1	30	1.900	3.610.000
Total	30		38.200	50.380.000

$$\bar{x} = 1.273,33 \quad Me = 1.250 \quad Mo = 1.200 \text{ y } 1.300$$

$$\text{Rango: } R = 1.900 - 900 = 1.000$$

$$\sigma^2 = \frac{50.380.000}{30} - 1.273^2 = 58.804 \quad \sigma = \sqrt{\sigma^2} = 242$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = 0,19 = 19\%$$

053

El tiempo, en minutos, que un conjunto de estudiantes dedica a preparar un examen es:

220 500 450 390 550 600
790 200 60 300 400 90

Las calificaciones de ese conjunto de estudiantes son las siguientes.

4 5 6 5 7 6 8 4 1 5 6 2

¿Cuál es la media y la desviación típica de ambos conjuntos? ¿Qué podemos hacer para comparar su variabilidad? ¿En qué conjunto los datos están más dispersos?

	Minutos de estudio	Calificaciones
Media	379	4,92
Varianza	43.037	3,58
Desviación típica	207	1,89
Coefficiente de variación	0,55	0,38

Para comparar la variabilidad nos fijamos en el coeficiente de variación. Están más dispersos los datos de los minutos dedicados al estudio.

054

Dos alumnos realizan 5 pruebas de calificación, obteniendo los siguientes resultados.

Juan: 2 6 5 7 5

Ana: 0 1 9 8 7

Compara sus datos, utilizando la media aritmética y la desviación típica.

La media aritmética y la desviación típica de ambos estudiantes son:

Juan: $\bar{x} = 5$ $\sigma = 1,67$ Ana: $\bar{x} = 5$ $\sigma = 3,74$

Las dos medias son iguales, pero tienen distinto significado dependiendo de sus desviaciones típicas.

En ambos casos, las medias son iguales y valen 5.

Sin embargo, Juan tiene una desviación típica mucho menor que Ana. Esto significa que Juan es un alumno constante, pues sus notas están próximas a la media. Por el contrario, podemos afirmar que Ana es una alumna bastante irregular, porque alterna notas muy altas y bajas, estando todas excesivamente alejadas de la media.

055

Un grupo de ratones tiene de media de sus pesos $\bar{x} = 70$ g y desviación típica $\sigma = 20$ g. Un conjunto de gatos tiene de media $\bar{x} = 2,5$ kg y desviación típica $\sigma = 20$ g. Compara ambos grupos.



Aunque las desviaciones típicas sean iguales, debido a la diferencia existente entre las medias, podemos decir que en el grupo de ratones hay más

dispersión en los datos que en el grupo de gatos: $CV_R = \frac{20}{70} > \frac{20}{2.500} = CV_G$

056



Los diplomados en Informática de gestión tienen un salario medio, en su primer empleo, de 1.080 €, con una desviación típica de 180 €. Los diplomados en Informática de sistemas tienen un salario medio de 960 €, con una desviación típica de 150 €. Si a un diplomado en Informática de gestión le ofrecen un sueldo de 1.200 €, y a un diplomado en Informática de sistemas, un sueldo de 1.140 €, ¿cuál recibe una mejor oferta? ¿Por qué?

Para poder comparar ambas ofertas vamos a medir sus beneficios en unidades de desviación típica.

Sabiendo que un diplomado en Informática de gestión tiene un salario medio de 1.080 €, con una desviación típica de 180 €, podemos decir que la oferta de 1.200 € se desvía por encima de la media:

$$\frac{1.200 - 1.080}{180} = 0,75 \text{ unidades de desviación típica}$$

Sin embargo, una oferta de 1.140 € a un diplomado en Informática de sistemas, con un sueldo medio de 960 € y 150 € de desviación típica, se desvía por encima de la media:

$$\frac{1.140 - 960}{150} = \frac{180}{150} = 1,2 \text{ unidades de desviación típica}$$

Esto indica que el diplomado en Informática de sistemas es quien recibe la mejor oferta.

057



La edad media de los integrantes de una orquesta aumentaría en un año si abandonaran la orquesta 5 músicos de 19 años cada uno, o si se unieran a ella 5 músicos de 17 años cada uno. ¿Es posible esta situación?

Es imposible, ya que si la edad media aumenta quitando 5 músicos de 19 años, esto quiere decir que la media era menor de 19 años, y si aumenta añadiendo 5 músicos de 17 años, significa que la media es inferior a 17, por lo que es imposible.

058



El peso medio de 4 amigos es 90 kg, pero hay un error, pues el peso de Carlos es 79 kg, y no 97 kg. ¿Cuál es realmente el peso medio?

$$\bar{x} = \frac{4 \cdot 90 - 18}{4} = 85,5$$

El peso medio es 85,5 kg.

059



El salario mensual, en euros, de los cinco trabajadores de una empresa es el siguiente.

1.500	1.500	2.000	2.700	11.000
-------	-------	-------	-------	--------

¿Cuál de las tres medidas de centralización describe mejor los sueldos de la empresa?

La mediana, ya que la moda nos da el valor mínimo del salario mensual, mientras que la mayoría de la empresa cobra menos de la media.

EN LA VIDA COTIDIANA

060

Para la revista de un centro escolar se hace un estudio estadístico que consiste en analizar el tipo de noticias que ofrecen los informativos de las principales cadenas de televisión.

Después de elegir qué variables se van a estudiar, los alumnos han organizado los datos en una tabla que muestra el porcentaje de noticias de cada tipo que se ha emitido.



Construye un gráfico adecuado y contesta a estas preguntas.

- ¿Qué tres tipos de noticias se emiten más en cada cadena?
- ¿Cuál de las cinco cadenas reparte más uniformemente sus noticias?
- ¿Consideras que alguna noticia interesa mucho más o mucho menos que el resto?

a)

Noticias más emitidas			
	1.º	2.º	3.º
T.1	Sucesos	Política	Deportes
T.2	Sucesos	Cultura	Política
T.3	Deportes	Sucesos	Política
T.4	Política	Sucesos	Deportes
T.5	Política	Sucesos	Deportes y Sociales

b) Calculamos las varianzas.

	T.1	T.2	T.3	T.4	T.5
Varianza	66,9	44,42	57,51	86,93	62,96

La menor varianza la tiene la cadena T.2, por lo que es la cadena que reparte más uniformemente los contenidos.

c) Hallamos la media de cada tipo de contenido.

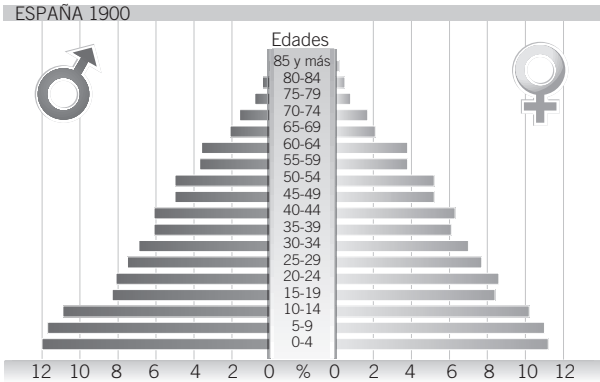
	Media
Ciencia	1,2
Consumo	1,24
Cultura	9,82
Deportes	15,14
Economía	6,54
Medio ambiente	1,5
Medios de comunicación	0,78
Meteorología	8,08
Sociedad	0,18
Política	23,24
Sanidad y salud	1,72
Seguridad	1,2
Sociales	7,24
Sucesos	21,16
Terrorismo	0,96

Las noticias que más interesan son las referentes a política, sucesos y deportes.

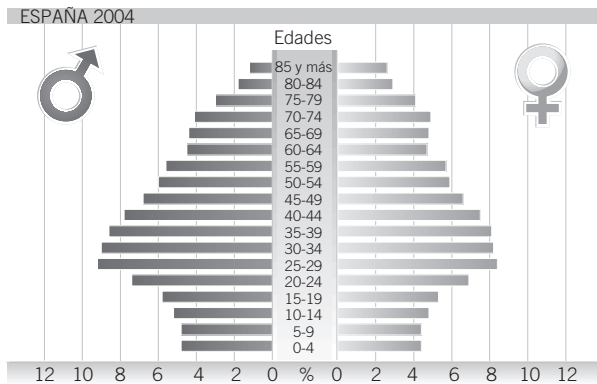
061



En una revista científica se ha publicado un informe sobre la evolución de la estructura de la población en España durante un siglo.



Los datos se muestran en pirámides de población, es decir, diagramas de barras, donde se representa la estructura de la población por intervalos de edades y porcentaje de cada sexo.



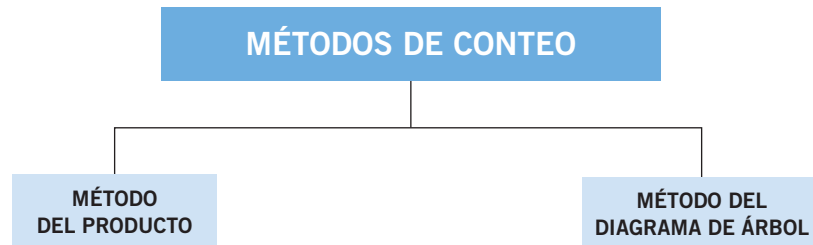
Para interpretar una pirámide de población debemos fijarnos en su forma.



Fíjate en las dos pirámides de población y describe cómo ha cambiado la estructura de la población española de 1900 y la de un siglo después. ¿Qué diferencias puedes destacar?

La pirámide de población en 2004 empieza a ser invertida, y eso quiere decir que la natalidad está disminuyendo cada año, desde hace 25 años, y que la esperanza de vida va aumentando.

Se observa una mayor esperanza de vida en 2004 que en 1900. En 2004 hay más porcentaje de personas de mayor edad.



NÚMEROS COMBINATORIOS

```
graph TD; A[NÚMEROS COMBINATORIOS] --> B[PROPIEDADES];
```

BINOMIO DE NEWTON

VARIACIONES

PERMUTACIONES

COMBINACIONES

El destierro

A nadie en su sano juicio se le ocurriría discutir una orden de Su Eminencia. Y mucho menos a Etiénne Pascal, para quien el cardenal Richelieu había dispuesto que pasara a ocupar el puesto de recaudador en la zona de Rouen.

Este encargo, a los ojos de su hijo, Blaise Pascal, tenía poco de premio y mucho de castigo.

Blaise había observado que el carácter de su padre había cambiado, pasaba el día fuera de casa y por la noche tenía que repasar los asientos contables que periódicamente enviaba a París. El joven, deseoso de ayudar, ideó una máquina de contar para facilitar el trabajo de su padre.

—¡Padre! Tengo algo que podría ahorraros un tiempo precioso —dijo Blaise irrumpiendo en la sala.

—Ahora no puedo atenderte, Blaise —contestó su padre de forma cansada—, mañana tengo que enviar el informe y he de comprobar todas las operaciones.

—De eso se trata, padre —dijo Blaise y comenzó a introducir las cantidades, unas sumando y otras restando, con las que la máquina operaba sin esfuerzo alguno.

—¡Gracias, hijo! Ahora mi trabajo queda reducido a la mitad y, tal vez, si los avances agradan a Richelieu nos ofrezca la posibilidad de volver a París.

El joven Blaise, por primera vez en tres años, vio cerca los jardines de París y el final de su destierro en Rouen.



1			
1	1		
1	2	1	
1	3	3	1
...			

En este triángulo de Pascal, comprueba que la suma de cada fila es una potencia de 2.
¿Cuánto vale la suma de los números de la fila n ?

Podemos observar que la suma de todos los números de cada fila forman la sucesión 1, 2, 4, 8...

Es una progresión geométrica de razón 2 y cuyo término general es: $a_n = 2^{n-1}$.

La suma de los números de la fila n coincide con el término n -ésimo de la progresión.



Combinatoria

EJERCICIOS

- 001** Un equipo de fútbol tiene 2 equipaciones, compuestas de camiseta, pantalón y medias, de diferentes colores, verde y azul. ¿Cuántas formas distintas tendrán para vestirse sin que se repita la indumentaria?

$2 \cdot 2 \cdot 2 = 8 \rightarrow$ Tendrán 8 posibilidades distintas para vestirse.

- 002** ¿De cuántas maneras diferentes se pueden colocar las 4 letras de la palabra PACO?

$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 \rightarrow$ Se pueden colocar de 24 maneras diferentes.

- 003** ¿Cuántos caminos diferentes hay para llegar de mi casa al restaurante pasando por el cine?

$3 \cdot 4 = 12$
Hay 12 caminos diferentes.



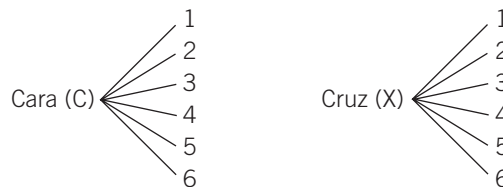
- 004** Mediante un diagrama de árbol, indica cuántas y cuáles son las distintas combinaciones de letras que podemos formar con las 4 letras de la palabra ROSA.

Las distintas posibilidades son:

ROSA	OSAR	SARO	AROS
ROAS	OSRA	SAOR	ARSO
RSOA	OARS	SORA	ASOR
RSOA	OASR	SOAR	ASRO
RAOS	ORAS	SROA	AOSR
RASO	ORSA	SRAO	AORS

Hay 24 posibilidades distintas.

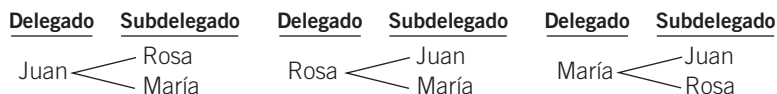
- 005** Lanzamos simultáneamente una moneda y un dado de 6 caras, numeradas del 1 al 6. Describe cuántas y cuáles son las posibilidades del experimento. Ayúdate con un diagrama de árbol.



El número de posibilidades del experimento es 12:

C1 C2 C3 C4 C5 C6 X1 X2 X3 X4 X5 X6

- 006** Para los cargos de delegado y subdelegado de tu clase se han presentado 3 estudiantes: Juan, Rosa y María. Representa, mediante un diagrama de árbol, las posibles combinaciones que se pueden dar en la elección.



- 007** ¿Cuántos números de 3 cifras, ninguna de ellas repetida, se pueden formar con los números impares? ¿Cuáles son?

135 137 139 153 157 159 173 175 179 193 195 197
 315 317 319 351 357 359 371 375 379 391 395 397
 513 517 519 531 537 539 571 573 579 591 593 597
 713 715 719 731 735 739 751 753 759 791 793 795
 913 915 917 931 935 937 951 953 957 971 973 975

Hay 60 números posibles.

- 008**  Calcula.

- a) $8!$ b) $\binom{6}{2}$ c) $15!$ d) $\binom{8}{4}$
- a) $8! = 40.320$ c) $15! = 1.307.674.368.000$
- b) $\binom{6}{2} = 15$ d) $\binom{8}{4} = 70$

- 009** Haz las operaciones.

- a) $12 \cdot 11!$ b) $\binom{7}{3} + \binom{7}{4}$ c) $12! - 11!$ d) $\binom{5}{2} - \binom{4}{2}$
- a) $12 \cdot 11! = 479.001.600$ c) $12! - 11! = 439.084.800$
- b) $\binom{7}{3} + \binom{7}{4} = 35 + 35 = 70$ d) $\binom{5}{2} - \binom{4}{2} = 10 - 6 = 4$

- 010** Simplifica estas operaciones con factoriales y números combinatorios.

- a) $(n+1) \cdot n!$ c) $\binom{n}{0}$ e) $(n+1)! - n!$ g) $\binom{n}{n-1}$
- b) $\binom{n}{n}$ d) $(n+1)!$ f) $\binom{n}{1}$ h) $(n-1)! \cdot (n-3)!$
- a) $(n+1) \cdot n! = (n+1)!$ e) $(n+1)! - n! = n \cdot n!$
- b) $\binom{n}{n} = 1$ f) $\binom{n}{1} = n$
- c) $\binom{n}{0} = 1$ g) $\binom{n}{n-1} = n$
- d) $(n+1)!$ h) $(n-1)! \cdot (n-3)!$

Combinatoria

011 Realiza las siguientes operaciones con números combinatorios.

a) $\binom{5}{4} + \binom{10}{5} - \binom{8}{7} - \binom{9}{3}$

b) $\binom{10}{4} + \binom{8}{5} - \binom{7}{7} - \binom{5}{3}$

c) $\binom{7}{7} - \binom{7}{0} + \binom{9}{3} - \binom{9}{6}$

$$\begin{aligned} \text{a) } \binom{5}{4} + \binom{10}{5} - \binom{8}{7} - \binom{9}{3} &= \frac{5!}{4! \cdot 1!} + \frac{10!}{5! \cdot 5!} - \frac{8!}{7! \cdot 1!} - \frac{9!}{3! \cdot 6!} = \\ &= 5 + 252 - 8 - 84 = 165 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \binom{10}{4} + \binom{8}{5} - \binom{7}{7} - \binom{5}{3} &= \frac{10!}{4! \cdot 6!} + \frac{8!}{5! \cdot 3!} - 1 - \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \\ &= 210 + 56 - 1 - 10 = 255 \end{aligned}$$

$$\text{c) } \binom{7}{7} - \binom{7}{0} + \binom{9}{3} - \binom{9}{6} = \left[\binom{7}{7} - \binom{7}{0} \right] + \left[\binom{9}{3} - \binom{9}{6} \right] = 0 + 0 = 0$$

012 Aplica las propiedades de los números combinatorios, sin realizar las operaciones, y calcula $\binom{5}{3}$, sabiendo que $\binom{5}{2} = 10$.

$$\binom{5}{3} = \binom{5}{5-3} = \binom{5}{2} = 10$$

013 Haz estas operaciones.

a) $\binom{7}{4} + \binom{7}{5}$

b) $\binom{10}{6} + \binom{9}{6}$

$$\text{a) } \binom{7}{4} + \binom{7}{5} = \binom{8}{5} = \frac{8!}{5! \cdot 3!} = 56$$

$$\text{b) } \binom{10}{6} + \binom{9}{6} = \frac{10!}{6! \cdot 4!} + \frac{9!}{6! \cdot 3!} = 210 + 84 = 294$$

014 Calcula estas potencias de binomios y simplifica todo lo que sea posible.

a) $(x + 1)^6$

c) $\left(\frac{1}{2} - x\right)^7$

e) $(5 - y)^4$

b) $(2x - 1)^5$

d) $(2x + 2)^6$

f) $\left(\frac{3}{4} + x\right)^4$

$$\begin{aligned} \text{a) } (x + 1)^6 &= \binom{6}{0} x^6 \cdot 1^0 + \binom{6}{1} x^5 \cdot 1^1 + \binom{6}{2} x^4 \cdot 1^2 + \binom{6}{3} x^3 \cdot 1^3 + \binom{6}{4} x^2 \cdot 1^4 + \\ &+ \binom{6}{5} x^1 \cdot 1^5 + \binom{6}{6} x^0 \cdot 1^6 = x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 + 6x + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } (2x - 1)^5 &= \binom{5}{0}(2x)^5 \cdot (-1)^0 + \binom{5}{1}(2x)^4 \cdot (-1)^1 + \binom{5}{2}(2x)^3 \cdot (-1)^2 + \\ &+ \binom{5}{3}(2x)^2 \cdot (-1)^3 + \binom{5}{4}(2x)^1 \cdot (-1)^4 + \binom{5}{5}(2x)^0 \cdot (-1)^5 = \\ &= 32x^5 - 80x^4 + 80x^3 - 40x^2 + 10x - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \left(\frac{1}{2} - x\right)^7 &= \binom{7}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^7 \cdot (-x)^0 + \binom{7}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^6 \cdot (-x)^1 + \binom{7}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot (-x)^2 + \\ &+ \binom{7}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot (-x)^3 + \binom{7}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot (-x)^4 + \binom{7}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot (-x)^5 + \\ &+ \binom{7}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot (-x)^6 + \binom{7}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot (-x)^7 = \\ &= \frac{1}{128} - \frac{7}{64}x + \frac{21}{32}x^2 - \frac{35}{16}x^3 + \frac{35}{8}x^4 - \frac{21}{4}x^5 + \frac{7}{2}x^6 - x^7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } (2x + 2)^6 &= \binom{6}{0}(2x)^6 \cdot 2^0 + \binom{6}{1}(2x)^5 \cdot 2^1 + \binom{6}{2}(2x)^4 \cdot 2^2 + \binom{6}{3}(2x)^3 \cdot 2^3 + \\ &+ \binom{6}{4}(2x)^2 \cdot 2^4 + \binom{6}{5}(2x)^1 \cdot 2^5 + \binom{6}{6}(2x)^0 \cdot 2^6 = \\ &= 64x^6 + 384x^5 + 960x^4 + 1.280x^3 + 960x^2 + 384x + 64 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } (5 - y)^4 &= \binom{4}{0}5^4 \cdot (-y)^0 + \binom{4}{1}5^3 \cdot (-y)^1 + \binom{4}{2}5^2 \cdot (-y)^2 + \\ &+ \binom{4}{3}5^1 \cdot (-y)^3 + \binom{4}{4}5^0 \cdot (-y)^4 = \\ &= 625 - 500y + 150y^2 - 20y^3 + y^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } \left(\frac{3}{4} + x\right)^4 &= \binom{4}{0}\left(\frac{3}{4}\right)^4 \cdot x^0 + \binom{4}{1}\left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot x^1 + \binom{4}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot x^2 + \\ &+ \binom{4}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^1 \cdot x^3 + \binom{4}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^0 \cdot x^4 = \frac{81}{256} + \frac{27}{16}x + \frac{27}{8}x^2 + 3x^3 + x^4 \end{aligned}$$

015 Desarrolla los siguientes binomios.

a) $(a + b)^6$

b) $(a - b)^8$

$$\begin{aligned} \text{a) } (a + b)^6 &= \binom{6}{0}a^6 \cdot b^0 + \binom{6}{1}a^5 \cdot b^1 + \binom{6}{2}a^4 \cdot b^2 + \binom{6}{3}a^3 \cdot b^3 + \\ &+ \binom{6}{4}a^2 \cdot b^4 + \binom{6}{5}a^1 \cdot b^5 + \binom{6}{6}a^0 \cdot b^6 = \\ &= a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } (a - b)^8 &= \binom{8}{0}a^8 \cdot (-b)^0 + \binom{8}{1}a^7 \cdot (-b)^1 + \binom{8}{2}a^6 \cdot (-b)^2 + \\ &+ \binom{8}{3}a^5 \cdot (-b)^3 + \binom{8}{4}a^4 \cdot (-b)^4 + \binom{8}{5}a^3 \cdot (-b)^5 + \\ &+ \binom{8}{6}a^2 \cdot (-b)^6 + \binom{8}{7}a^1 \cdot (-b)^7 + \binom{8}{8}a^0 \cdot (-b)^8 = \\ &= a^8 - 8a^7b + 28a^6b^2 - 56a^5b^3 + 70a^4b^4 - 56a^3b^5 + \\ &+ 28a^2b^6 - 8ab^7 + b^8 \end{aligned}$$

Combinatoria

016 Desarrolla el binomio.

$$\begin{aligned} & (ax^2 - y)^5 \\ (ax^2 - y)^5 &= \binom{5}{0}(ax^2)^5 \cdot (-y)^0 + \binom{5}{1}(ax^2)^4 \cdot (-y)^1 + \binom{5}{2}(ax^2)^3 \cdot (-y)^2 + \\ &+ \binom{5}{3}(ax^2)^2 \cdot (-y)^3 + \binom{5}{4}(ax^2)^1 \cdot (-y)^4 + \binom{5}{5}(ax^2)^0 \cdot (-y)^5 = \\ &= a^5x^{10} - 5a^4x^8y + 15a^3x^6y^2 - 10a^2x^4y^3 + 5ax^2y^4 - y^5 \end{aligned}$$

017 Hemos alquilado un palco en el teatro con 6 asientos. ¿De cuántas formas podemos sentarnos mis padres, mi hermana y yo?

$$V_{6,4} = \frac{6!}{2!} = 360 \rightarrow \text{Podemos sentarnos de 360 formas.}$$

018 Además de nosotros, vienen al palco dos amigos más. ¿Cuántas agrupaciones distintas podemos hacer?

En este caso habrá tantos asientos como personas.
Podemos hacer: $P_6 = 6! = 720$ agrupaciones

019 Con 14 bolas rojas, 13 azules, 12 naranjas y 11 blancas, ¿cuántos collares diferentes de 10 bolas podemos hacer?

$$VR_{4,10} = 4^{10} = 1.048.576$$

Podemos hacer 1.048.576 collares.



020 Con 4 botes de pintura: amarilla, azul, roja y blanca, ¿cuántas mezclas de dos colores puedes realizar?

$$C_{4,2} = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6 \rightarrow \text{Se pueden hacer 6 mezclas de dos colores.}$$

021 En una clase de 25 alumnos se tiene que elegir delegado y subdelegado. ¿Cuántas parejas se pueden formar para desempeñar estos cargos?

$$V_{25,2} = \frac{25!}{(25-2)!} = \frac{25!}{23!} = 25 \cdot 24 = 600 \rightarrow \text{Se pueden formar 600 parejas.}$$

022 Tenemos 6 pesas de 1, 2, 3, 4, 5 y 6 kg. ¿Cuántas pesadas diferentes podemos hacer?

Dependiendo de si utilizamos 1, 2, 3, 4, 5 o 6 pesas,
el número de pesadas distintas es:

$$\begin{aligned} & C_{6,1} + C_{6,2} + C_{6,3} + C_{6,4} + C_{6,5} + C_{6,6} = \\ &= 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 63 \text{ pesadas} \end{aligned}$$

- 023** Calcula el número de alineaciones distintas que podremos hacer para jugar un partido de fútbol, si tenemos 22 jugadores en la plantilla.

$$C_{22,11} = \frac{22!}{11! \cdot 11!} = 705.432 \rightarrow \text{Se pueden hacer 705.432 alineaciones.}$$

- 024** Con las letras de la palabra **POTENCIA**, ¿cuántas palabras se pueden formar, con o sin sentido, suponiendo que las letras puedan repetirse?
¿Y si no se pueden repetir?

Si las letras pueden repetirse, dependerá del número de letras que queramos que tenga la palabra; así, si tiene n letras: $VR_{8,n} = 8^n$

Si las letras no pueden repetirse, dependerá del número de letras

$$\text{que queramos que tenga la palabra; así, si tiene } n \text{ letras: } V_{8,n} = \frac{8!}{(8-n)!}$$

- 025** Tres compañeros de un centro escolar están en la fila de un autobús.
¿De cuántas maneras se pueden subir, sabiendo que tienen que hacerlo de uno en uno? ¿Y si van cinco compañeros?

Si son tres compañeros: $P_3 = 3! = 6$, pueden subir de 6 formas diferentes.

Si son cinco compañeros: $P_5 = 5! = 120$, pueden subir de 120 formas diferentes.

- 026** ¿Cuántos números de 7 cifras iguales o diferentes se pueden formar con los dígitos 1, 4, 5, 7 y 8?

$$VR_{5,7} = 5^7 = 78.125 \rightarrow \text{Se pueden formar 78.125 números distintos.}$$

- 027** ¿De cuántas maneras distintas pueden llegar 4 nadadores a la meta?

En este caso influye el orden y se trabaja con todos los elementos, pero no se repite ninguno, luego habrá que calcular el número de permutaciones de 4 elementos.

$$P_4 = 4! = 24 \rightarrow \text{Pueden llegar a la meta de 24 maneras.}$$

- 028** ¿De cuántas formas podemos colocarnos 2 anillos diferentes en una mano, de modo que no estén en el mismo dedo?

$$V_{5,2} = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = 20 \rightarrow \text{Podemos colocarlos de 20 formas.}$$

ACTIVIDADES

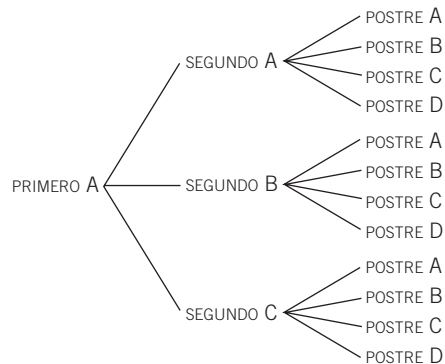
- 029** Lanzamos un dado y una moneda consecutivamente. Razona cuántos resultados diferentes se pueden producir.

Por cada resultado distinto del dado se pueden obtener dos resultados de la moneda. Aplicando el método del producto concluimos que se pueden producir: $6 \cdot 2 = 12$ resultados diferentes.

Combinatoria

- 030** En un restaurante, el menú del día tiene 3 primeros platos, 3 segundos y 4 postres para elegir. ¿Cuántos menús diferentes podemos confeccionar? Utiliza el método del producto y represéntalo con un diagrama de árbol.

Utilizando el método del producto podemos confeccionar: $3 \cdot 3 \cdot 4 = 36$ menús distintos. En el siguiente diagrama de árbol, aparecen los posibles menús con el plato PRIMERO A. El diagrama de árbol es análogo con el plato PRIMERO B y con el plato PRIMERO C.



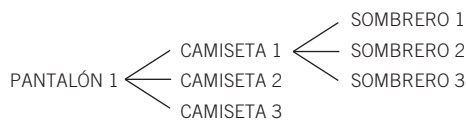
- 031** La clave de acceso de un ordenador consta de 4 caracteres (solo letras o números) y distingue entre letras mayúsculas y minúsculas. Calcula el número de posibilidades distintas que hay para escribir la clave.

Suponiendo que un ordenador personal tiene 26 letras (sin considerar la letra ñ), y teniendo en cuenta que distingue entre mayúsculas y minúsculas, hay 52 posibles letras y 10 números. En total, son 62 elementos. Por tanto, el número de posibilidades que hay para escribir la clave es el número de variaciones con repetición de 62 elementos, tomados de 4 en 4.

$$VR_{62,4} = 62^4 = 14.776.336 \text{ posibilidades}$$

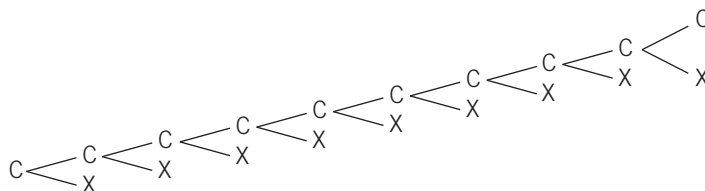
- 032** Susana dispone en su armario de 2 faldas, 3 pares de pantalones de diferentes colores, 2 blusas, 3 camisetas y 3 sombreros. Construye, en un diagrama de árbol, las posibles combinaciones que puede hacer.

Consideramos que no se pueden poner falda y pantalón juntos, ni camiseta y blusa a la vez. Por tanto, el diagrama de árbol es:



Se procedería de forma análoga con PANTALÓN 2 y PANTALÓN 3. Después, se hace un diagrama de árbol similar al anterior sustituyendo las camisetas por BLUSA 1 y BLUSA 2. Por último, se realizan los diagramas de árbol similares a los anteriores con FALDA 1 y FALDA 2.

- 033** Representa, en un diagrama de árbol, los resultados obtenidos al lanzar una moneda al aire y anotar el resultado de 10 tiradas.



El diagrama de árbol se completaría añadiendo las ramas (C-X) a cada X que aparece en el diagrama. Por último, se haría otro diagrama análogo, considerando que la primera tirada es X.

- 034** El código PIN de un teléfono móvil está formado por 4 dígitos. Halla el número de códigos diferentes que podemos poner en el teléfono.

Teniendo en cuenta que el teclado de un teléfono móvil dispone de 10 números distintos, el número de códigos diferentes es el número de variaciones con repetición de 10 elementos, tomados de 4 en 4.



$$VR_{10,4} = 10^4 = 10.000 \text{ códigos}$$

- 035** Calcula el valor de los siguientes números combinatorios.

a) $\binom{80}{70}$ c) $\binom{60}{40}$

b) $\binom{50}{30}$ d) $\binom{90}{80}$

a) $\binom{80}{70} = \frac{80!}{70! \cdot 10!} = 1.646.492.110.120$

b) $\binom{50}{30} = \frac{50!}{30! \cdot 20!} = 47.129.212.243.960$

c) $\binom{60}{40} = \frac{60!}{40! \cdot 20!} = 4.191.844.505.805.495$

d) $\binom{90}{80} = \frac{90!}{80! \cdot 10!} = 5.720.645.481.903$

Combinatoria

036 Realiza estas operaciones con números combinatorios.

a) $\binom{9}{4} + \binom{20}{5} - \binom{10}{2} - \binom{6}{3}$ b) $\binom{10}{9} + \binom{8}{7} - \binom{7}{7} - \binom{5}{4}$

$$\begin{aligned} \text{a) } \binom{9}{4} + \binom{20}{5} - \binom{10}{2} - \binom{6}{3} &= \frac{9!}{4! \cdot 5!} + \frac{20!}{5! \cdot 15!} - \frac{10!}{2! \cdot 8!} - \frac{6!}{3! \cdot 3!} = \\ &= 126 + 15.504 - 45 - 208 = 15.565 \end{aligned}$$

$$\text{b) } \binom{10}{9} + \binom{8}{7} - \binom{7}{7} - \binom{5}{4} = 10 + 8 - 1 - 5 = 12$$

037 Razona si es o no cierta esta igualdad.

$$n! + m! = (n + m)!$$

Pon varios ejemplos en los que compruebes si la igualdad es cierta o falsa.

La igualdad de números combinatorios $n! + m! = (n + m)!$ no es cierta. Veamos algunos ejemplos en los que no se cumple la igualdad.

$$\left. \begin{aligned} 3! + 2! &= 6 + 2 = 8 \\ (3 + 2)! &= 5! = 120 \end{aligned} \right\} \rightarrow 3! + 2! \neq (3 + 2)!$$

$$\left. \begin{aligned} 5! + 3! &= 120 + 6 = 126 \\ (5 + 3)! &= 8! = 40.320 \end{aligned} \right\} \rightarrow 5! + 3! \neq (5 + 3)!$$

038  Halla, con ayuda de la calculadora, los siguientes números factoriales.

a) $12!$	c) $7!$	e) $12 \cdot 6!$	g) $25!$
b) $2!$	d) $22!$	f) $3 \cdot 3!$	h) $7 \cdot 6!$

a) $12! = 479.001.600$

e) $12 \cdot 6! = 8.640$

b) $2! = 2$

f) $3 \cdot 3! = 18$

c) $7! = 5.040$

g) $25! \approx 1,55 \cdot 10^{25}$

d) $22! \approx 1,124 \cdot 10^{21}$

h) $7 \cdot 6! = 5.040$

039  Calcula el valor de los números combinatorios, utilizando, si es necesario, la calculadora científica.

a) $\binom{16}{14}$ b) $\binom{70}{3} + \binom{70}{4}$

$$\text{a) } \binom{16}{14} = 120$$

$$\text{b) } \binom{70}{3} + \binom{70}{4} = \binom{71}{4} = 54.740 + 916.895 = 971.635$$

040 Demuestra con ejemplos que se verifican estas igualdades.

a) $\binom{n}{n-1} = n$

b) $\binom{n}{n-2} = \frac{1}{2} (n^2 - n)$

a) $\binom{5}{4} = 5$

b) $\binom{6}{4} = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = 15 = \frac{1}{2} (6^2 - 6)$

041 Desarrolla las potencias de estos binomios.

a) $(a-b)^5$ b) $\left(x - \frac{1}{x}\right)^5$ c) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^5$ d) $(3-2a)^6$ e) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^6$ f) $\left(x - \frac{1}{x}\right)^6$

$$\begin{aligned} \text{a) } (a-b)^5 &= \binom{5}{0} a^5 \cdot (-b)^0 + \binom{5}{1} a^4 \cdot (-b)^1 + \binom{5}{2} a^3 \cdot (-b)^2 + \\ &\quad + \binom{5}{3} a^2 \cdot (-b)^3 + \binom{5}{4} a^1 \cdot (-b)^4 + \binom{5}{5} a^0 \cdot (-b)^5 = \\ &= a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \left(x - \frac{1}{x}\right)^5 &= \binom{5}{0} x^5 \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)^0 + \binom{5}{1} x^4 \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)^1 + \binom{5}{2} x^3 \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)^2 + \\ &\quad + \binom{5}{3} x^2 \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)^3 + \binom{5}{4} x^1 \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)^4 + \binom{5}{5} x^0 \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)^5 = \\ &= x^5 - 5x^3 + 10x - 10x^{-1} + 5x^{-3} - x^{-5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \left(x + \frac{1}{x}\right)^5 &= \binom{5}{0} x^5 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^0 + \binom{5}{1} x^4 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^1 + \binom{5}{2} x^3 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^2 + \\ &\quad + \binom{5}{3} x^2 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^3 + \binom{5}{4} x^1 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^4 + \binom{5}{5} x^0 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^5 = \\ &= x^5 + 5x^3 + 10x + 10x^{-1} + 5x^{-3} + x^{-5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } (3-2a)^6 &= \binom{6}{0} 3^6 \cdot (-2a)^0 + \binom{6}{1} 3^5 \cdot (-2a)^1 + \binom{6}{2} 3^4 \cdot (-2a)^2 + \binom{6}{3} 3^3 \cdot (-2a)^3 + \\ &\quad + \binom{6}{4} 3^2 \cdot (-2a)^4 + \binom{6}{5} 3^1 \cdot (-2a)^5 + \binom{6}{6} 3^0 \cdot (-2a)^6 = \\ &= 729 - 2.916a + 4.860a^2 - 4.320a^3 + 2.160a^4 - 576a^5 + 64a^6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } \left(x + \frac{1}{x}\right)^6 &= \binom{6}{0} x^6 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^0 + \binom{6}{1} x^5 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^1 + \binom{6}{2} x^4 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^2 + \\ &\quad + \binom{6}{3} x^3 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^3 + \binom{6}{4} x^2 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^4 + \binom{6}{5} x^1 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^5 + \binom{6}{6} x^0 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^6 = \\ &= x^6 + 6x^4 + 15x^2 + 20 + 15x^{-2} + 6x^{-4} + x^{-6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } \left(x - \frac{1}{x}\right)^6 &= \binom{6}{0} x^6 \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)^0 + \binom{6}{1} x^5 \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)^1 + \binom{6}{2} x^4 \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)^2 + \\ &\quad + \binom{6}{3} x^3 \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)^3 + \binom{6}{4} x^2 \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)^4 + \binom{6}{5} x^1 \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)^5 + \binom{6}{6} x^0 \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)^6 = \\ &= x^6 - 6x^4 + 15x^2 - 20 + 15x^{-2} - 6x^{-4} + x^{-6} \end{aligned}$$

Combinatoria

042 ¿Cuál es el desarrollo del binomio $(x + 4y)^5$?

$$\begin{aligned}(x + 4y)^5 &= \binom{5}{0}x^5 \cdot (4y)^0 + \binom{5}{1}x^4 \cdot (4y)^1 + \binom{5}{2}x^3 \cdot (4y)^2 + \binom{5}{3}x^2 \cdot (4y)^3 + \\ &+ \binom{5}{4}x^1 \cdot (4y)^4 + \binom{5}{5}x^0 \cdot (4y)^5 = \\ &= x^5 + 20x^4y + 160x^3y^2 + 640x^2y^3 + 1.280xy^4 + 1.024y^5\end{aligned}$$

043 HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE CALCULA UNO DE LOS TÉRMINOS DE UN BINOMIO DE NEWTON?

Calcula el término octavo de $(2x - y)^{12}$.

PRIMERO. Se determinan a , b y n en el binomio.

$$\begin{aligned}(2x - y)^{12} &\rightarrow a = 2x \\ &b = -y \\ &n = 12\end{aligned}$$

SEGUNDO. El término m del desarrollo del binomio de Newton es:

$$\binom{n}{m-1} a^{n-(m-1)} b^{(m-1)}$$

El término octavo es $m = 8$ si:

$$\binom{n}{m-1} a^{n-(m-1)} b^{(m-1)}$$

$$\downarrow a = 2x, b = -y, n = 12, m = 8$$

$$\binom{12}{8-1} (2x)^{12-(8-1)} (-y)^{(8-1)} = -792 \cdot 32x^5 \cdot y^7 = -25.344x^5y^7$$

044 Calcula el término sexto de $(3x + y)^9$.

$$\binom{9}{5} (3x)^4 \cdot y^5 = 126 \cdot 81x^4 \cdot y^5 = 10.206x^4y^5$$

045 Halla el término tercero de $(x + 2y)^5$.

$$\binom{5}{2} x^3 \cdot (2y)^2 = 10x^3 \cdot 4y^2 = 40x^3y^2$$

046 Obtén el término noveno de $(3x + y)^9$.

$$\binom{9}{8} (3x)^1 \cdot y^8 = 9 \cdot 3x \cdot y^8 = 27xy^8$$

047 Calcula la suma de todos los coeficientes de los polinomios.

- | | |
|----------------|----------------|
| a) $(x + y)^3$ | e) $(x - y)^3$ |
| b) $(x + y)^4$ | f) $(x - y)^4$ |
| c) $(x + y)^5$ | g) $(x - y)^5$ |
| d) $(x + y)^6$ | h) $(x - y)^6$ |

$$a) \binom{3}{0} + \binom{3}{1} + \binom{3}{2} + \binom{3}{3} = 8$$

$$b) \binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 16$$

$$c) \binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5} = 32$$

$$d) \binom{6}{0} + \binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \binom{6}{3} + \binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6} = 64$$

$$e) \binom{3}{0} - \binom{3}{1} + \binom{3}{2} - \binom{3}{3} = 0$$

$$f) \binom{4}{0} - \binom{4}{1} + \binom{4}{2} - \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 0$$

$$g) \binom{5}{0} - \binom{5}{1} + \binom{5}{2} - \binom{5}{3} + \binom{5}{4} - \binom{5}{5} = 0$$

$$h) \binom{6}{0} - \binom{6}{1} + \binom{6}{2} - \binom{6}{3} + \binom{6}{4} - \binom{6}{5} + \binom{6}{6} = 0$$

048 Halla estas variaciones.

- a) De 6 elementos, tomados de 3 en 3.
- b) De 10 elementos, tomados de 2 en 2.
- c) De 19 elementos, tomados de 4 en 4.
- d) Con repetición de 4 elementos, tomados de 3 en 3.
- e) Con repetición de 20 elementos, tomados de 5 en 5.
- f) Con repetición de 17 elementos, tomados de 4 en 4.

$$a) V_{6,3} = \frac{6!}{3!} = 120$$

$$b) V_{10,2} = \frac{10!}{8!} = 90$$

$$c) V_{19,4} = \frac{19!}{15!} = 93.024$$

$$d) VR_{4,3} = 4^3 = 64$$

$$e) VR_{20,5} = 20^5 = 3.200.000$$

$$f) VR_{17,4} = 17^4 = 83.521$$

Combinatoria

049 Calcula las siguientes permutaciones.

- a) De 6 elementos.
- b) De 11 elementos.
- c) De 19 elementos.
- d) De 8 elementos.
- e) De 20 elementos.
- f) De 17 elementos.
- g) De 10 elementos.
- h) De 15 elementos.

a) $P_6 = 6! = 720$
b) $P_{11} = 11! = 39.916.800$
c) $P_{19} = 19! \approx 1,2 \cdot 10^{17}$
d) $P_8 = 8! = 40.320$
e) $P_{20} = 20! \approx 2,4 \cdot 10^{18}$
f) $P_{17} = 17! \approx 3,5 \cdot 10^{14}$
g) $P_{10} = 10! = 3.628.800$
h) $P_{15} = 15! \approx 1,3 \cdot 10^{12}$

050 Realiza las combinaciones.

- a) De 6 elementos, tomados de 4 en 4.
- b) De 10 elementos, tomados de 2 en 2.
- c) De 19 elementos, tomados de 4 en 4.
- d) De 4 elementos, tomados de 3 en 3.
- e) De 20 elementos, tomados de 5 en 5.
- f) De 17 elementos, tomados de 4 en 4.

a) $C_{6,4} = \binom{6}{4} = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = 15$
b) $C_{10,2} = \binom{10}{2} = \frac{10!}{2! \cdot 8!} = 45$
c) $C_{19,4} = \binom{19}{4} = \frac{19!}{4! \cdot 15!} = 3.876$
d) $C_{4,3} = \binom{4}{3} = \frac{4!}{3! \cdot 1!} = 4$
e) $C_{20,5} = \binom{20}{5} = \frac{20!}{5! \cdot 15!} = 15.504$
f) $C_{17,4} = \binom{17}{4} = \frac{17!}{4! \cdot 13!} = 2.380$

051 Calcula y simplifica.

- a) $P_4 + P_5$
- b) $P_4 + P_3 + P_2$
- b) $P_7 - P_6$

a) $P_4 + P_5 = 4! + 5! = 4! + 5 \cdot 4! = (1 + 5) \cdot 4! = 6 \cdot 4! = 144$
b) $P_4 + P_3 + P_2 = 4 \cdot 3 \cdot 2! + 3 \cdot 2! + 2! = (12 + 3 + 1) \cdot 2! = 32$
c) $P_7 - P_6 = 7! - 6! = 7 \cdot 6! - 6! = (7 - 1) \cdot 6! = 6 \cdot 6! = 4.320$

052

Calcula y simplifica los resultados.

a) $\frac{C_{6,2}}{C_{5,2}}$ b) $\frac{C_{6,2}}{C_{5,2}} + \frac{C_{4,2}}{C_{3,2}} + \frac{C_{5,2}}{C_{4,2}} + \frac{C_{6,2}}{C_{5,1}}$ c) $\frac{C_{40,30}}{C_{10,5}}$ d) $\frac{C_{4,3}}{C_{10,6}}$

a) $\frac{C_{6,2}}{C_{5,2}} = \frac{\frac{6!}{2! \cdot 4!}}{\frac{5!}{2! \cdot 3!}} = \frac{6! \cdot 2! \cdot 3!}{2! \cdot 4! \cdot 5!} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

b) $\frac{C_{6,2}}{C_{5,2}} + \frac{C_{4,2}}{C_{3,2}} + \frac{C_{5,2}}{C_{4,2}} + \frac{C_{6,2}}{C_{5,1}} = \frac{\frac{6!}{2! \cdot 4!}}{\frac{5!}{2! \cdot 3!}} + \frac{\frac{4!}{2! \cdot 2!}}{\frac{3!}{2! \cdot 1!}} + \frac{\frac{5!}{2! \cdot 3!}}{\frac{4!}{2! \cdot 2!}} + \frac{\frac{6!}{2! \cdot 4!}}{\frac{5!}{1! \cdot 4!}} =$
 $= \frac{6}{4} + \frac{4}{2} + \frac{5}{3} + \frac{6}{2} = \frac{80}{6} = \frac{49}{6}$

c) $\frac{C_{40,30}}{C_{10,5}} = \frac{\frac{40!}{30! \cdot 10!}}{\frac{10!}{5! \cdot 5!}} = \frac{40! \cdot 5! \cdot 5!}{30! \cdot 10! \cdot 10!} = \frac{211.915.132}{63}$

d) $\frac{C_{4,3}}{C_{10,6}} = \frac{\frac{4!}{3! \cdot 1!}}{\frac{10!}{6! \cdot 4!}} = \frac{4! \cdot 6! \cdot 4!}{10! \cdot 3! \cdot 1!} = \frac{2}{105}$

053

¿De cuántas formas se pueden sentar 5 personas en un sofá de 3 plazas?



$$V_{5,3} = \frac{5!}{2!} = 60 \text{ formas de sentarse}$$

054

Escribe todas las palabras de 3 letras, con o sin sentido, que se pueden formar con las letras de la palabra HOLA.

$$V_{4,3} = \frac{4!}{1!} = 24 \text{ palabras} \quad \text{Ejemplo: HOL, HOA, OHL, OHA...}$$

055

¿Cuántas banderas tricolores se pueden formar con los 7 colores del arco iris?

$$V_{7,3} = \frac{7!}{4!} = 210 \text{ banderas}$$

Combinatoria

- 056** Para aprobar un examen de 5 preguntas hay que contestar correctamente a 2 de ellas. ¿De cuántas formas diferentes se pueden elegir las 2 preguntas?

$$C_{5,2} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10 \text{ formas}$$

- 057** Un artesano hace pulseras con 3 hilos de diferentes colores. Si tiene hilo de 12 colores, ¿cuántos tipos de pulsera distintos puede hacer?



$$V_{12,3} = \frac{12!}{9!} = 1.320 \text{ tipos de pulseras}$$

- 058** Un entrenador de fútbol quiere presentar una alineación con 4 defensas, 3 centrocampistas y 3 delanteros.

¿Cuántas posibilidades tiene de hacerlo si dispone de 3 porteros, 7 defensas, 6 centrocampistas y 7 delanteros, y cada jugador solo puede jugar en su línea correspondiente?

Para elegir al portero tendrá: $C_{3,1} = 3$ posibilidades

Para elegir a los 4 defensas tendrá: $C_{7,4} = \frac{7!}{4! \cdot 3!} = 35$ posibilidades

Para elegir a los 3 centrocampistas tendrá: $C_{6,3} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = 20$ posibilidades

Para elegir a los 3 delanteros tendrá: $C_{7,3} = \frac{7!}{3! \cdot 4!} = 35$ posibilidades

Aplicando el método del producto, el número total de posibilidades es:
 $3 \cdot 35 \cdot 20 \cdot 35 = 73.500$.

- 059** ¿Cuántos números de 4 cifras pueden formarse con los dígitos 0, 2, 3, 4, 5, 8 y 9? ¿Y cuántos números de 5 cifras?

Considerando que los dígitos no se pueden repetir, y teniendo en cuenta que los números que comienzan por 0 no se consideran de 4 cifras, resulta:

$$V_{7,4} - V_{6,3} = \frac{7!}{3!} - \frac{6!}{3!} = 840 - 120 = 720 \text{ números}$$

Análogamente, la cantidad de números de 5 cifras es:

$$V_{7,5} - V_{6,4} = \frac{7!}{2!} - \frac{6!}{2!} = 2.520 - 360 = 2.160 \text{ números}$$

- 060** ● ¿Cuántas tripulaciones de 6 remeros se pueden formar con un total de 12 remeros?

$$C_{12,6} = \frac{12!}{6! \cdot 6!} = 924 \text{ tripulaciones}$$



- 061** ●● Si 5 integrantes de un equipo de baloncesto se sitúan en fila para hacer un tiro a canasta, ¿de cuántas formas distintas pueden ponerse?

$$P_5 = 5! = 120 \text{ formas}$$

- 062** ●● En una clase hay 25 alumnos y se forman grupos de 5 alumnos para realizar un trabajo de Matemáticas. ¿Cuántos grupos diferentes se pueden hacer?

$$C_{25,5} = \frac{25!}{5! \cdot 20!} = 53.130 \text{ grupos}$$

- 063** ●●● ¿Cuántos productos distintos se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5 y 7, de forma que cada producto conste de 3 factores?

Puesto que el orden de los factores no altera el producto, el número de productos de 3 factores que se puede formar es: $C_{6,3} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = 20$

064 HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE CALCULA EL NÚMERO DE POSIBILIDADES QUE CUMPLEN UNA PROPIEDAD?

Con las cifras 3, 5, 8 y 9, ¿cuántos números distintos de 3 cifras se pueden formar que sean mayores que 600?

PRIMERO. Se examinan los resultados que cumplen la condición.

Si el número de 3 cifras que formemos tiene que ser mayor que 600, tendría que empezar por 8 o por 9. Los números buscados serán de la forma:

$$8ab \rightarrow a \text{ y } b \text{ pueden ser: } 3, 5 \text{ o } 9$$

$$9ab \rightarrow a \text{ y } b \text{ pueden ser: } 3, 5 \text{ u } 8$$

SEGUNDO. Se calculan las posibilidades.

En ambos casos influye el orden y no hay repeticiones, por lo que son variaciones. También en ambos casos hay 3 elementos que se agrupan de 2 en 2.

$$V_{3,2} = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3!}{1!} = 6$$

Así, habrá 6 números que empiecen por 8 y otros 6 números que empiecen por 9. Hay 12 números mayores que 600.

Combinatoria

065 Considera los dígitos 1, 2, 4, 6, 8 y 0.



a) ¿Cuántos números de 3 cifras se pueden formar?

b) ¿Cuántos de estos números empiezan por 2? ¿Y por 3?

a) Un número de 3 cifras deberá empezar por 1, 2, 4, 6 u 8. Las otras dos cifras pueden ser cualquier número, incluido el 0: $5VR_{6,2} = 5 \cdot 6^2 = 180$. Se pueden formar 180 números.

b) Números que empiecen por 2: $VR_{6,2} = 6^2 = 36$. Se pueden formar 36 números.

Números que empiecen por 3: $VR_{6,2} = 6^2 = 36$. Se pueden formar 36 números.

066 Con las letras de la palabra PERMUTACIÓN, ¿cuántas palabras pueden formarse que comiencen por PE? ¿Y que terminen en ON?



Palabras que empiecen por PE: $P_9 = 9! = 362.880$ palabras

Palabras que terminen en ON: $P_9 = 9! = 362.880$ palabras

067 Con los dígitos 1, 2, 3, 4 y 5, ¿cuántos números de 5 cifras se pueden hacer que sean múltiplos de 5?



Consideramos que los dígitos no se puede repetir.

Son múltiplos de 5 los números que acaben en 5: $P_4 = 4! = 24$ números

068 Con las cifras 0, 2, 4, 6 y 8, ¿cuántos números de 2 cifras se pueden formar? ¿Y cuántos son múltiplos de 3?



Consideramos que los dígitos no se repiten.

$$V_{5,2} - V_{4,1} = \frac{5!}{3!} - \frac{4!}{3!} = 20 - 4 = 16 \text{ números}$$

Son múltiplos de 3: 24, 42, 48, 60 y 84.

069 Con las cifras 1, 2, 3 y 5:



a) ¿Cuántos números pares de 2 cifras se pueden formar?

b) ¿Y cuántos números pares de 3 cifras?

c) ¿Cuántos múltiplos de 5 con 3 cifras se pueden formar?

Consideramos que los dígitos no se pueden repetir.

a) Son pares los números terminados en 2: $V_{3,1} = 3$ números

b) $V_{3,2} = \frac{3!}{1!} = 6$ números

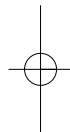
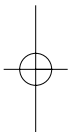
c) Son múltiplos de 5 los números terminados en 5: $V_{3,2} = \frac{3!}{1!} = 6$ números

070 ¿En cuántos puntos se cortan 7 rectas de manera que no haya 2 rectas que sean paralelas, ni más de 2 rectas que se corten en un punto?



Dado que todas las rectas se han de cortar dos a dos, el número de puntos

de corte distintos es: $C_{7,2} = \frac{7!}{2! \cdot 5!} = 21$



071



¿En cuántos puntos se cortan, como máximo, las diagonales de un octógono?

El número de diagonales de un octógono es el número de rectas que unen dos de sus vértices, a las que hay que restar las rectas formadas por dos vértices consecutivos (lados):

$$C_{8,2} - 8 = \frac{8!}{2! \cdot 6!} - 8 = 20$$

El máximo número de puntos de corte es el número de vértices más los posibles cortes de las diagonales, dos a dos. Hay que considerar que las diagonales que salen de un mismo vértice solo se cortan en ese vértice; por tanto, debemos restarle el número de puntos de corte de las diagonales:

$$8 + C_{20,2} - 8 \cdot C_{5,2} = 110$$



072



¿En cuántos puntos se cortan, como máximo, las diagonales de un pentágono?

El número de diagonales de un pentágono es: $C_{5,2} - 5 = \frac{5!}{2! \cdot 3!} - 5 = 5$

Puntos de corte: $5 + C_{5,2} - 5 \cdot C_{2,2} = 10$

073



¿En cuántos puntos se cortan, como máximo, las diagonales de un hexágono?

El número de diagonales de un hexágono es: $C_{6,2} - 6 = \frac{6!}{2! \cdot 4!} - 6 = 9$

Puntos de corte: $6 + C_{9,2} - 6 \cdot C_{3,2} = 93$

074



Con las letras de la palabra ESTERNOCLEIDOMASTOIDEO, ¿cuántas palabras se pueden formar de 6 letras?

a) Si se pueden repetir.

b) Si no se pueden repetir.

a) $VR_{12,6} = 12^6 = 2.985.984$ palabras

b) $V_{12,6} = \frac{12!}{6!} = 665.280$ palabras

075



¿De cuántas formas se pueden alinear 5 signos + y 9 signos -, de manera que no puedan situarse 2 signos - seguidos?

No es posible alinearlos de ninguna manera, ya que al haber más signos - que signos +, siempre quedarán dos signos - seguidos.

076



Calcula cuántas palabras, con o sin sentido, se pueden formar con 3 letras de tu nombre, si:

a) Se pueden repetir.

b) No se pueden repetir.

Dependerá de la cantidad de letras que tenga el nombre; por ejemplo, si tiene n letras:

a) $VR_{n,3} = n^3$

b) $V_{n,3} = \frac{n!}{(n-3)!}$

Combinatoria

077



La escala musical se compone de 7 notas: do, re, mi, fa, sol, la y si. Si se ordenan de grave a agudo, ¿cuántas melodías diferentes podemos hacer con 150 notas?

No influye el orden, puesto que las notas siempre se ordenan de grave a agudo.

Son combinaciones con repetición de 7 elementos, tomados de 150 en 150, y su fórmula es:

$$CR_n^m = C_{n+m-1}^m = \frac{156!}{150! \cdot 6!} = 18.161.699.556$$



078



En código Morse se escribe cada letra del alfabeto mediante series de puntos (.) y rayas (-):

A se escribe utilizando 2 símbolos $\rightarrow . -$

B se escribe utilizando 4 símbolos $\rightarrow - . . .$

¿Cuántas series diferentes hay si utilizamos como máximo 4 símbolos?

Como las series pueden constar de 1, 2, 3 o 4 símbolos, el número de series diferentes es: $VR_{2,1} + VR_{2,2} + VR_{2,3} + VR_{2,4} = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 30$

079



Calcula el número de pulseras diferentes de 20 bolas de colores que podemos elaborar si tenemos bolas de 5 colores.

Considerando que la disposición de las bolas da lugar a collares diferentes, el número de collares distintos es: $VR_{5,20} = 5^{20} \approx 9,54 \cdot 10^{13}$

080



Un alumno tiene 8 asignaturas en un curso. La nota de cada asignatura puede ser suspenso, aprobado, notable o sobresaliente. ¿Cuántos boletines de notas distintos puede obtener?

$$VR_{4,8} = 4^8 = 65.536 \text{ boletines de notas}$$

081



Un grupo de 12 personas quiere hacer una excursión en coche. Si en cada coche viajan 5 personas:

a) ¿Cuántos grupos diferentes se pueden formar?

b) ¿En cuántos de estos grupos estarán Carlos y María, que son dos de las 12 personas que van a la excursión?

a) Puesto que el orden de elección de los integrantes de un grupo no es influyente en el grupo, el número de grupos de 5 personas distintos

$$\text{que se podrán formar, es: } C_{12,5} = \frac{12!}{5! \cdot 7!} = 792$$

b) María y Carlos estarán en: $C_{10,3} = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = 120$ grupos diferentes

- 082** Utilizando solamente números enteros positivos, ¿cuántas sumas distintas dan como resultado 5? Dos posibles sumas serían:

$$2 + 2 + 1 = 5 \qquad 2 + 3 = 5$$

Suponiendo que no importa el orden en la suma:

$$\begin{array}{lll} 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5 & 1 + 1 + 1 + 2 = 5 & 1 + 1 + 3 = 5 \\ 1 + 2 + 2 = 5 & 1 + 4 = 5 & 2 + 3 = 5 \end{array}$$

Hay 6 sumas que dan como resultado 5.

- 083** ¿Cuántos números capicúas de 6 cifras hay?

Los números capicúas de 6 cifras son de la forma $abccba$, con $a \neq 0$.

$$VR_{9,1} \cdot VR_{10,2} = 9 \cdot 100 = 900. \text{ Existen 900 números capicúas de 6 cifras.}$$

- 084** Tres amigos han encontrado 8 piedras idénticas. ¿De cuántas maneras pueden repartirlas si cada amigo se lleva al menos una piedra?

Cada amigo tendrá entre 1 y 6 piedras, pudiendo estar repartidas de la siguiente manera.

$$\begin{array}{llllll} 1, 1, 6 & 2, 1, 5 & 3, 1, 4 & 4, 1, 3 & 5, 1, 2 & 6, 1, 1 \\ 1, 2, 5 & 2, 2, 4 & 3, 2, 3 & 4, 2, 2 & 5, 2, 1 & \\ 1, 3, 4 & 2, 3, 3 & 3, 3, 2 & 4, 3, 1 & & \\ 1, 4, 3 & 2, 4, 2 & 4, 3, 1 & & & \\ 1, 5, 2 & 2, 5, 1 & & & & \\ 1, 6, 1 & & & & & \end{array}$$

Se pueden repartir de 21 maneras diferentes.

- 085** Entre 8 estudiantes y 6 profesores tenemos que elegir un comité de 6 personas que contenga, al menos, 3 estudiantes y 2 profesores. ¿De cuántas formas podemos elegirlo?

El comité estará constituido por 3 estudiantes y 3 profesores, o por 4 estudiantes y 2 profesores.

$$C_{8,3} \cdot C_{6,3} + C_{8,4} \cdot C_{6,2} = \binom{8}{3} \cdot \binom{6}{3} + \binom{8}{4} \cdot \binom{6}{2} = 56 \cdot 20 + 70 \cdot 15 = 2.170$$

Se puede formar de 2.170 maneras diferentes.

- 086** Con las letras de la palabra NADIE podemos formar palabras de 5 letras utilizando todas sus letras sin repetirlas. Si ordenamos esas palabras alfabéticamente, ¿qué lugar ocupará la palabra NADIE?

Las palabras que empiezan por A, D, E, I son: $4 \cdot P_4 = 48$

La palabra NADIE ocupará el lugar 49, por orden alfabético.

Combinatoria

087



Con las letras de **PERMUTACIÓN** formamos palabras, con o sin sentido.
¿En cuántas de ellas aparecen las 5 vocales juntas y ordenadas?

La secuencia AEIOU puede comenzar entre la primera y la séptima posiciones.
El resto de letras pueden estar en cualquiera de las posiciones restantes.

$7 \cdot P_6 = 5.040$. Aparecen en 5.040 palabras.

EN LA VIDA COTIDIANA

088



Desde que los romanos usaron la cuadrícula para organizar sus campamentos, muchas civilizaciones copiaron esta idea para planificar sus ciudades. Actualmente podemos ver este diseño en ciudades de todo el mundo.

Estas calles perpendiculares que forman manzanas facilitan enormemente la ubicación.

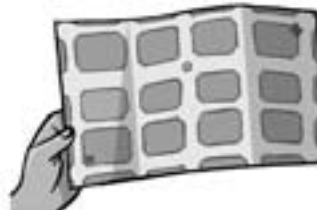


Javier trabaja en una empresa de mensajería y acaban de trasladarlo de oficina. Hoy tiene que llevar un pedido hasta una farmacia.



Su jefe le entrega este plano de la zona.

¿Cuántos caminos distintos puede hacer?



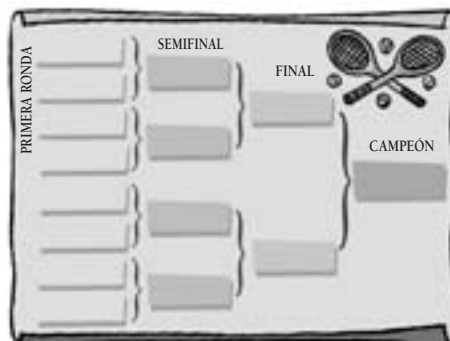
En el recorrido tendrá que adoptar 7 decisiones de tomar rumbo norte o este, donde 3 decisiones serán de tomar rumbo norte y 4 decisiones serán de tomar rumbo este, por lo que si decide en qué momento de las 7 decisiones se elige tomar rumbo norte está determinado el camino.

Como $C_{7,4} = \binom{7}{4} = 35$, hay 35 caminos distintos.

089

Al comenzar un torneo de tenis, en el polideportivo donde se van a jugar los partidos publican este organigrama.

Dentro de cada casilla se escriben los nombres de los participantes. Las llaves representan los partidos y el tenista que pierda quedará eliminado.



En este diagrama hay ocho jugadores, así que se necesitan siete partidos para completar el torneo.

En total habrá tres rondas: la primera, la semifinal y la final. Pero ¿qué ocurre si el número de jugadores es impar?



La organización del torneo tiene que decidir qué sucede si el número de jugadores es impar.

Se realizará un sorteo y el jugador elegido pasará directamente a la siguiente ronda.



a) ¿Cuántos partidos habrá que disputar en un torneo en el que hay 32 jugadores inscritos?

b) ¿Y si se inscriben 209 jugadores?

- a) Se jugarán 16 partidos de dieciseisavos de final, 8 de octavos, 4 de cuartos, 2 de semifinal y 1 final; en total, 31 partidos.
- b) Si hubiera 256 participantes, los partidos serían 255, pero como el cuadro no está completo, $256 - 209 = 47$ jugadores pasarán directamente a la segunda fase, y de la primera fase se jugarán 81 partidos, en vez de los 128 partidos que se habrían jugado de estar completo el cuadro. Por tanto, habrá: $255 - 47 = 208$ partidos.



PROBABILIDAD DE UN SUCESO

REGLA DE LAPLACE

FRECUENCIA Y PROBABILIDAD.
PROPIEDADES

PROBABILIDAD CONDICIONADA

REGLA DEL PRODUCTO

Requiescant in pace

El horizonte devoraba el día a la misma velocidad con la que crecían las sombras producidas por las cruces y los ángeles de piedra, hasta que, con el último mordisco, día y sombras desaparecieron dando paso a la noche.

El encargado del cementerio, Hans, acostumbrado al silencio del lugar, se sobresaltó al oír unas pisadas que parecían venir de todos los lados. Aumentaban su intensidad como si estuvieran a su espalda y, al volverse, el sonido se difuminaba como si viniera desde muy lejos.

—¡Odio este trabajo! —maldijo.

De repente una sombra pasó a su izquierda dejándolo paralizado. A duras penas logró reunir el valor suficiente para esconderse tras una lápida y observar la escena.

La sombra era un hombre embozado, que se agachó sobre una de las tumbas y, tras murmurar unas palabras, que Hans no alcanzó entender, se alejó dejando sobre el mármol un libro.

Cuando Hans recuperó la movilidad, con precaución se acercó a la tumba y, sin atreverse a tocarlo, leyó en el libro: *Ars Conjectandi*, por Jakob Bernoulli.

Creyendo que eran cosas de espíritus, corrió hacia la salida jurándose a sí mismo no contarle jamás a nadie lo ocurrido.

El *Ars Conjectandi* es un tratado de probabilidad escrito por Jakob Bernoulli y publicado por su sobrino Nikolaus cinco años después de su muerte.

¿Entre qué valores puede estar la probabilidad de un suceso?

La probabilidad de un suceso A toma valores siempre entre 0 y 1.

$$0 \leq P(A) \leq 1$$



Probabilidad

EJERCICIOS

001 Di cuáles de los siguientes experimentos son aleatorios y cuáles son deterministas.

- a) Pesar 1 dm^3 de agua.
- b) Medir el lado de un cuadrado de 2 cm^2 .
- c) Preguntar un número de 2 cifras.
- d) Lanzar un dado y anotar la puntuación.
- e) Elegir un jersey del armario.

- a) Determinista.
- b) Determinista.
- c) Aleatorio.
- d) Aleatorio.
- e) Determinista.

002 Define los sucesos elementales, el espacio muestral y dos sucesos no elementales al extraer una carta de la baraja española.

El espacio muestral tiene 40 sucesos elementales, que serían cada una de las cartas de la baraja.

Sucesos elementales: {as de copas}, {2 de copas}...

Sucesos no elementales: {salir una figura}, {salir espadas}.

003 En el experimento de elegir un número al azar y anotar su resto al dividir entre 3, pon un ejemplo de suceso que no sea el conjunto vacío.

Suceso: que el resto sea 1.

004 Lanzamos una moneda y un dado. Calcula el espacio muestral mediante un diagrama de árbol.



El espacio muestral es: $E = \{C1, C2, C3, C4, C5, C6, X1, X2, X3, X4, X5, X6\}$.

005 Se extrae una carta de la baraja española. Indica cómo son los siguientes sucesos.

- a) $A = \text{«Sacar oros»}$ y $B = \text{«Sacar copas»}$
- b) $A = \text{«Sacar bastos»}$ y $B = \text{«Sacar un as»}$

- a) Incompatibles.
- b) Compatibles.

006 Tenemos una bolsa con 8 bolas numeradas del 1 al 8. Extraemos una bola, y si tiene un número impar, extraemos otra sin reemplazar la primera. Si el número es par, extraemos dos bolas sin reemplazar la que ya hemos sacado.

- a) Determina el espacio muestral.
 b) Pon un ejemplo de dos sucesos compatibles.
 c) Escribe dos sucesos incompatibles.

a) Espacio muestral: {2, 4, 6, 8, 13, 15, 17, 1234, 1235, 1236, 1237, 1238, 1245, 1246, 1247, 1248, 1256, 1257, 1258, 1267, 1268, 1278, 1423, 1425, 1426, 1527, 1428, 1435, 1436, 1437, 1438, 1456, 1457, 1458, 1467, 1468, 1478, 1623, 1624, 1625, 1627, 1628, 1634, 1635, 1637, 1638, 1645, 1647, 1648, 1657, 1658, 1678, 1823, 1824, 1825, 1826, 1827, 1834, 1835, 1836, 1837, 1845, 1846, 1847, 1856, 1857, 1867, 3214, 3215, 3216, 3217, 3218, 3245, 3246, 3247, 3248, 3256, 3257, 3258, 3267, 3268, 3278, 3423, 3425, 3426, 3527, 3428, 3415, 3416, 3417, 3418, 3456, 3457, 3458, 3467, 3468, 3478, 3621, 3624, 3625, 3627, 3628, 3614, 3615, 3617, 3618, 3645, 3647, 3648, 3657, 3658, 3678, 3821, 3824, 3825, 3826, 3827, 3814, 3815, 3816, 3817, 3845, 3846, 3847, 3856, 3857, 3867, 5234, 5231, 5236, 5237, 5238, 5241, 5246, 5247, 5248, 5216, 5217, 5218, 5267, 5268, 5278, 5423, 5421, 5426, 5127, 5428, 5431, 5436, 5437, 5438, 5416, 5417, 5418, 5467, 5468, 5478, 5623, 5624, 5621, 5627, 5628, 5634, 5631, 5637, 5638, 5641, 5647, 5648, 5617, 5618, 5678, 5823, 5824, 5821, 5826, 5827, 5834, 5831, 5836, 5837, 5841, 5846, 5847, 5816, 5817, 5867, 7234, 7235, 7236, 7231, 7238, 7245, 7246, 7241, 7248, 7256, 7251, 7258, 7261, 7268, 7218, 7423, 7425, 7426, 7521, 7428, 7435, 7436, 7431, 7438, 7456, 7451, 7458, 7461, 7468, 7418, 7623, 7624, 7625, 7621, 7628, 7634, 7635, 7631, 7638, 7645, 7641, 7648, 7651, 7658, 7618, 7823, 7824, 7825, 7826, 7821, 7834, 7835, 7836, 7831, 7845, 7846, 7841, 7856, 7851, 7861}

b) Sacar impar, sacar cuatro bolas.

c) Sacar par, sacar impar.

007 En el experimento aleatorio que consiste en lanzar un dado con sus caras numeradas del 1 al 8, expresa en forma de uniones e intersecciones los siguientes sucesos.

- a) «Salir número par y no primo»
 b) «Salir número impar o primo»
 c) «Salir número primo o par»



A = «Salir par»

C = «Salir no primo»

B = «Salir primo»

D = «Salir impar»

a) $A \cap C$

b) $D \cup B$

c) $B \cup A$

Probabilidad

008 En la extracción de una bola de una bolsa que contiene 10 bolas numeradas del 1 al 10, consideramos los sucesos $A = \text{«Número par»}$ y $B = \text{«Múltiplo de 3»}$. Calcula.

a) $A \cup B$

b) $A \cap B$

a) $A \cup B = \text{«Salir par o múltiplo de 3»} = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10\}$

b) $A \cap B = \text{«Salir par y múltiplo de 3»} = \{6\}$

009 Dados un experimento aleatorio y un suceso A , halla:

a) $A \cup A$

b) $A \cap A$

a) $A \cup A = A$

b) $A \cap A = A$

010 En el experimento de sacar una carta de la baraja española, consideramos los sucesos $A = \text{«Sacar una figura»}$ y $B = \text{«Sacar oros»}$. Obtén los sucesos.

a) $A \cup B$

b) $A \cap B$

c) $\bar{A}$

d) $\bar{B}$

a) $A \cup B = \{\text{sacar figura u oros}\}$

c) $\bar{A} = \{\text{no sacar figura}\}$

b) $A \cap B = \{\text{sacar figura de oros}\}$

d) $\bar{B} = \{\text{no sacar oros}\}$

011 Tomamos una pieza de fruta de un frutero donde hay manzanas, fresas, plátanos y peras. Calcula los contrarios de los siguientes sucesos.

a) «Que sea manzana o pera»

b) «Que no sea plátano»

c) «Que crezca en árboles»

a) {fresa, plátano}

b) {plátano}

c) {fresa}

012 En una caja hay 8 bolas numeradas del 1 al 8. Escribe el suceso contrario, uno compatible y otro incompatible de estos sucesos.

a) $A = \text{«Sacar número menor que 4»}$

b) $B = \text{«Sacar número impar»}$

	Suceso contrario	Suceso compatible	Suceso incompatible
a) $A = \{\text{número} < 4\}$	{número ≥ 4 }	{número > 2 }	{número > 5 }
b) $B = \{\text{número impar}\}$	{número par}	{número múltiplo de 3}	{número múltiplo de 4}

013 Con los datos del ejercicio anterior, calcula estos sucesos.

a) $\bar{A}$

c) $\bar{A} \cup \bar{B}$

e) $\bar{A} \cap B$

g) $\bar{A} \cap \bar{B}$

b) $\bar{A} \cap B$

d) $\bar{A} \cup B$

f) $A \cup \bar{B}$

h) $A \cap \bar{B}$

a) {1, 2, 3}

e) {5, 7}

b) {2, 4, 5, 6, 7, 8}

f) {1, 2, 3, 4, 6, 8}

c) {4, 6, 8}

g) {4, 6, 8}

d) {1, 3, 4, 5, 6, 7, 8}

h) {2}

014 Si en una bolsa tenemos 4 bolas de diferentes colores: rojo, blanco, verde y amarillo, calcula la probabilidad de:

- a) «Sacar bola marrón»
- b) «Sacar bola de algún color»
- c) «Sacar bola verde»

a) $P(\text{bola marrón}) = 0 \rightarrow$ Suceso imposible

b) $P(\text{bola de color}) = \frac{4}{4} = 1 \rightarrow$ Suceso seguro

c) $P(\text{bola verde}) = \frac{1}{4}$

015 Halla las probabilidades de estos sucesos.

- a) «Salir cara al lanzar una moneda»
- b) «Obtener un 5 cuando juegas al parchís»
- c) «Sacar un 2 en un dado con forma de tetraedro y caras numeradas del 1 al 4»

a) $P(\text{sacar cara}) = \frac{1}{2} = 0,5$

b) $P(\text{sacar 5}) = \frac{1}{6}$

c) $P(\text{sacar 2 en un tetraedro}) = \frac{1}{4} = 0,25$

016 De los siguientes experimentos, escribe cuáles son sus sucesos elementales.

- a) «Lanzar un dado»
- b) «Lanzar una moneda»
- c) «Observar cómo cae una chincheta, con la punta hacia arriba o hacia abajo»
- d) «Contestar al azar una pregunta con 4 posibles respuestas»
- e) «Extraer una bola de una bolsa que tiene 2 bolas rojas y 3 azules»
- f) «Lanzar un dado de 8 caras y una moneda»

¿Qué probabilidad le asignarías a cada uno de los sucesos?

- a) El espacio muestral tiene 6 sucesos elementales: $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

La probabilidad de cada suceso elemental es $P(i) = \frac{1}{6}$, para $i = 1, 2, \dots, 6$.

- b) El espacio muestral tiene 2 sucesos elementales: $E = \{\text{cara}, \text{cruz}\}$.

La probabilidad de cada suceso elemental es $P(\text{cruz}) = P(\text{cara}) = \frac{1}{2}$.

- c) El espacio muestral tiene 2 sucesos elementales:

$E = \{\text{punta hacia arriba}, \text{punta hacia abajo}\}$.

La probabilidad de cada suceso elemental es solo cuantificable de modo experimental.

Probabilidad

d) El espacio muestral tiene 4 sucesos elementales: $E = \{a, b, c, d\}$.

La probabilidad de cada suceso elemental es:

$$P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = \frac{1}{4}.$$

e) El espacio muestral tiene 2 sucesos elementales:

$E = \{\text{sacar bola roja, sacar bola azul}\}$.

$$P(\text{roja}) = \frac{2}{5}; P(\text{azul}) = \frac{3}{5}$$

f) El espacio muestral tiene 16 sucesos elementales:

$E = \{C1, C2, C3, C4, C5, C6, C7, C8, X1, X2, X3, X4, X5, X6, X7, X8\}$.

La probabilidad de cada suceso elemental es $P(A) = \frac{1}{16}$.

017 En una bolsa hay 5 bolas rojas, 10 verdes y 5 azules, y se extrae una bola. Calcula la probabilidad de los sucesos.

a) «Sacar bola roja» b) «Sacar bola verde» c) «Sacar bola azul»

$$a) P(\text{roja}) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

$$b) P(\text{verde}) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

$$c) P(\text{azul}) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

018 En un aula hay 17 chicos y 19 chicas. Se elige una persona al azar. Determina la probabilidad de estos sucesos.

a) «Ser un chico» b) «Ser una chica»

$$a) P(\text{chico}) = \frac{17}{36}$$

$$b) P(\text{chica}) = \frac{19}{36}$$

019 Se lanza un dado de 6 caras. Calcula la probabilidad de estos sucesos.

a) $A = \text{«Salir número par»}$

b) $B = \text{«Salir número múltiplo de 3»}$

c) $C = \text{«Salir número menor que 4»}$

$$a) P(A) = \frac{3}{6} = 0,5$$

$$b) P(B) = \frac{2}{6} = 0,33$$

$$c) P(C) = \frac{3}{6} = 0,5$$

020 En un dado se suprime la cara 6 y se añade otra cara 1. ¿Cuál es el espacio muestral? ¿Son los sucesos elementales equiprobables? ¿Puedes calcular su probabilidad?

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

Los sucesos no son equiprobables: $P(1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ y $P(i) = \frac{1}{6}$ para $i = 2, 3, 4$ y 5 .

- 021** Se ha lanzado una moneda 75 veces obteniéndose 43 caras.
¿Cuál es la frecuencia relativa del suceso «Salir cruz»?

- a) $\frac{32}{75}$ b) 32 c) $\frac{32}{100}$ d) 0,32

La frecuencia relativa del suceso «Salir cruz» es la opción a) $\frac{32}{75}$.

- 022** Una máquina hace arandelas para tornillos. Explica cómo calcularías la probabilidad de que, escogida una de las arandelas al azar, sea defectuosa.

Se toma una muestra grande de arandelas. Calculamos la frecuencia relativa (h_i) de arandelas defectuosas.

La probabilidad de que, escogida una arandela al azar, sea defectuosa será el dato calculado.

- 023** En una bolsa hay bolas numeradas del 1 al 5. Se repite 5.000 veces el experimento de extraer una bola, se anota el resultado y, después, se devuelve a la bolsa. Las frecuencias obtenidas son:

Bola	1	2	3	4	5
f_i	1.200	800	700	1.300	1.000

Calcula la probabilidad de que, al sacar una bola, se obtenga un múltiplo de 2.

$$P(\text{sacar múltiplo de 2}) = \frac{800}{5.000} + \frac{1.300}{5.000} = \frac{21}{50} = 0,42$$

- 024** Una urna contiene 4 bolas blancas, 1 roja y 5 negras. Se considera el experimento de sacar una bola al azar. Calcula las probabilidades de estos sucesos.

- a) $A = \text{«Sacar bola blanca»}$ e) $E = \text{«Sacar bola verde»}$
b) $B = \text{«Sacar bola roja»}$ f) $F = \text{«Sacar bola blanca o negra»}$
c) $C = \text{«Sacar bola que no sea negra»}$ g) $G = \text{«Sacar bola roja o negra»}$
d) $D = \text{«Sacar bola que no sea roja»}$

a) $P(A) = \frac{4}{10} = 0,4$

b) $P(B) = \frac{1}{10} = 0,1$

c) $P(C) = P(A \cup B) = 0,4 + 0,1 = 0,5$

d) $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0,1 = 0,9$

e) $P(E) = 0$, porque no hay bolas verdes.

f) $P(F) = \frac{9}{10} = 0,9$

g) $P(G) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

Probabilidad

025 Se lanzan dos dados y se suman los puntos obtenidos. Halla la probabilidad de que la suma:

- a) Sea 3. b) No sea 7. c) Sea inferior a 11. d) Sea 4 o 5.

a) Casos favorables: {1-2, 2-1}

Casos posibles: 36

$$P(\text{sea } 3) = \frac{2}{36} = 0,056$$

b) Casos favorables para que la suma sea 7: {1-6, 2-5, 3-4, 4-3, 5-2, 6-1}

$$P(\text{no sea } 7) = 1 - P(7) = 1 - \frac{6}{36} = 0,83$$

c) Casos favorables para que la suma sea mayor o igual que 11: {5-6, 6-6, 6-5}

$$P(\text{sea inferior a } 11) = 1 - P(\text{mayor o igual que } 11) = 1 - \frac{3}{36} = 0,9167$$

d) Casos favorables: {1-3, 1-4, 2-2, 2-3, 3-1, 3-2, 4-1}

$$P(\text{sea salir } 4 \text{ o } 5) = \frac{7}{36} = 0,194$$

026 Si dos sucesos, **A** y **B**, verifican que la suma de sus probabilidades es igual a 1, son:

- a) Compatibles b) Contrarios c) Incompatibles d) No se puede saber
- d) No se puede saber

027 En una caja de bombones hay 5 bombones de chocolate blanco y 15 de chocolate negro. Si 2 bombones de chocolate blanco y 10 de chocolate negro tienen relleno de licor, y escogemos un bombón al azar, calcula la probabilidad de los sucesos.

- a) «Sea de chocolate negro y esté relleno»
b) «No tenga relleno o sea de chocolate blanco»
c) «Sea de chocolate blanco, sabiendo que es relleno»
d) «Sea relleno, sabiendo que es de chocolate negro»

B = «Chocolate blanco» N = «Chocolate negro» R = «Relleno»

$$a) P(N \cap R) = \frac{10}{20} = 0,5$$

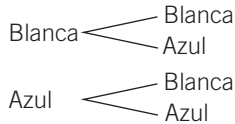
$$b) P(\bar{R} \cup B) = P(\bar{R}) + P(B) - P(\bar{R} \cap B) = \frac{8}{20} + \frac{5}{20} - \frac{3}{20} = \frac{10}{20} = 0,5$$

$$c) P(B/R) = \frac{\text{n.º de bombones blancos rellenos}}{\text{n.º de bombones rellenos}} = \frac{2}{12} = 0,167$$

$$d) P(N/R) = \frac{\text{n.º de bombones negros rellenos}}{\text{n.º de bombones negros}} = \frac{10}{15} = 0,67$$

- 028** En una urna tenemos 2 bolas blancas y 2 azules. Si la primera bola que extraemos no se vuelve a introducir en la urna (sin reemplazamiento), calcula la probabilidad de obtener una bola azul y, después, una bola blanca.

Ilustramos el problema con un diagrama de árbol.

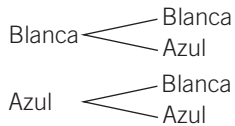


En la 1.ª extracción tenemos 4 bolas y en la 2.ª extracción tenemos solo 3 bolas, por lo que de antemano no conocemos la probabilidad.

$$\begin{aligned}
 P(\text{extraer 1.º bola azul y 2.º bola blanca}) &= \\
 &= P(A_1 \cap B_2) = P(A_1) \cdot P(B_2/A_1) = \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

- 029** Si el experimento anterior fuera con reemplazamiento, halla la probabilidad de obtener una bola azul y, después, una bola blanca.

Ilustramos el problema con un diagrama de árbol.



En este caso, los sucesos elementales tienen la misma probabilidad, y son independientes.

$$P(\text{extraer 1.º azul y 2.º blanca}) = P(A_1 \cap B_2) = P(A_1) \cdot P(B_2) = \frac{1}{4} = 0,25$$

- 030** Al extraer una bola de la urna y anotar el color, se devuelve a la urna. Calcula la probabilidad de que, al extraer dos bolas, sean rojas.

En la urna hay 2 bola rojas y 3 azules.

Llamamos $R_i = \{\text{sacar bola roja en la } i\text{-ésima extracción}\}$.

$$P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) \cdot P(R_2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = 0,6$$



- 031** En el ejercicio anterior, ¿son los sucesos dependientes o independientes?

Son sucesos independientes, porque se devuelve la bola.

- 032** Propón un experimento, y busca un ejemplo de sucesos independientes y otro de sucesos incompatibles.

Respuesta abierta.

ACTIVIDADES

033 Escribe dos experimentos aleatorios y otros dos que no lo sean.

● Justifica tu respuesta.

Respuesta abierta.

Sucesos aleatorios $\longrightarrow$ Lanzar un dado, tirar una moneda, etc.

Sucesos deterministas $\rightarrow$ Medir la longitud de una circunferencia de radio r ,
calcular el volumen de un cubo de arista 3 cm, etc.

034 Indica si los siguientes experimentos son deterministas o aleatorios.

●

a) Medir la longitud de una clase.

b) Extraer una carta de la baraja.

c) Dejar caer una piedra al vacío y medir la aceleración.

d) Pesar una botella de agua de 1 litro.

e) Lanzar una moneda y observar el resultado.

a) Determinista.

c) Determinista.

e) Aleatorio.

b) Aleatorio.

d) Determinista.

035 Describe el espacio muestral del experimento aleatorio que consiste en lanzar 2 dados y anotar la resta de los números de las caras superiores.

●

(-)	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

Restamos siempre al mayor número el menor: $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

036 En una urna tenemos 8 bolas rojas, 4 amarillas y 1 verde. Si extraemos una bola al azar y anotamos su color, ¿cuál es el espacio muestral?

●●

$E = \{\text{bola roja, bola amarilla, bola verde}\}$

037 Jaime lanza 2 dados y, después, suma la puntuación obtenida. Describe el espacio muestral de este experimento.

●●

Haz lo mismo si, tras sumar los puntos, hallamos el resto al dividir entre 3.



(+)	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

$$E = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

El resto al dividir entre 3 es 0, 1 o 2, luego el espacio muestral es:

$$E = \{0, 1, 2\}.$$

- 038** Se lanza un dado con 12 caras numeradas del 1 al 12, y se consideran los sucesos:



- A** = «Salir número par»
B = «Salir número impar»
C = «Salir múltiplo de 3»
D = «Salir múltiplo de 5»
F = «Salir número mayor que 5»
G = «Salir número menor que 4»

- a) Escribe estos sucesos.
 b) Señala los pares de sucesos que son incompatibles.
 c) ¿Hay tres sucesos que sean incompatibles?

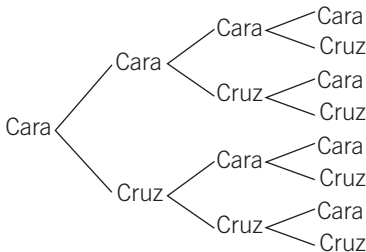
- a) $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ $D = \{5, 10\}$
 $B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ $E = \{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$
 $C = \{3, 6, 9, 12\}$ $F = \{1, 2, 3\}$
 b) $A-B$, $C-D$, $D-F$, $E-F$
 c) No los hay.

- 039** Considera el lanzamiento de 4 monedas. Describe el espacio muestral utilizando un diagrama de árbol y escribe los sucesos elementales de los siguientes sucesos.

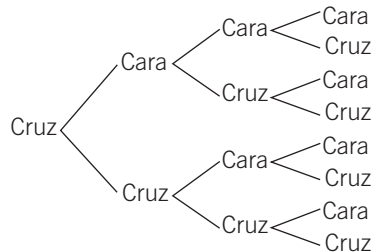
A = «Obtener al menos una cara»

B = «Obtener una sola cara»

Moneda 1 Moneda 2 Moneda 3 Moneda 4



Moneda 1 Moneda 2 Moneda 3 Moneda 4



$$A = \{CCCC, CCCX, CCXC, CXCC, CXCX, CXXC, CXXX, XCCC, XCCX, XCXC, XCXX, XXCC, XXCX, XXXC\}$$

$$B = \{CXXX, XCXX, XXCX, XXXC\}$$

Probabilidad

040 Con los datos de la actividad anterior, calcula.



- a) $A \cup B$ b) $A \cap B$ c) $\bar{A}$ d) $\bar{B}$

- a) $A \cup B = A$, porque el suceso B está contenido en el suceso A .
 b) $A \cap B = B$
 c) $\bar{A} = \text{«Obtener 0 caras»} = \{XXXX\}$
 d) $\bar{B} = \text{«Obtener 0, 2, 3 o 4 caras»} =$
 $= \{CCCC, CCCX, CCXC, CXCC, CXCX, CXXC, XCCC, XCCX, XCXC,$
 $XXCC, XXXX\}$

041 Consideramos las 28 fichas del dominó. Si cogemos una ficha y sumamos los puntos, calcula.



- a) $A = \text{«Obtener múltiplo de 5»}$
 b) $B = \text{«Obtener número par»}$
 c) $A \cup B, A \cap B, \bar{A} \text{ y } \bar{B}$
 d) $A \cup \bar{A} \text{ y } B \cap \bar{B}$

(+)	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6	7
2	2	3	4	5	6	7	8
3	3	4	5	6	7	8	9
4	4	5	6	7	8	9	10
5	5	6	7	8	9	10	11
6	6	7	8	9	10	11	12

$$E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

- a) $A = \{5, 10\}$
 b) $B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$
 c) $A \cup B = \{2, 4, 5, 6, 8, 10, 12\}$ $A \cap B = \{10\}$
 $\bar{A} = \{0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12\}$ $\bar{B} = \{0, 1, 3, 5, 7, 9, 11\}$
 d) $A \cup \bar{A} = E$ $\bar{B} \cap B = \emptyset$

042 Extraemos 2 cartas de una baraja española. Un suceso imposible es:



- a) «Sacar 2 cartas de oros»
 b) «Sacar 2 cartas del mismo palo»
 c) «Sacar 2 cartas de distinto palo»
 d) «Sacar 2 figuras iguales del mismo palo»

Un suceso imposible es d) «Sacar 2 figuras iguales del mismo palo».

- 043** Ordena, de menor a mayor grado de probabilidad, los siguientes sucesos al lanzar un dado de 6 caras.

- a) «Salir número impar»
- b) «Salir número igual o mayor que 5»
- c) «Salir número menor que 7»
- d) «Salir número mayor que 7»

$$P(D) < P(B) < P(A) < P(C)$$

- 044** De una baraja española se extrae una carta. Calcula la probabilidad de estos sucesos.

- a) $A = \text{«Obtener oros»}$
- b) $B = \text{«Obtener el rey de oros»}$
- c) $C = \text{«Obtener espadas o copas»}$

$$\text{a) } P(A) = \frac{10}{40} = 0,25 \quad \text{b) } P(B) = \frac{1}{40} = 0,025 \quad \text{c) } P(C) = \frac{20}{40} = 0,5$$

- 045** Se lanza un dado al aire y se suman los puntos de todas las caras menos la cara de arriba. Obtén el espacio muestral y la probabilidad de obtener un número que sea múltiplo de 3.

$$E = \{15, 16, 17, 18, 19, 20\}$$

$$P(\text{obtener múltiplo de 3}) = \frac{2}{6} = 0,33$$

046 HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE CALCULA LA PROBABILIDAD DE ALGUNOS SUCESOS NO EQUIPROBABLES?

En un dado truco, la probabilidad de salir 5 es el triple que la de salir cualquiera de los otros números. ¿Qué probabilidad hay de que al tirar el dado salga 2?

PRIMERO. La suma de todas las probabilidades de los sucesos elementales es 1. Si se llama x a la probabilidad de que salga 1, 2, 3, 4 o 6, la probabilidad de que salga 5 será $3x$.

$$\begin{array}{lll} P(1) = x & P(3) = x & P(5) = 3x \\ P(2) = x & P(4) = x & P(6) = x \\ P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1 \\ x + x + x + x + 3x + x = 1 \end{array}$$

SEGUNDO. Se resuelve la ecuación resultante.

$$x + x + x + x + 3x + x = 1 \rightarrow 8x = 1 \rightarrow x = 0,125$$

La probabilidad de que salga 2 es 0,125.

Probabilidad

047 Si en un dado tenemos que:

•• $P(1) = P(2) = P(3) = \frac{1}{7}$ y $P(4) = P(5) = P(6) = x$,

¿cuál es el valor de x ?

$$\begin{aligned} P(E) &= P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = \\ &= \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + x + x + x \rightarrow 1 = \frac{3}{7} + 3x \end{aligned}$$

Resolviendo la ecuación, se obtiene que: $x = \frac{4}{21}$.

048 Se ha trucado un dado de 6 caras, de modo que las caras que son números primos tienen doble probabilidad de salir que las que no lo son.



¿Cuál es la probabilidad de cada una de las caras? ¿Y la probabilidad de obtener un número par?

Llamamos $x = P(1) = P(4) = P(6)$ y $2x = P(2) = P(3) = P(5)$.

Estos sucesos son incompatibles, y como $P(E) = 1$:

$$P(E) = P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1$$

$$x + 2x + 2x + x + 2x + x = 1 \rightarrow 9x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{9}$$

$$P(1) = P(4) = P(6) = \frac{1}{9} \quad P(2) = P(3) = P(5) = \frac{2}{9}$$

$$P(\text{par}) = P(2) + P(4) + P(6) = \frac{2}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$$

049 En un dado trucado, la probabilidad de cada una de las 6 caras es:



Cara	1	2	3	4	5	6
P	0,1	0,1	0,1	a	b	0,1

Si $P(4) = 2 \cdot P(5)$, ¿cuánto valen a y b ?

$$\begin{aligned} P(E) &= P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = \\ &= 0,1 + 0,1 + 0,1 + a + b + 0,1 = 1 \end{aligned}$$

Además, se verifica que: $P(4) = 2 \cdot P(5) \rightarrow a = 2b$

Resolviendo el sistema: $\begin{cases} a + b = 0,6 \\ a = 2b \end{cases}$ se obtiene que: $a = 0,4$ y $b = 0,2$.

050 Tomando un número del 20 al 79, ¿cuál es la probabilidad de que el producto de sus cifras sea 18?



Hay 60 casos posibles y 3 casos favorables: 29, 36 y 63.

La probabilidad es: $P(\text{el producto de las cifras del número sea } 18) = \frac{3}{60} = \frac{1}{20}$.

051 Al lanzar una chincheta, esta puede caer con la punta hacia arriba o hacia abajo.

- a) ¿Se trata de un experimento aleatorio?
 b) ¿Cuáles son los sucesos elementales?
 c) ¿Son estos sucesos equiprobables?

- a) Es un experimento aleatorio.
 b) $E = \{\text{punta hacia arriba, punta hacia abajo}\}$
 c) Los sucesos no son equiprobables.



052 En un bombo hay 10 bolas numeradas del 0 al 9. Se repite 100 veces el experimento de extraer una bola y reemplazarla. Los resultados son:

Bola	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
f_i	7	13	11	12	8	10	12	6	10	11

$A = \text{«Múltiplo de 3»}$

$B = \text{«Número impar»}$

$C = \text{«Divisor de 6»}$

Calcula.

- a) La frecuencia relativa de A , B y C .
 b) La frecuencia relativa de $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cup C$ y $A \cap C$.
 c) La probabilidad de cada uno de los sucesos anteriores.

$$a) h_i(A) = \frac{12 + 12 + 11}{100} = \frac{35}{100} = 0,35$$

$$h_i(B) = \frac{13 + 12 + 10 + 6 + 11}{100} = \frac{52}{100} = 0,52$$

$$h_i(C) = \frac{13 + 11 + 12 + 12}{100} = \frac{48}{100} = 0,48$$

$$b) h_i(A \cup B) = \frac{12 + 12 + 11 + 13 + 10 + 6}{100} = \frac{64}{100} = 0,64$$

$$h_i(A \cap B) = \frac{12 + 11}{100} = \frac{23}{100} = 0,23$$

$$h_i(A \cup C) = \frac{12 + 12 + 11 + 13 + 11}{100} = \frac{59}{100} = 0,59$$

$$h_i(A \cap C) = \frac{12 + 12}{100} = \frac{24}{100} = 0,24$$

- c) Para cada suceso, la frecuencia relativa, hallada en los apartados anteriores, se aproxima al valor de la probabilidad.

Probabilidad

• •

Se lanza 100 veces un dado tetraédrico y se anota el número de la cara oculta.

Cara	1	2	3	4
f_i	28	22	30	20

Halla la frecuencia relativa de los sucesos.

- a) «Múltiplo de 3»
b) «Múltiplo de 2»
c) «Número mayor que 1»
d) «Número menor que 1»

$$a) h_i (\text{múltiplo de } 3) = \frac{30}{100} = 0,3$$

$$\text{b) } h_i (\text{múltiplo de } 2) = \frac{22 + 20}{100} = \frac{42}{100} = 0,42$$

c) h_i (cara mayor que 1) = $\frac{22 + 30 + 20}{100} = \frac{72}{100} = 0,72$

d) h_i (cara menor que 1) = 0

••

Se extrae al azar una carta de una baraja española. Halla la probabilidad de estos sucesos.

- a) «Obtener un caballo»
- b) «No obtener una figura»
- c) «Obtener el rey de oros o de espadas»
- d) «No obtener oros ni bastos»
- e) «Obtener una figura que no sea de copas»

$$a) P = \frac{4}{40} = 0,1$$

$$c) P = \frac{2}{40} = 0,05$$

$$e) P = \frac{9}{40} = 0,225$$

$$\text{b) } P = \frac{28}{40} = 0,7$$

$$d) P = \frac{20}{40} = 0,5$$

● ● ●

En una urna hay 100 bolas numeradas del 1 al 100. Sacamos una bola y definimos los siguientes sucesos.

$A = \text{«}n \text{ es múltiplo de } 5\text{»}$

$$D = \text{«}n \text{ es divisible por } 10\text{»}$$

$B = \text{«}n \text{ es múltiplo de } 3\text{»}$

$$F = \text{«}n \text{ es divisible por } 1\text{»}$$

$C = \text{«}n \text{ es divisible por } 2\text{»}$

$G = \ll n \text{ es múltiplo de } 11 \gg$

- ¿Cuántos sucesos elementales componen cada suceso?
¿Cuál es su probabilidad?
- ¿Hay dos sucesos incompatibles?
- ¿Y dos sucesos compatibles?
- ¿Hay dos sucesos contrarios?
- Halla la probabilidad de $A \cap B$, $B \cup C$ y D .

a) $A = \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100\}$

$$P(A) = \frac{20}{100} = 0,2$$

$$B = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, 48, 51, 54, 57, 60, 63, 66, 69, 72, 75, 78, 81, 84, 87, 90, 93, 96, 99\}$$

$$P(B) = \frac{33}{100} = 0,33$$

$$C = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, \dots, 100\}$$

$$P(C) = \frac{50}{100} = 0,5$$

$$D = \{10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100\}$$

$$P(D) = \frac{10}{100} = 0,1$$

$$F = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, \dots, 99, 100\}$$

$$P(F) = \frac{100}{100} = 1$$

$$G = \{11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99\}$$

$$P(G) = \frac{9}{100} = 0,09$$

b) Los sucesos D y G son incompatibles, ya que $D \cap G = \emptyset$.

c) Los sucesos A y B son compatibles, pues $A \cap B = \{15, 30, 45, 60, 75, 90\} \neq \emptyset$.

d) No hay sucesos contrarios, porque no hay ninguna pareja de sucesos cuya intersección sea $\emptyset$ y cuya unión sea E .

$$e) A \cap B = \{15, 30, 45, 60, 75, 90\} \rightarrow P(A \cap B) = \frac{6}{100} = 0,06$$

$$P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C) = 0,33 + 0,5 - 0,16 = 0,67$$

$$P(D) = \frac{10}{100} = 0,1$$

056

En una urna tenemos 4 bolas rojas y 6 bolas blancas. Si extraemos 2 bolas consecutivamente, calcula la probabilidad de los sucesos.

a) «Sacar dos bolas blancas»

c) «Sacar al menos una bola roja»

b) «Sacar una bola blanca y otra roja»

d) «No sacar ninguna bola roja»

Suponemos que la extracción es sin reemplazamiento.

$$B = \{\text{sacar bola blanca}\} \quad R = \{\text{sacar bola roja}\}$$

$$a) P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \cdot P(B_2/B_1) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{1}{3}$$

$$b) P(B_1 \cap R_2) + P(R_1 \cap B_2) = P(B_1) \cdot P(R_2/B_1) + P(R_1) \cdot P(B_2/R_1) = \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} + \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{8}{15}$$

$$c) 1 - P(B_1 \cap B_2) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$d) P(B_1 \cap B_2) = \frac{1}{3}$$

Probabilidad

057



Se lanzan 3 monedas al aire. Obtén el espacio muestral, determina la probabilidad de cada suceso elemental y calcula las siguientes probabilidades.

a) $P(3 \text{ caras})$

e) $P(2 \text{ caras y 1 cruz})$

b) $P(0 \text{ caras})$

f) $P(1 \text{ cruz})$

c) $P(4 \text{ caras})$

g) $P(\text{al menos 2 caras})$

d) $P(2 \text{ cruces y 1 cara})$

h) $P(\text{a lo sumo 1 cara})$

$$a) P(3 \text{ caras}) = \frac{1}{8} = 0,125$$

$$b) P(0 \text{ caras}) = \frac{1}{8} = 0,125$$

$$c) P(4 \text{ caras}) = 0$$

$$d) P(2 \text{ cruces y 1 cara}) = \frac{3}{8} = 0,375$$

$$e) P(2 \text{ caras y 1 cruz}) = \frac{3}{8} = 0,375$$

$$f) P(1 \text{ cruz}) = \frac{3}{8} = 0,375$$

$$g) P(\text{al menos 2 caras}) = \frac{4}{8} = 0,5$$

$$h) P(\text{a lo sumo 1 cara}) = \frac{4}{8} = 0,5$$

058

HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE CALCULA LA PROBABILIDAD DE UN SUCESO COMPUESTO MEDIANTE TABLAS DE CONTINGENCIA?

En 4.º ESO hay 12 chicos y 28 chicas. Llevan gafas 10 chicos y 8 chicas. Elegido un alumno al azar, calcula la probabilidad de que sea chico y no lleve gafas.

PRIMERO. Se recogen los datos del problema en una tabla de contingencia o de doble entrada.

	Chico	Chica	Total
Con gafas	10	8	
Sin gafas			
Total	12	28	

SEGUNDO. Se completa la tabla.

	Chico	Chica	Total
Con gafas	10	8	18
Sin gafas	2	20	22
Total	12	28	40

TERCERO. Se extraen los datos necesarios de la tabla para calcular la probabilidad pedida.

$$P(\text{chico sin gafas}) = \frac{\text{n.º de chicos sin gafas}}{\text{n.º total de alumnos}} = \frac{2}{40} = 0,05$$

059

En una guardería hay 10 niños y 12 niñas. Si 6 niños saben andar y 6 niñas no saben andar, calcula la probabilidad de que, elegido uno de ellos al azar, sea niño y no sepa andar.

$A = \text{«Ser niño»}$

$B = \text{«Ser niña»}$

$C = \text{«Saber andar»}$



$$P(A \cap \bar{C}) = \frac{\text{n.º de niños que no saben andar}}{\text{n.º total de niños}} = \frac{4}{22} = 0,18$$

060

Sabemos que en una clase hay 20 niños y 16 niñas. La mitad de los niños y tres cuartas partes de las niñas tienen el pelo moreno y el resto lo tiene rubio. ¿Cuál es la probabilidad de que, elegido un alumno, sea niño con el pelo rubio? ¿Y de que sea rubio, sin importar el sexo?

$A = \text{«Ser niño»}$

$C = \text{«Tener el pelo moreno»}$

$B = \text{«Ser niña»}$

$D = \text{«Tener el pelo rubio»}$

$$P(A \cap D) = P(A) \cdot P(D/A) = \frac{20}{36} \cdot \frac{1}{2} = \frac{20}{72} = \frac{5}{18}$$

$$P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) = \frac{10}{36} + \frac{4}{36} = \frac{14}{36} = \frac{7}{18}$$

061

A una comida asisten 28 hombres y 32 mujeres. Han elegido carne 16 hombres y 20 mujeres, tomando pescado el resto. Si elegimos una persona al azar, calcula la probabilidad de los siguientes sucesos.

- ¿Qué probabilidad hay de que sea hombre?
- ¿Cuál es la probabilidad de que haya tomado pescado?
- ¿Y la probabilidad de que sea hombre y haya tomado pescado?
- ¿Cuál es la probabilidad de que tome carne y pescado?

$A = \text{«Ser hombre»}$

$C = \text{«Comer carne»}$

$B = \text{«Ser mujer»}$

$D = \text{«Comer pescado»}$

$$\text{a) } P(A) = \frac{28}{60} = \frac{7}{15}$$

b) Como hay 12 hombres y 12 mujeres que han comido pescado:

$$P(D) = \frac{24}{60} = \frac{2}{5} = 0,4$$

$$\text{c) } P(A \cap D) = P(A) \cdot P(D/A) = \frac{7}{15} \cdot \frac{12}{28} = \frac{1}{5} = 0,2$$

d) $P(C \cap D) = 0$, porque los sucesos son contrarios.

Probabilidad

062



Luis y Juan tienen que recoger la habitación que comparten. Luis pone en una bolsa 3 bolas rojas, 2 verdes y 1 azul, y le propone a su hermano sacar una. Si es roja recoge Juan, y si es azul, recogerá él.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que salga bola roja? ¿Y de que salga bola azul?
 b) ¿Es justo lo que propone Luis?
 c) Juan no acepta el trato y propone que si sale roja recoge él, y si sale azul o verde recoge Luis. ¿Es justo este trato? ¿Por qué?

$$a) P(\text{roja}) = \frac{3}{6} = 0,5 \quad P(\text{azul}) = \frac{1}{6} = 0,167$$

b) No es justo, porque hay más probabilidad de que salga bola roja.

$$c) P(\text{verde o azul}) = P(\text{verde}) + P(\text{azul}) = \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = 0,5$$

El trato que propone Juan es justo, ya que ambos sucesos tienen igual probabilidad.

063



En el juego de los dados, el experimento consiste en lanzar dos dados y se gana si la suma de puntos es 11 o 7.

a) Describe el espacio muestral.

b) Calcula la probabilidad de ganar.

(+)	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

a) El espacio muestral es:

$$E = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}.$$

b) Casos posibles: $6 \cdot 6 = 36$

$$P(\text{salir 11 o 7}) =$$

$$= P(\text{salir 11}) + P(\text{salir 7}) =$$

$$= \frac{2}{36} + \frac{6}{36} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

064



Considera el experimento que consiste en elegir al azar un número del 1 al 30. Sean los sucesos $A = \text{«Obtener número par menor o igual que 14»}$, $B = \text{«Obtener múltiplo de 3 menor o igual que 10»}$ y $C = \text{«Obtener múltiplo de 10»}$. Describe los sucesos y calcula su probabilidad.

a) $A \cup B$

c) $B \cup C$

e) $C \cap B$

b) $A \cup C$

d) $A \cap B$

f) $A \cap C$

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\} \quad B = \{3, 6, 9\} \quad C = \{10, 20, 30\}$$

$$a) A \cup B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 3, 9\} \rightarrow P(A \cup B) = \frac{9}{30} = 0,3$$

$$b) A \cup C = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 20, 30\} \rightarrow P(A \cup C) = \frac{9}{30} = 0,3$$

$$c) B \cup C = \{3, 6, 9, 10, 20, 30\} \rightarrow P(B \cup C) = \frac{6}{30} = 0,2$$

$$d) A \cap B = \{6\} \rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{30}$$

$$e) C \cap B = \emptyset \rightarrow P(C \cap B) = 0$$

$$f) A \cap C = \{10\} \rightarrow P(A \cap C) = \frac{1}{30}$$

065 Halla la probabilidad de los contrarios de cada uno de los sucesos anteriores.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } P(\overline{A \cup B}) = 1 - 0,3 = 0,7 & \text{d) } P(\overline{A \cap B}) = 1 - \frac{1}{30} = \frac{29}{30} \\ \text{b) } P(\overline{A \cup C}) = 1 - 0,3 = 0,7 & \text{e) } P(\overline{C \cap B}) = 1 - 0 = 1 \\ \text{c) } P(\overline{B \cup C}) = 1 - 0,2 = 0,8 & \text{f) } P(\overline{A \cap C}) = 1 - \frac{1}{30} = \frac{29}{30} \end{array}$$

066 En una clase de 4.º ESO hay 30 alumnos. Si la probabilidad de que, elegido un alumno al azar, sea una chica es 0,6; ¿cuántos chicos y chicas hay en la clase? ¿Cuál es la probabilidad de que el alumno elegido sea un chico?

$$P(\text{ser chica}) = \frac{\text{n.º de chicas de clase}}{\text{n.º de alumnos de clase}} = 0,6 \rightarrow \text{Chicas: } 0,6 \cdot 30 = 18$$

$$P(\text{ser chico}) = \frac{12}{30} = 0,4$$

067 Un examen de tipo test consta de 5 preguntas, cada una de las cuales tiene 3 posibles respuestas.

- a) Halla la probabilidad de acertar 3 preguntas si contestas al azar.
 b) Determina la probabilidad de acertar al menos 2 preguntas si contestas al azar.
 c) Si, para aprobar el examen, hay que contestar al menos 3 preguntas correctamente, calcula cuál es la probabilidad de aprobar y de suspender, si contestamos al azar.

Llamamos A = «Acertar una pregunta».

a) Los subgrupos de 3 preguntas que se pueden formar, son:

$$C_{5,3} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$$

Como cada pregunta tiene una probabilidad de $\frac{1}{3}$ de ser acertada:

$$P(A) = \frac{1}{3} \text{ y } P(\bar{A}) = \frac{2}{3}.$$

$$\begin{aligned} P(\text{acertar 3 preguntas}) &= C_{5,3} \cdot P(A \cap A \cap A \cap \bar{A} \cap \bar{A}) = \\ &= \binom{5}{3} \cdot P(A) \cdot P(A) \cdot P(A) \cdot P(\bar{A}) \cdot P(\bar{A}) = \frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 0,16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } P(\text{acertar al menos 2 preguntas}) &= P(\text{acertar 2}) + P(\text{acertar 3}) + \\ &+ P(\text{acertar 4}) + P(\text{acertar 5}) = C_{5,2} \cdot P(A \cap A \cap \bar{A} \cap \bar{A} \cap \bar{A}) + \\ &+ C_{5,3} \cdot P(A \cap A \cap A \cap \bar{A} \cap \bar{A}) + C_{5,4} \cdot P(A \cap A \cap A \cap A \cap \bar{A}) + \\ &+ C_{5,5} \cdot P(A \cap A \cap A \cap A \cap A) = \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \\ &+ \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \binom{5}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) + \binom{5}{5} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{131}{243} = 0,54 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } P(\text{aprobar}) &= P(\text{acertar 3}) + P(\text{acertar 4}) + P(\text{acertar 5}) = \\ &= P(\text{acertar al menos 2}) - P(\text{acertar 2}) = \frac{131}{243} - \frac{80}{243} = \frac{51}{243} = 0,21 \\ P(\text{suspender}) &= 1 - 0,21 = 0,79 \end{aligned}$$

Probabilidad

068



Paula va a una tienda de complementos 2 veces por semana, y Roberto trabaja en esa tienda 4 días cada semana. Si el viernes no acude ninguno de los dos y la tienda cierra los domingos, ¿qué probabilidad tienen de coincidir?

Si el día fijado es viernes o domingo, la probabilidad será cero, pues en esos días ninguno de los dos va a la tienda.

En cualquier otro día, por ejemplo, el martes, sucede que:

$$P(\text{Roberto vaya el martes}) = \frac{4}{5} \text{ y } P(\text{Paula vaya el martes}) = \frac{2}{5}$$

La probabilidad de que vayan ambos es la probabilidad de la intersección, y como los dos sucesos son independientes, es el producto:

$$P(R \cap P) = P(R) \cdot P(P) = \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{8}{25}$$

069



Indica un experimento donde todos los sucesos sean elementales.

El experimento es el lanzamiento de una moneda.

Su espacio muestral está formado por dos sucesos: «Salir cara» y «Salir cruz».

En este caso, el suceso no elemental es el suceso seguro.

070



¿Cuántos sucesos relacionados con un experimento tienen probabilidad 1? ¿Y cuántos sucesos tienen probabilidad 0?

Tienen probabilidad 1 todos los sucesos que siempre ocurren, y tienen probabilidad 0 todos los sucesos que nunca pueden ocurrir.

Los primeros sucesos contienen el espacio muestral y los segundos sucesos no contienen ningún suceso elemental.

Por ejemplo, consideremos el experimento consistente en lanzar un dado y anotar la puntuación obtenida.

El suceso «Salir puntuación menor o igual que 6» es seguro, y también lo es «Obtener una puntuación menor que 8».

Por otro lado, el suceso «Obtener un número menor que 0» es imposible, y también lo es «Obtener puntuación negativa».

071



Tengo 3 llaves que abren las 3 cerraduras de una puerta, pero no sé cuál es la llave que abre cada cerradura.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que acierte con la combinación a la primera oportunidad?

b) ¿Y si tuviera 3 llaves y solo 2 cerraduras? (Una de las llaves no abre ninguna cerradura.)

a) El número de casos posibles es: $P_3 = 3! = 6$

$$P(\text{acertar}) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{1}{6}$$

b) Con dos cerraduras, el número de casos posibles es: $V_{3,2} = 6$

Luego la probabilidad de acertar a la primera es igual en ambos apartados.

072

Partimos al azar una barra de 1 metro de longitud en 3 trozos.

¿Cuál es la probabilidad de que podamos formar un triángulo con los 3 trozos?

Se podrá formar un triángulo cuando el lado mayor sea menor que la unión de los otros dos, o cuando el lado mayor mida menos de 0,5 m.

Como es el lado mayor, mide más de $\frac{1}{3}$ m.

A: medir menos de 0,5 m.

B: medir más de $\frac{1}{3}$ m.

$$\text{La probabilidad es: } P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{4}$$

073

En una comarca, cuando un caso judicial no era fácil de resolver, se ofrecía a los procesados otra oportunidad.

Se entregaban al reo 100 bolas verdes, 100 bolas rojas y dos urnas. A continuación, el reo distribuía las 200 bolas en las urnas. Después, este elegía al azar una urna y sacaba una bola de su interior. En el caso de que la bola fuera verde se salvaba.

Si tú fueras el procesado, ¿cómo distribuirías las bolas para que la probabilidad de salvarte fuera la mayor posible?



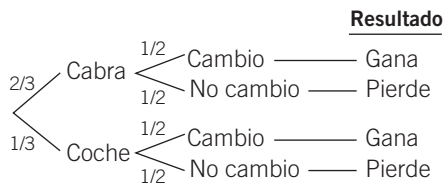
La opción para que la probabilidad de salvarse sea mayor es que en una urna se ponga una bola verde, y en la otra urna, las demás bolas.

La probabilidad de sacar bola verde es:

$$\begin{aligned} P(\text{verde}) &= P(\text{verde} \cap \text{urna 1}) + P(\text{verde} \cap \text{urna 2}) = \\ &= P(\text{verde/urna 1}) \cdot P(\text{urna 1}) + P(\text{verde/urna 2}) \cdot P(\text{urna 2}) = \\ &= 1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{99}{199} \cdot \frac{1}{2} = \frac{149}{199} \end{aligned}$$

074

En un concurso televisivo, el presentador enseña al concursante tres puertas cerradas, en las cuales hay un coche y dos cabras. El concursante elige una puerta y el presentador abre una de las otras puertas y aparece una cabra. Entonces, le pregunta al concursante si quiere cambiar su respuesta. ¿Qué debería hacer el concursante?



$$P(\text{coche/cambio}) = \frac{P(\text{coche} \cap \text{cambio})}{P(\text{cambio})} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

El concursante debería cambiar.

EN LA VIDA COTIDIANA

075



En los periódicos ha salido publicada esta noticia.

En la noticia se cuenta que había un total de 165.432 jóvenes que entraban en el sorteo, de los cuales 16.442 jóvenes conseguirían vivienda.



Una vez numeradas todas las personas, había que elegir al azar un número y a partir de este, correlativamente, se nombrarían las 16.442 personas que obtendrían vivienda.



Los encargados de realizar el sorteo colocaron seis bombos. Todos ellos contenían diez bolas numeradas del 0 al 9, salvo en el caso de las centenas de millar, que estaba formado por cinco bolas con el número 0 y otras cinco bolas con el número 1.



Tras la extracción de las bolas, el número agraciado fue el número 155.611 y, a partir de él, se nombró a los elegidos llegando al final y empezando desde el principio.

¿Crees que es cierta la noticia?

Antes de asignar los números a las personas, todas tienen la misma probabilidad, pero una vez asignados tienen mayor probabilidad de salir los números mayores de 100.000, ya que en el primer bombo hay una proporción de 5 a 1 bolas 1 frente a bolas 0. Por tanto, la noticia es cierta.

076

A Roberto se le ha ocurrido que una manera correcta de hacer sorteos, como el de la actividad anterior, puede ser utilizando una tabla de números aleatorios.

Es una lista de números elegidos entre estos dígitos:
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9.



Observa la siguiente tabla de números aleatorios, que en realidad forma parte de una tabla mayor.

91274	87824	04137	77579	54266	38762
23393	37710	46457	03883	58275	11138
18521	59667	00980	75632	88008	10060
48563	31874	90785	78923	46611	39389
98036	25351	88031	72020	13873	03121
56644	79453	49072	30594	73185	81691

Ahora solo falta decidir por dónde empezar. Para ello, podemos tirar dos dados, de los cuales el primero indicará la fila, y el segundo, la columna, y comenzamos a buscar el número.

El primer número válido de 5 cifras será el elegido.

Si sale, por ejemplo, 3 y 2, indicaría que la búsqueda comienza en fila 3, columna 2: 59667.



Si saliera, por ejemplo, el número 00980 la persona que ganaría sería la que tuviera el número 980 y todas las siguientes hasta completar las 16.442 personas.

Como asegura Roberto, ¿tienen todas las personas la misma probabilidad de ser elegidas?

No tienen la misma probabilidad, ya que las personas que tengan un número menor que 998, y las personas que tengan un número mayor que: $98.036 + 16.442 = 104.447$, nunca obtendrán la vivienda, y la probabilidad de que les toque la vivienda es nula.

Dirección de arte: **José Crespo**

Proyecto gráfico:

Portada: **CARRIÓ/SÁNCHEZ/LACASTA**

Interiores: **Manuel García, Rosa Barriga**

Ilustración: **Estudio Haciendo el león, Bartolomé Seguí, José María Valera**

Jefa de proyecto: **Rosa Marín**

Coordinación de ilustración: **Carlos Aguilera**

Jefe de desarrollo de proyecto: **Javier Tejeda**

Desarrollo gráfico: **José Luis García, Raúl de Andrés**

Dirección técnica: **Ángel García Encinar**

Coordinación técnica: **Félix Rotella**

Confección y montaje: **MonoComp, S. A., Luis González**

Corrección: **Marta Rubio, Gerardo Z. García**

Documentación y selección fotográfica: **Nieves Marinas**

Fotografías: A. Toril; Algar; C. Jiménez; D. Lezama; E. Morales; F. de Madariaga; J. Escandell.com; J. Jaime; J. V. Resino; P. Esgueva; T. Arias; A. G. E. FOTOSTOCK; COMSTOCK; COVER; DIGITALVISION; EFE/SIPA-PRESS/G. Elkaim; EFE/SIPA-PRESS/OCEAN IMAGES; FOTONONSTOP; HIGHRES PRESS STOCK/AbleStock.com; I. Preysler; JOHN FOXX IMAGES; NASA/NASA, ESA and A. Schaller (for STScI); PHOTODISC; STUDIO TEMPO/J. Sánchez; FUJITSU/SIEMENS; MATTON-BILD; MUSÉE RODIN; SERIDEC PHOTOIMAGENES CD/DigitalVision; ARCHIVO SANTILLANA

© 2008 by Santillana Educación, S. L.

Torrelaguna, 60. 28043 Madrid

PRINTED IN SPAIN

Impreso en España por

ISBN: 978-84-294-0955-0

CP: 829555

Depósito legal:

Queda prohibida, salvo excepción prevista en la ley, cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública y transformación de esta obra sin contar con la autorización de los titulares de la propiedad intelectual. La infracción de los derechos mencionados puede ser constitutiva de delito contra la propiedad intelectual (artículos 270 y siguientes del Código Penal).