EJERCICIOS

Múltiplos y divisores

1.51. Escribe 5 múltiplos de cada uno de los números.

a) 35 **b) 19** **c) 40** **d) 22**

a) 35, 70, 105, 140, 175

b) 19, 36, 57, 76, 95

c) 40, 80, 120, 160, 200

d) 22, 44, 66, 88, 110

1.52. Halla todos los divisores de:

a) 28 **c) 63** **e) 18** **g) 91**

b) 150 **d) 24** **f) 60** **h) 100**

a) 1, 2, 4, 7, 14, 28

b) 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 25, 30, 75, 150

c) 1, 3, 7, 9, 31, 63

d) 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24

e) 1, 2, 3, 6, 9, 18

f) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60

g) 1, 91

h) 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100

1.53. Responde a las siguientes preguntas, razonando tu respuesta.

a) ¿Es 45 múltiplo de 405?

b) ¿Es 32 múltiplo de 80?

c) ¿Es 18 divisor de 9?

d) ¿Es 24 divisor de 144?

a) No, porque no se puede obtener multiplicando 405 por un número natural.

b) No, porque no se puede obtener multiplicando 80 por un número natural.

c) No, porque la división de 9 entre 18 no es exacta.

d) Sí, porque la división de 144 entre 24 es exacta.

1.54. Indica cuáles de los siguientes números son primos y cuáles compuestos.

a) 567	**c) 397**	**e) 611**
b) 121	**d) 539**	**f) 241**

a) 567 es divisible por 3. Por tanto, es compuesto.

b) Es compuesto porque es divisible por 11.

c) Es primo puesto que:

```
3 9 7 |2         3 9 7 |3         3 9 7 |5       3 9 7 |7       3 9 7 |1 1
1 9     1 9 8    0 9     1 3 2      4 7  7 9       4 7  5 6       6 7  3 6
  1 7              0 7                2              5              1
    1                1

3 9 7 |1 3       3 9 7 |1 7       3 9 7 |1 9     3 9 7 |2 3
  0 7  3 0       1 5 7  2 9       0 1 7  2 0     1 6 7  1 7
                   0 4                             0 6
```

d) Es compuesto porque es divisible por 7.

```
5 3 9 |2         5 3 9 |3         5 3 9 |5         5 3 9 |7
1 3     2 6 9    2 3     1 7 9    0 3 9  1 0 7       4 9  7 7
  1 9              2 9                4                0
    1                2
```

e) Es compuesto porque es divisible por 13.

```
6 1 1 |2         6 1 1 |3         6 1 1 |5         6 1 1 |7
0 1 1  3 0 5     0 1 1  2 0 3     1 1     1 2 1      5 1  8 7
    1                2              1 1                2
                                      1

6 1 1 |1 1       6 1 1 |1 3
0 6 1  5 5         9 1  4 7
    6              0 0
```

f) Es primo.

```
2 4 1 |2         2 4 1 |3         2 4 1 |5         2 4 1 |7
0 4     1 2 0      0 1  8 0         4 1  4 8         3 1  3 4
  0 1                                 1                3

2 4 1 |1 1       2 4 1 |1 3       2 4 1 |1 7
  2 1  2 1       1 1 1  1 8         7 1  1 4
  1 0              0 7                3
```

1.55. Encuentra todos los números primos entre 100 y 125.

101	~~102~~	103	~~104~~	~~105~~	~~106~~	107	~~108~~	109	~~110~~
~~111~~	~~112~~	113	~~114~~	~~115~~	~~116~~	~~117~~	~~118~~	~~119~~	~~120~~
~~121~~	~~122~~	~~123~~	~~124~~	~~125~~					

Se quitarán los números pares, aquellos que al sumar las cifras dé un múltiplo de 3 porque son divisibles por 3, los múltiplos de 4, los de 5, los de 7…

Todos los números que no están tachados son los primos entre 100 y 125: 101, 103, 107, 109 y 113.

1.56. Razona si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. En este caso, pon un ejemplo que lo demuestre.

a) Los múltiplos de un número son mayores o iguales que él.

b) Todos los números primos son impares .

c) No existe ningún número compuesto que sea impar.

d) Si un número *a* es divisor de *b*, *b* es múltiplo de *a*.

a) Verdadera, porque los múltiplos de un número se obtienen multiplicando este por un número natural y, por tanto, si se multiplica por 1, es igual que el número, y si se multiplica por otro, resultará otro mayor que él.

b) Verdadera, porque cualquier número par es divisible por 2.

c) Falsa, porque 9 es divisible por 1, 3 y 9, y, por tanto, compuesto.

d) Verdadera, porque si a es divisor de b, $b = a \cdot c$ (c es natural). Entonces, b se obtiene multiplicando a por un número natural, c, y, en consecuencia, es un múltiplo de a.

Divisibilidad. Descomposición factorial

1.57. Sin hacer la división, estudia cuáles de los siguientes números son divisibles por 4, 6 y 9.

a) 216	**c) 312**	**e) 992**
b) 600	**d) 854**	**f) 414**

a) Es divisible por 4 porque sus dos últimas cifras lo son.

Es divisible por 6 por serlo por 2 y 3.

Y por 9 porque la suma de sus cifras es múltiplo de 9.

b) Es múltiplo de 4 y 6.

c) Es múltiplo de 4 y 6.

d) No es múltiplo de ninguno de los tres números.

e) Es múltiplo de 4.

f) Es múltiplo de 6 y 9.

1.58. Escribe un número que sea a la vez divisible por:

a) 2 y 3	**b) 2 y 5**	**c) 3 y 7**

Respuesta abierta. Se puede elegir el producto de los dos números o cualquier otro múltiplo de este. Por ejemplo:

a) 12	b) 30	c) 21

1.59. Los números que son divisibles por 4, ¿lo son también por 2?

¿Los divisibles por 3 son también lo son por 9?

Razona tus respuestas.

Los números divisibles por 4 también lo son por 2 porque terminan en 0 o en par.

Los divisibles por 3 no siempre lo son de 9. Por ejemplo, 6.

1.60. Halla el valor de *a* para que el número 243*a* sea:

a) Divisible por 3, pero no por 5.

b) Divisible por 2, pero no por 3.

c) Divisible por 11.

a) La suma de las cifras debe ser múltiplo de 3 y, a la vez, *a* no puede ser ni 0 ni 5. Como la suma de las cifras es 9 + *a*, para que sea múltiplo de 3, *a* debe ser 3, 6 o 9.

b) Para que sea divisible por 2, *a* debe ser 0 o un par. Y para que no sea múltiplo de 3, la suma de las cifras no debe serlo. Entonces, *a* debe ser 0, 2, 4 u 8.

c) Para que sea divisible por 11, la suma de las cifras pares y de las impares debe resultar en diferencia 0 o un múltiplo de 11. En este caso resultará 0 tomando como *a* el valor 1.

1.61. Halla los números cuya descomposición factorial es:

a) $5 \cdot 7^2$ **c)** $2^2 \cdot 3^3$ **e)** $2 \cdot 5 \cdot 11$

b) $3^3 \cdot 5^2$ **d)** $3 \cdot 11^2$ **f)** $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$

a) $5 \cdot 7^2 = 245$ c) $2^2 \cdot 3^3 = 108$ e) $2 \cdot 5 \cdot 11 = 110$

b) $3^3 \cdot 5^2 = 225$ d) $3 \cdot 11^2 = 363$ f) $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 = 720$

1.62. Calcula la descomposición en factores primos de:

a) 375 **c) 648** **e) 700**

b) 1485 **d) 726** **f) 1600**

a) $375 = 3 \cdot 5^3$ c) $648 = 2^3 \cdot 34$ e) $700 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7$

b) $1485 = 3^3 \cdot 5 \cdot 11$ d) $726 = 2 \cdot 3 \cdot 11^2$ f) $1600 = 2^6 \cdot 5^2$

Máximo común divisor y mínimo común múltiplo

1.63. Calcula el máximo común divisor de:

a) 45 y 63 **c) 28, 42 y 99** **e) 126, 56 y 84**

b) 75 y 625 **d) 60, 300 y 180** **f) 46, 33 y 115**

a) m.c.d.(45, 63) = 32 = 9

b) m.c.d.(75, 625) = 52 = 25

c) m.c.d.(28, 42, 99) = 1

d) m.c.d.(60, 300, 180) = 22 · 3 · 5 = 60

e) m.c.d.(126, 56, 84) = 2 · 7 = 14

f) m.c.d.(46, 33, 115) = 1

1.64. Halla el mínimo común múltiplo de:

a) 243 y 270 **c) 220 y 189** **e) 375 y 150**

b) 72 y 360 **d) 90 y 144** **f) 156 y 95**

a) m.c.m.(243, 270) = $2 \cdot 3^5 \cdot 5 = 2430$

b) m.c.m.(72, 360) = $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 720$

c) m.c.m.(220, 189) = $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 31 = 9\,147\,600$

d) m.c.m.(90, 144) = $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 = 720$

e) m.c.m.(375, 150) = $2 \cdot 3 \cdot 5^3 = 750$

f) m.c.m.(156, 95) = 22 · 3 · 5 · 13 · 19 = 14 820

1.94. Alicia suele ir a la biblioteca de su barrio cada 18 días y Ángel, cada 12. El pasado 8 de junio coincidieron allí. ¿Cuánto tiempo como mínimo ha de pasar para que vuelvan a coincidir otra vez? ¿Qué día será?

Volverán a coincidir cuando el número de días transcurrido coincida con el primer múltiplo común a 18 y 12.

m.c.m.(18, 12) = $2^2 \cdot 3^2 = 36$

Han de pasar como mínimo 36 días para que coincidan de nuevo.

Eso será el 14 de julio.

1.95. Se quieren poner en cajas 24 bombones de naranja, 30 de trufa y 36 de almendras de modo que en cada caja halla el mismo número de cada uno de ellos y que se utilice el menor número de cajas.

¿Cuántos bombones hay que poner en cada caja? ¿Cuántas cajas se necesitarán?

Para que el número de cajas sea el menor posible, es necesario poner en cada una de ellas el mayor número de bombones. Este es el m.c.d.(24, 30 y 36).

m.c.d.(24, 30 y 36) = $2 \cdot 3 = 6$ bombones ha de haber en cada caja.

Se necesitarían: 24 : 6 = 4 cajas de bombones de naranja

30 : 6 = 5 cajas de bombones de trufa

36 : 6 = 6 cajas de bombones de almendras

1.96. Carlos y Laura son atletas y entrenan todos los días en la pista de un polideportivo. Carlos tarda 2,4 minutos en dar una vuelta completa a la pista y Laura 3 minutos.

Si empiezan su entrenamiento a las 7 de la tarde y toman juntos la salida, ¿a qué hora volverán a juntarse en ese mismo punto?

2,4 min = $2{,}4 \cdot 60 = 144$ segundos

3 min = $3 \cdot 60 = 180$ segundos

Se juntarán por primera vez cuando hayan pasado los segundos que coinciden con el m.c.m.(144, 180).

m.c.m.(144, 180) = $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 = 720$ s = 12 min

Se volverán a juntar después de 12 minutos, a las 7 h 12 min.

1.97. Juan tiene un montón de fotos de sus vacaciones. Cuándo le preguntas cuántas tiene, te contesta: "Si hago montones de 11 fotos me sobran 5, y si hago montones de 23 me sobran 3".

¿Cuál es el menor número de fotos que puede tener Juan en total?

	De 11 fotos		**De 23 fotos**	
Nº de montones	N.º fotos/montón	Total fotos	N.º fotos/montón	Total fotos
1	11	16	23	26
2	22	27	46	49
3	33	38		
4	44	49		

En total puede tener 49 fotos. Si hace montones de 11 fotos, hará 4 y le sobrarán 5, y si los hace de 23, hará 2 y le sobrarán 3.

1.71. Escribe el símbolo < o > entre los números siguientes.

a) **6 y – 5**
b) **7 y 18**
c) **–9 y 0**
d) **3 y 0**
e) **–12 y –4**
f) **–6 y 15**

a) 6 > – 5
b) 7 < 18
c) –9 < 0
d) 3 > 0
e) –12 < –4
f) –6 < 15

1.72. Halla el opuesto y el valor absoluto de los números.

a) **14** **b)** **–32** **c)** **22** **d)** **–15**

a) op(14) = –14 |14| = 14
b) op(–32) = 32 |–32| = 32
c) op(22) = 22 |22| = 22
d) op(–15) = 15 |–15| = 15

1.73. Calcula:

a) **|op(–13)|**
b) **op[op(–5)]**
c) **|op(4)| + op(–2)**
d) **–op|–8|**
e) **|op|7||**
f) **op(–6) + |–9|**

a) |op(–13)| = 13
b) op[op(–5)] = –5
c) |op(4)| + op(–2) = 4 + 2 = 6
d) –op|–8| = 8
e) |op|7|| = 7
f) op(–6) + |–9| = 6 + 9 = 15

1.74. Escribe todos los números enteros que están entre:

a) **–8 y su opuesto**
b) **op(10) y |–4|**
c) **–7 y su valor absoluto**
d) **9 y el valor absoluto de su opuesto**

a) –7, –6, –5, –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
b) –9, –8, –7, –6, –5, –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3
c) –7, –6, –5, –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6
d) El valor absoluto del opuesto de 9 es 9. No hay ningún número entre 9 y él mismo.

1.75. Copia en tu cuaderno y escribe un número o uno de los símbolos “<” o “>” en los espacios en blanco.

a) **– 7 < □ < –5**
b) **–2 □ –1 □ 0**
c) **3 □ 6 < 9**
d) **–1 □ □ < 1**

a) – 7 < –6 < –5
b) –2 ≤ –1 ≤ 0
c) 3 ≤ 6 < 9
d) –1 ≤ 0 < 1

Operaciones con números enteros

1.76. Haz las siguientes sumas y restas con números enteros.

a)	**2 + 5 – 8**	**e)**	**–15 – 3 – 2**
b)	**18 – 5 + 9 – 3**	**f)**	**–6 + 8 + 2 – 1**
c)	**–4 – 7 – 6 + 1**	**g)**	**7 + 6 + 3 – 12**
d)	**3 + 5 – 4 – 2**	**h)**	**9 – 1 – 8**
a)	2 + 5 – 8 = –1	e)	–15 – 3 – 2 = –20
b)	18 – 5 + 9 – 3 = 19	f)	–6 + 8 + 2 – 1 = 3
c)	–4 – 7 – 6 + 1 = –16	g)	7 + 6 + 3 – 12 = 4
d)	3 + 5 – 4 – 2 = 2	h)	9 – 1 – 8 = 0

1.77. Halla el resultado de las siguientes multiplicaciones y divisiones.

a)	**7 · (–2) · 5**	**d)**	**–81 : 3 : (–9)**
b)	**–4 · 8 · 3**	**e)**	**12 · (–3) : (–6)**
c)	**–2 · (–6) · (–5)**	**f)**	**50 : (–2) : (–5)**
a)	7 · (–2) · 5 = –70	d)	–81 : 3 : (–9) = 3
b)	–4 · 8 · 3 = –96	e)	12 · (–3) : (–6) = 6
c)	–2 · (–6) · (–5) = –120	f)	50 : (–2) : (–5) = 5

1.78. a) Qué número hay que sumar a 7 para obtener –4? ¿Y a –2 para que dé 12?

b) ¿Qué número hay que restar a 0 para que dé 3? ¿Y a 3 para obtener –9?

a) –11, 14

b) –3, 12

1.79. a) ¿Por qué número hay que multiplicar –9 para que dé 63? ¿Y para obtener –36?

b) ¿Qué número dividido entre 5 da –2?

c) ¿Por qué número hay que dividir 24 para obtener –8?

a) –7, 4

b) –10

c) –3

1.84. Halla el resultado de las operaciones siguientes resolviendo primero los paréntesis.

a) $5 \cdot (-3 + 6 \cdot 2) - 24 : (-3)$

b) $8 \cdot (-2 - 1) + 27 : (-5 - 4)$

c) $-(7 + 2 \cdot 4) - 45 : (-9 + 6)$

d) $9 \cdot 2 - [6 - 4 \cdot (-3)]$

e) $(7 - 3) \cdot (4 + 2) - 8 \cdot 3$

a) $5 \cdot (-3 + 6 \cdot 2) - 24 : (-3) = 5 \cdot 9 + 8 = 45 + 8 = 53$

b) $8 \cdot (-2 - 1) + 27 : (-5 - 4) = 8 \cdot (-3) + 27 : (-9) = -24 - 3 = -27$

c) $-(7 + 2 \cdot 4) - 45 : (-9 + 6) = -15 - 45 : (-3) = -15 + 15 = 0$

d) $9 \cdot 2 - [6 - 4 \cdot (-3)] = 18 - (6 + 12) = 18 - 18 = 0$

e) $(7 - 3) \cdot (4 + 2) - 8 \cdot 3 = 4 \cdot 6 - 24 = 24 - 24 = 0$

1.85. Realiza las siguientes operaciones combinadas con y sin paréntesis.

a) $9 : (-2 - 1) - [5 \cdot (3 - 1) - 7 \cdot 4]$

b) $-3 \cdot [9 + 6 : (-2)] + 5 \cdot 9$

c) $(-2 \cdot 6 + 9) : 3 + 7 \cdot (-4 + 2)$

d) $12 : (-4) \cdot 6 - 13 \cdot 8 : (-4)$

e) $(5 + 18 : (-2) + 3) - [15 : (8 - 5) + 6]$

a) $9 : (-2 - 1) - [5 \cdot (3 - 1) - 7 \cdot 4] = 9 : (-3) - (10 - 28) = -3 + 18 = 15$

b) $-3 \cdot [9 + 6 : (-2)] + 5 \cdot 9 = -3 \cdot (9 - 4) + 45 = -15 + 45 = 30$

c) $(-2 \cdot 6 + 9) : 3 + 7 \cdot (-4 + 2) = -3 - 14 = -17$

d) $12 : (-4) \cdot 6 - 13 \cdot 8 : (-4) = -18 + 26 = 8$

e) $(5 + 18 : (-2) + 3) - [15 : (8 - 5) + 6] = -1 - 11 = -12$

1.86. Calcula:

a) $27 : [9 + 4 \cdot (-3)] - 8 \cdot (6 - 15 : 5)$

b) $5 \cdot [3 - 2 \cdot (6 + 5) + 4 \cdot 7] - 16 : (-2)$

c) $7 + 12 : (-4) + 15 \cdot (-1 + 5) : 10$

d) $8 \cdot (7 + 3) : (-1 - 4) + 36 : 9$

e) $(15 + 6) : (-7) + 18 : (-5 - 4) - 3 \cdot 2$

f) $12 + 3 \cdot (-6) - 4 : (-2) \cdot (-9) + 7 \cdot 4$

a) $27 : [9 + 4 \cdot (-3)] - 8 \cdot (6 - 15 : 5) = 27 : (-3) - 8 \cdot 3 = -9 - 24 = -33$

b) $5 \cdot [3 - 2 \cdot (6 + 5) + 4 \cdot 7] - 16 : (-2) = 5 \cdot (3 - 2 \cdot 11 + 28) = 5 \cdot (3 - 22 + 28) = 5 \cdot 9 = 45$

c) $7 + 12 : (-4) + 15 \cdot (-1 + 5) : 10 = 7 - 3 + 60 : 10 = 7 - 3 + 6 = 10$

d) $8 \cdot (7 + 3) : (-1 - 4) + 36 : 9 = 8 \cdot 10 : (-5) + 4 = 80 : (-5) + 4 = -16 + 4 = -12$

e) $(15 + 6) : (-7) + 18 : (-5 - 4) - 3 \cdot 2 = 21 : (-7) + 18 : (-9) - 6 = -3 - 2 - 6 = -11$

f) $12 + 3 \cdot (-6) - 4 : (-2) \cdot (-9) + 7 \cdot 4 = 12 - 18 + 2 \cdot (-9) + 28 = 12 - 18 - 18 + 28 = 4$

PROBLEMAS

1.87. La civilización griega comprende tres períodos: Arcaico, que duró de 776 a 500 a. C.; Clásico, de 500 a 323 a. C., y Helenístico, de 323 a 146 a. C. Expresa con números enteros cada una de las fechas anteriores y calcula después cuánto duró la civilización griega.

Arcaico: de –776 a –500

Clásico: de –500 a –323

Helenístico: de –323 a –146

Duración: –146 – (–776) = 630 años

1.88. Juan participó en el juego de subir a la cucaña de las fiestas de su pueblo.

El palo tiene una altura de 6 metros. Subió 3 metros, pero se resbaló y bajó 2; continuó 1 metro, descansó y luego trepó 3 más; volvió a resbalar y cayó 2 metros; y, por fin, en el último tramo, consiguió llegar arriba y coger el premio.

a) ¿Cuántos metros subió en el último tramo?

b) Halla el número de metros totales que recorrió en la cucaña.

c) ¿Cuántos metros más de los que mide el palo recorrió Juan?

a) El número de metros que subió y bajó antes de recorrer el último tramo fue:

+3 + (–2) + 1 + 3 + (–2) = 3 m

En el último tramo subió: 6 – 3 = 3 m.

b) En total recorrió: |+3| + |–2| + |+1| + |+3| + |–2| = 11 m.

c) 11 – 6 = 5 m más de los que tiene el palo ha recorrido.

1.89. Un buceador profesional descendió 40 metros en una primera inmersión. Subió a la superficie para recoger su cámara de fotos y descendió de nuevo 50 metros para hacer unas fotos y luego bajó 20 metros más. Al ascender de nuevo, subió primero 45 metros, y después, el resto.

a) ¿Cuántos metros le quedaban por subir al final?

b) Escribe con números enteros cada uno de los movimientos de descenso y ascenso del buceador.

c) Calcula los metros totales que bajó y subió.

a) Había descendido: 50 + 20 = 70 metros.

Le quedan por subir: 70 – 45 = 25 metros.

Primera inmersión: –40

b) Sube para recoger la cámara de fotos: +40.

Desciende de nuevo: –50.

Y por último desciende otra vez: –20.

Sube: +45.

Termina el ascenso: +25.

c) En total bajó: –40 + (–50) + (–20) = –110.

En total subió: +40 + (+45) + (25) = +110.

1.90. En una cuenta de ahorros aparecen los siguientes registros.

Expresa cada cantidad con el entero correspondiente.

Si la cantidad que había antes de estos movimientos era de 3800 euros, ¿cuánto habrá después de ellos?

a) Debe: –37

Haber: +250

Haber: +1364

Debe: –167

b) Después de estos movimientos habría: 3800 + (–37) + 250 + 1364 + (–67) = 5210 €.

1.91. En el transporte de agua con un camión cisterna de 150 litros hasta un poblado africano, se han perdido 54 litros por una grieta muy pequeña que no se había detectado.

a) Suponiendo que la cantidad de agua perdida hubiera sido la misma en cada kilómetro y sabiendo que el camión recorrió 9 kilómetros, ¿cuántos litros por kilómetro se habrían perdido? Utiliza números enteros para expresar cada una de las cantidades.

b) Si cada persona recibía 2 litros de agua, ¿cuántas personas se quedarían sin agua?

a) –54 : 9 = –6 Se perdieron 6 litros por kilómetro.

b) 54 : 2 = 27 Se quedarían sin agua 27 personas.

1.92. La temperatura de un lugar descendió entre las 22 h y las 4 h del día siguiente 2 ºC cada hora.

a) Utilizando los números enteros, calcula cuántos grados bajó la temperatura en ese tiempo.

b) Si a las 22 h había 3 ºC, ¿qué temperatura había a las 4 h?

a) En total han pasado: 24 – 22 + 4 – 0 = 6 horas.

La temperatura en ese tiempo descendió: 2 · 6 = 12 grados.

b) 3 + (–12) = –9

Había 9 ºC bajo cero a las 4 h.

1.93. En un huerto hay plantadas 210 plantas de tomate a lo largo y 100 plantas a lo ancho. Se quiere dividir el huerto en parcelas cuadradas de forma que haya el máximo número de tomateras en cada parcela.

a) ¿Cuántas tomateras habrá en cada parcela?

b) ¿Cuántas parcelas se conseguirán?

a) m.c.d.(210, 100) = 10

Se harán parcelas cuadradas con 10 tomateras en cada lado. Por tanto, habrá 100 tomateras en cada parcela.

b) Como hay 210 · 100 = 21 000 tomateras y en cada parcela habrá 100, se conseguirán en total 21 000 : 100 = 210 parcelas.

EJERCICIOS

Potencias

2.37. Expresa de forma reducida.

a) $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9$ **c)** $(-13) \cdot (-13) \cdot (-13) \cdot (-13) \cdot (-13)$

b) $(-6) \cdot (-6) \cdot (-6) \cdot (-6)$ **d)** $25 \cdot 25 \cdot 25$

a) $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 9^7$ c) $(-13) \cdot (-13) \cdot (-13) \cdot (-13) \cdot (-13) = (-13)^5$

b) $(-6) \cdot (-6) \cdot (-6) \cdot (-6) = (-6)^4$ d) $25 \cdot 25 \cdot 25 = 25^3$

2.38. Desarrolla las siguientes potencias y calcula su resultado.

a) $(-7)^3$ **c)** $(-5)^4$ **e)** 10^5

b) 4^6 **d)** $(-2)^5$ **f)** $(-3)^6$

a) $(-7)^3 = (-7) \cdot (-7) \cdot (-7) = -343$

b) $4^6 = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4096$

c) $(-5)^4 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = 625$

d) $(-2)^5 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -32$

e) $10^5 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 100\,000$

f) $(-3)^6 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = 729$

2.39. Sin hallar su valor, indica si son positivas o negativas las siguientes potencias.

a) $(-2)^{15}$ **b)** $(-7)^{24}$ **c)** $(-5)^{63}$ **d)** $(-4)^{36}$

a) Negativa b) Positiva c) Negativa d) Positiva

2.40. Escribe como una potencia cuya base sea un número primo.

a) 729 **c)** 125 **e)** 169

b) 512 **d)** 1331 **f)** 343

a) 3^6 c) 5^3 e) 13^2

b) 2^9 d) 11^3 f) 7^3

2.41. Explica si son correctas o no las siguientes igualdades.

a) $(-4)^5 = 4^5$ **c)** $-9^3 = 9^3$

b) $7^6 = (-7)^6$ **d)** $(-5)^6 = 5^6$

a) No es correcta, el segundo miembro debe ser negativo.

b) Correcta. Si el exponente de una potencia con base negativa es par, el resultado es positivo.

c) No es correcta, el segundo miembro debe ser negativo.

d) Correcta. Si el exponente de una potencia con base negativa es par, el resultado es positivo.

2.46. Escribe en forma de producto de potencias de igual base.

a) 6^{13} **c)** 10^4 **e)** 8^2

b) $(–5)^9$ **d)** $(–2)^1$ **f)** $(–4)^6$

Hay varias soluciones. Una de ellas es:

a) $6^{13} = 6^7 \cdot 6^6$ c) $10^4 = 10 \cdot 10^3$ e) $8^2 = 8 \cdot 8$

b) $(–5)^9 = (–5)^3 \cdot (–5)^6$ d) $(–2)^1 = (–2)^1 \cdot (–2)^0$ f) $(–4)^6 = (–4)^2 \cdot (–4)^4$

2.47. Expresa como una división de potencias de la misma base.

a) 4^3 **c)** $(–3)^5$ **e)** 2^6

b) $(–7)^2$ **d)** 6^3 **f)** $(–5)^0$

Hay varias soluciones. Una de ellas es:

a) $4^3 = 4^5 : 4^2$ c) $(–3)^5 = (–3)^8 : (–3)^3$ e) $2^6 = 2^7 : 2$

b) $(–7)^2 = (–7)^3 : (–7)$ d) $6^3 = 6^7 : 6^4$ f) $(–5)^0 = (–5)^4 : (–5)^4$

2.48. Escribe como potencia de una potencia.

a) 7^{10} **c)** 5^{21} **e)** $(–2)^{15}$

b) $(–3)^6$ **d)** 11^{16} **f)** $(–6)^9$

Puede haber varias soluciones. Una de ellas es:

a) $7^{10} = \left(7^5\right)^2$ c) $5^{21} = \left(5^3\right)^7$ e) $(–2)^{15} = \left[(–2)^5\right]^3$

b) $(–3)^6 = \left[(–3)^2\right]^3$ d) $11^{16} = \left(11^4\right)^4$ f) $(–6)^9 = \left[(–6)^3\right]^3$

2.49. (TIC) Descompón las bases en factores primos y después realiza las operaciones con potencias que se obtienen.

a) 8^{35}

b) 9^{21}

c) 16^{20}

d) 625^8

e) $343^4 \cdot 49$

f) $125^7 : 25$

g) $18^6 \cdot 6$

h) $243^5 \cdot 9^2$

i) $42^3 \cdot 14^4$

a) $8^{35} = \left(2^3\right)^{35} = 2^{105}$

b) $9^{21} = \left(3^2\right)^{21} = 3^{42}$

c) $16^{20} = \left(2^4\right)^{20} = 2^{80}$

d) $625^8 = \left(5^4\right)^8 = 5^{32}$

e) $343^4 \cdot 49 = \left(7^3\right)^4 \cdot 7^2 = 7^{14}$

f) $125^7 : 25 = \left(5^3\right)^7 : 5^2 = 2^{19}$

g) $18^6 \cdot 6 = (2 \cdot 3^2)^6 \cdot 2 \cdot 3 = 2^7 \cdot 3^{13}$

h) $243^5 \cdot 9^2 = \left(3^5\right)^5 \cdot \left(3^2\right)^2 = 3^{29}$

i) $42^3 \cdot 14^4 = (2 \cdot 3 \cdot 7)^3 \cdot (2 \cdot 7)^4 = 2^7 \cdot 3^3 \cdot 7^7$

Jerarquía de las operaciones

2.62. (TIC) Realiza las operaciones sin paréntesis en el orden correcto.

a) $7^2 - 2^3 \cdot \sqrt{36} + 18 : (-2)$

b) $5 \cdot 3^2 + \sqrt{100} : 2 - (-3)^2$

c) $186 : (-6) - \sqrt{25} \cdot (-2)^2 + 6 \cdot 4$

d) $(-3)^4 : \sqrt{9} \cdot 5 - 18 \cdot 4 : (-2)^3$

e) $36 \cdot \sqrt{4} : 3^2 - 40 : \sqrt{16} : (-5)$

f) $\sqrt{64} \cdot (-4)^2 : (-1)^5 + 38 : (-2) + 3 \cdot 5^2$

a) $7^2 - 2^3 \cdot \sqrt{36} + 18 : (-2) = 49 - 8 \cdot 6 - 9 = 49 - 48 - 9 = -8$

b) $5 \cdot 3^2 + \sqrt{100} : 2 - (-3)^2 = 5 \cdot 9 + 10 : 2 - 9 = 45 + 5 - 9 = 41$

c) $186 : (-6) - \sqrt{25} \cdot (-2)^2 + 6 \cdot 4 = -31 - 5 \cdot 4 + 24 = -27$

d) $(-3)^4 : \sqrt{9} \cdot 5 - 18 \cdot 4 : (-2)^3 = 81 : 3 \cdot 5 - 72 : (-8) = 135 + 9 = 144$

e) $36 \cdot \sqrt{4} : 3^2 - 40 : \sqrt{16} : (-5) = 36 \cdot 2 : 9 - 40 : 4 : (-5) = 8 + 2 = 10$

f) $\sqrt{64} \cdot (-4)^2 : (-1)^5 + 38 : (-2) + 3 \cdot 5^2 = 8 \cdot 16 : (-1) - 19 + 3 \cdot 25 = -128 - 19 + 75 = -72$

2.63. (TIC) Calcula el resultado de las siguientes operaciones con paréntesis.

a) $6 \cdot (4 - 1)^2 + 9 : (2 + 1)^2 - (4 + \sqrt{16} : 2)$

b) $3 \cdot [7 - 5 \cdot (2 - 6) \cdot \sqrt{4}] - (7 - 3)^3$

c) $54 : (-3)^2 + 12 \cdot (\sqrt{25} - 2)$

d) $(1 - 4 \cdot 2) \cdot \sqrt{49} - (-3)^3$

e) $75 : (-5)^2 - [3 \cdot 8 - 7 \cdot \sqrt{9}]$

f) $(4 + 2)^2 + 2 \cdot [28 : (-2)^2 \cdot 5 - 6 \cdot \sqrt{64}]$

a) $6 \cdot (4 - 1)^2 + 9 : (2 + 1)^2 - (4 + \sqrt{16} : 2) = 6 \cdot 9 + 9 : 9 - (4 + 2) = 54 + 1 - 6 = 49$

b) $3 \cdot [7 - 5 \cdot (2 - 6) \cdot \sqrt{4}] - (7 - 3)^3 = 3 \cdot [7 - 5 \cdot (-4) \cdot 2] - 64 = 3 \cdot 47 - 64 = 141 - 64 = 77$

c) $54 : (-3)^2 + 12 \cdot (\sqrt{25} - 2) = 54 : 9 + 12 \cdot (5 - 2) = 6 + 36 = 42$

d) $(1 - 4 \cdot 2) \cdot \sqrt{49} - (-3)^3 = -7 \cdot 7 - (-27) = -49 + 27 = -22$

e) $75 : (-5)^2 - [3 \cdot 8 - 7 \cdot \sqrt{9}] = 75 : 25 - [24 - 21] = 3 - 3 = 0$

f) $(4 + 2)^2 + 2 \cdot [28 : (-2)^2 \cdot 5 - 6 \cdot \sqrt{64}] = 36 + 2 \cdot (28 : 4 \cdot 5 - 6 \cdot 8) =$

$= 36 + 2 \cdot (35 - 48) = 36 - 26 = 10$

2.64. Comprueba si son verdaderas o falsas las igualdades.

a) $\sqrt{9 \cdot 4} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{4}$

b) $(5 + 3)^2 = 5^2 + 3^2$

c) $\sqrt{144 + 25} = \sqrt{144} + \sqrt{25}$

d) $\sqrt{100 : 4} = \sqrt{100} : \sqrt{4}$

a) $\sqrt{9 \cdot 4} = \sqrt{36} = 6$

$\sqrt{9} \cdot \sqrt{4} = 3 \cdot 2 = 6$

Por tanto, es verdadera.

b) $(5 + 3)^2 = 8^2 = 64$

$5^2 + 3^2 = 25 + 9 = 34$

Es falsa.

c) $\sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13$

$\sqrt{144} + \sqrt{25} = 12 + 5 = 17$

Es falsa.

d) $\sqrt{100 : 4} = \sqrt{25} = 5$

$\sqrt{100} : \sqrt{4} = 10 : 2 = 5$

Es verdadera.

2.65. (TIC) Calcula.

a) $\mathbf{4 \cdot (6 - 5 \cdot 2)^2 + 32 : 2^3}$

b) $\mathbf{8 : (-1 - 3) + \sqrt{4+5} - 3^2 \cdot (4 + 2)}$

c) $\mathbf{(-4)^3 : (\sqrt{25} - 2) + 7 \cdot [8 \cdot (-3)^3 : (-2)^3 + 1]}$

d) $\mathbf{(6 - 15 : 3) (\sqrt{9-5} \cdot 6 : 3 - 7)}$

e) $\mathbf{216 : (-2)^3 - 4 \cdot [8 \cdot (-3^2) - 9 \cdot (4 - \sqrt{16})]}$

f) $\mathbf{-2 \cdot (6 + 2)^2 + (-5)^3 : (2 \cdot 3 - 1) + \sqrt{100} \cdot (-3)^3}$

a) $4 \cdot (6 - 5 \cdot 2)^2 + 32 : 2^3 = 4 \cdot (-4)^2 + 32 : 8 = 64 + 4 = 68$

b) $8 : (-1 - 3) + \sqrt{4+5} - 3^2 \cdot (4 + 2) = 8 : (-4) + 3 - 9 \cdot 6 = -2 + 3 - 54 = -53$

c) $(-4)^3 : (\sqrt{25} - 3) + 7 \cdot [8 \cdot (-3)^3 : (-2)^3 + 1] = -64 : 2 + 7 \cdot [8 \cdot (-27) : (-8) + 1] =$
$= -32 + 7 \cdot (-26) = -32 - 182 = -214$

d) $(6 - 15 : 3) \cdot (\sqrt{9-5} \cdot 6 : 3 - 7) = (6 - 5) \cdot (2 \cdot 6 : 3 - 7) = -3$

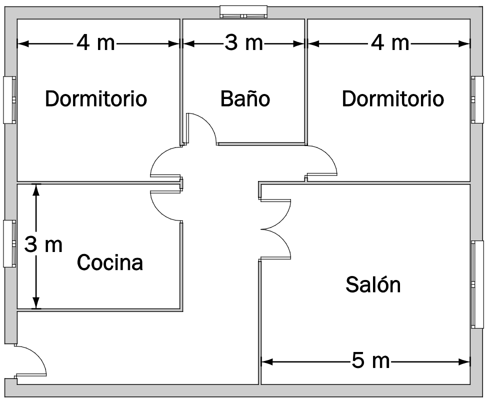
e) $216 : (-2)^3 - 4 \cdot [8 \cdot (-3^2) - 9 \cdot (4 - \sqrt{16})] = 216 : (-8) - 4 \cdot [8 \cdot (-9) - 9 \cdot 0] = -27 + 288 = 261$

f) $-2 \cdot (6 + 2)^2 + (-5)^3 : (2 \cdot 3 - 1) + \sqrt{100} \cdot (-3)^3 = -2 \cdot 64 - 125 : 5 + 10 \cdot (-27) =$
$= -128 - 25 - 270 = -423$

PROBLEMAS

2.66. La casa de Laura tiene un salón, dos dormitorios, un baño y la cocina. Todos los compartimentos tienen forma cuadrada, excepto la cocina, que es rectangular.

En el dibujo se observa cómo es y las medidas de cada estancia.



a) Expresa con operaciones combinadas cómo se puede obtener la medida de la superficie que ocupan entre todas las habitaciones de la casa.

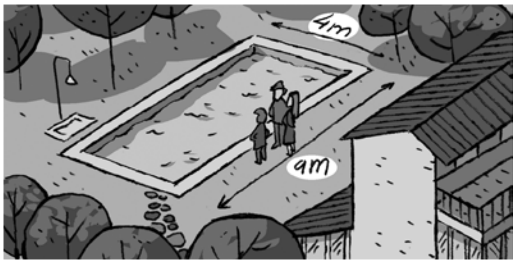
b) Calcula esa área.

a) $5^2 + 4^2 + 3^2 + 4^2 + 4 \cdot 3$

b) $25 + 16 + 9 + 16 + 12 = 78$ m^2

2.67. Los padres de Javier quieren construir una piscina en su parcela. Javier quiere que tenga forma rectangular de 9 m de largo y 4 m de ancho, y sus padres prefieren que sea cuadrada y que ocupe la misma superficie. ¿Es posible?

¿Cuánto mediría el lado de la piscina cuadrada?



La superficie que ocupa la piscina es de $9 \cdot 4 = 36$ m^2.

Si l es el lado de la piscina cuadrada, su área debe ser también 36.

Por tanto, $l^2 = 36 \Rightarrow l = \sqrt{36} = 6$

Se podría construir una piscina cuadrada con la misma superficie. Su lado debe ser de 6 m.

2.68. (TIC) En una clase de 2.º de ESO quieren dibujar un árbol en el que representar a lo largo del curso 50 momentos importantes de la historia de las distintas asignaturas.

El número de ramas que parten del tronco debe ser igual que el de las que parten de cada una de ellas. Sobre estas últimas se colocará uno de los 50 hechos importantes. ¿Es matemáticamente posible dibujar el árbol?

¿Cuántas ramas deben salir del tronco? ¿Y de cada una de ellas?

Si del árbol parten x ramas, y de cada una de estas, otras x, en total habrá x^2 ramas en el árbol.

Estas deben ser 50 para que en cada una de ellas se escriba uno de los hechos históricos.

Por tanto, $x^2 = 50 \Rightarrow x = \sqrt{50}$

Como la raíz cuadrada de 50 no es exacta, nos tendremos que conformar con colocar sólo 49 hechos importantes.

2.69. (TIC) Una persona les ha contado un secreto a otras tres. A la hora siguiente, cada una de ellas lo ha contado a tres personas más, y otra hora más tarde, cada una de estas lo ha contado a otras tres nuevas personas.

En la tabla siguiente aparece la cantidad de personas que conocen el secreto durante cada nueva hora que pasa. Cópiala y complétala en tu cuaderno.

Horas	N.º de personas
1	**3**
2	$\mathbf{3^2}$
3	3^3
4	3^4
6	$\mathbf{3^6}$

a) ¿Cuántas personas más lo conocerán durante la 8.ª hora?

b) Si el secreto hubiera empezado a difundirse a las tres de la tarde, ¿cuántas personas en total lo conocerían a las siete de la tarde?

c) ¿Cómo se expresaría en forma de potencia de base 3 el número de personas que conocían el secreto antes de empezar a contarlo?

a) 3^8 personas

b) Como habrían pasado 4 horas, lo conocerían $1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 = 121$ personas.

c) Lo conocía una persona: $1 = 3^0$.

2.70. Pablo quiere saber cuántos bisabuelos y tatarabuelos tiene. Para ello está construyendo un árbol genealógico en el que aparecen sus padres, los padres de sus padres y así sucesivamente hasta llegar a sus tatarabuelos.

a) ¿Cuántos bisabuelos tiene? ¿Cuántos tatarabuelos?

b) ¿Se pueden expresar esas cantidades en forma de potencia?

a) 8 bisabuelos y 16 tatarabuelos

b) $8 = 2^3$ y $16 = 2^4$

EJERCICIOS

Fracciones

3.49. Halla el valor que falta para que las fracciones sean equivalentes.

a) $\frac{12}{30} = \frac{x}{60}$ **c)** $\frac{x}{4} = \frac{18}{6}$

b) $\frac{8}{x} = \frac{20}{15}$ **d)** $\frac{36}{50} = \frac{54}{x}$

a) $x = \frac{60 \cdot 12}{30} = 24$ c) $x = \frac{4 \cdot 18}{6} = 12$

b) $x = \frac{8 \cdot 15}{20} = 6$ d) $x = \frac{50 \cdot 54}{36} = 75$

3.50. (TIC) Obtén 5 fracciones equivalentes por ampliación a cada una de las siguientes.

a) $\frac{9}{16}$ **c)** $\frac{11}{15}$ **e)** $\frac{10}{7}$

b) $\frac{8}{6}$ **d)** $\frac{12}{9}$ **f)** $\frac{10}{14}$

a) $\frac{9}{16} = \frac{18}{32} = \frac{27}{48} = \frac{36}{64} = \frac{45}{80} = \frac{54}{96}$

b) $\frac{8}{6} = \frac{16}{12} = \frac{24}{18} = \frac{32}{24} = \frac{40}{30} = \frac{48}{36}$

c) $\frac{11}{15} = \frac{22}{30} = \frac{33}{45} = \frac{44}{60} = \frac{55}{75} = \frac{66}{90}$

d) $\frac{12}{9} = \frac{24}{18} = \frac{36}{27} = \frac{48}{36} = \frac{60}{45} = \frac{72}{54}$

e) $\frac{10}{7} = \frac{20}{14} = \frac{30}{21} = \frac{40}{28} = \frac{50}{35} = \frac{60}{42}$

f) $\frac{10}{14} = \frac{20}{28} = \frac{30}{42} = \frac{40}{56} = \frac{50}{70} = \frac{60}{84}$

3.51. (TIC) Simplifica.

a) $\frac{72}{58}$ **c)** $\frac{135}{90}$ **e)** $\frac{300}{180}$

b) $\frac{64}{96}$ **d)** $\frac{39}{78}$ **f)** $\frac{140}{60}$

a) $\frac{72}{58} = \frac{36}{29}$ c) $\frac{135}{90} = \frac{3}{2}$ e) $\frac{300}{180} = \frac{5}{3}$

b) $\frac{64}{96} = \frac{2}{3}$ d) $\frac{39}{78} = \frac{1}{2}$ f) $\frac{140}{60} = \frac{7}{3}$

3.52. Halla una fracción equivalente a:

a) $\frac{18}{34}$ **con numerador igual a 9.**

b) $\frac{36}{24}$ **con denominador igual a 4.**

c) $\frac{40}{35}$ **con denominador igual a 21.**

d) $\frac{64}{56}$ **con numerador igual a 24.**

a) $\frac{18}{34} = \frac{9}{17}$

b) $\frac{36}{24} = \frac{6}{4}$

c) $\frac{40}{35} = \frac{8}{7} = \frac{24}{21}$

d) $\frac{64}{56} = \frac{8}{7} = \frac{24}{21}$

3.53. Reduce a denominador común.

a) $\frac{5}{12}, \frac{13}{8}, \frac{7}{9}$ **y** $\frac{3}{6}$

b) $\frac{4}{25}, \frac{7}{15}, \frac{8}{45}$ **y** $\frac{12}{30}$

a) $\frac{5}{12} = \frac{30}{72}, \frac{13}{8} = \frac{117}{72}, \frac{7}{9} = \frac{56}{72}$ y $\frac{3}{6} = \frac{36}{72}$

b) $\frac{4}{25} = \frac{72}{450}, \frac{7}{15} = \frac{210}{450}, \frac{8}{45} = \frac{80}{450}$ y $\frac{12}{30} = \frac{180}{450}$

3.54. Copia y completa en tu cuaderno el signo $<$ o $>$ según corresponda.

a) $\frac{5}{9} \square \frac{7}{9}$

b) $\frac{8}{6} \square \frac{8}{5}$

c) $\frac{17}{8} \square \frac{17}{15}$

d) $\frac{13}{20} \square \frac{9}{20}$

a) $\frac{5}{9} < \frac{7}{9}$

b) $\frac{8}{6} < \frac{8}{5}$

c) $\frac{17}{8} > \frac{17}{15}$

d) $\frac{13}{20} > \frac{9}{20}$

3.55. Ordena de menor a mayor:

a) $\frac{6}{13}, \frac{10}{13}, \frac{4}{13}, \frac{17}{13}$

b) $\frac{7}{3}, \frac{7}{8}, \frac{7}{15}, \frac{7}{4}$

c) $\frac{1}{8}, \frac{5}{6}, \frac{7}{4}, \frac{9}{16}$

d) $\frac{4}{35}, \frac{9}{7}, \frac{1}{15}, \frac{9}{21}$

a) $\frac{4}{13} < \frac{6}{13} < \frac{10}{13} < \frac{17}{13}$

b) $\frac{7}{15} < \frac{7}{8} < \frac{7}{4} < \frac{7}{3}$

c) $\frac{1}{8} = \frac{6}{48}, \frac{5}{6} = \frac{40}{48}, \frac{7}{4} = \frac{84}{48}$ y $\frac{9}{16} = \frac{27}{48} \Rightarrow \frac{1}{8} < \frac{9}{16} < \frac{5}{6} < \frac{7}{4}$

d) $\frac{4}{35} = \frac{12}{105}, \frac{9}{7} = \frac{135}{105}, \frac{1}{15} = \frac{7}{105}$ y $\frac{9}{21} = \frac{45}{105} \Rightarrow \frac{1}{15} < \frac{4}{35} < \frac{9}{21} < \frac{9}{7}$

Operaciones con fracciones

3.56. (TIC) Calcula las siguientes sumas y restas.

a) $\frac{12}{5} + \frac{8}{5} - \frac{6}{5}$

b) $\frac{7}{38} - \frac{4}{38} - \frac{1}{38}$

c) $\frac{9}{12} - \frac{7}{12} + \frac{5}{12}$

d) $\frac{8}{15} - \frac{2}{5} + \frac{1}{3}$

e) $\frac{10}{18} + \frac{5}{9} - \frac{1}{2}$

f) $7 - \frac{15}{6} + \frac{1}{3} - \frac{4}{9}$

g) $\frac{46}{20} - \frac{5}{8} - \frac{3}{10}$

h) $\frac{18}{5} - 2 + \frac{6}{9} + \frac{1}{6}$

a) $\frac{12}{5} + \frac{8}{5} - \frac{6}{5} = \frac{14}{5}$

b) $\frac{7}{38} - \frac{4}{38} - \frac{1}{38} = \frac{2}{38}$

c) $\frac{9}{12} - \frac{7}{12} + \frac{5}{12} = \frac{7}{12}$

d) $\frac{8}{15} - \frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{8}{15} - \frac{6}{15} + \frac{5}{15} = \frac{7}{15}$

e) $\frac{10}{18} + \frac{5}{9} - \frac{1}{2} = \frac{10}{18} + \frac{10}{18} - \frac{9}{18} = \frac{11}{18}$

f) $7 - \frac{15}{6} + \frac{1}{3} - \frac{4}{9} = \frac{126}{18} - \frac{45}{18} + \frac{6}{18} - \frac{8}{18} = \frac{79}{18}$

g) $\frac{46}{20} - \frac{5}{8} - \frac{3}{10} = \frac{92}{40} - \frac{25}{40} - \frac{12}{40} = \frac{55}{40} = \frac{11}{8}$

h) $\frac{18}{5} - 2 + \frac{6}{9} + \frac{1}{6} = \frac{972}{270} - \frac{540}{270} + \frac{180}{270} + \frac{45}{270} = \frac{657}{270} = \frac{73}{30}$

3.57. (TIC) Halla el resultado de las siguientes multiplicaciones y divisiones.

a) $\frac{7}{8}\cdot\frac{10}{14}\cdot\frac{3}{5}$

b) $\frac{12}{25}\cdot\frac{15}{18}\cdot\frac{1}{2}$

c) $\frac{3}{4}:\frac{5}{6}:\frac{8}{9}$

d) $\frac{9}{16}\cdot\frac{13}{8}:\frac{3}{28}$

e) $\frac{2}{15}:\frac{4}{25}\cdot\frac{5}{6}$

f) $\frac{1}{10}:6:\frac{12}{9}$

a) $\frac{7}{8}\cdot\frac{10}{14}\cdot\frac{3}{5}=\frac{3}{8}$

b) $\frac{12}{25}\cdot\frac{15}{18}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{5}$

c) $\frac{3}{4}:\frac{5}{6}:\frac{8}{9}=\frac{9}{10}:\frac{8}{9}=\frac{81}{80}$

d) $\frac{9}{16}\cdot\frac{13}{8}:\frac{3}{28}=\frac{117}{128}:\frac{3}{28}=\frac{117\cdot 28}{128\cdot 3}=\frac{819}{96}$

e) $\frac{2}{15}:\frac{4}{25}\cdot\frac{5}{6}=\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{25}{36}$

f) $\frac{1}{10}:6:\frac{12}{9}=\frac{1}{60}:\frac{12}{9}=\frac{1}{80}$

3.58. (TIC) Obtén el resultado de estas potencias y raíces.

a) $\left(\frac{5}{4}\right)^3$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^8$

c) $\sqrt{\frac{100}{9}}$

d) $\left(\frac{6}{7}\right)^2$

e) $\sqrt{\frac{49}{81}}$

f) $\sqrt{\frac{25}{225}}$

a) $\left(\frac{5}{4}\right)^3=\frac{5^3}{4^3}=\frac{125}{64}$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^8=\frac{1^8}{2^8}=\frac{1}{256}$

c) $\sqrt{\frac{100}{9}}=\frac{10}{3}$

d) $\left(\frac{6}{7}\right)^2=\frac{6^2}{7^2}=\frac{36}{49}$

e) $\sqrt{\frac{49}{81}}=\frac{7}{9}$

f) $\sqrt{\frac{25}{225}}=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$

3.59. Escribe en forma de potencia:

a) $\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{7}$

b) $\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{8}$

a) $\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{7} = \left(\frac{1}{7}\right)^5$

b) $\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{8} = \left(\frac{3}{8}\right)^3$

3.60. ¿A qué número hay que elevar $\frac{2}{5}$ para obtener $\frac{8}{125}$?

A 3.

3.61. La raíz cuadrada de una fracción es $\frac{3}{8}$. ¿De qué fracción se trata?

$\left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{9}{64}$

3.62. (TIC) Expresa en una sola potencia.

a) $\left(\frac{7}{5}\right)^9 : \left(\frac{7}{5}\right)^4$

b) $\left(\frac{1}{6}\right)^{16}\cdot\left[\left(\frac{1}{6}\right)^5\right]^2$

c) $\left(\frac{8}{3}\right)^{12}\cdot\left(\frac{18}{6}\right)^{12}$

d) $\left[\left(\frac{3}{4}\right)^2\right]^6 : \left(\frac{3}{4}\right)^8$

e) $\left(\frac{2}{9}\right)^7 : \left(\frac{4}{3}\right)^7$

f) $\left(\frac{9}{8}\right)^6\cdot\left(\frac{9}{8}\right)^5 : \left(\frac{9}{8}\right)^{10}$

a) $\left(\frac{7}{5}\right)^9 : \left(\frac{7}{5}\right)^4 = \left(\frac{7}{5}\right)^5$

b) $\left(\frac{1}{6}\right)^{16}\cdot\left[\left(\frac{1}{6}\right)^5\right]^2 = \left(\frac{1}{6}\right)^{26}$

c) $\left(\frac{8}{3}\right)^{12}\cdot\left(\frac{18}{6}\right)^{12} = \left(\frac{8}{3}\cdot\frac{18}{6}\right)^{12} = 8^{12}$

d) $\left[\left(\frac{3}{4}\right)^2\right]^6 : \left(\frac{3}{4}\right)^8 = \left(\frac{3}{4}\right)^4$

e) $\left(\frac{2}{9}\right)^7 : \left(\frac{4}{3}\right)^7 = \left(\frac{2}{9}:\frac{4}{3}\right)^7 = \left(\frac{1}{6}\right)^7$

f) $\left(\frac{9}{8}\right)^6\cdot\left(\frac{9}{8}\right)^5 : \left(\frac{9}{8}\right)^{10} = \left(\frac{9}{8}\right)^1 = \frac{9}{8}$

3.63. ¿Qué fracción elevada al cuadrado da $\frac{169}{144}$?

$\sqrt{\frac{169}{144}} = \frac{13}{12}$

3.64. Expresa con exponente positivo.

a) 9^{-4} **c)** 5^{-6} **e)** 3^{-5}

b) 2^{-8} **d)** 6^{-3} **f)** 10^{-7}

a) $\frac{1}{9^4}$ c) $\frac{1}{5^6}$ e) $\frac{1}{3^5}$

b) $\frac{1}{2^8}$ d) $\frac{1}{6^3}$ f) $\frac{1}{10^7}$

3.65. Calcula.

a) $(-4)^{-5}$ **c)** 8^{-5} **e)** $(-7)^{-4}$

b) 12^{-2} **d)** $(-2)^{-6}$ **f)** $(-3)^{3}$

a) $\frac{1}{(-4)^5} = -\frac{1}{1024}$

b) $\frac{1}{12^2} = \frac{1}{144}$

c) $\frac{1}{8^5} = \frac{1}{32768}$

d) $\frac{1}{(-2)^6} = \frac{1}{64}$

e) $\frac{1}{(-7)^4} = \frac{1}{2401}$

f) $\frac{1}{(-3)^3} = -\frac{1}{27}$

3.66. Expresa como potencias de exponente positivo.

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$ **c)** $\left(\frac{5}{7}\right)^{-4}$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}$ **d)** $\left(\frac{-3}{2}\right)^{-4}$

a) $\left(\frac{3}{2}\right)^{2}$ c) $\left(\frac{7}{5}\right)^{4}$

b) 2^5 d) $\left(\frac{-2}{3}\right)^{4}$

3.67. Copia y completa en tu cuaderno los exponentes que faltan en las siguientes igualdades.

a) $\frac{1}{9^{-5}} = 9^{\square}$

b) $(-5)^{11} = -5^{\square}$

c) $(-10)^{\square} = 10^{6}$

d) $-\frac{1}{4^{7}} = (-4)^{\square}$

a) $\frac{1}{9^{-5}} = 9^{5}$

b) $(-5)^{11} = -5^{11}$

c) $(-10)^{6} = 10^{6}$

d) $-\frac{1}{4^{7}} = (-4)^{-7}$

3.68. (TIC) Opera y simplifica:

a) $\frac{1}{9}+\frac{3}{9}\cdot\frac{7}{4}-\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{6}$

b) $\frac{1}{2^{-2}}-\frac{6}{4}:\frac{3}{2}:\frac{1}{3}+\left(\frac{3}{4}\right)^{2}$

c) $\frac{9}{16}-\sqrt{\frac{25}{4}}+\frac{7}{2}\cdot\frac{8}{3}-\frac{5}{4}:3^{-1}$

d) $\frac{5}{8}-\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{9}+\left(\frac{3}{2}\right)^{2}:\frac{4}{6}-1$

e) $\frac{17}{2}+\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^{-2}-6\cdot\sqrt{\frac{1}{4}}+2$

a) $\frac{1}{9}+\frac{3}{9}\cdot\frac{7}{4}-\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{6} = \frac{1}{9}+\frac{21}{36}-\frac{5}{12}=\frac{4}{36}+\frac{21}{36}-\frac{15}{36}=\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$

b) $\frac{1}{2^{-2}}-\frac{6}{4}:\frac{3}{2}:\frac{1}{3}+\left(\frac{3}{4}\right)^{2} = 4-3+\frac{9}{16}=\frac{64}{16}-\frac{48}{16}+\frac{9}{16}=\frac{25}{16}$

c) $\frac{9}{16}-\sqrt{\frac{25}{4}}+\frac{7}{2}\cdot\frac{8}{3}-\frac{5}{4}:3^{-1} = \frac{9}{16}-\frac{5}{2}+\frac{28}{3}-\frac{15}{4}=\frac{27}{48}-\frac{120}{48}+\frac{448}{48}-\frac{180}{48}=\frac{175}{48}$

d) $\frac{5}{8}-\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{9}+\left(\frac{3}{2}\right)^{2}:\frac{4}{6}-1 = \frac{5}{8}-\frac{1}{24}+\frac{9}{4}:\frac{4}{6}-1= \frac{5}{8}-\frac{1}{24}+\frac{27}{8}-1=\frac{15}{24}-\frac{1}{24}+\frac{81}{24}-\frac{24}{24}=\frac{71}{24}$

e) $\frac{17}{2}+\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^{-2}-6\cdot\sqrt{\frac{1}{4}}+2 = \frac{17}{2}+\frac{27}{50}-3+2=\frac{425}{50}+\frac{27}{50}-\frac{150}{50}+\frac{100}{50}=\frac{402}{50}=\frac{201}{25}$

3.69. (TIC) Calcula:

a) $4-2^{-2}\cdot\left(\frac{5}{9}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)+\frac{4}{6}\cdot\left(3-\frac{4}{3}\right)$

b) $\frac{5}{12}+\frac{1}{3}\cdot\left[2-\left(\frac{3}{5}+\frac{4}{6}\right)\right]-\left(\frac{1}{2}\right)^2$

c) $\frac{8}{5}-\frac{1}{5}:\left[2-\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{1}{5}+1\right)\right]+\sqrt{\frac{9}{16}}$

d) $\left(\frac{9}{8}-\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{5}{2}+2\right)\cdot\left(1-\frac{3}{4}\right)$

e) $\sqrt{\frac{81}{16}}-1+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)^2+\left[\left(1+\frac{5}{8}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\right]^{-2}$

a) $4-2^{-2}\cdot\left(\frac{5}{9}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)+\frac{4}{6}\cdot\left(3-\frac{4}{3}\right) = 4-\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{10}{18}+\frac{6}{18}-\frac{9}{18}\right)+\frac{4}{6}\cdot\left(\frac{9}{3}-\frac{4}{3}\right) = 4-\frac{1}{4}\cdot\frac{7}{18}+\frac{4}{6}\cdot\frac{5}{3} =$

$= 4-\frac{7}{72}+\frac{10}{9}=\frac{288}{72}-\frac{7}{72}+\frac{80}{72}=\frac{361}{72}$

b) $\frac{5}{12}+\frac{1}{3}\cdot\left[2-\left(\frac{3}{5}+\frac{4}{6}\right)\right]-\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{12}+\frac{1}{3}\cdot\left[2-\left(\frac{18}{30}+\frac{20}{30}\right)\right]-\frac{1}{4} = \frac{5}{12}+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{60}{30}-\frac{38}{30}\right)-\frac{1}{4} =$

$= \frac{5}{12}+\frac{1}{3}\cdot\frac{22}{30}-\frac{1}{4} = \frac{5}{12}+\frac{11}{45}-\frac{1}{4} = \frac{75}{180}+\frac{44}{180}-\frac{45}{180} = \frac{74}{180}=\frac{37}{90}$

c) $\frac{8}{5}-\frac{1}{5}:\left[2-\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{1}{5}+1\right)\right]+\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{8}{5}-\frac{1}{5}:\left[2-16\cdot\frac{6}{5}\right]+\frac{3}{4} = \frac{8}{5}-\frac{1}{5}:\left(2-\frac{96}{5}\right)+\frac{3}{4} =$

$=\frac{8}{5}-\frac{1}{5}:\left(-\frac{86}{5}\right)+\frac{3}{4} = \frac{8}{5}+\frac{1}{86}+\frac{3}{4} = \frac{1376}{860}+\frac{10}{860}+\frac{645}{860} = \frac{2031}{860}$

d) $\left(\frac{9}{8}-\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{5}{2}+2\right)\cdot\left(1-\frac{3}{4}\right) = \left(\frac{7}{8}\right)^2+\frac{9}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{49}{64}+\frac{9}{8} = \frac{49}{64}+\frac{72}{64} = \frac{121}{64}$

e) $\sqrt{\frac{81}{16}}-1+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)^2+\left[\left(1+\frac{5}{8}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\right]^{-2} = \frac{9}{4}-1+\left(\frac{1}{6}\right)^2+\left[\frac{13}{8}\cdot\frac{2}{3}\right]^{-2} = \frac{9}{4}-1+\frac{1}{36}+\left[\frac{12}{13}\right]^2 =$

$= \frac{9}{4}-1+\frac{1}{36}+\frac{144}{169} = \frac{13689}{6084}-\frac{6084}{6084}+\frac{169}{6084}+\frac{5184}{6084} = \frac{12958}{6084}=\frac{6479}{3042}$

PROBLEMAS

3.80. En España, el tipo de fuente de energía utilizada se reparte de la siguiente forma:

Carbón, $\frac{71}{500}$; petróleo, $\frac{252}{500}$; gas natural, $\frac{43}{200}$; nuclear, $\frac{111}{1000}$; renovables, $\frac{29}{1000}$.

Ordena de mayor a menor el tipo de energía que utilizan los españoles.

$\frac{71}{500}=\frac{142}{1000}$ $\quad$ $\frac{252}{500}=\frac{504}{1000}$ $\quad$ $\frac{43}{200}=\frac{215}{1000}$ $\quad$ $\frac{111}{1000}$ $\quad$ $\frac{29}{1000}$

$$\frac{252}{500} > \frac{43}{200} > \frac{71}{500} > \frac{111}{1000} > \frac{29}{1000}$$

3.81. El famoso buscador Google recibe ese nombre por un error en la escritura de la palabra gúgol. Un gúgol equivale a:

10 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000

¿Cuál es su expresión en notación científica?

10^{100}

3.82. A un escultor le quedó una cuarta parte de una barra de hierro de un trabajo anterior.

Quería un trozo pequeño, de modo que cortó $\frac{1}{4}$ de $\frac{1}{4}$ de la cuarta parte del trozo que tenía.

a) ¿Qué fracción de la barra total representa el último trozo cortado?

b) Si la barra medía inicialmente 2,5 metros, ¿qué longitud mide este trozo?

a) $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{256}$

b) $\frac{1}{256}\cdot 250 =$ 0,9765625 cm

3.83. Un electricista ha cortado la mitad de la mitad de la mitad de un cable de cobre. ¿Qué fracción del cable ha cortado?

De lo que queda, utiliza la sexta parte para arreglar una lámpara. ¿Qué trozo de los utilizados es mayor?

$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$ es la fracción que corta.

Queda $1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$.

Para la lámpara utiliza $\frac{1}{6}\cdot\frac{7}{8}=\frac{7}{48}$.

$\frac{1}{8}=\frac{6}{48} \Rightarrow \frac{1}{8}<\frac{7}{48}$

Es mayor el trozo que utiliza para arreglar la lámpara.

3.84. Cada mes, cuando Iván cobra su nómina, separa el dinero de la siguiente forma:

La mitad para el alquiler de la casa, la cuarta parte del resto para la comida, la sexta parte de lo que queda para el transporte, y los tres octavos del resto para otros gastos de la casa.

¿Qué fracción de la nómina le queda para sus gastos propios?

Para el alquiler: $\frac{1}{2} \Rightarrow$ Le queda $\frac{1}{2}$.

Para la comida: $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8} \Rightarrow$ Le quedan $\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$.

Para el transporte: $\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{8}=\frac{1}{16} \Rightarrow$ Le quedan $\frac{3}{8}-\frac{1}{16}=\frac{5}{16}$.

Para otros gastos de la casa: $\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{16}=\frac{15}{128} \Rightarrow$ Le quedan $\frac{5}{16}-\frac{15}{128}=\frac{25}{128}$.

Para sus gastos propios le quedan $\frac{5}{128}$.

3.85. (TIC) La ESA (Agencia Europea del Espacio) quiere construir naves espaciales propulsadas por “velas solares” que utilizan el viento solar. Con ellas se puede alcanzar una velocidad de 360 000 km/h.

Si eso fuera posible, ¿cuánto tiempo se tardaría en llegar de la Tierra al planeta más lejano, Neptuno, que está a 4 500 000 000 km de distancia?

Expresa todos los datos en notación científica y después realiza las operaciones necesarias.

Distancia Tierra-Neptuno: $4{,}5 \cdot 10^9$ km

Velocidad: $3{,}6 \cdot 10^5$ km/h

$t = \frac{4{,}5\cdot 10^9}{3{,}6\cdot 10^5} = 1{,}25 \cdot 10^4 = 12\,500$ h = 520 días 20 h = 1 año 155 días 20 horas

3.86. (TIC) Un camión cisterna transporta agua a zonas de África con sequía.

En la última entrega no observaron que había un agujero por el que se perdió una doceava parte de la capacidad. De lo que quedó, en la primera aldea dejaron $\frac{2}{5}$ partes, y en la segunda, $\frac{3}{4}$ de lo que quedaba. En las dos últimas se repartió lo que quedaba a partes iguales. ¿Qué fracción de la capacidad total dejaron en estas últimas?

En el camión quedan $\frac{11}{12}$.

En la primera aldea dejaron $\frac{2}{5}\cdot\frac{11}{12}=\frac{11}{30} \Rightarrow$ Quedan $\frac{11}{12}-\frac{11}{30}=\frac{33}{60}=\frac{11}{30}$.

En la segunda dejaron $\frac{3}{4}\cdot\frac{11}{30}=\frac{11}{40} \Rightarrow$ Quedan: $\frac{11}{30}-\frac{11}{40}=\frac{11}{120}$.

En cada una de las dos últimas dejaron $\frac{11}{120} : 2 = \frac{11}{240}$.

3.87. (TIC) Un listón de madera se corta por la mitad. Cada uno de los trozos se vuelve a dividir por la mitad, y los trozos que resultan se dividen de nuevo por la mitad. El proceso se repite 6 veces más.

a) Escribe la operación que hay que hacer en cada paso para saber el número de trozos que hay y expresa el resultado en forma de potencia.

b) ¿Con que fracción escribirías la relación entre la longitud inicial del listón y la longitud de uno de los trozos finales?

a)

N.º de pasos	1	2	3	4	5	6	7	8	9
N.º de trozos	2	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9

b) La relación entre longitudes inicial y final viene dada por la fracción $\frac{1}{256}$.

3.88. (TIC) Un año luz es la distancia que recorre la luz en un año. ¿A cuántos kilómetros equivale? (La velocidad de la luz es de 300 000 km/s).

1 año = 365 días = 8760 horas = 31 536 000 segundos

$s = v \cdot t = 300\,000$ km/s $\cdot$ 31 536 000 = $9{,}4608 \cdot 10^{12}$

3.89. El primer día después del Diluvio se escaparon la mitad de los animales del Arca de Noé. Al día siguiente, un tercio de los que quedaban, y el tercer día se escaparon un cuarto de los que aún quedaban. ¿Qué fracción de los animales que había inicialmente permaneció en el Arca?

El primer día quedaron $\frac{1}{2}$.

El segundo se escapan $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$. Y quedaron $\frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

El tercer día se escapan $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$.

En el Arca quedaron $\frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ de los que había inicialmente.

AMPLIACIÓN

3.90. (TIC) Las siguientes fracciones tienen la particularidad de que utilizan todos los dígitos del 1 al 9, sin repetir.

Una de ellas no es $\frac{1}{4}$. ¿Cuál?

a) $\frac{3942}{15768}$

b) $\frac{4392}{17568}$

c) $\frac{5796}{23184}$

d) $\frac{6957}{31248}$

Por simple inspección observamos que $\frac{6957}{31248}$ no es $\frac{1}{4}$, pues $4 \cdot 6957 < 28\,000$. Respuesta correcta: d.

MATEMATICAS. 2ºESO TEMA 3: Números decimales

1º. Escribe con cifras los siguientes números:

a) Treinta y siete unidades y cincuenta y tres milésimas.
b) Dos mil dos unidades y doce centésimas.
c) Un millón ciento cuatro mil treinta y cinco unidades y cincuenta centésimas.

2º. Escribe con palabras los siguientes números decimales:

a) 303’97
b) 1.057’372
c) 3.000.003’003

3º. Observa el número 12.345,6789. Indica qué cifra corresponde a las:

a) Unidades de millar
b) Centenas
c) Décimas
d) Milésimas

4º. ¿Qué número tiene por expresión polinómica $3 \cdot 100 + 5 + 2 \cdot 0{,}1 + 7 \cdot 001$?

5º. Ordena de menor a mayor (“<”) los siguientes números decimales:

a) 5’32, 5’032, 5’4, -3’2, 7’12, -7’123, 7’112, 0’2, 0’1

b) 2’235, 2’523, 2’352, 3’352, 2’23, 2’3, -3’45, -3’6, -4’3

6º. Ordena de mayor a menor (“>”) los siguientes números decimales:

a) 0’24, 81’5, -3’43, 0’5, 0’25, -1’72, 3’45, 3’456, 2’89

b) -1’345, 1’453, -3’415, 1’543, -1’435, 1’5, -1’6, 1’534, -1’345

7º. Las estaturas en metros de 5 alumnos de la clase de 2.º A de un IES son: 1’57, 1’494, 1’496, 1’575 y 1’58. Ordénalos de más alto a más bajo.

8º. Escribe tres números decimales ordenados entre:

a) 2’34 y 2’35
b) –0’275 y –0’274

9º. Escribe y clasifica el número decimal correspondiente a estas fracciones:

a) $\frac{23}{10}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{7}{6}$ d) $\frac{32}{9}$ e) $\frac{9}{100}$ f) $\frac{3}{4}$

10º. Encuentra la fracción decimal correspondiente a los siguientes números decimales exactos:

a) 0’3 b) 0’03 e) 3’003 d) 7’2 e) 32’45 f) –0’0345

11º. Rellena la tabla siguiente teniendo en cuenta el producto por potencias de 10.

	·100	·0’1	·0’001	:100	:0’1	:0’001
72’28						
104’2345						
0’035						

12º. Juan recibe 10 € de paga. Tenía de la semanas pasadas 23’57 €. Gasta 5’75 € en la cena del sábado. Cobra 7’50 € por cortar el césped al vecino y compra dos discos en las rebajas a 1’29 € cada uno. ¿Qué dinero le queda?

13º. Realiza las sumas y restas de números decimales.

a) 32’35 – 0’89 =
b) 81’002 – 45’09 =
c) 4’53 + 0’089 + 3’4 =
d) 4 – 2’95 =
a) 78’089 + 0’067 + 2’765 + 1’89 =

14º. Realiza las multiplicaciones y divisiones de números decimales.

a) 24’5 · 100 = c) 34’25 · 1000 = e) 0’045 · 0’001 = g) 794’2 · 0’01 =

b) 235’45 : 100 = d) 493 : 1000 = f) 30 : 10 = h) 1’84 : 0’01 =

15º. Realiza las multiplicaciones y divisiones de números decimales.

a) 24’5 · 5,65 = b) 34’25 · 87’67 = c) 23’545 : 0’5 = d) 7’943 : 0’14 =

16º. Realiza las siguientes operaciones combinadas:

a) 4’56 + 3 · (7’92 +5’65) = b) 2’1 · (0’5 +1’2 · 3 + 1’8: 3) + 1’7 = c) 3’2 : 100 – 0’1082 =

17º. Laura ha hecho hoy 43’5 kg de pasta y la quiere empaquetar en cajas de 0’250 kg. ¿Cuántas cajas necesita Laura?

18º. En una fábrica de refrescos se preparan 4138’2 litros de refresco de naranja y se envasan en botes de 0’33 l. ¿Cuántos botes se necesitan?

19º. María ha ido al banco a cambiar 45’50 € por dólares. Por cada euro le han dado 0’96 dólares. ¿Cuántos dólares tiene en total?

20º. Completa la tabla dando la aproximación del número 23’6195 utilizando los métodos indicados.

	A las milésimas	A las centésimas	A las décimas	A las unidades
Por truncamiento				
Por redondeo				

21º. Calcula y da el resultado redondeado a las décimas.

a) 254’05 + 107’3
b) 5.409’39 - 1.075’44
c) 12’5 · 157’15
d) 2.002 : 4’27

22º. Estima el resultado de los productos y cocientes siguientes tomando los elementos redondeados a las unidades:
a) 56 · 204’5 = b) 7’25 · 45’975 = c) 376’14 : 185’2375 = d) 16’4 : 25’65=

23º. Calcula mentalmente las raíces exactas de:
a) $\sqrt{64}$ b) $\sqrt{0'25}$ c) $\sqrt{1'44}$ d) $\sqrt{2'25}$ e) $\sqrt{0'0009}$

24º. Usando el algoritmo de la raíz cuadrada, calcula la raíz con un decimal y el resto de las siguientes:
a) $\sqrt{234}$ b) $\sqrt{592}$ c) $\sqrt{3502}$ d) $\sqrt{4096}$ e) $\sqrt{792'3}$

SOLUCIONES

1º. Escribe con cifras los siguientes números:

a) Treinta y siete unidades y cincuenta y tres milésimas. 37’053
b) Dos mil dos unidades y doce centésimas. 2.002’12
c) Un millón ciento cuatro mil treinta y cinco unidades y cincuenta centésimas. 1.104.035’50

2º. Escribe con palabras los siguientes números decimales:

a) 303’97 Trescientas tres unidades y noventa y siete centésimas
b) 1.057’372 Mil cincuenta y siete unidades y trescientas setenta y dos milésimas
c) 3.000.003’003 Tres millones, tres unidades con tres milésimas

3º. Observa el número 12.345,6789. Indica qué cifra corresponde a las:

a) Unidades de millar 2
b) Centenas 3
c) Décimas 6
d) Milésimas 8

4º. ¿Qué número tiene por expresión polinómica 3 · 100 + 5 + 2 · 0,1 + 7 · 001? 305’27

5º. Ordena de menor a mayor (“<”) los siguientes números decimales:

a) 5’32, 5’032, 5’4, -3’2, 7’12, -7’123, 7’112, 0’2, 0’1

-7’123 < -3’2 < 0’1 < 0’2 < 5’032 < 5’32 < 5’4

b) 2’235, 2’523, 2’352, 3’352, 2’23, 2’3, -3’45, -3’6, -4’3
-4’3 < -3’6 < -3’45 < 2’23 < 2’235 < 2’3 < 2’352 < 2’523 < 3’352

6º. Ordena de mayor a menor (“>”) los siguientes números decimales:

a) 0’24, 81’5, -3’43, 0’5, 0’25, -1’72, 3’45, 3’456, 2’89

81’5 > 3’456 > 3’45 > 3’456 > 2’89 > 0’5 > 0’25 > 0’24 > -1’72 > -3’43

b) -1’345, 1’453, -3’415, 1’543, -1’435, 1’5, -1’6, 1’534, -1’345

1’543 > 1’534 > 1’5 > 1’453 > -1’345 > -1’435 > -1’6 > -3’415

7º. Las estaturas en metros de 5 alumnos de la clase de 2.º A de un IES son: 1’57, 1’494, 1’496, 1’575 y 1’58. Ordénalos de más alto a más bajo.
1’58 > 1’575 > 1’57 > 1’496 > 1’494

8º. Escribe tres números decimales ordenados entre:

a) 2’34 y 2’35 2’341 < 2’342 < 2’343
b) –0’275 y –0’274 -0’2744 < -0’2743 < -0’2742

9º. Escribe y clasifica el número decimal correspondiente a estas fracciones:

a) $\frac{23}{10}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{7}{6}$ d) $\frac{32}{9}$ e) $\frac{9}{100}$ f) $\frac{3}{4}$

a) 2’3 b) 0’666… c) 1’1666… d) 3’555… e) 0’09 f) 0’75

Decimal exacto Periódico puro Periódico mixto Periódico puro e) y f) Decimales Exactos

10º. Encuentra la fracción decimal correspondiente a los siguientes números decimales exactos:

a) 0’3 b) 0’03 e) 3’003 d) 7’2 e) 32’45 f) –0’0345

a) 3/10 b) 3/100 e) 3003/1000 d) 72/10 e) 3245/100 f) -345/10000

11º. Rellena la tabla siguiente teniendo en cuenta el producto por potencias de 10.

	·100	·0’1	·0’001	:100	:0’1	:0’001
72’28	7228	722’8	0’07228	0’7228	722’8	72280
104’2345	10423’45	10’42345	0’1042345	1’042345	1042’345	104234'5
0’035	3’5	0’0035	0’000035	0’00035	0’35	35

12º. Juan recibe 10 € de paga. Tenía de la semanas pasadas 23’57 €. Gasta 5’75 € en la cena del sábado. Cobra 7’50 € por cortar el césped al vecino y compra dos discos en las rebajas a 1’29 € cada uno. ¿Qué dinero le queda?
23’57 + 10 - 5’75 + 7’50 – 2 · 1’29 = 32’74 €

13º. Realiza las sumas y restas de números decimales.

a) 32’35 – 0’89 = 31’46
b) 81’002 – 45’09 = 35’912
c) 4’53 + 0’089 + 3’4 = 8’019
d) 4 – 2’95 = 1’05
b) 78’089 + 0’067 + 2’765 + 1’89 = 82’811

14º. Realiza las multiplicaciones y divisiones de números decimales.

a) 24’5 · 100 = 2450 c) 34’25 · 1000 = 34250 e) 0’045 · 0’001 = 0’000045 g) 794’2 · 0’01 = 7’942
b) 235’45 : 100 = 2’3545 d) 493 : 1000 = 0’493 f) 30 : 10 = 3 h) 1’84 : 0’01 = 184

15º. Realiza las multiplicaciones y divisiones de números decimales.

a) 24’5 · 5,65 = 138’425 b) 34’25 · 87’67 = 3002’6975
c) 23’545 : 0’5 = 47’09 d) 7’943 : 0’14 = 56’7357…

16º. Realiza las siguientes operaciones combinadas:

a) 4’56 + 3 · (7’92 +5’65) = 4’56 + 3 · 13’57 = 4’56 + 40’71 = 45’27
b) 2’1 · (0’5 +1’2 · 3 + 1’8: 3) + 1’7 = 2’1·(0’5 + 3’6 + 0’6)+1’7 = 2’1·4’7 + 1’7=9’87 + 1’7=11’57
c) 3’2 : 100 – 0’1082 = 0’032 – 0’1082 = -0’0762

17º. Laura ha hecho hoy 43’5 kg de pasta y la quiere empaquetar en cajas de 0’250 kg. ¿Cuántas cajas necesita Laura?
43’5 : 0’250 = 174 cajas

18º. En una fábrica de refrescos se preparan 4138’2 litros de refresco de naranja y se envasan en botes de 0’33 l. ¿Cuántos botes se necesitan?
4138’2 : 0’33 = 12.540 botes

19º. María ha ido al banco a cambiar 45’50 € por dólares. Por cada euro le han dado 0’96 dólares. ¿Cuántos dólares tiene en total?
45’5 · 0’96 = 43’68 dólares

20º. Completa la tabla dando la aproximación del número 23’6195 utilizando los métodos indicados.

	A las milésimas	A las centésimas	A las décimas	A las unidades
Por truncamiento	23’619	23’61	23’6	23
Por redondeo	23’62	23’62	23’6	24

21º. Calcula y da el resultado redondeado a las décimas.

a) 254’05 + 107’3 = 361’35 aprox 361’4
b) 5.409’39 - 1.075’44 = 4333’95 aprox 4334
c) 12’5 · 157’15 = 1964’375 aprox 1964’4
d) 2.002 : 4’27 = 468’852… aprox 468’9

22º. Estima el resultado de los productos y cocientes siguientes tomando los elementos redondeados a las unidades:
a) 56 · 204’5 aprox 56 · 205 = 1140 b) 7’25 · 45’975 aprox 7 · 46 = 322
c) 376’14 : 185’2375 aprox 376 · 185 = 69560 d) 16’4 : 25’65 aprox 16 · 26 = 416

23º. Calcula <u>mentalmente</u> las raíces exactas de:
a) $\sqrt{64}$ = 8 b) $\sqrt{0'25}$ = 0’5 c) $\sqrt{1'44}$ = 1’2 d) $\sqrt{2'25}$ = 1’5 e) $\sqrt{0'0009}$ = 0’03

24º. Usando el algoritmo de la raíz cuadrada, calcula la raíz con un decimal y el resto de las siguientes:
a) $\sqrt{234}$ b) $\sqrt{592}$ c) $\sqrt{3502}$ d) $\sqrt{4096}$ e) $\sqrt{792'3}$

a) 15, resto 9 b) 24, resto 16 c) 59, resto 21 d) 64, resto 0 e) 28, resto 8’3

4.2. (TIC) Comprueba si los siguientes números forman una proporción.

a) 21, 30, 140 y 200 **b) 16, 25, 14 y 21** **c) 35, 80, 15 y 20**

a) Se consideran las razones $\frac{21}{30}$, $\frac{140}{200}$. Como $21 \cdot 200 = 4200 = 30 \cdot 140$, los números dados forman proporción: $\frac{21}{30} = \frac{140}{200}$.

b) Se consideran las razones $\frac{16}{25}$, $\frac{14}{21}$. Puesto que $16 \cdot 21 = 336 \neq 14 \cdot 25 = 350$, los números dados no forman proporción, luego $\frac{16}{25} \neq \frac{14}{21}$.

c) Se consideran las razones $\frac{35}{80}$, $\frac{15}{20}$. Como $35 \cdot 20 = 700 \neq 80 \cdot 15 = 1200$, los números dados no forman proporción: $\frac{35}{80} \neq \frac{15}{20}$.

4.3. Halla el valor de *x* para que 3, *x*, 27 y 18 formen una proporción.

$\frac{3}{x} = \frac{27}{18} \Rightarrow 3 \cdot 18 = 27 \cdot x \Rightarrow 54 = 27x \Rightarrow x = \frac{54}{27} \Rightarrow x = 2$

4.4. Alberto tiene cinco cartas con los números 2, 4, 5, 8 y 20, y le han dicho que escogiendo cuatro de esos números puede formar una proporción.

a) Forma la proporción. **b) ¿Es única la solución?**

a) Los números 2, 8, 5 y 20 forman una proporción, ya que $2 \cdot 20 = 5 \cdot 8 = 40$, luego $\frac{2}{8} = \frac{5}{20}$.

b) La solución no es única. Otras proporciones válidas son: $\frac{8}{2} = \frac{20}{5}$ y $\frac{5}{2} = \frac{20}{8}$.

4.5. Actividad interactiva.

4.6. Actividad resuelta.

4.7. (TIC) Las siguientes magnitudes son directamente proporcionales.

Calcula la razón de proporcionalidad y completa la tabla en tu cuaderno.

1.ª casilla: $\frac{4}{x} = \frac{12}{6} \Rightarrow 12 \cdot x = 6 \cdot 4 \Rightarrow 12 \cdot x = 24 \Rightarrow x = \frac{24}{12} = 2$

2.ª casilla: $\frac{8}{y} = \frac{12}{6} \Rightarrow 12 \cdot y = 6 \cdot 8 \Rightarrow 12 \cdot y = 48 \Rightarrow y = \frac{48}{12} = 4$

3.ª casilla: $\frac{z}{36} = \frac{12}{6} \Rightarrow 12 \cdot 36 = 6 \cdot z \Rightarrow 6 \cdot z = 432 \Rightarrow z = \frac{432}{6} = 72$

La tabla queda así:

Magnitud 1.ª	**4**	**8**	**12**	72
Magnitud 2.ª	2	4	**6**	**36**

La razón de proporcionalidad es $\frac{4}{2} = \frac{8}{4} = \frac{12}{6} = \frac{72}{36} = 2$.

4.8. Un coche gasta 8 litros de gasolina cada 100 kilómetros. Si quedan 7 litros en el depósito, ¿cuántos kilómetros podrá recorrer?

Con un litro de gasolina se pueden recorrer $\frac{100\ (\text{km})}{8\ (\text{L})} = 12{,}5$ km.

Por tanto, con 7 litros se pueden recorrer 12,5 · 7 = 87,5 km.

4.9. Una rueda de un coche da 4590 vueltas en 9 minutos. ¿Cuántas vueltas dará en 24 horas y 24 minutos?

La rueda da $\frac{4590\ (\text{vueltas})}{9\ (\text{minutos})} = 510$ vueltas en un minuto.

Pasando las horas a minutos se tiene que: 24 · 60 = 1440 minutos. Luego 1 hora y 24 minutos son 1440 + 24 = = 1464 minutos.

En 1464 minutos, la rueda da 510 · 1464 = 746 640 vueltas.

4.10. Actividad resuelta.

4.11. Tres sastres compran un lote de piezas iguales que cuestan 576,80 euros. El primero se queda con 2 piezas; el segundo, con 5, y el tercero, con 7.

¿Cuánto debe pagar cada sastre?

En total había 2 + 5 + 7 = 14 piezas. Cada pieza costó $\frac{576{,}80\ (\text{euros})}{14\ (\text{piezas})} = 41{,}20$ €.

Por tanto, el primer sastre deberá pagar 41,20 · 2 = 82,40 €. El segundo, 41,20 · 5 = 206 €. El tercero, 41,20 · 7 = = 288,40 €.

4.12. Un pastel está compuesto de 70 partes de harina, 12 de azúcar y 18 de aceite.

¿Qué peso de cada uno de estos componentes habrá que emplear para obtener un pastel de 800 gramos?

El pastel ha de estar formado en total por 70 + 12 + 18 = 100 partes. Cada parte ha de pesar $\frac{800}{100} = 8$ gramos. Por tanto, se tendrán 70 · 8 = 560 gramos de harina, 12 · 8 = 96 gramos de azúcar y 18 · 8 = 144 gramos de aceite. Se observa la siguiente proporción: $\frac{560}{70} = \frac{96}{12} = \frac{144}{18}$. Además, 560 g + 96 g + 144 g = 800 g.

4.13. Actividad resuelta.

4.14. (TIC) Calcula por dos procedimientos diferentes el 40 % de 260.

40 % de 260 = $\frac{40}{100} \cdot 260 = 104$. O bien, 40 % de 260 = 0,4 · 260 = 104

4.15. Calcula el 13,5 % de 260.

13,5 % de 260 = $\frac{13'5}{100} \cdot 260 = 35{,}1$. O bien, 13,5 % de 260 = 0,135 · 260 = 35,1

4.16. (TIC) Las reservas de agua de un embalse están al 60 %, lo que supone 12 millones de metros cúbicos.

¿Cuántos metros cúbicos de agua tendría si estuviese lleno?

Un modo de resolver el problema es el siguiente: el embalse tiene x metros cúbicos de agua.

60 % de $x = 0{,}6 \cdot x = 12\ 000\ 000$ m^3 $\Rightarrow$ $x = 12\ 000\ 000 : 0{,}6 = 20\ 000\ 000$ m^3 es la capacidad del embalse.

Otro modo es establecer una proporción: $\frac{60}{100} = \frac{12000000}{x} \Rightarrow x = \frac{12000000}{60} \cdot 100 = 20\ 000\ 000$ m^3 es la capacidad del embalse.

4.17. (TIC) Silvia, Elena y Manolo se han repartido un premio de 200 euros del siguiente modo: Silvia, 80 euros; Manolo, 70, y Elena, el resto.

¿Qué tanto por ciento del premio ha recibido cada uno?

Porcentaje de Silvia: $\frac{80}{200} = \frac{x}{100} \Rightarrow x = \frac{80 \cdot 100}{200} = 40$ %

Porcentaje de Manolo: $\frac{70}{200} = \frac{x}{100} \Rightarrow x = \frac{70 \cdot 100}{200} = 35$ %

Porcentaje de Elena: entre Silvia y Manolo han recibido el 75 % del premio. Por tanto, Elena ha recibido el 25 %, ya que 100 – 75 = 25.

O bien, Elena ha recibido 200 – 70 – 80 = 50 euros. $\frac{50}{200} = \frac{x}{100} \Rightarrow x = \frac{50 \cdot 100}{200} = 25$ %.

4.18. Un centro médico tenía 800 vacunas contra la gripe. Si le quedan 128, ¿qué porcentaje ha gastado?

Se han gastado 800 – 128 = 672 vacunas. Para calcular el porcentaje gastado se recurre a una proporción: $\frac{672}{800} = \frac{x}{100} \Rightarrow x = \frac{672 \cdot 100}{800} = 84$ % es el porcentaje de vacunas gastadas.

4.19. a) Disminuye 230 en un 25 %.

b) Incrementa 230 en un 25 %.

a) Disminución: 25 % $\Rightarrow$ 25 % de 230 = 0,25 · 230 = 57,5

Valor tras la disminución: 230 – 57,5 = 172,5

O bien, si se disminuye 230 en un 25 %, queda el 75 % del valor inicial, luego:

75 % de 230 = 0,75 · 230 = 172,5

b) Incremento: 25 % $\Rightarrow$ 25 % de 230 = 0,25 · 230 = 57,5

Valor tras el incremento: 230 + 57,5 = 287,5

O bien, si se incrementa 230 en un 25 %, queda el 125 % del valor inicial, luego:

125 % de 230 = 1,25 · 230 = 287,5

4.20. (TIC) Aplícale a 850 una disminución de un 35 % y un aumento de un 35 %.

Realiza el cálculo de dos formas diferentes y compara el resultado.

1.ª forma

Paso 1: disminución de un 35 % a 850

Valor inicial: 850

Disminución: 35 % $\Rightarrow$ 35 % de 850 = 0,35 · 850 = 297,5

Valor tras la disminución: 850 – 297,5 = 552,5

Paso 2: aumento de un 35 % a 552,5

Valor inicial: 552,5

Aumento: 35 % $\Rightarrow$ 35 % de 552,5 = 0,35 · 552,5 = 193,375

Valor tras el aumento: 552,5 + 193,375 = 745,875

2.ª forma

Una disminución del 35 % supone quedarse con el 100 % – 35 % = 65 % de la cantidad inicial, y si a esa cantidad la aumentamos el 35 %, supone aplicar un 135 % a lo anterior:

135 % de (65 % de 850) = 1,35 · 0,65 · 850 = 745,875

Se obtiene el mismo resultado.

Es posible que el alumno esperara obtener como resultado final la cantidad de partida. El objetivo del ejercicio es que el alumno comprenda que cuando se incrementa el 35 %, se aplica el porcentaje sobre una cantidad inferior a la de partida, por lo que el aumento es inferior a la disminución inicial.

4.21. Unas botas cuestan 90 euros y tienen un descuento del 15 % más un 10 % adicional.

¿Cuánto cuestan las botas?

El descuento adicional se aplica tras haber efectuado los descuentos iniciales. Así, el precio final sería el 100 % – 10 % = 90 % del 100 % – 15 % = 85 % del precio inicial, luego:

90 % de (85 % de 90 €) = 0,9 · 0,85 · 90 = 68,85 €

4.22. Actividad interactiva.

4.23. Actividad resuelta.

4.24. Si un enladrillador enladrilla un muro en 8 horas, ¿cuánto tiempo tardarán en enladrillar el muro entre cinco enladrilladores?

El número de enladrilladores necesarios para enladrillar el muro y el tiempo empleado en hacerlo son magnitudes inversamente proporcionales.

Número de enladrilladores	1	5
Tiempo (h)	8	x

Se tiene que cumplir que $1 \cdot 8 = 5 \cdot x \Rightarrow x = \frac{8}{5} = 1{,}6$ h. Tardarán 1 h 36 min en enladrillar.

Magnitudes directamente proporcionales. Repartos directamente proporcionales

4.39. (TIC) Para hacer una compota de manzana se necesita cierta cantidad de azúcar por kilo de manzana. En la siguiente tabla tienes algunas cantidades.

Manzanas	**4**	**8**	**12**	
Azúcar	**1**	**2**		**32**

a) ¿Existe alguna relación entre las cantidades?

b) Copia en tu cuaderno la tabla y complétala.

c) Calcula, si tiene sentido, la razón de proporcionalidad.

a) Sí, la cantidad de azúcar necesaria se corresponde con la cuarta parte de la cantidad de manzanas.

b)

Manzanas	**4**	**8**	**12**	128
Azúcar	**1**	**2**	3	**32**

c) La razón de proporcionalidad es 0,25, ya que $\frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{3}{12} = \frac{32}{128} = 0{,}25$.

4.40. Una impresora imprime 600 páginas en 2 horas. Calcula el número de páginas que imprimirá en 6 horas.

En una hora se imprimen $\frac{600 \text{ (pag)}}{2 \text{ (h)}} = 300$ páginas.

Por tanto, en 6 horas se pueden imprimir $300 \cdot 6 = 1800$ páginas.

Se observa la siguiente proporción: $\frac{600}{2} = \frac{1800}{6}$.

4.41. Si 2 bolígrafos cuestan 6 euros, ¿cuánto costarán 3 bolígrafos iguales a los anteriores?

Un bolígrafo cuesta $\frac{6 \text{ (euros)}}{2 \text{ (bolígrafos)}} = 3$ €. Por tanto, 3 bolígrafos han de costar $3 \cdot 3 = 9$ €.

Se observa la siguiente proporción: $\frac{6}{2} = \frac{9}{3}$.

4.42. Si 2 kilos de manzanas cuestan 2,40 euros:

a) ¿Cuánto pagarás por 10 kilos?

b) ¿Y por 1,5?

En primer lugar se calcula el precio de 1 kilo de manzanas:

$2{,}40 : 2 = 1{,}20$ €.

Por tanto:

a) 10 kilos han de costar $10 \cdot 1{,}20 = 12$ €.

b) 1,5 kilos costarán $1{,}5 \cdot 1{,}20 = 1{,}80$ €.

4.43. En una campaña de recogida de pilas para reciclar, Yolanda lleva 7 pilas; Ana, 11, y Santiago, 12. Si a cambio reciben 60 bolígrafos, ¿cómo los repartirán de forma proporcional a las pilas que han recogido?

En total había 7 + 11 + 12 = 30 pilas. Por cada pila han recibido $\frac{60 \text{ (bolígrafos)}}{30 \text{ (pilas)}} = 2$ bolígrafos. Deben repartir los bolígrafos proporcionalmente al número de pilas aportadas.

Por tanto:

Yolanda ha de recibir $7 \cdot 2 = 14$ bolígrafos.

Ana, $11 \cdot 2 = 22$ bolígrafos.

Santiago, $12 \cdot 2 = 24$ bolígrafos.

Se observa la siguiente proporción: $\frac{14}{7} = \frac{22}{11} = \frac{24}{12}$.

Además, 14 + 22 + 24 = 60 bolígrafos

Tanto por ciento. Variaciones porcentuales

4.44. (TIC) Halla los siguientes porcentajes.

a) 15 % de 300

b) 25 % de 8000

c) 50 % de 7500

d) 45 % de 1000

a) $\frac{15}{100} \cdot 300 = 0{,}15 \cdot 300 = 45$

b) $\frac{25}{100} \cdot 8000 = 0{,}25 \cdot 8000 = 2000$

c) $\frac{50}{100} \cdot 7500 = 0{,}5 \cdot 7500 = 3750$

d) $\frac{45}{100} \cdot 1000 = 0{,}45 \cdot 1000 = 450$

4.45. ¿Cuánto pagas por una bufanda que cuesta 24 euros si te hacen un descuento del 25 %?

25 % de 24 = $\frac{25}{100} \cdot 24 = 6$ € de descuento. Por tanto, el precio de la bufanda tras el descuento es de 24 – 6 = 18 €.

O bien, si se hace un descuento del 25 %, entonces solo se paga el 75 % del precio de la bufanda, es decir, 75 % de 24 = $\frac{75}{100} \cdot 24 = 0{,}75 \cdot 24 = 18$ €.

4.46. (TIC) Halla *x* en estos casos.

a) El 30 % de *x* es 75.

b) El 47 % de *x* es 141.

c) El 18,50 % de *x* es 43 734.

d) El 1 % de *x* es 2.

a) $0{,}30 \cdot x = 75 \Rightarrow x = \frac{75}{0{,}30} = 250$

b) $0{,}47 \cdot x = 141 \Rightarrow x = \frac{141}{0{,}47} = 300$

c) $0{,}185 \cdot x = 43\,734 \Rightarrow x = \frac{43\,734}{0{,}185} = 236\,400$

d) $0{,}01 \cdot x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{0{,}01} = 200$

4.47. (TIC) Responde a estas preguntas.

a) ¿Qué tanto por ciento de 62 es 15?

b) ¿Qué tanto por ciento de 984 es 123?

c) ¿Qué tanto por ciento de 8940 es 894?

a) $\frac{x}{100} \cdot 62 = 15 \Rightarrow x = \frac{15 \cdot 100}{62} = 24{,}19$. El 24,19 % de 62 es 15.

b) $\frac{x}{100} \cdot 984 = 123 \Rightarrow x = \frac{123 \cdot 100}{984} = 12{,}5$ %. El 12,5 % de 984 es 123.

c) $\frac{x}{100} \cdot 8940 = 894 \Rightarrow x = \frac{894 \cdot 100}{8940} = 10$ %. El 10 % de 8940 es 894.

4.48. Si el 45 % de un número es 225, ¿cuál es el 70 % de ese número?

45 % de $x = 0{,}45 \cdot x = 225 \Rightarrow x = \frac{225}{0{,}45} = 500$. El número es 500.

70 % de 500 = $0{,}70 \cdot 500 = 350$

4.49. Pilar está pensando hacer un viaje en avión a una ciudad americana, consulta el precio por internet, y el billete de ida y vuelta en la compañía *A* le cuesta 540 euros; luego consulta en la compañía *B* y el precio anterior se incrementa en un 5 %.

¿Cuánto cuesta el billete en la compañía *B*?

En la compañía *B*, el precio es el 105 % del precio en la compañía *A*. Por tanto, en la compañía *B* el precio es: 105 % de 540 = $\frac{105}{100} \cdot 540 = 567$ €.

4.50. (TIC) En una ciudad reciclaron hace dos años 1592 toneladas de cartón. El año pasado, la cantidad reciclada disminuyó un 5,5 %. Tras una campaña de información, este año la cantidad reciclada ha aumentado un 7,8 %.

¿Cuánto cartón se ha reciclado en total?

El año pasado se reciclaron 100 – 5,5 = 94,5. Se recicló el 94,5 % de las 1592 toneladas.

94,5 % de 1592 = $0{,}945 \cdot 1592 = 1504{,}44$ toneladas.

Este año se ha reciclado 100 + 7,8 = 107,8 % de las 1504,44 toneladas del año anterior, es decir:

107,8 % de 1504,44 = $1{,}078 \cdot 1504{,}44 = 1621{,}79$ toneladas.

O bien, 107,8 % de (94,5 % de 1592) = 1621,79 toneladas.

Magnitudes inversamente proporcionales. Repartos inversamente proporcionales

4.51. Cuatro pintores tardan 6 horas en pintar una casa. Calcula cuántos días tardarán en pintar esa misma casa 8 pintores.

El número de pintores y el tiempo que se tarda en pintar una casa son magnitudes inversamente proporcionales.

N.º de pintores	4	8
Tiempo (h)	6	*x*

Se tiene que cumplir que $4 \cdot 6 = 8 \cdot x \Rightarrow x = \frac{4 \cdot 6}{8} = 3$. Por tanto, tardan 3 horas en pintar la casa.

4.57. En un refugio de montaña hay provisiones para 8 montañeros durante 3 días.

a) Si han llegado a él 4 montañeros, ¿cuántos días durarán las provisiones?

b) Alberto estuvo en el refugio con sus amigos durante 4 días. ¿Cuántos amigos eran en total?

a) El número de montañeros y el tiempo que duran las provisiones son magnitudes inversamente proporcionales.

N.º de montañeros	8	4
Tiempo (días)	3	x

Se tiene que cumplir que $8 \cdot 3 = 4 \cdot x \Rightarrow x = \dfrac{8 \cdot 3}{4} = 6$. Por tanto, 4 montañeros tienen provisiones para 6 días.

b) Basta averiguar el valor de x en la tabla:

N.º de montañeros	8	y
Tiempo (días)	3	4

Como son magnitudes inversamente proporcionales, se ha de verificar que $8 \cdot 3 = 4 \cdot y \Rightarrow$

$\Rightarrow y = \dfrac{8 \cdot 3}{4} = 6$. Por tanto, en total eran 6 personas (Alberto más 5 amigos).

PROBLEMAS

4.58. (TIC) En una clase de 35 alumnos han aprobado matemáticas 27 de ellos. En otra de 30 alumnos han aprobado 22.

¿En cuál de las dos clases se ha obtenido mejor resultado?

La proporción de aprobados en la primera clase es $\dfrac{27}{35}$, y en la segunda, $\dfrac{22}{30}$. Para comparar ambas proporciones es necesario poner común denominador:

m.c.m.(30, 35) = $7 \cdot 5 \cdot 6 = 210 \Rightarrow \dfrac{27}{35} = \dfrac{162}{210}$ y $\dfrac{22}{30} = \dfrac{154}{210}$. Como $\dfrac{27}{35} = \dfrac{162}{210} > \dfrac{154}{210} = \dfrac{22}{30}$, la proporción de aprobados es mejor en la primera clase.

4.59. (TIC) Un tren que lleva una velocidad de 80 kilómetros por hora tarda 3,5 horas en hacer un trayecto. ¿Cuánto tardará en hacer el mismo recorrido si disminuye su velocidad en 10 kilómetros por hora?

El tren recorre en total 80 km/h · 3,5 h = 280 km.

Si se recorren 280 km a 70 km/h, se tardan 280 : 70 = 4 horas.

4.60. En un momento del día, un árbol de 15 metros proyecta una sombra de 18 metros.

¿Cuánto mide un edificio que en ese momento proyecta una sombra de 48 metros?

La longitud de la sombra y la altura del edificio son magnitudes directamente proporcionales.

Se ha de verificar que $\dfrac{15}{18} = \dfrac{x}{48} \Rightarrow x = \dfrac{15 \cdot 48}{18} = 40$. El edificio mide 40 metros.

4.61. Gabriel decide donar el 15 % del dinero que le han dado por su cumpleaños a una ONG. Si recibió 30 euros, ¿cuánto donó?

15 % de 30 = $\dfrac{15}{100} \cdot 30 = 4{,}5$. Gabriel ha donado 4,50 €.

AUTOEVALUACIÓN

4.1. Calcula el valor de las letras para que formen proporciones.

a) 4, *a*, 12, 6 **b) 27, 15, *x* + 1, 5**

a) $\frac{4}{a} = \frac{12}{6} \Rightarrow 4 \cdot 6 = 12 \cdot a \Rightarrow 12a = 24 \Rightarrow a = \frac{24}{12} \Rightarrow a = 2$

b) $\frac{27}{15} = \frac{x+1}{5} \Rightarrow (x + 1) \cdot 15 = 27 \cdot 5 \Rightarrow 15x + 15 = 135 \Rightarrow x = \frac{135-15}{15} \Rightarrow x = 8$

4.2. Calcula la razón de proporcionalidad o la constante de proporcionalidad inversa, si es posible, entre las dos magnitudes de estas tablas y complétalas en tu cuaderno.

a)

Magnitud 1.ª	**3**	**4**	**12**		**144**
Magnitud 2.ª	**9**		**36**	**54**	

b)

Magnitud 1.ª	**4**	**12**	**144**		
Magnitud 2.ª		**36**	**3**	**54**	**9**

c)

Magnitud 1.ª		**4**	**5**		**10**
Magnitud 2.ª	**9**		**25**	**81**	**100**

a) La razón de proporcionalidad es 3.

Magnitud 1.ª	**3**	**4**	**12**	18	**144**
Magnitud 2.ª	**9**	12	**36**	**54**	432

b) Son magnitudes inversamente proporcionales, y la constante de proporcionalidad inversa es 432.

Magnitud 1.ª	**4**	**12**	**144**	8	48
Magnitud 2.ª	108	**36**	**3**	**54**	**9**

c) Las magnitudes no son proporcionales, ni directa ni inversamente.

Magnitud 1.ª	3	**4**	**5**	9	**10**
Magnitud 2.ª	**9**	16	**25**	**81**	**100**

4.3. Reparte 420 en proporción directa a 3, 5 y 7.

3 + 5 + 7 = 15. La constante de proporcionalidad es $k = \frac{420}{15} = 28$.

El reparto es $x = 28 \cdot 3 = 84$; $y = 28 \cdot 5 = 140$; $z = 28 \cdot 7 = 196$.

4.4. Reparte 420 en proporción inversa a 3, 5 y 7.

Se calcula la constante de proporcionalidad inversa k:

$$\frac{k}{3} + \frac{k}{5} + \frac{k}{7} = 420 \Rightarrow \frac{35k + 21k + 15k}{105} = \frac{71k}{105} = 420 \Rightarrow k = \frac{420 \cdot 105}{71} = 621{,}13$$

El reparto queda así: $\frac{621{,}13}{3} = 207{,}04$, $\frac{621{,}13}{5} = 124{,}23$ y $\frac{621{,}13}{7} = 88{,}73$

4.5. Contesta a las siguientes cuestiones.

a) ¿Cuál es el 30 % de 20 centímetros?

b) ¿Cuál es el 25 % de 2000 kilogramos?

c) Si 25 euros es el 50 % de una cantidad, ¿cuál es esta cantidad?

d) ¿Qué tanto por ciento de 560 es 14?

a) 30 % de 20 = 0,30 · 20 = 6 centímetros

b) 25 % de 2000 = 0,25 · 2000 = 500 kilogramos

c) 50 % de $x = 0{,}5 \cdot x = 25 \Rightarrow x = 50$ €

d) x % de 57 = $\frac{x}{100} \cdot 57 = 14 \Rightarrow x = \frac{14 \cdot 100}{57} = 24{,}56$. El 24,56 % de 57 es 14.

4.6. El gasto de teléfono de Juan asciende a 30 euros. Si le aplican un 10 % de descuento por una promoción y luego le suman el 18 % de IVA, ¿cuánto tiene que pagar?

10 % de 30 = 0,1 · 30 = 3 € de descuento. Por tanto, la factura es de 30 – 3 = 27 €.

18 % de 27 = 0,18 · 27 = 4,86 €. En total tiene que pagar: 27 + 4,86 = 31,86 €.

O bien: 0,90 · 1,18 · 30 = 31,86 €.

4.7. Si 6 obreros cavan una zanja en 5 días, ¿cuánto tardarán en hacer la misma zanja 4 obreros?

El número de obreros y el tiempo que tardan en cavar la zanja son magnitudes inversamente proporcionales.

N.º de obreros	6	4
Tiempo (días)	5	x

Se tiene que cumplir que $6 \cdot 5 = 4 \cdot x \Rightarrow x = \frac{30}{4} = 7{,}5$. Por tanto, 4 obreros tardan 7,5 días.

4.8. Si por 5 días de trabajo 6 obreros cobran 1080 euros, ¿cuánto cobrarán esos mismos obreros por trabajar 4 días más?

Los seis obreros cobran 1080 : 5 = 216 € por día de trabajo. Por tanto, por cuatro días cobran 216 ·4 = = 864 €. Es decir, por trabajar 5 + 4 = 9 días cobrarán 1080 + 864 = 1944 €.

PON A PRUEBA TUS COMPETENCIAS

Relaciona y planifica > Cambio de divisas

4.1. En una tienda se dice que un artículo cuesta 100 dólares, y se indica que esa cantidad equivale a 77 euros. ¿Qué tipo de cambio se ha aplicado?

Cada dólar equivale a 0,77 euros.

4.2. El tipo de cambio oficial de dólares a euros un día cualquiera es de 0,755 euros por cada dólar. ¿Cuál será el tipo para hacer el cambio de euros a dólares?

El tipo de cambio será de 1/0,755 = 1,325, aproximadamente.

5 Expresiones algebraicas

ACTIVIDADES INICIALES

5.I. Los jeroglíficos se usaban también para representar números, usando un sistema posicional, como el romano. ¿Qué ventajas y qué inconvenientes tiene ese tipo de sistemas?

El principal inconveniente es la dificultad para realizar cálculos. La mayor ventaja es el uso de pocos símbolos.

5.II. En esta unidad vas a estudiar otro lenguaje, el algebraico, que te permitirá traducir y resolver problemas de todo tipo. No te preocupes, verás que es mucho más sencillo de lo que parece… Por ejemplo, si la edad de una persona es a, escribe en lenguaje algebraico:

a) El doble de su edad.

b) Su edad dentro de 10 años.

c) La mitad de la edad que tenía hace 4 años.

a) El doble de la edad: $2a$

b) Dentro de 10 años: $a + 10$

c) La mitad de su edad hace 4 años: $\frac{a-4}{2}$

5.III. Muchos jeroglíficos adornaban las paredes interiores de las pirámides. ¿Sabes de dónde viene la palabra "jeroglífico"? ¿Y la palabra "pirámide"? Busca información al respecto.

La palabra "jeroglífico" viene del griego, de las palabras "sagrado" y "grabar". Una traducción libre podría ser "escritura sagrada". La palabra "pirámide" podría proceder del griego, y tendría el mismo origen que la palabra "pira", hoguera.

ACTIVIDADES PROPUESTAS

5.1. Actividad resuelta.

5.2. Expresa en lenguaje algebraico esta información.

a) "En un cibercafé cobran 0,75 euros por conectarse a internet más 1,25 euros por cada hora de uso".

b) "El triple de su edad menos cinco años".

c) "La mitad de la diferencia de dos números".

d) "El triple de un número más su cuadrado".

a) Si indicamos con t el número de horas de uso, el coste se puede expresar así: $0{,}75 + 1{,}25t$.

b) Si indicamos con x la edad, podemos escribir: $3x - 5$.

c) Si indicamos con m el mayor y con n el menor de los números mencionados, la mitad de la diferencia se podría expresar así: $\frac{m-n}{2}$.

d) Si indicamos con p el número, podríamos expresarlo así: $3 \cdot p + p^2$.

5.3. Un cristal para enmarcar cuadros tiene un precio fijo de 25 euros, y cada decímetro del marco cuesta 4 euros. Expresa con una fórmula el coste de enmarcar un cuadro cualquiera.

Si x es el número de decímetros del marco del cuadro y c el coste:

$$c = 25 + 4x$$

5.4. (TIC) Calcula el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas para los datos que se indican:

a) $x^5 - x^2$ **para** $x = -1$

b) $a^2 + b^2$ **para** $a = 1$ **y** $b = -1$

c) $3n^2 - 5abc$ **para** $n = 1$, $a = 2$, $b = -1$, $c = 0$

d) $\dfrac{3x^2 - 5}{y}$ **para** $x = 5$, $y = -14$

a) $x^5 - x^2$ para $x = -1 \rightarrow (-1)^5 - (-1)^2 = -1 - 1 = -2$

b) $a^2 + b^2$ para $a = 1$ y $b = -1 \rightarrow 1^2 + (-1)^2 = 1 + 1 = 2$

c) $3n^2 - 5abc$ para $n = 1$, $a = 2$, $b = -1$, $c = 0 \rightarrow 3 \cdot 1^2 - 5 \cdot 2 \cdot (-1) \cdot 0 = 3 - 0 = 3$

d) $\dfrac{3x^2 - 5}{y}$ para $x = 5$, $y = -14 \rightarrow \dfrac{3 \cdot 5^2 - 5}{-14} = \dfrac{3 \cdot 25 - 5}{-14} = \dfrac{75 - 5}{-14} = \dfrac{70}{-14} = -5$

5.5. Transcribe al lenguaje usual las siguientes expresiones algebraicas.

a) $2(a + b)$ **b)** $(x + y)^2$ **c)** $x^2 + y^2$

a) Doble de la suma de *a* y *b*

b) Cuadrado de la suma de dos números.

c) Suma de los cuadrados de dos números

5.6. Actividad Interactiva.

5.7. Actividad resuelta.

5.8. Indica cuáles de las siguientes expresiones son monomios, y en su caso, señala el coeficiente y la parte literal e indica el grado.

a) $\dfrac{1}{3}xyz^5$ **b)** $(a - b)^2$ **c)** $-4a^5b^3c$

a) Sí es un monomio. El coeficiente es $\dfrac{1}{3}$; la parte literal es xyz^5, y el grado, 1 + 1 + 5 = 7.

b) No es un monomio.

c) Sí es un monomio. El coeficiente es –4; la parte literal es a^5b^3c, y el grado, 5 + 3 + 1 = 9.

5.9. Reduce las siguientes expresiones algebraicas.

a) $5b^2c + 3bc^2 + 4c^2$

b) $6a^3 + 5a^2 - 8a^3 + 4a^2$

c) $[2a^3 - 5b^3] - [7b^3 - 6a^3]$

d) $\frac{3}{4}x + 2x^2 - 5x^3 + \frac{7}{4}x^2 - \frac{5}{2}x + 4x^3$

e) $5ab^2 - 8ab^2 + 5ab^2 - 3a^2b$

f) $3 - \frac{2}{5}z^2 + 7 + 1 - 3z + 8z^2$

a) $5b^2 + 3bc^2 + 4c^2$. No se puede reducir, ya que no hay términos semejantes.

b) $6a^3 + 5a^2 - 8a^3 + 4a^2 = (6 - 8)a^3 + (5 + 4)a^2 = -2a^3 + 9a^2$

c) $[2a^3 - 5b^3] - [7b^3 - 6a^3] = 2a^3 - 5b^3 - 7b^3 + 6a^3 = (2 + 6)a^3 + (-5 - 7)b^3 = 8a^3 - 12b^3$

d) $\frac{3}{4}x + 2x^2 - 5x^3 + \frac{7}{4}x^2 - \frac{5}{2}x + 4x^3 = \left(\frac{3}{4} - \frac{5}{2}\right)x + \left(2 + \frac{7}{4}\right)x^2 + (-5 + 4)x^3 =$

$$= \left(\frac{3}{4} - \frac{10}{4}\right)x + \left(\frac{8}{4} + \frac{7}{4}\right)x^2 + (-5 + 4)x^3 = \frac{-7}{4}x + \frac{15}{4}x^2 - x^3$$

e) $5ab^2 - 8ab^2 + 5ab^2 - 3a^2b = (5 - 8 + 5)ab^2 - 3a^2b = 2ab^2 - 3a^2b$

f) $3 - \frac{2}{5}z^2 + 7 + 1 - 3z + 8z^2 = \left(-\frac{2}{5} + 8\right)z^2 - 3z + (3 + 7 + 1) =$

$$= \left(-\frac{2}{5} + \frac{40}{5}\right)z^2 - 3z + (3 + 7 + 1) = \frac{38}{5}z^2 - 3z + 11$$

5.10. Realiza las siguientes operaciones.

a) $3x \cdot x^2 \cdot 2y$

b) $a^3 : a^2$

c) $-4x^2y : 2x^2y^2$

d) $4a \cdot (-3a^3) \cdot 2a$

e) $8abcz^3 : 4abz^2$

f) $5x^2y : 3xy^2$

a) $3x \cdot x^2 \cdot 2y = 6x^3y$

b) $a^3 : a^2 = a$

c) $-4x^2y : 2x^2y^2 = \frac{-2}{y}$

d) $4a \cdot (-3a^3) \cdot 2a = -24a^5$

e) $8abcz^3 : 4abz^2 = 2cz$

f) $5x^2y : 3xy^2 = \frac{5x}{3y}$

5.11. Indica en cada caso si se trata de monomios divisibles.

a) $25x^3y^4z \quad 10x^4yz$

b) $18ab^3c \quad 9ab^2c$

a) No lo son. El primero no es divisible entre el segundo porque el grado de la variable x en el segundo es mayor. El segundo no es divisible entre el primero porque el grado de la variable y es mayor en el primero.

b) Es divisible el primero entre el segundo, ya que tienen las mismas variables, y los grados en las variables del primer monomio son mayores o iguales que los del segundo. El resultado es 2b.

5.19. Dados los polinomios:

$A(x) = -10x^3 + 7x^2 - 5x + 8$

$B(x) = x4 - 5x3 + 10x - 10$

$C(x) = -6x^4 - 8x^2 + 4$

a) Calcula $B(x) - A(x) - C(x)$

b) Calcula $C(x) - B(x) + A(x)$

a)

$$\begin{array}{rrrrrr} & x^4 & -5x^3 & & +10x & -10 \\ + & & +10x^3 & -7x^2 & +5x & -8 \\ & +6x^4 & & +8x^2 & & -4 \\ \hline & 7x^4 & +5x^3 & +x^2 & +15x & -22 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{rrrrrr} & -6x^4 & & -8x^2 & & +4 \\ + & -x^4 & +5x^3 & & -10x & +10 \\ & & -10x^3 & +7x^2 & -5x & +8 \\ \hline & -7x^4 & -5x^3 & -x^2 & -15x & +22 \end{array}$$

Observación: Nótese que $-(B - A - C) = -B + A + C$, es decir, el apartado b es el opuesto del a.

5.20. Copia y completa en tu cuaderno la siguiente operación.

$$\begin{array}{rrrrrr} & 5x^4 - & \square x^3 + & 2x^2 - & 6x + & 3 \\ & & 3x^3 - & \square x^2 + & \square x - & 7 \\ + & \square x^4 + & 7x^3 + & 6x^2 - & 9x + & 10 \\ \hline & -6x^4 + & 4x^3 - & x^2 + & 2x + & \square \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrrr} & 5x^4 - & \boxed{6}x^3 + & 2x^2 - & 6x + & 3 \\ & & 3x^3 - & \boxed{9}x^2 + & \boxed{13}x - & 7 \\ + & \boxed{-11}x^4 + & 7x^3 + & 6x^2 - & 9x + & 10 \\ \hline & -6x^4 + & 4x^3 - & x^2 + & 2x + & \boxed{6} \end{array}$$

5.21. Actividad resuelta.

5.22. Realiza las siguientes operaciones.

a) $(2a^2b - 6b^2) \cdot 3ab$

b) $(6x^4 - 5x^3 + 3x^2 - x + 9) \cdot 2x^3$

c) $15xy^2 \cdot (3x^2y^2 - 5x^2y + 7xy)$

d) $(- 8x^2z) \cdot (4xz - 6xz^2 + 4\ xz^3)$

a) $(2a^2b - 6b^2) \cdot 3ab = 6a^3b^2 - 18ab^3$

b) $(6x^4 - 5x^3 + 3x^2 - x + 9) \cdot 2x^3 = 12x^7 - 10x^6 + 6x^5 - 2x^4 + 18x^3$

c) $15xy^2 \cdot (3x^2y^2 - 5x^2y + 7xy) = 45x^3y^4 - 75x^3y^3 + 105x^2y^3$

d) $(-8x^2z) \cdot (4xz - 6xz^2 + 4xz^3) = -32x^3z^2 + 48x^3z^3 - 32x^3z^4$

5.23. Calcula los siguientes productos.

a) $(1 - x^3) \cdot (x^2 - 3)$

b) $(z + xz) \cdot (3x^2 - 5z)$

c) $(t^3 - 4) \cdot (t^3 + 4)$

d) $(a - 2b) \cdot (4a + 3b)$

e) $(x - y) \cdot (1 - xy)$

f) $(x^3 + 4y) \cdot (x - y)$

g) $(zt + 9t) \cdot (t + z)$

h) $(a^2 + 2a) \cdot (a - 5)$

a) $(1 - x^3) \cdot (x^2 - 3) = x^2 - 3 - x^5 + 3x^3 = -x^5 + 3x^3 + x^2 - 3$

b) $(z + xz) \cdot (3x^2 - 5z) = 3x^2z - 5z^2 + 3x^3z - 5xz^2$

c) $(t^3 - 4) \cdot (t^3 + 4) = t^6 + 4t^3 - 4t^3 - 16 = t^6 - 16$

d) $(a - 2b) \cdot (4a + 3b) = 4a^2 + 3ab - 8ab - 6b^2 = 4a^2 - 5ab - 6b^2$

e) $(x - y) \cdot (1 - xy) = x - x^2y - y + xy^2$

f) $(x^3 + 4y) \cdot (x - y) = x^4 - yx^3 + 4yx - 4y^2$

g) $(zt + 9t) \cdot (t + z) = zt^2 + z^2t + 9t^2 + 9tz$

h) $(a^2 + 2a) \cdot (a - 5) = a^3 - 5a^2 + 2a^2 - 10a = a^3 - 3a^2 - 10a$

5.24. Calcula los siguientes productos.

a) $(-x^2y + 3xy^2) \cdot (6x^2y - 8xy^2)$

b) $(y^2 - 3y + 2)\ (y - 1)$

c) $(13 - 5a^2) \cdot (2 + 3a - 6a^2 + a^3)$

d) $(1 - 2x + 3x^3) \cdot (2x^3 - 7x + 8)$

e) $(3 - 5ab + 4a^2b) \cdot (ab + b^2a)$

a) $(-x^2y + 3xy^2) \cdot (6x^2y - 8xy^2) = -6x^4y^2 + 8x^3y^3 + 18x^3y^3 - 24x^2y^4 = -6x^4y^2 + 26x^3y^3 - 24x^2y^4$

b) $(y^2 - 3y + 2) \cdot (y - 1) = y^3 - 3y^2 + 2y - y^2 + 3y - 2 = y^3 - 4y^2 + 5y - 2$

c) $(13 - 5a^2) \cdot (2 + 3a - 6a^2 + a^3) = 26 + 39a - 78a^2 + 13a^3 - 10a^2 - 15a^3 + 30a^4 - 5a^5 =$
$= 26 + 39a - 88a^2 - 2a^3 + 30a^4 - 5a^5$

d) $(1 - 2x + 3x^3) \cdot (2x^3 - 7x + 8) = 2x^3 - 7x + 8 - 4x^4 + 14x^2 - 16x + 6x^6 - 21x^4 + 24x^3 =$
$= 8 - 23x + 14x^2 + 26x^3 - 25x^4 + 6x^6$

e) $(3 - 5ab + 4a^2b) \cdot (ab + b^2a) = 3ab - 5a^2b^2 + 4a^3b^2 + 3ab^2 - 5a^2b^3 + 4a^3b^3$

5.25. Extrae factor común en las siguientes expresiones.

a) $a + ax + ax^2 + ax^3 + ax^4$

b) $2x^7 - 4x^6 + 8x^5 - 10x^4 + 2x^3 - 6x^2$

c) $ab - 5a^2b + 6a^2b^2 - a^3b^2 + a^3b^3$

d) $3zt^2 - 9z2t^2 - 15zt^3 + z^2t^2$

e) $2xyt^2 - 5x^2y^3t^2 + 4x^2yt^3 - xyt^3$

a) $a + ax + ax^2 + ax^3 + ax^4 = a \cdot (1 + x + x^2 + x^3 + x^4)$

b) $2x^7 - 4x^6 + 8x^5 - 10x^4 + 2x^3 - 6x^2 = 2x^2 \cdot (x^5 - 2x^4 + 4x^3 - 5x^2 + x - 3)$

c) $ab - 5a^2b + 6a^2b^2 - a^3b^2 + a^3b^3 = ab \cdot (1 - 5a + 6ab - a^2b + a^2b^2)$

d) $3zt^2 - 9z^2t^2 - 15zt^3 + z^2t^2 = zt^2 \cdot (3 - 9z - 15t + z) = zt^2 \cdot (3 - 8z - 15t)$

e) $2xyt^2 - 5x^2y^3t^2 + 4x^2yt^3 - xyt^3 = xyt^2 \cdot (2 - 5xy^2 + 4xt - t)$

5.26. Realiza las siguientes divisiones.

a) $(8x^6 - 4x^5 + 6x^3 - 2x^2 - 10x) : (2x)$ **b)** $(6x - 2xy + 4xz) : \left(-\frac{1}{2}x\right)$

c) $(x^4y + xy - 3xy^3) : (xy)$ **c)** $(x^2 - x + 2y) : (2x)$

a) $(8x^6 - 4x^5 + 6x^3 - 2x^2 - 10x) : (2x) = 4x^5 - 2x^4 + 3x^2 - x - 5$

b) $(x^4y + xy - 3xy^3) : (xy) = x^3 + 1 - 3y^2$

c) $(6x - 2xy + 4xz) : \left(-\frac{1}{2}x\right) = -12 + 4y - 8z$

d) $(x^2 - x + 2y) : (2x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{y}{x}$ (El resultado no es un polinomio).

5.27. Calcula las siguientes potencias.

a) $(2xy^3 - 5x^2)^2$ **b)** $\left(2a + \frac{1}{2}b\right)^2$

a) $(2xy^3 - 5x^2)^2 = 4x^2y^6 - 20x^3y^3 + 25x^4$ b) $\left(2a + \frac{1}{2}b\right)^2 = 4a^2 + 2ab + \frac{1}{4}b^2$

5.28. Copia en tu cuaderno y completa.

a) $(5x^2y - 2xy) \cdot \square = 10x^2y^2 - 4xy^2$ **b)** $(\square + \square) : 2ab = (a^2b + ab)$

a) $(5x^2y - 2xy) \cdot \boxed{2y} = 10x^2y^2 - 4xy^2$ b) $\left(\boxed{2a^3b^2} + \boxed{2a^2b^2}\right) : 2ab = (a^2b + ab)$

5.29. Realiza las siguientes operaciones.

a) $3x^2 \cdot (4x^2 - 5x + 6) - (2 - 3x) \cdot (-3x^2)$

b) $(1 - x^2) \cdot x^2 - x^3 \cdot (x^2 - 4)$

a) $3x^2 \cdot (4x^2 - 5x + 6) - (2 - 3x) \cdot (-3x^2) = 12x^4 - 15x^3 + 18x^2 - (-6x^2 + 9x^3) =$

$= 12x^4 - 15x^3 + 18x^2 + 6x^2 - 9x^3 = 12x^4 - 24x^3 + 24x^2$

b) $(1 - x^2) \cdot x^2 - x^3 \cdot (x^2 - 4) = x^2 - x^4 - x^5 + 4x^3 = -x^5 - x^4 + 4x^3 + x^2$

5.30. Reduce las siguientes expresiones.

a) $(3 - 2a + 5a^3) \cdot (6 - 8a^3) - 12a^2 \cdot (4a + 6)$

b) $7x^2 \cdot (9x^2 - 5x + 9) - (x^3 + 4x) \cdot (1 - x^2)$

c) $(8x^4 - 6x^3 + 5x^2) : 2x^2 + (3x^2 - 5) \cdot (1 - 2x)$

d) $6x^5 \cdot (3x^2 - 2x + 9) - (4x^5 + 6x^3 - 10x) : (2x)$

a) $(3 - 2a + 5a^3) \cdot (6 - 8a^3) - 12a^2 \cdot (4a + 6) = 18 - 12a + 30a^3 - 24a^3 + 16a^4 - 40a^6 - 48a^3 - 72a^2 =$
$= -40a^6 + 16a^4 - 42a^3 - 72a^2 - 12a + 18$

b) $7x^2 \cdot (9x^2 - 5x + 9) - (x^3 + 4x) \cdot (1 - x^2) = 63x^4 - 35x^3 + 63x^2 - (x^3 - x^5 + 4x - 4x^3) =$

$= 63x^4 - 35x^3 + 63x^2 - x^3 + x^5 - 4x + 4x^3 = x^5 + 63x^4 - 32x^3 + 63x^2 - 4x$

c) $(8x^4 - 6x^3 + 5x^2) : 2x^2 + (3x^2 - 5) \cdot (1 - 2x) = 4x^2 - 3x + \frac{5}{2} + 3x^2 - 6x^3 - 5 + 10x = -6x^3 + 7x^2 + 7x - \frac{5}{2}$

d) $6x^5 \cdot (3x^2 - 2x + 9) - (4x^5 + 6x^3 - 10x) : (2x) = 18x^7 - 12x^6 + 54x^5 - (2x^4 + 3x^2 - 5) =$
$= 18x^7 - 12x^6 + 54x^5 - 2x^4 - 3x^2 + 5$

5.31. Actividad interactiva.

5.32. Actividad resuelta.

5.33. Actividad resuelta.

5.34. Desarrolla las siguientes expresiones.

a) $(2x+3y)^2$

b) $(2xy-a)^2$

c) $(-2+y)^2$

d) $(7x^3-2y^2)^2$

e) $(1-p)(p+1)$

f) $(x^3+2x)^2$

a) $(2x+3y)^2=(2x)^2+2{\cdot}2x{\cdot}3y+(3y)^2=4x^2+12xy+9y^2$

b) $(2xy-a)^2=(2xy)^2-2{\cdot}(2xy){\cdot}a+a^2=4x^2y^2-4xya+a^2$

c) $(-2+y)^2=(-2)^2+2{\cdot}(-2){\cdot}y+y^2=4-4y+y^2$

d) $(7x^3-2y^2)^2=(7x^3)^2-2{\cdot}(7x^3){\cdot}(2y^2)+(2y^2)^2=49x^6-28x^3y^2+4y^4$

e) $(1-p)(p+1)=1^2-p^2$

f) $(x^3+2x)^2=(x^3)^2+2{\cdot}x^3{\cdot}2x+(2x)^2=x^6+4{\cdot}x^4+4x^2$

5.35. Expresa en forma del cuadrado de un binomio.

a) $1 + 4p + 4p^2$

b) $z^2 - 8zx + 16x^2$

a) $1 + 4p + 4p^2 = (1 + 2p)^2$

b) $z^2 - 8zx + 16x^2 = (z - 4x)^2$

5.36. Actividad interactiva.

EJERCICIOS

Expresiones algebraicas

5.37. Designa la arista de un cubo con la letra a.

a) ¿Cuál es la expresión del volumen del cubo?

b) ¿Cuál es el volumen de un cubo de 1 centímetro de arista? ¿Y de 2 centímetros? ¿Y de 10 centímetros?

a) $V = a^3$, donde V es el volumen, y a es la medida de la arista.

b) Arista de 1 cm → a = 1 cm → $V = 1^3$ cm^3 = 1 cm^3

Arista de 2 cm → a = 2 cm → $V = 2^3$ cm^3 = 8 cm^3

Arista de 10 cm → a = 10 cm → $V = 10^3$ cm^3 = 1000 cm^3

5.38. Un recipiente contiene 4 litros de agua, y cada hora se vierte en él 0,5 litros de agua. Expresa con lenguaje matemático esta información.

Si indicamos con t el número de horas que se vierte agua, la información la podemos expresar así: $4 + 0{,}5 \cdot t$.

5.39. Una tienda de confección de cortinas cobra 4,50 euros por metro de cortina confeccionada.

a) ¿Cuánto cuesta confeccionar una cortina de 5 metros?

b) Escribe la fórmula que relaciona el número de metros de cortina con el coste de la misma.

a) Confeccionar una cortina de 5 metros cuesta: 4,50 € · 5 = 22,50 €.

b) Si indicamos con n el número de metros de cortina y con c el coste, la fórmula es: $c = 4{,}50 \cdot n$.

5.40. Expresa con lenguaje matemático la siguiente propiedad: "En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos".

Si a es la hipotenusa, y b y c son los catetos del triángulo rectángulo, la propiedad se expresa así:

$a^2 = b^2 + c^2$. (La propiedad es el teorema de Pitágoras).

5.41. Transcribe al lenguaje ordinario las siguientes expresiones.

a) $\frac{1}{x}$	**c)** $3 \cdot \sqrt{x-1}$	**e)** $x^2 + 3 \cdot \frac{x}{2}$
b) $3b^3 - b^2$	**d)** $5 \cdot \frac{1}{x^2}$	**f)** $\left(x - x^2\right)^2$

a) El inverso de un número

b) El triple del cubo de una cantidad menos el cuadrado de esa misma cantidad

c) El triple de la raíz cuadrada de una cantidad que se ha disminuido en una unidad

d) El quíntuple del inverso del cuadrado de un número

e) El cuadrado de un número sumado al triple de la mitad de dicho número

f) El cuadrado de la diferencia entre un número y su propio cuadrado

Valor numérico de una expresión algebraica

5.42. (TIC) Calcula el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas para los valores de las letras que se indican.

a)	**$2b$**	**para $b = -1$**
b)	**$1 - 2y$**	**para $y = -2$**
c)	**$-4bc^2 + 3b^4$**	**para $b = 1$, $c = -2$**
d)	**$(x + y)^2$**	**para $x = 2$, $y = 5$**
e)	**$3x^3y^2 - 5xy$**	**para $x = -2$, $y = -1$**

a)	$2b$	para $b = -1 \rightarrow 2 \cdot (-1) = -2$
b)	$1 - 2y$	para $y = -2 \rightarrow 1 - 2 \cdot (-2) = 1 + 4 = 5$
c)	$-4bc^2 + 3b^4$	para $b = 1$, $c = -2 \rightarrow -4 \cdot 1 \cdot (-2)^2 + 3 \cdot 1^4 = -4 \cdot 1 \cdot 4 + 3 \cdot 1 = -16 + 3 = -13$
d)	$(x + y)^2$	para $x = 2$, $y = 5 \rightarrow (2 + 5)^2 = 7^2 = 49$
e)	$3x^3y^2 - 5xy$	para $x = -2$, $y = -1 \rightarrow 3 \cdot (-2)^3 \cdot (-1)^2 - 5 \cdot (-2) \cdot (-1) = 3 \cdot (-8) \cdot 1 - 10 = -24 - 10 = -34$

5.43. (TIC) Calcula el valor numérico de la expresión $6x^3 + 7x^2 - 9x + 2$ para $x = 1$ y para $x = -2$.

Para $x = 1 \rightarrow 6 \cdot 1^3 + 7 \cdot 1^2 - 9 \cdot 1 + 2 = 6 + 7 - 9 + 2 = 6$

Para $x = -2 \rightarrow 6 \cdot (-2)^3 + 7 \cdot (-2)^2 - 9 \cdot (-2) + 2 = 6 \cdot (-8) + 7 \cdot 4 - 9 \cdot (-2) + 2 = -48 + 28 + 18 + 2 = 0$

5.44. (TIC) Calcula el valor numérico de las siguientes expresiones para $x = -3$.

a) $x - 8$

b) $3 - x$

c) $4x - 0{,}5x^2$

d) $11 - x^2$

e) $9 - 3x^2$

f) $-(1 - x^2)$

g) $(x - 3) \cdot (x + 5)$

h) $(x + 3) \cdot (x^3 - 1)$

a) $(-3) - 8 = -11$

b) $3 - (-3) = 3 + 3 = 6$

c) $4 \cdot (-3) - 0{,}5 \cdot (-3)^2 = -12 - 0{,}5 \cdot 9 = -12 - 4{,}5 = -16{,}5$

d) $11 - (-3)^2 = 11 - 9 = 2$

e) $9 - 3 \cdot (-3)^2 = 9 - 3 \cdot 9 = 9 - 27 = -18$

f) $-(1 - (-3)^2) = -(1 - 9) = -(-8) = 8$

g) $((-3) - 3) \cdot ((-3) + 5) = (-6) \cdot (+2) = -12$

h) $((-3) + 3) \cdot ((-3)^3 - 1) = 0 \cdot (-27 - 1) = 0$

Monomios y polinomios

5.45. Indica cuáles de las siguientes expresiones algebraicas son monomios, señalando el coeficiente, la parte literal y el grado.

a) $\dfrac{2x^2b}{a}$

b) $-5x^2ab$

c) ab^3c^2

d) xy^{-2}

a) No es un monomio.

b) Sí es un monomio. El coeficiente es –5; la parte literal es x^2ab; el grado es 2 + 1 + 1 = 4.

c) Sí es un monomio. El coeficiente es 1 (no está escrito); la parte literal es ab^3c^2; el grado es 1 + 3 + 2 = 6.

d) No es un monomio. El exponente de la variable y es negativo.

5.46. Señala cuál de estas expresiones es un polinomio y en tal caso indica su grado y coeficiente principal.

a) $2x^4 - 3y^2 + 5ab^2 - \dfrac{2}{3}$

b) $7ab^2 - ac^{-3}d + 6abcd$

c) $xyz - 6x^2yz^3 + 12xyz^4$

d) $\dfrac{2}{5}a^4 - 5a^3 + 7a - 6 + \dfrac{1}{a}$

a) Sí es un polinomio. Su grado es 4. Su coeficiente principal es 2.

b) No es un polinomio porque hay variables elevadas a exponentes negativos.

c) Sí es un polinomio. Su grado es 6 y posee dos coeficientes principales: –6 y +12 (los monomios correspondientes tienen grado máximo y no son semejantes).

d) No es un polinomio. Hay variables en el denominador de uno de los términos de la expresión.

Operaciones con monomios y polinomios

5.47. Haz las siguientes operaciones y reduce términos semejantes.

a) $(x - y) - (x + y - z)$

b) $a - [(b - a) - (b - c)]$

c) $p^2 - (p^2 - q^2) + (q^2 - r^2) + q^2$

d) $(a + b + c) - (a - (a - b + c))$

e) $2a^2b - ab^2 - [5a^2b - (ab^2 + 3a^2b)]$

f) $(1 - x^2) - (x^2 + 3x - 5) - (x - 1)$

a) $(x - y) - (x + y - z) = x - y - x - y + z = -2y + z$

b) $a - [(b - a) - (b - c)] = a - [b - a - b + c] = a - [-a + c] = a + a - c = 2a - c$

c) $p^2 - (p^2 - q^2) + (q^2 - r^2) + q^2 = p^2 - p^2 + q^2 + q^2 - r^2 + q^2 = 3q^2 - r^2$

d) $(a + b + c) - (a - (a - b + c)) = (a + b + c) - (a - a + b - c) = (a + b + c) - (b - c) =$
$= a + b + c - b + c = a + 2c$

e) $2a^2b - ab^2 - [5a^2b - (ab^2 + 3a^2b)] = 2a^2b - ab^2 - [5a^2b - ab^2 - 3a^2b] =$
$= 2a^2b - ab^2 - [2a^2b - ab^2] = 2a^2b - ab^2 - 2a^2b + ab^2 = 0$

f) $(1 - x^2) - (x^2 + 3x - 5) - (x - 1) = 1 - x^2 - x^2 - 3x + 5 - x + 1 = -2x^2 - 4x + 7$

5.48. Realiza las siguientes operaciones.

a) $-3pq^2 + 5pq^2 + pq^2$

b) $5b^3 - 4b^3$

c) $-xy + 2yx$

d) $14xy^2z \cdot 2z^2$

e) $12x^3a : (6x^2a)$

f) $(4x^2a - 3ba^4x^3) : (x^2a)$

g) $2x^2 \cdot (3x - 7x^3)$

h) $4x^2y \cdot (-2xy) \cdot 8xy^2$

a) $-3pq^2 + 5pq^2 + pq^2 = (-3 + 5 + 1)pq^2 = 3pq^2$

b) $5b^3 - 4b^3 = b^3$

c) $-xy + 2yx = xy$

d) $14xy^2z \cdot 2z^2 = 28xy^2z^3$

e) $12x^3a : (6x^2a) = 2x$

f) $(4x^2a - 3ba^4x^3) : (x^2a) = 4 - 3ba^3x$

g) $2x^2 \cdot (3x - 7x^3) = 6x^3 - 14x^5$

h) $4x^2y \cdot (-2xy) \cdot 8xy^2 = (-8x^3y^2) \cdot 8xy^2 = -64x^4y^4$

5.49. Extrae factor común.

a) $-5a^3 + 10a^5 + 10a^6 - 15a^7$

b) $z^3t^3 - 2t^2z^3 + 7t^2z^2$

c) $pqr^2 - pq^2r + p^2qr$

a) $-5a^3 + 10a^5 + 10a^6 - 15a^7 = 5a^3 \cdot (-1 + 2a^2 + 2a^3 - 3a^4)$

b) $z^3t^3 - 2t^2z^3 + 7t^2z^2 = z^2t^2 \cdot (zt - 2z + 7)$

c) $pqr^2 - pq^2r + p^2qr = pqr \cdot (r - q + p)$

5.62. Copia y completa en tu cuaderno para que las expresiones sean el cuadrado de una suma o una diferencia.

a) $a^2 + \square + b^2$

b) $a^2 + 4b^2 - \square$

c) $x^2 + 9 + \square$

d) $25a^2 + \square + 1$

e) $\square\, x^2 + 4xy + y^2$

f) $9x^2 - \square\, x + 4$

g) $25y^2 - 40y + \square$

h) $x^2 + x + \square$

a) $a^2 + \boxed{2ab} + b^2$

b) $a^2 + 4b^2 - \boxed{4ab}$

c) $x^2 + 9 + \boxed{6x}$

d) $25a^2 + \boxed{10a} + 1$

e) $\boxed{4}\, x^2 + 4xy + y^2$

f) $9x^2 - \boxed{12}\, x + 4$

g) $25y^2 - 40y + \boxed{16}$

h) $x^2 + x + \boxed{\frac{1}{4}}$

5.63. Copia y completa en tu cuaderno de modo que la expresión resultante sea equivalente a una diferencia de cuadrados de dos monomios

a) $(x + y)(x - \square)$

b) $(\square - b)(a + b)$

c) $(x + 1)(\square - \square)$

d) $(2a - 3b)(\square + \square)$

e) $(2x - y)(\square + y)$

f) $(2 + 3y)(\square + \square)$

g) $(t^2 - 5)(\square + \square)$

h) $(xy - \square)(\square + y)$

a) $(x + y)(x - \boxed{y})$

b) $(\boxed{a} - b)(a + b)$

c) $(x + 1)(\boxed{x} - \boxed{1})$

d) $(2a - 3b)(\boxed{2a} + \boxed{3b})$

e) $(2x - y)(\boxed{2x} + y)$

f) $(2 + 3y)(\boxed{2} + \boxed{(-3)y})$

g) $(t^2 - 5)(\boxed{t^2} + \boxed{5})$

h) $(xy - \boxed{y})(\boxed{xy} + y)$

PROBLEMAS

5.64. Un litro de agua de mar contiene 26 gramos de sal.

a) Indica con *x* el número de litros de agua de mar y expresa la cantidad de sal que contiene.

b) Aplica la expresión obtenida para calcular los gramos de sal que hay en 100 litros de agua de mar.

a) Si C es la cantidad de sal expresada en gramos, podemos escribir $C = 26 \cdot x$.

b) Si disponemos de 100 litros $\rightarrow x = 100 \rightarrow C = 26 \cdot 100 = 2600$ g de sal en 100 litros de agua.

5.65. Un viajero hace un trayecto a una velocidad media de 85 kilómetros por hora. Expresa mediante una fórmula la distancia que recorre en función del tiempo.

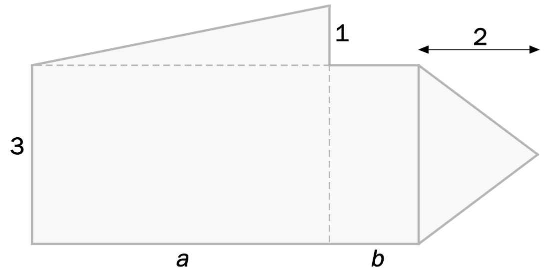
¿Qué distancia habrá recorrido al cabo de 72 minutos?

Si indicamos con t el tiempo en horas y con d la distancia, la fórmula se expresa así: $d = 85 \cdot t$.

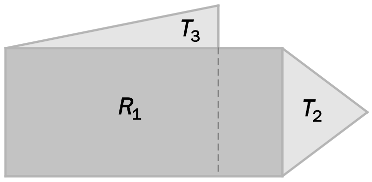
Para saber lo que recorre en 72 minutos usando la expresión anterior debemos cambiar la unidad de medida de minutos a horas: 72 : 60 = 1,2 h.

72 minutos son 1,2 horas; por tanto, la distancia será $d = 85 \cdot 1{,}2 = 102$ km.

5.66. Encuentra el polinomio que expresa el área de la siguiente figura.



Área = área R_1 + área T_2 + área T_3:

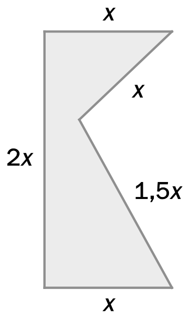


Área = $(a+b)\cdot 3+\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot a\cdot 1=3a+3b+3+\frac{1}{2}a=\frac{7}{2}a+3b+3$

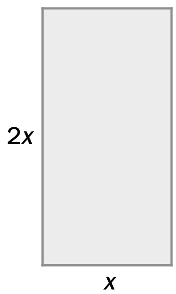
El polinomio es $\frac{7}{2}a+3b+3$.

5.67. Halla la expresión que da el perímetro de la primera figura, el área de la segunda y el volumen de la tercera. Indica el grado de cada una.

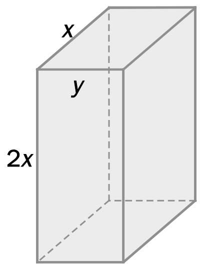
a)



b)



c)



a) Perímetro: $x + 2x + x + x + 1{,}5x = 6{,}5x$. Grado: 1

b) Área: $x \cdot 2x = 2x^2$ Grado: 2

c) Volumen: $2x \cdot y \cdot x = 2x^2y$ Grado: 3

5.68. (TIC) Un pintor contrata su trabajo del siguiente modo: 50 euros al iniciar el trabajo y 0,85 euros por metro cuadrado pintado.

a) Expresa mediante una fórmula el coste del trabajo en función del número de metros cuadrados pintados.

b) Calcula, aplicando la fórmula, cuánto costaría pintar los 300 metros cuadrados de pared de un piso.

c) Si otro pintor cobra 0,87 por metro cuadrado ¿sería más económico?

a) Si llamamos x al número de metros cuadrados que pinta y C al coste, la fórmula sería: $C = 50 + 0{,}85x$.

b) Pintar 300 m^2 costaría: $C = 50 + 0{,}85 \cdot 300 = 50 + 255 = 305$ €.

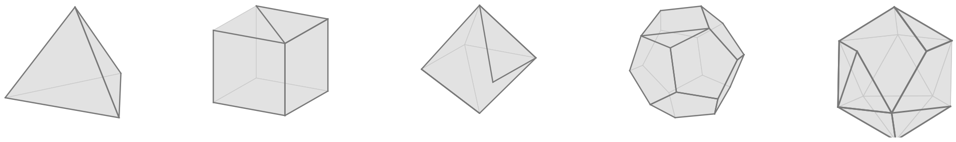
c) Si otro pintor cobra solamente por los metros cuadrados pintados, a razón de 0,87 € por cada metro, nos costaría: $0{,}87 \cdot 300 = 261$ €. Por tanto, sí saldría más económico.

5.69. Un contenedor pesa 200 kilogramos, y cada una de las cajas que se introducen en él, 25 kilogramos. Expresa con una fórmula el peso del contenedor en función del número de cajas que se introduzcan.

Si indicamos con n el número de cajas y con p el peso total, podemos expresarlo con esta fórmula:

$$p = 200 + 25n$$

5.70. Observa los siguientes cuerpos geométricos.



a) Copia y completa la tabla.

	Vértices	**Aristas**	**Caras**	***v – a + c***
Tetraedro	**4**	**6**	**4**	**2**
Cubo				
Octaedro				
Dodecaedro				
Icosaedro				

b) Escribe la propiedad que relaciona los vértices, aristas y caras de estos cuerpos.

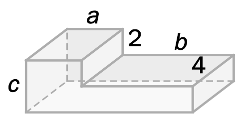
a)

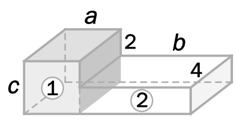
	Vértices	Aristas	Caras	*v – a + c*
Tetraedro	4	6	4	2
Cubo	8	12	6	2
Octaedro	6	12	8	2
Dodecaedro	20	30	12	2
Icosaedro	12	30	20	2

b) En estos poliedros, conocidos como sólidos platónicos, el número de vértices (v) menos el de aristas (a) más el de caras (c) es igual a 2. La fórmula es:

$$v - a + c = 2$$

5.71. Halla el polinomio que expresa el volumen de este cuerpo. ¿Cuál es el grado de cada monomio y del polinomio?





Volumen = volumen del ortoedro 1 + volumen del ortoedro 2

Volumen = $4ac + 4b(c - 2) = 4ac + 4bc - 8b$

El grado del primer monomio, $4ac$, es 2.

El grado del segundo monomio, $4bc$, es 2.

El grado del tercer monomio, $-8b$, es 1.

El grado del polinomio es 2.

5.72. A partir de un cuadrado de hojalata de 10 centímetros de lado, se desea fabricar piezas recortando dos cuadraditos iguales de lado *x*, en dos esquinas.

a) Determina el polinomio que permite calcular el área de las piezas.

b) Si *x* mide 2 centímetros, ¿cuál será el área de la pieza?

a) Área de las piezas: $10^2 - 2x^2 = 100 - 2x^2$

El polinomio que permite calcular el área de las piezas resultantes es $100 - 2x^2$.

b) Si x mide 2 centímetros, el área de la pieza es: $100 - 2 \cdot 2^2 = 100 - 8 = 92$ cm^2.

AUTOEVALUACIÓN.

5.1. A un técnico informático le pagan 50 euros por la revisión de cada ordenador. Por otra parte, le descuentan el 18% de la cantidad que cobra, en concepto de IVA.

Halla la fórmula que relaciona el dinero d que recibe el técnico y el número x de ordenadores revisados.

$d = 50 \cdot x - \dfrac{18}{100} \cdot 50 \cdot x = 50x - 9x = 41x \Rightarrow$ La fórmula es $d = 41x$.

5.2. Dadas las siguientes expresiones algebraicas indica las que son monomios o polinomios.

a) $5x^2\sqrt{y}$ **b)** $-3ab^6$ **c)** $2 - x + xy^{-3}$ **d)** $4x^4 - x - y - 1$

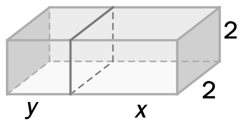
a) $5x^2\sqrt{y}$ → No es un monomio porque contiene la operación radicación aplicada a una letra.

b) $-3ab^6$ → Es un monomio.

c) $2 - x + xy^{-3}$ → No es un polinomio. Contiene potencias negativas.

d) $4x^4 - x - y - 1$ → Es un polinomio.

5.3. Halla el polinomio que expresa el volumen de este cuerpo geométrico.



Lo podemos considerar como un solo ortoedro de aristas $y + x$, 2, 2. Luego su volumen, V, es:

$V = (y + x) \cdot 2 \cdot 2 = 4 \cdot (y + x) = 4y + 4x$

5.4. Calcula el valor numérico de $x^3 - 5x^2 + 6x + 8$ para $x = -3$ y para $x = 3$

Para $x = -3$

$(-3)^3 - 5 \cdot (-3)^2 + 6(-3) + 8 = -27 - 5 \cdot 9 + 6 \cdot (-3) + 8 = -27 - 45 - 18 + 8 = -82$

Para $x = 3$

$3^3 - 5 \cdot 3^2 + 6 \cdot 3 + 8 = 27 - 5 \cdot 9 + 6 \cdot 3 + 8 = 27 - 45 + 18 + 8 = 8$

5.5. Haz las siguientes operaciones y reduce términos semejantes.

a) $(x - y) - (y - z^2) - (z - 2y) + z^2$ **d)** $2x - x(a + b + 2) + 4xb^2 : (2x)$

b) $(3x^2 - 1) \cdot (3x^2 - 1)$ **e)** $(2x^3 - 3x) \cdot 4x - (2 - x) \cdot (2x^2 - 7)$

c) $(az^2 + 12baz^2 - 2z^2ab^2) : (2az^2)$

a) $(x - y) - (y - z^2) - (z - 2y) + z^2 = x - y - y + z^2 - z + 2y + z^2 = x + 2z^2 - z$

b) $(3x^2 - 1) \cdot (3x^2 - 1) = (3x^2 - 1)^2 = 9x^4 - 6x^2 + 1$

c) $(az^2 + 12baz^2 - 2z^2ab^2) : (2az^2) = \dfrac{1}{2} + 6b - b^2$

d) $2x - x(a + b + 2) + 4xb^2 : (2x) = 2x - xa - xb - 2x + 2b^2 = 2b^2 - xa - xb$

e) $(2x^3 - 3x) \cdot 4x - (2 - x) \cdot (2x^2 - 7) = 8x^4 - 12x^2 - (4x^2 - 14 - 2x^3 + 7x) =$
$= 8x^4 - 12x^2 - 4x^2 + 14 + 2x^3 - 7x = 8x^4 + 2x^3 - 16x^2 - 7x + 14$

EJERCICIOS

Igualdades y ecuaciones

6.36. (TIC) Comprueba si el valor asignado a *x* convierte la ecuación correspondiente en una igualdad numérica.

a) $x + 8 = 10$ $\quad x = -2$

b) $15 + x = 12$ $\quad x = -3$

c) $6x - 24 = 2x$ $\quad x = 4$

d) $4(x - 5) = 20$ $\quad x = 20$

e) $\frac{4x+60}{8} = -x$ $\quad x = -5$

f) $\frac{3x}{2} - \frac{x}{5} = 13$ $\quad x = 10$

a) $-2 + 8 = 6 \neq 10$ No la convierte en una igualdad numérica.

b) $15 + (-3) = 12$ Sí la convierte en una igualdad numérica.

c) $6 \cdot 4 - 24 \neq 4 \cdot 2 \rightarrow 0 \neq 8$ No la convierte en una igualdad numérica.

d) $4 \cdot (15) = 60 \neq 20$ No la convierte en una igualdad numérica.

e) $\frac{4\cdot(-5)+60}{8} = -(-5) \rightarrow 5 = 5$ Sí la convierte en una igualdad numérica.

f) $\frac{3\cdot 10}{2} - \frac{10}{5} = 13 \rightarrow 15 - 2 = 13$ Sí la convierte en una igualdad numérica.

6.37. (TIC) Comprueba si los valores de *x* verifican la ecuación correspondiente.

a) $6x^2 + 4 = 58$ $\quad x = 0$ y $x = -3$

b) $5x^2 - 20x = 0$ $\quad x = 0$ y $x = 5$

c) $2x^2 + 9x - 5 = 0$ $\quad x = \frac{1}{2}$ y $x = -5$

a) $6x^2 + 4 = 58$

$6 \cdot 0^2 + 4 = 0 + 4 = 4 \neq 58$ Para $x = 0$, no se verifica la igualdad.

$6 \cdot 3^2 + 4 = 6 \cdot 9 + 4 = 54 + 4 = 58$ Para $x = 3$, sí se verifica la igualdad.

b) $5x^2 - 20x = 0$

$5 \cdot 0^2 - 20 \cdot 0 = 0$ Para $x = 0$, sí se verifica la igualdad.

$5 \cdot 5^2 - 20 \cdot 5 = 125 - 100 \neq 0$ Para $x = 5$, no se verifica la igualdad.

c) $2x^2 + 9x - 5 = 0$

$2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 9\cdot\frac{1}{2} - 5 = 2\cdot\frac{1}{4} + \frac{9}{2} - 5 = \frac{10}{2} - \frac{10}{2} = 0$ Para $x = \frac{1}{2}$, sí se verifica la igualdad.

$2(-5)^2 + 9 \cdot (-5) - 5 = 2 \cdot 25 - 45 - 5 = 0$ Para $x = -5$, sí se verifica la igualdad.

Resolución de ecuaciones de primer grado

6.38. Aplica la regla de la suma y del producto para resolver las siguientes ecuaciones.

a) $5x + 5 = 35$

b) $2x + 1 = x + 5$

c) $x - 8 + 3 = 0$

d) $8 = \frac{4}{3}x$

e) $2 + 5x = x - 18$

f) $\frac{x}{4} - 6 = -2$

g) $1 = -\frac{x}{3}$

h) $6 + x = 5x - 22$

i) $3x - 36 = -\frac{2}{5}x$

j) $-\frac{x}{3} - x = -x - 21$

k) $7 - 3x - \frac{x}{7} = 6 - 4x$

l) $11 + \frac{x}{5} = \frac{1}{3} - 3x$

a) $5x + 5 = 35$

$5x + 5 - 5 = 35 - 5 \rightarrow 5x = 30$

$\frac{5x}{5} = \frac{30}{5} \rightarrow x = 6$

b) $2x + 1 = x + 5$

$2x + 1 - x = x + 5 - x$

$x + 1 - 1 = 5 - 1 \rightarrow x = 4$

c) $x - 8 + 3 = 0$

$x - 5 = 0 \rightarrow x - 5 + 5 = 0 + 5 \rightarrow x = 5$

d) $8 = \frac{4}{3}x$

$3 \cdot 8 = 3 \cdot \frac{4}{3}x \rightarrow 24 = 4x$

$\frac{24}{4} = \frac{4x}{4} \rightarrow 6 = x$

e) $2 + 5x = x - 18$

$2 + 5x - x = x - 18 - x$

$2 + 4x - 2 = -18 - 2 \rightarrow 4x = -20$

$\frac{4x}{4} = \frac{-20}{4} \rightarrow x = -5$

f) $\frac{x}{4} - 6 = -2$

$4 \cdot \frac{x}{4} - 4 \cdot 6 = 4 \cdot (-2) \rightarrow x - 24 = -8$

$x - 24 + 24 = -8 + 24 \rightarrow x = 16$

g) $1 = -\frac{x}{3}$

$(-3) \cdot 1 = (-3) \cdot \left(-\frac{x}{3}\right) \rightarrow -3 = x$

h) $6 + x = 5x - 22$

$6 + x - 6 = 5x - 22 - 6 \rightarrow x = 5x - 28$

$x - 5x = 5x - 28 - 5x \rightarrow -4x = -28$

$\frac{-4x}{-4} = \frac{-28}{-4} \rightarrow x = 7$

i) $3x - 36 = -\frac{2}{5}x$

$15x - 180 = -2x \rightarrow 15x - 180 + 2x = -2x + 2x$

$17x - 180 + 180 = 0 + 180 \rightarrow 17x = 180$

$\frac{17x}{17} = \frac{180}{17} \rightarrow x = \frac{180}{17}$

j) $-\frac{x}{3} - x = -x - 21$

$3\left(-\frac{x}{3}\right) - 3x = -3x - 3 \cdot 21 \rightarrow -x - 3x = -3x - 63$

$-x - 3x + 3x = -3x - 63 + 3x \rightarrow -x = -63 \rightarrow x = 63$

k) $7 - 3x - \frac{x}{7} = 6 - 4x$

$49 - 21x - x = 42 - 28x$

$49 - 21x - x + 28x = 42 - 28x + 28x$

$49 + 6x - 49 = 42 - 49 \rightarrow 6x = -7$

$\frac{6x}{6} = \frac{-7}{6} \rightarrow x = \frac{-7}{6}$

l) $11 + \frac{x}{5} = \frac{1}{3} - 3x$

$165 + 3x = 5 - 45x$

$165 + 3x + 45x = 5 - 45x + 45x \rightarrow 165 + 48x = 5$

$165 + 48x - 165 = 5 - 165 \rightarrow 48x = -160$

$\frac{48x}{48} = \frac{-160}{48} \rightarrow x = -\frac{10}{3}$

6.39. Calcula la solución de las siguientes ecuaciones.

a) $8 + x = 3(x - 8) + 2$

b) $-4x + 3 = -2x + 6(x - 4) - 2$

c) $3x + 4 + 6(x + 5) = 2(x + 3)$

d) $5x + 2(x + 6) - 7x = 3x + 8$

e) $11(x - 2) = -3(x - 7) + 3(5x + 9)$

f) $x - 2(x - 7) - (x + 3) = 2(3 - x)$

g) $5(3 - 2x) + 3x = -6 - 7(x - 3)$

h) $9x - 8(3 + x) + 20 = -3(x + 4)$

a) $8 + x = 3(x - 8) + 2$

$8 + x = 3x - 24 + 2 \rightarrow 8 + x = 3x - 22$

$x - 3x = -22 - 8 \rightarrow -2x = -30$

$x = 15$

b) $-4x + 3 = -2x + 6(x - 4) - 2$

$-4x + 3 = -2x + 6x - 24 - 2 \rightarrow -4x + 3 = 4x - 26$

$-4x - 4x = -26 - 3 \rightarrow -8x = -29$

$$x = \frac{29}{8}$$

c) $3x + 4 + 6(x + 5) = 2(x + 3)$

$3x + 4 + 6x + 30 = 2x + 6 \rightarrow 9x + 34 = 2x + 6$

$9x - 2x = 6 - 34 \rightarrow 7x = -28$

$x = -4$

d) $5x + 2(x + 6) - 7x = 3x + 8$

$5x + 2x + 12 - 7x = 3x + 8 \rightarrow 12 = 3x + 8$

$12 - 8 = 3x \rightarrow 4 = 3x$

$$x = \frac{4}{3}$$

e) $11(x - 2) = -3(x - 7) + 3(5x + 9)$

$11x - 22 = -3x + 21 + 15x + 27 \rightarrow 11x - 22 = 12x + 48$

$-22 - 48 = 12x - 11x \rightarrow -70 = x$

$x = -70$

f) $x - 2(x - 7) - (x + 3) = 2(3 - x)$

$x - 2x + 14 - x - 3 = 6 - 2x \rightarrow -2x + 11 = 6 - 2x$

$-2x + 2x = 6 - 11 \rightarrow 0 = -5$ ¡Contradicción!

No existe solución.

g) $5(3 - 2x) + 3x = -6 - 7(x - 3)$

$15 - 10x + 3x = -6 - 7x + 21 \rightarrow 15 - 7x = -7x + 15$

$-7x + 7x = 15 - 15 \rightarrow 0 = 0$ ¡Es una identidad!

Cualquier valor de x es solución.

h) $9x - 8(3 + x) + 20 = -3(x + 4)$

$9x - 24 - 8x + 20 = -3x - 12 \rightarrow x - 4 = -3x - 12$

$x + 3x = -12 + 4 \rightarrow 4x = -8$

$x = -2$

6.40. Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $\dfrac{x+6}{2}=x+5$

b) $x-5=-\dfrac{4x-12}{4}$

c) $\dfrac{4x}{3}-21=-24+\dfrac{x}{2}$

d) $\dfrac{5}{2}(x+3)=4(x-2)-\dfrac{1}{4}$

e) $3+2\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{1}{6}(x+5)$

a) $\dfrac{x+6}{2}=x+5$

$x + 6 = 2x + 10$

$x - 2x = 10 - 6 \rightarrow -x = 4$

$x = -4$

b) $x-5=-\dfrac{4x-12}{4}$

$4x - 20 = -(4x - 12) \rightarrow 4x - 20 = -4x + 12$

$4x + 4x = 12 + 20 \rightarrow 8x = 32$

$x = 4$

c) $\dfrac{4x}{3}-21=-24+\dfrac{x}{2}$ m.c.m.(3, 2) = 6

$2 \cdot 4x - 6 \cdot 21 = 6(-24) + 3x \rightarrow 8x - 126 = -144 + 3x$

$8x - 3x = -144 + 126 \rightarrow 5x = -18$

$x=\dfrac{-18}{5}$

d) $\dfrac{5}{2}(x+3)=4(x-2)-\dfrac{1}{4}$

$\dfrac{5x}{2}+\dfrac{15}{2}=4x-8-\dfrac{1}{4}$ m.c.m.(2, 4) = 4

$10x + 30 = 16x - 32 - 1 \rightarrow 10x + 30 = 16x - 33$

$10x - 16x = -33 - 30 \rightarrow -6x = -63$

$x=\dfrac{21}{2}$

e) $3+2\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{1}{6}(x+5)$

$3+\dfrac{2x}{3}-\dfrac{6}{4}=\dfrac{x}{6}+\dfrac{5}{6}$ m.c.m.(3, 4, 6) = 12

$36 + 8x - 18 = 2x + 10 \rightarrow 8x + 18 = 2x + 10$

$8x - 2x = 10 - 18 \rightarrow 6x = -8$

$x=\dfrac{-4}{3}$

6.41. Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $\frac{2x+1}{2}+\frac{7}{10}=\frac{3x-16}{5}$

b) $-\frac{x-5}{6}=\frac{x-1}{9}-\frac{x-3}{4}$

c) $\frac{3x-4}{4}=\frac{2x+3}{3}-\frac{x-9}{3}$

d) $\frac{x+9}{12}=3+\frac{3x+7}{20}-\frac{x-3}{8}$

e) $\frac{x+1}{2}-1=\frac{x+3}{4}-\frac{x+4}{5}$

a) $\frac{2x+1}{2}+\frac{7}{10}=\frac{3x-16}{5}$ m.c.m.(2, 10, 5) = 10

$5(2x + 1) + 7 = 2(3x - 16) \rightarrow 10x + 5 + 7 = 6x - 32$

$10x - 6x = -32 - 5 - 7 \rightarrow 4x = -44$

$x = -11$

b) $-\frac{x-5}{6}=\frac{x-1}{9}-\frac{x-3}{4}$ m.c.m.(6, 9, 4) = 36

$-6(x - 5) = 4(x - 1) - 9(x - 3) \rightarrow -6x + 30 = 4x - 4 - 9x + 27$

$-6x - 4x + 9x = -4 + 27 - 30 \rightarrow -x = -7$

$x = 7$

c) $\frac{3x-4}{4}=\frac{2x+3}{3}-\frac{x-9}{3}$ m.c.m.(4, 3) = 12

$3(3x - 4) = 4(2x + 3) - 4(x - 9) \rightarrow 9x - 12 = 8x + 12 - 4x + 36$

$9x - 8x + 4x = 12 + 36 + 12 \rightarrow 5x = 60$

$x = 12$

d) $\frac{x+9}{12}=3+\frac{3x+7}{20}-\frac{x-3}{8}$ m.c.m.(12, 20, 8) = 120

$10(x + 9) = 360 + 6(3x + 7) - 15(x - 3) \rightarrow 10x + 90 = 360 + 18x + 21 - 15x + 45$

$10x - 18x + 15x = 360 + 21 + 45 - 90 \rightarrow 7x = 336$

$x = 48$

e) $\frac{x+1}{2}-1=\frac{x+3}{4}-\frac{x+4}{5}$ m.c.m.(2, 4, 5) = 20

$10(x + 1) - 20 = 5(x + 3) - 4(x + 4) \rightarrow 10x + 10 - 20 = 5x + 15 - 4x - 16$

$10x - 10 = x - 1 \rightarrow 10x - x = 10 - 1 \rightarrow 9x = 9$

$x = 1$

6.42. Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $5+\frac{2x+4}{3}=-\frac{3x+9}{4}+\frac{5x+7}{2}$

b) $\frac{3x-1}{15}+\frac{x-4}{5}=\frac{x+4}{3}-2$

c) $\frac{x+3}{8}+1-\frac{x-3}{10}-\frac{x-5}{4}=0$

d) $\frac{5x+2}{3}-\frac{3x+19}{2}+\frac{1-3x}{2}-5+\frac{x+1}{6}=x$

e) $\frac{2-3x}{2}-\frac{x-1}{16}+\frac{x}{4}=\frac{x-4}{8}$

f) $\frac{4-6x}{15}-\frac{2-x}{4}+\frac{5x-3}{20}=\frac{1}{12}$

a) $5+\frac{2x+4}{3}=-\frac{3x+9}{4}+\frac{5x+7}{2}$ m.c.m.(3, 4, 2) = 12

$60 + 4(2x + 4) = –3(3x + 9) + 6(5x + 7) \rightarrow 60 + 8x + 16 = –9x – 27 + 30x + 42$

$76 + 8x = 21x + 15 \rightarrow 8x – 21x = 15 – 76 \rightarrow –13x = –61$

$x=\frac{61}{13}$

b) $\frac{3x-1}{15}+\frac{x-4}{5}=\frac{x+4}{3}-2$ m.c.m.(15, 5, 3) = 15

$3x – 1 + 3(x – 4) = 5(x + 4) – 30 \rightarrow 3x – 1 + 3x – 12 = 5x + 20 – 30$

$6x – 13 = 5x – 10 \rightarrow 6x – 5x = –10 + 13$

$x = 3$

c) $\frac{x+3}{8}+1-\frac{x-3}{10}-\frac{x-5}{4}=0$ m.c.m.(8, 10, 4) = 40

$5(x + 3) + 40 –4(x – 3) – 10(x – 5) = 0 \rightarrow 5x + 15 + 40 – 4x + 12 – 10x + 50 = 0$

$–9x + 117 = 0 \rightarrow –9x = –117$

$x = 13$

d) $\frac{5x+2}{3}-\frac{3x+19}{2}+\frac{1-3x}{2}-5+\frac{x+1}{6}=x$ m.c.m.(3, 2, 6) = 6

$2(5x + 2) –3(3x + 19) + 3(1 – 3x) – 30 + x + 1 = 6x$

$10x + 4 – 9x – 57 + 3 – 9x – 30 + x + 1 = 6x \rightarrow –7x – 79 = 6x$

$–7x – 6x = 63 \rightarrow –13x = –79$

$x=\frac{79}{13}$

e) $\frac{2-3x}{2}-\frac{x-1}{16}+\frac{x}{4}=\frac{x-4}{8}$ m.c.m.(1, 16, 4, 8) = 16

$8(2 – 3x) – (x – 1) + 4x = 2(x – 4) \rightarrow 16 – 24x – x + 1 + 4x = 2x – 8$

$–21x + 17 = 2x – 8 \rightarrow –21x – 2x = –8 – 17 \rightarrow –23x = –25$

$x=\frac{25}{23}$

f) $\frac{4-6x}{15}-\frac{2-x}{4}+\frac{5x-3}{20}=\frac{1}{12}$ m.c.m.(15, 4, 20, 12) = 60

$4(4 – 6x) – 15(2 – x) + 3(5x – 3) = 5 \rightarrow 16 – 24x – 30 + 15x + 15x – 9 = 5$

$–23 + 6x = 5 \rightarrow 6x = 28$

$x=\frac{28}{6}=\frac{14}{3}$

6.43. Resuelve las siguientes ecuaciones

a) $(x-1)\cdot(x+1)-(x-2)^2=x-7$

b) $5x+(3-x)^2=x^2-2(x+6)$

c) $x+x(x-5)=(x+1)^2-7$

d) $x\cdot(3-x)-5x=8-(x+2)^2$

e) $4(x-2)\cdot(x+2)=(2x+1)^2-3\cdot(x-2)$

f) $8-3(x+1)\cdot(x-2)-5=9-3\cdot(x+1)^2$

a) $(x-1)\cdot(x+1)-(x-2)^2=x-7$

$x^2-1-(x^2-4x+4)=x-7$

$x^2-1-x^2+4x-4=x-7$

$4x-5=x-7\rightarrow 4x-x=-7+5$

$3x=-2\rightarrow x=\dfrac{-2}{3}$

b) $5x+(3-x)^2=x^2-2(x+6)$

$5x+9-6x+x^2=x^2-2x-12$

$5x-6x+x^2-x^2+2x=-12-9$

$x=-21$

c) $x+x(x-5)=(x+1)^2-7$

$x+x^2-5x=x^2+2x+1-7$

$x+x^2-5x-x^2-2x=1-7$

$-6x=-6\rightarrow x=1$

d) $x(3-x)-5x=8-(x+2)^2$

$3x-x^2-5x=8-(x^2+4x+4)$

$3x-x^2-5x=8-x^2-4x-4$

$3x-x^2-5x+x^2+4x=8-4\rightarrow 2x=4$

$x=2$

e) $4(x-2)\cdot(x+2)=(2x+1)^2-3\cdot(x-2)$

$4x^2-16=4x^2+4x+1-3x+6$

$4x^2-4x^2-4x+3x=1+6+16$

$-x=23\rightarrow x=-23$

f) $8-3(x+1)\cdot(x-2)-5=9-3\cdot(x+1)^2$

$8-3(x^2-2x+x-2)-5=9-3(x^2+2x+1)$

$8-3x^2+6x-3x+6-5=9-3x^2-6x-3$

$-3x^2+6x-3x+3x^2+6x=9-3-8-6+5$

$9x=-3\rightarrow x=-\dfrac{1}{3}$

Resolución de ecuaciones de segundo grado

6.44. Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $x^2-16=0$

b) $2x^2=98$

c) $-x^2=2-66$

d) $1-x^2=0$

e) $4x^2=0$

f) $-9+4x^2=0$

g) $-30+x^2=6$

h) $1-4x^2=0$

i) $4x^2+1=5$

j) $\dfrac{1}{4}x^2=1$

a) $x^2-16=0$

$x^2=16\rightarrow x=\pm\sqrt{16}\rightarrow x=\pm 4$

b) $2x^2=98$

$x^2=49\rightarrow x=\pm\sqrt{49}\rightarrow x=\pm 7$

c) $-x^2=2-66$

$-x^2=-64\rightarrow x^2=64\rightarrow$

$x=\pm\sqrt{64}\rightarrow x=\pm 8$

d) $1-x^2=0$

$1=x^2\rightarrow x=\pm\sqrt{1}\rightarrow x=\pm 1$

e) $4x^2=0$

$x^2=0\rightarrow x=0$

f) $-9+4x^2=0$

$4x^2=9\rightarrow x^2=\dfrac{9}{4}\rightarrow x=\pm\sqrt{\dfrac{9}{4}}\rightarrow x=\pm\dfrac{3}{2}$

g) $-30+x^2=6$

$x^2=6+30=36\rightarrow x=\pm\sqrt{36}\rightarrow x=\pm 6$

h) $1-4x^2=0$

$-4x^2=-1\rightarrow x^2=\dfrac{1}{4}\rightarrow$

$x=\pm\sqrt{\dfrac{1}{4}}\rightarrow x=\pm\dfrac{1}{2}$

i) $4x^2+1=5$

$4x^2=5-1=4\rightarrow x^2=1\rightarrow x=\pm\sqrt{1}\rightarrow x=\pm 1$

j) $\dfrac{1}{4}x^2=1$

$x^2=4\rightarrow x=\pm\sqrt{4}\rightarrow x=\pm 2$

6.45. Halla los valores de las incógnitas para que se verifiquen cada una de las siguientes ecuaciones.

a) $x(x + 2) = 0$

b) $(2x - 4)x = 0$

c) $x(\frac{1}{4} - 2x) = 0$

d) $6x \cdot (3x + 9) = 0$

e) $(x - 7)(x - 2) = 0$

f) $(x + 1)(x - 1) = 0$

g) $2(x + 3)x = 0$

h) $\left(x - \frac{1}{2}\right)(-3 - x) = 0$

a) $x(x + 2) = 0$

o bien $x = 0$

o bien $x + 2 = 0 \to x = -2$

b) $(2x - 4)x = 0$

o bien $2x - 4 = 0 \to x = \frac{4}{2} = 2$

o bien $x = 0$

c) $x(\frac{1}{4} - 2x) = 0$

o bien $x = 0$

o bien $\frac{1}{4} - 2x = 0 \to 1 - 8x = 0 \to x = \frac{1}{8}$

d) $6x(3x + 9) = 0$

o bien $6x = 0 \to x = 0$

o bien $3x + 9 = 0 \to 3x = -9 \to x = -3$

e) $(x - 7)(x - 2) = 0$

o bien $x - 7 = 0 \to x = 7$

o bien $x - 2 = 0 \to x = 2$

f) $(x + 1)(x - 1) = 0$

o bien $x + 1 = 0 \to x = -1$

o bien $x - 1 = 0 \to x = 1$

g) $2(x + 3)x = 0$

o bien $x + 3 = 0 \to x = -3$

o bien $2x = 0 \to x = 0$

h) $\left(x - \frac{1}{2}\right)(-3 - x) = 0$

o bien $x - \frac{1}{2} = 0 \to x = \frac{1}{2}$

o bien $-3 - x = 0 \to x = -3$

6.46. Halla las soluciones de las siguientes ecuaciones.

a) $13x^2 - 39x = 0$

b) $x^2 - 16x = 0$

c) $3x^2 + 7x = 0$

d) $6x + 7x^2 = 0$

e) $-5x + x^2 = 0$

f) $-14x - 42x^2 = 0$

a) $13x^2 - 39x = 0$

$13x(x - 3) = 0$

o bien $13x = 0 \to x = 0$

o bien $x - 3 = 0 \to x = 3$

b) $x^2 - 16x = 0$

$x(x - 16) = 0$

o bien $x = 0$

o bien $x - 16 = 0 \to x = 16$

c) $3x^2 + 7x = 0$

$x(3x + 7) = 0$

o bien $x = 0$

o bien $3x + 7 = 0 \to x = \frac{-7}{3}$

d) $6x + 7x^2 = 0$

$x(6 + 7x) = 0$

o bien $x = 0$

o bien $6 + 7x = 0 \to x = -\frac{6}{7}$

e) $-5x + x^2 = 0$

$x(-5 + x) = 0$

o bien $x = 0$

o bien $-5 + x = 0 \to x = 5$

f) $-14x - 42x^2 = 0$

$-14x(x + 3) = 0$

o bien $-14x = 0 \to x = 0$

o bien $x + 3 = 0 \to x = -3$

6.47. Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $x^2 - x - 6 = 0$ **d)** $1 = 6x^2 + x$

b) $x^2 + 2x - 3 = 0$ **e)** $9 = 8x + x^2$

c) $3x - 10 = x^2$ **f)** $-4x^2 = 7 - 7x$

a) $x^2 - x - 6 = 0$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} \begin{cases} x = \dfrac{1+5}{2} = \dfrac{6}{2} = 3 \\ x = \dfrac{1-5}{2} = \dfrac{-4}{2} = -2 \end{cases}$$

b) $x^2 + 2x - 3 = 0$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} \begin{cases} x = \dfrac{-2+4}{2} = \dfrac{2}{2} = 1 \\ x = \dfrac{-2-4}{2} = \dfrac{-6}{2} = -3 \end{cases}$$

c) $3x - 10 = x^2 \rightarrow -x^2 + 3x - 10 = 0$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-10)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-3 \pm \sqrt{-31}}{-2} \Rightarrow \text{ El radicando es negativo. No existe solución real.}$$

d) $1 = 6x^2 + x \rightarrow 0 = 6x^2 + x - 1$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-1)}}{2 \cdot 6} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{12} \begin{cases} x = \dfrac{-1+5}{12} = \dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3} \\ x = \dfrac{-1-5}{12} = \dfrac{-6}{12} = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

e) $9 = 8x + x^2 \rightarrow 0 = x^2 + 8x - 9$

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-9)}}{2 \cdot 1} = \frac{-8 \pm \sqrt{100}}{2} \begin{cases} x = \dfrac{-8+10}{2} = 1 \\ x = \dfrac{-8-10}{2} = -9 \end{cases}$$

f) $-4x^2 = 7 - 7x \rightarrow -4x^2 + 7x - 7 = 0$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot (-4) \cdot (-7)}}{2 \cdot (-4)} = \frac{-7 \pm \sqrt{-63}}{-8} \Rightarrow \text{El radicando es negativo. No hay solución real.}$$

6.48. Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $2x^2 - 32 = 0$ **e)** $\frac{1}{4}x^2 = -x$ **i)** $5x + x^2 = 6$

b) $2x^2 - 32x = 0$ **f)** $\frac{1}{16}x^2 = \frac{1}{4}$ **j)** $2x^2 + x - 3 = 0$

c) $x^2 = x$ **g)** $x^2 + \frac{x}{2} + 2 = 2$ **k)** $x^2 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2} = 0$

d) $6x^2 = -12x$ **h)** $x^2 + x - 2 = 0$ **l)** $2x^2 = x + 1$

a) $2x^2 - 32 = 0 \rightarrow 2x^2 = 32 \rightarrow x^2 = \frac{32}{2} \rightarrow x^2 = 16 \rightarrow x = \pm\sqrt{16} \rightarrow x = \pm 4$

b) $2x^2 - 32x = 0 \rightarrow x(2x - 32) = 0 \rightarrow x = 0$ o bien $(2x - 32) = 0 \rightarrow x = \frac{32}{2} \rightarrow x = 16$

c) $x^2 = x \rightarrow x^2 - x = 0 \rightarrow x(x-1) = 0 \rightarrow x = 0$ y $x = 1$

d) $6x^2 = -12x \rightarrow 6x^2 + 12x = 0 \rightarrow 6x(x + 2) = 0 \rightarrow x = 0$ y $x = -2$

e) $\frac{1}{4}x^2 = -x \rightarrow x^2 = -4x \rightarrow x^2 + 4x = 0 \rightarrow x(x + 4) = 0 \rightarrow x = 0$ y $x = -4$

f) $\frac{1}{16}x^2 = \frac{1}{4} \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$

g) $x^2 + \frac{x}{2} + 2 = 2 \rightarrow 2x^2 + x + 4 = 4 \rightarrow 2x^2 + x = 0 \rightarrow x(2x + 1) = 0 \rightarrow x = 0$ y $x = -\frac{1}{2}$

h) $x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{-1+\sqrt{9}}{2} = \frac{-1+3}{2} = 1$ y $x = \frac{-1-\sqrt{9}}{2} = \frac{-1-3}{2} = -2$

i) $5x + x^2 = 6 \rightarrow x^2 + 5x - 6 = 0 \rightarrow x = \frac{-5+\sqrt{49}}{2} = \frac{-5+7}{2} = 1$ y $x = \frac{-5-\sqrt{49}}{2} = \frac{-5-7}{2} = -6$

j) $2x^2 + x - 3 = 0 \rightarrow x = \frac{-1+\sqrt{25}}{4} = \frac{-1+5}{4} = 1$ y $x = \frac{-1-\sqrt{25}}{4} = \frac{-1-5}{4} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$

k) $x^2 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2} = 0 \rightarrow 2x^2 + x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{-1+\sqrt{9}}{4} = \frac{-1+3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ y $x = \frac{-1-\sqrt{9}}{4} = \frac{-1-3}{4} = -1$

l) $2x^2 = x + 1 \rightarrow 2x^2 - x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1+\sqrt{9}}{4} = \frac{1+3}{4} = 1$ y $x = \frac{1-\sqrt{9}}{4} = \frac{1-3}{4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$

6.49. Halla la solución de las siguientes ecuaciones.

a) $(2x-1)^2 + (2x+1)^2 = 10$ **c)** $\frac{(2x+5)^2}{2} + \frac{x+5}{3} = -\frac{1}{2}$

b) $\frac{x-1}{3} + x^2 = 1$

a) $(2x-1)^2 + (2x+1)^2 = 10 \rightarrow 4x^2 - 4x + 1 + 4x^2 + 4x + 1 - 10 = 0 \rightarrow 8x^2 - 8 = 0 \rightarrow x^2 = 1$

$x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$

b) $\frac{x-1}{3} + x^2 = 1 \rightarrow x - 1 + 3x^2 = 3 \rightarrow 3x^2 + x - 4 = 0$

$x = \frac{-1+\sqrt{49}}{6} = \frac{-1+7}{6} = 1$ y $x = \frac{-1-\sqrt{49}}{6} = \frac{-1-7}{6} = -\frac{4}{3}$

c) $\frac{(2x+5)^2}{2} + \frac{x+5}{3} = -\frac{1}{2} \rightarrow \frac{4x^2+20x+25}{2} + \frac{x+5}{3} = -\frac{1}{2} \rightarrow 12x^2 + 60x + 75 + 2x + 10 = -3$

$12x^2 + 62x + 88 = 0 \rightarrow x = \frac{-62 \pm \sqrt{-380}}{24}$. El radicando es negativo, luego no existe solución real.

PROBLEMAS

6.50. La edad de Ignacio es el doble de la de su hermana Sandra más 2 años. La suma de las edades de los dos es de 17 años. ¿Cuántos años tiene cada uno?

Edad de Sandra: x

Edad de Ignacio: $2x + 2$

Ecuación: $x + 2x + 2 = 17$

Resolución: $3x + 2 = 17 \rightarrow 3x = 15 \rightarrow x = 5$

Solución: Sandra tiene 5 años, e Ignacio tiene $2 \cdot 5 + 2 = 12$ años.

6.51. La suma de tres números consecutivos es igual al doble del mayor más 1. Calcula los números.

Primer número:	x
Segundo número:	$x + 1$
Tercer número:	$x + 2$
Ecuación:	$x + x + 1 + x + 2 = 2(x + 2) + 1$
Resolución:	$3x + 3 = 2x + 4 + 1 \rightarrow 3x - 2x = 5 - 3 \rightarrow x = 2$
Solución:	Los números son 2, 3 y 4.

6.52. La abuela de David tiene 61 años. Esta edad es el triple de la edad de su nieto más 25 años. ¿Cuál es la edad de David?

Edad de David:	x
Ecuación:	$61 = 3x + 25$
Resolución:	$61 - 25 = 3x \rightarrow 36 = 3x \rightarrow 12 = x$
Solución:	David tiene 12 años.

6.53. El doble de un número y el triple del siguiente suman 33. ¿Cuál es el número?

Primer número:	x
Siguiente número:	$x + 1$
Ecuación:	$2x + 3 \cdot (x + 1) = 33$
Resolución:	$2x + 3x + 3 = 33 \rightarrow 5x = 30 \rightarrow x = 6$
Solución:	El número buscado es el 6.

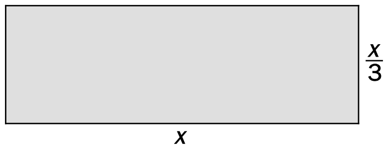
6.54. Un poste está pintado de azul, rojo y amarillo. La parte pintada de azul es $\frac{2}{5}$ del poste, la parte pintada de rojo es $\frac{1}{2}$ de la pintada de azul, y los 48 centímetros restantes están pintados de amarillo. ¿Cuánto mide cada parte?

Tamaño del poste:	x cm
Parte azul:	$\frac{2}{5}x$
Parte roja:	$\frac{1}{2}$ de $\frac{2}{5}x \rightarrow \frac{1}{5}x$
Parte amarilla:	48 cm
Ecuación:	La suma de todas las partes da el tamaño del poste: $\frac{2}{5}x + \frac{1}{5}x + 48 = x$.
Resolución:	$2x + x + 240 = 5x \rightarrow 240 = 2x \rightarrow 120 = x \rightarrow$ El poste mide 120 cm.
Solución:	La parte azul mide 48 cm; la roja, 24 cm, y la amarilla, 48 cm.

6.55. Para vallar un terreno rectangular se han necesitado 240 metros de valla. Si el ancho del campo es la tercera parte del largo, ¿cuánto miden el largo y el ancho?

Longitud del largo: x

Longitud del ancho: $\frac{x}{3}$



Ecuación: El perímetro mide 240 m → $2x + \frac{2x}{3} = 240$.

Resolución: $6x + 2x = 720 \rightarrow 8x = 720 \rightarrow x = 90$

Solución: El largo mide 90 metros, y el ancho, 30.

6.56. En la primera quincena del mes, una tienda de cómics vende la mitad de los que tenía a la venta. En la segunda quincena vende la mitad de los que vendió en la primera. Le quedan sin vender 150 cómics. ¿Cuántos cómics tenía a la venta?

Cómics a la venta: x

Venta en la 1.ª quincena: $\frac{x}{2}$

Venta en la 2.ª quincena: $\frac{1}{2}$ de $\frac{x}{2} \rightarrow \frac{x}{4}$

Quedan sin vender: 150 cómics

Ecuación: la suma de los vendidos y los sin vender hace el total de cómics: $\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + 150 = x$

Resolución: $2x + x + 600 = 4x \rightarrow 600 = x$

Solución: Tenía 600 cómics a la venta.

6.57. Si al doble de un número le sumamos su tercera parte, obtenemos el triple de ese número menos 12 unidades. ¿Cuál es ese número?

Número buscado: x

Doble del número: $2x$

Tercera parte del número: $\frac{x}{3}$

Triple del número: $3x$

Ecuación: $2x + \frac{x}{3} = 3x - 12$

Resolución: $6x + x = 9x - 36 \rightarrow -2x = -36 \rightarrow x = 18$

Solución: El número buscado es el 18.

6.58. El producto de dos números consecutivos es 132. ¿Cuáles son esos números?

Primer número: x

Siguiente número: $x + 1$

Ecuación: $x \cdot (x + 1) = 132$

Resolución: $x^2 + x = 132 \rightarrow x^2 + x - 132 = 0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{529}}{2} = \frac{-1 \pm 23}{2} = \begin{cases} x = 11 \\ x = -12 \end{cases}$

Soluciones: los números son 11 y 12, o bien los números son –12 y –11.

6.59. María tiene cinco años menos que su hermano. Dentro de dos años, la edad de María será la mitad de la de su hermano. ¿Cuántos años tiene cada uno?

Edad del hermano hoy: x

Edad de María hoy: $x - 5$

Edad del hermano dentro de 2 años: $x + 2$

Edad de María dentro de 2 años: $x - 5 + 2 \rightarrow x - 3$

Ecuación: $x - 3 = \dfrac{x + 2}{2}$

Resolución: $2x - 6 = x + 2 \rightarrow x = 8$

Solución: El hermano tiene 8 años, y María, 3.

6.60. La revista del colegio propone a Nuria escribir un artículo sobre Ecología. Le dicen que dispone de 3 páginas con 3 columnas cada una. Nuria decide dedicar al reciclaje el doble de columnas que a la introducción, y a las energías renovables una columna más que a la introducción. ¿Cuántas columnas dedica a cada apartado?

N.º de columnas para la introducción: x

N.º de columnas para el reciclaje: $2x$

N.º de columnas para energías renovables: $x + 1$

Ecuación: $x + 2x + (x + 1) = 9$

Resolución: $x + 2x + x + 1 = 9 \rightarrow 4x + 1 = 9 \rightarrow 4x = 8 \rightarrow x = 2$

Dedica 2 columnas a la introducción, 4 al reciclaje y 3 a energías renovables.

6.61. Halla tres números impares consecutivos cuya suma valga 69.

Primer número: $2x + 1$

Siguiente número: $2x + 1 + 2 = 2x + 3$

Siguiente número: $2x + 3 + 2 = 2x + 5$

Ecuación: $(2x + 1) + (2x + 3) + (2x + 5) = 69$

Resolución: $2x + 1 + 2x + 3 + 2x + 5 = 69 \rightarrow 6x + 9 = 69 \rightarrow 6x = 60 \rightarrow x = 10$

Solución: Primer número: $2x + 1 = 20 + 1 = 21$

Siguiente número: $2x + 3 = 20 + 3 = 23$

Siguiente número: $2x + 5 = 20 + 5 = 25$

6.62. Al dividir un número aumentado en 16 por dicho número se obtiene 9 como cociente exacto. ¿Cuál es dicho número?

Número buscado: x

Número aumentado en 16: $x + 16$

Ecuación: $\dfrac{x + 16}{x} = 9$

Resolución: $x + 16 = 9x \rightarrow 16 = 8x \rightarrow 2 = x$

Solución: El número es el 2.

6.63. Un viajero hace un trayecto en tres etapas. En la primera recorre un cuarto del trayecto; en la segunda, la mitad del trayecto que queda, y en la tercera, 60 kilómetros. ¿Cuántos kilómetros tiene el trayecto?

Longitud del trayecto: x

Primera etapa: $\frac{x}{4}$ (luego quedan $x - \frac{x}{4} = \frac{3}{4}x$)

Segunda etapa: $\frac{1}{2}$ de $\frac{3}{4}x \to \frac{3}{8}x$

Tercera etapa: 60 km

Ecuación: $\frac{1}{4}x + \frac{3}{8}x + 60 = x$

Resolución: $2x + 3x + 480 = 8x \to 480 = 3x \to 160 = x$

Solución: El trayecto tiene 160 kilómetros.

6.64. Una pastelería quiere preparar paquetes mezclando caramelos de naranja de 2 euros el kilogramo con 8 kilogramos de caramelos de limón de 5 euros el kilogramo. ¿Cuántos caramelos de naranja tiene que utilizar para que el kilogramo de la mezcla salga a 3 euros?

Número de kg de caramelos de naranja de 2 €/kg que mezclamos: $x \to$ Coste: $2x$ €.

Número de kg de caramelos de limón de 5 €/kg que mezclamos: 8 kg → Coste: 40 €.

Coste por separado: $2x + 40$

Número de kg de mezcla: $8 + x \to$ Coste conjunto: $3(8 + x)$ €

Ecuación: $2x + 40 = 3(8 + x)$

Resolución: $2x + 40 = 24 + 3x \to 16 = x$

Solución: Habrá que mezclar 16 kilogramos de caramelos de naranja con los 8 kilogramos de limón.

6.65. Un acuario tiene doble capacidad que otro. Están llenos de agua y, si se sacan 30 litros de cada uno, en uno queda triple cantidad de agua que en el otro.

a) ¿Cuál es la capacidad de los acuarios?

b) ¿Cuál es la cantidad de agua que queda en cada recipiente?

Capacidad del primero: x → Si sacamos 30 litros, quedan $x - 30$.

Capacidad del segundo: $2x$ → Si sacamos 30 litros, quedan $2x - 30$.

Ecuación: $2x - 30 = 3 \cdot (x - 30)$

Resolución: $2x - 30 = 3x - 90 \to -x = -60 \to x = 60$

Soluciones: a) Las capacidades son 60 litros el primero y 120 litros el segundo.

b) Quedarán 30 y 90 litros, respectivamente.

6.66. Dos de las condiciones que impone la legislación española para optar a la adopción de un niño o niña en Guinea son que el adoptante tenga al menos 25 años y que la diferencia de edad con el adoptado sea de, al menos, 14 años. Si María tiene 32 años y hace cinco años que Araba tenía un cuarto de la edad actual de María, ¿puede María optar a la adopción de Araba?

Edad actual de Araba: x

Ecuación: $x - 5 = \frac{32}{4}$

Resolución: $x - 5 = 8 \to x = 13$

La edad actual de Araba es 13 años. Como María tiene 32, y $32 - 13 = 19$, sí podrá optar a la adopción.

6.67. (TIC) Mezclamos 50 litros de un aceite de 3,60 euros el litro con 70 litros de otro aceite de 4,20 euros el litro. ¿Qué precio debe tener el litro de la mezcla?

Precio de la mezcla: x €/L → Coste de la mezcla: $(50 + 70)x \rightarrow 120x$ €

Coste por separado: $50 \cdot 3{,}60 + 70 \cdot 4{,}20 = 474$ €

Ecuación: $120x = 474 \rightarrow x = 3{,}95$ €

Solución: Se debe vender a 3,95 €/L.

6.68. En una clase de 2.º de ESO, la cuarta parte de los alumnos cursa Recuperación de Matemáticas; la tercera parte, Recuperación de Lengua, y los 10 restantes cursan Francés. ¿Cuántos alumnos hay en la clase?

N.º de alumnos: x. En recuperación de Matemáticas: $\frac{x}{4}$. En recuperación de Lengua: $\frac{x}{3}$.

En Francés: 10 alumnos

Ecuación: $\frac{x}{4}+\frac{x}{3}+10=x$

Resolución: $3x + 4x + 120 = 12x \rightarrow 7x + 120 = 12x \rightarrow 120 = 5x \rightarrow 24 = x$

6.69. El perímetro de la base de un depósito rectangular es de 10 metros. El ancho de la base es la cuarta parte del largo.

¿Cuánto tiene que medir la altura del depósito para que su capacidad sea de 8 metros cúbicos?

Largo de la base: x Ancho de la base: $\frac{x}{4}$

Ecuación: Del perímetro → $2x+\frac{2x}{4}=10 \rightarrow 2x+\frac{x}{2}=10 \rightarrow 4x + x = 20 \rightarrow 5x = 20 \rightarrow x = 4$

El largo de la base mide 4 m, y el ancho, 1 m.

Altura del depósito: y

Ecuación: La capacidad es de 8 metros cúbicos → $4 \cdot 1 \cdot y = 8 \rightarrow 4y = 8 \rightarrow y = 2$.

Solución: El depósito mide 2 metros de alto.

6.70. Un autobús sale de una ciudad con una velocidad constante de 80 km/h. Al cabo de una hora sale desde la misma ciudad y en la misma dirección un coche con una velocidad de 100 km/h. ¿Cuándo se juntarán?

Llamemos t al tiempo (en horas) que tarda el coche en alcanzar al autobús.

El autobús habrá recorrido $80t + 80$.

El coche habrá recorrido $100t$.

Ecuación: $80t + 80 = 100t$

Resolución: $80 = 20t \rightarrow 4 = t$

Solución: tardan 4 horas en encontrarse y estarán a $100 \cdot 4 = 400$ km de la ciudad.

6.71. El suelo de una habitación es rectangular. Un lado del suelo es 2 metros mayor que el otro. La altura de la habitación mide 2,5 metros, y el volumen es de 37,5 metros cúbicos. Calcula los lados del suelo.

Medida del lado menor: x Medida del lado mayor: $x + 2$ Altura de la habitación: 2,5 m

Ecuación: Volumen = 37,5 m^3 → $x \cdot (x + 2) \cdot 2{,}5 = 37{,}5 \rightarrow x(x + 2) = 15 \rightarrow x^2 + 2x - 15 = 0$

Resolución: $x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot 1\cdot(-15)}}{2\cdot 1}=\frac{-2\pm\sqrt{64}}{2\cdot 1}=\frac{-2\pm 8}{2\cdot 1}=\begin{cases} x=-5 \\ x=3 \end{cases}$

Solución: como no tienen sentido longitudes negativas, los lados del suelo miden 3 m y (3 + 2) = 5 m, respectivamente.

6.72. El médico recomienda a Marcos montar en bicicleta. Le sugiere que empiece con los kilómetros que pueda y que cada día aumente la distancia en una cantidad de kilómetros igual al doble de días que haya montado, así hasta llegar a 16 kilómetros. Marcos hace 8 kilómetros el primer día. ¿Cuántos días pasan hasta que recorre lo recomendado por el médico?

Días que pasan para recorrer lo recomendado por el médico: x

Ecuación: $8 + 2x = 16$

Resolución: $2x = 8 \rightarrow x = 4$

Solución: Pasan 4 días para recorrer lo recomendado por el médico.

6.73. Queremos hacer un mosaico cuadrado con azulejos también cuadrados. Si ponemos *x* azulejos en cada lado del mosaico nos sobran 87 y si ponemos un azulejo más en cada lado nos faltan 40 azulejos para poder completar el mosaico. ¿Cuántos azulejos tenemos?

Si usamos x azulejos en cada lado, sobran 87. Tenemos, por tanto, $x^2 + 87$ azulejos.

Si utilizamos $x + 1$ azulejos en cada lado, faltan 40: tenemos, por tanto, $(x + 1)^2 – 40$ azulejos.

Ecuación: $x^2 + 87 = (x + 1)^2 - 40$

Resolución: $x^2 + 87 = x^2 + 2x + 1 - 40 \rightarrow 87 = 2x - 39 \rightarrow 2x = 87 + 39 = 126 \rightarrow x = 63$

Solución: Tenemos $63^2 + 87 = 4056$ azulejos.

6.74. Un lado de un carnet de biblioteca mide 3 centímetros más que el otro, y la diagonal mide 6 centímetros más que el primer lado.

Calcula el área del carnet.

Ancho: x Largo: $x + 3$ Diagonal: $x + 6$

Ecuación: $x^2 + (x + 3)^2 = (x + 6)^2$ (Del teorema de Pitágoras)

Resolución: $x^2 + x^2 + 6x + 9= x^2 + 12x + 36 \rightarrow x^2 + x^2 + 6x + 9 - x^2 - 12x - 36 = 0 \rightarrow x^2 - 6x - 27 = 0$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{144}}{2} = \frac{6 \pm 12}{2 \cdot 1} = \begin{cases} x = 9 \\ x = -3 \end{cases}$$

De las dos soluciones, la que tiene significado geométrico es $x = 9$. Luego el ancho del carnet mide 9 centímetros, y el largo, 9 + 3 = 12.

Área del carnet: $9 \cdot 12 = 108$ cm^2.

AMPLIACIÓN

6.75. Isa viene en bici al instituto y quiere llegar a una cierta hora. Si viene a 20 km/hora llega 3 minutos tarde, y si viene a 30 km/hora llega 3 minutos antes. ¿A qué velocidad, en km/h, tiene que venir para llegar justo a la hora que quiere?

a) 25 **b) 24** **c) 23** **d) 22**

Tiempo que debería tardar: t

A 20 km/h tarda: $t + \frac{3}{60} \rightarrow$ vive a $20 \cdot \left(t + \frac{3}{60}\right) \rightarrow 20t + 1$ kilómetros

A 30 km/h tarda: $t - \frac{3}{60} \rightarrow$ vive a $30 \cdot \left(t - \frac{3}{60}\right) \rightarrow 30t - \frac{3}{2}$ kilómetros

Ecuación: $30t - \frac{3}{2} = 20t + 1$

Resolución: $60t - 3 = 40t + 2 \rightarrow 20t = 5 \rightarrow t = 0,25$

Debería tardar 0,25 horas (15 minutos) y vive a 20 · 0.25 + 1 = 6 km, luego debería ir a $\frac{6}{0,25} = 24$ km / h.

La respuesta correcta es la b.

EJERCICIOS

Figuras semejantes. Teorema de Tales

11.26. (TIC) Las siguientes ternas de números representan las longitudes de los lados de una pareja de triángulos. Estudia, en cada caso, si son o no semejantes. En caso afirmativo, determina la correspondiente razón de semejanza.

a) 2 4 5 8 16 20

b) 3 4 6 4,5 6 8,5

c) 2,5 5,5 7 6,25 13,75 17,5

a) Los lados son proporcionales, ya que $\frac{8}{2}=\frac{16}{4}=\frac{20}{5}=4$.

Por el tercer criterio, los triángulos son semejantes con razón de semejanza de k = 4 del segundo respecto del primero.

b) Los lados no son proporcionales, ya que $\frac{4{,}5}{3}=\frac{6}{4}\neq\frac{8{,}5}{6}$.

Los triángulos no son semejantes.

c) Los lados son proporcionales, ya que $\frac{6{,}25}{2{,}5}=\frac{13{,}75}{5{,}5}=\frac{17{,}5}{7}=2{,}5$.

Por el tercer criterio, los triángulos son semejantes con razón de semejanza de k = 2,5 del segundo respecto del primero

11.27. a) ¿Son semejantes todos los pentágonos regulares?

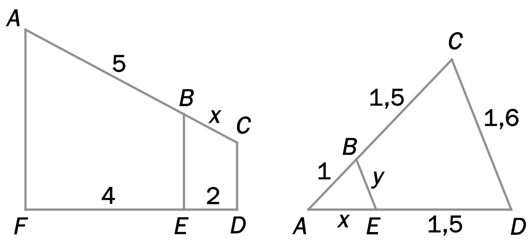
b) Un pentágono regular tiene por lado 4 cm. Calcula el perímetro de otro pentágono regular con razón de semejanza respecto al anterior de 2,5.

a) Todos los pentágonos regulares son semejantes ya que sus ángulos son siempre de $\frac{180^\circ\cdot 3}{5}=108^\circ$ y sus lados son proporcionales, ya que son iguales en cada uno de ellos.

b) Los lados del nuevo pentágono miden 4 · 2,5 = 10 cm.

El perímetro del nuevo pentágono mide 5 · 10 = 50 cm.

11.28. (TIC) Calcula el valor de los segmentos desconocidos en cada una de las siguientes representaciones.



Primera figura: $\frac{5}{4}=\frac{x}{2}\Rightarrow 4x=10\Rightarrow x=2{,}5$

Segunda figura: $\frac{1}{x}=\frac{1{,}5}{1{,}5}\Rightarrow 1{,}5x=1{,}5\Rightarrow x=1$ $\quad\frac{1{,}6}{1+1{,}5}=\frac{y}{1}\Rightarrow 2{,}5y=1{,}6\Rightarrow y=0{,}64$

11.29. Decide, razonando la respuesta, si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas.

a) Todos los cuadrados son semejantes.

b) Todos los rectángulos son semejantes.

c) Todos los triángulos equiláteros son semejantes.

d) Todos los triángulos rectángulos son semejantes.

e) Todos los triángulos isósceles son semejantes.

f) Todos los triángulos que son a la vez rectángulos e isósceles son semejantes.

a) Verdadera. Todos los ángulos son rectos y los lados correspondientes son proporcionales, ya que en cada cuadrado los lados son iguales.

b) Falsa. Aunque todos los ángulos son iguales, los lados no tienen por qué ser proporcionales. Por ejemplo, los rectángulos de lados 1 y 2 cm y 1 y 3 cm.

c) Verdadera. Todos los ángulos son de 60° y, por tanto, iguales, y los lados correspondientes son proporcionales, ya que en cada triángulo los lados son iguales.

d) Falsa. Ni siquiera tienen por qué tener los ángulos iguales.

e) Falsa. Ni siquiera tienen por qué tener los ángulos iguales.

f) Verdadera. Los ángulos correspondientes son iguales, ya que en todos los casos miden 90°, 45° y 45°, y los lados correspondientes son proporcionales, pues son de la forma x, x y $x\sqrt{2}$.

11.30. (TIC) Las siguientes ternas de números representan las longitudes de los lados de una pareja de triángulos semejantes. Calcula, en cada caso, la razón de semejanza y los valores de los lados desconocidos.

a) 3, 4, 6 4,5, *x*, *y*

b) *x*, 4, 3 2, 2, *y*

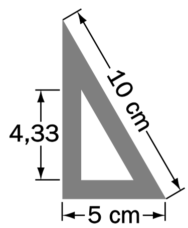
c) *x*, *y*, 8 12, 20, 25

a) La razón de semejanza es $\frac{4,5}{3} = 1,5$. Por tanto: $\frac{x}{4} = 1,5 \Rightarrow x = 6$ $\frac{y}{6} = 1,5 \Rightarrow y = 9$

b) La razón de semejanza es $\frac{2}{4} = 0,5$. Por tanto: $\frac{2}{x} = 0,5 \Rightarrow x = 4$ $\frac{y}{3} = 0,5 \Rightarrow y = 1,5$

c) La razón de semejanza es $\frac{25}{8} = 3,125$. Por tanto: $\frac{12}{x} = 3,125 \Rightarrow x = 3,84$ $\frac{20}{y} = 3,125 \Rightarrow y = 6,4$

11.31. (TIC) Comprueba que los dos triángulos que forman el cartabón de la figura son proporcionales. Calcula la medida de los lados e indica la razón de semejanza.



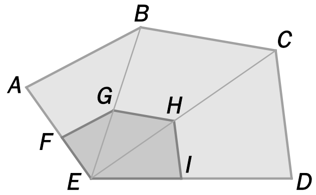
Los triángulos exterior e interior son semejantes, ya que tienen los ángulos iguales (los lados son paralelos).

El triángulo exterior tiene por lados: 10, 5 y $\sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75} \approx 8,66$ cm.

La razón de semejanza es, por tanto, $k = \frac{4,33}{8,66} = 0,5$.

Los lados del triángulo interior serán: 4,33, 10 · 0,5 = 5 y 5 · 0,5 = 2,5 cm.

11.32. (TIC) Del polígono *ABCDE* de la figura se conocen las medidas: *AB* = 27, *BC* = 30, *CD* = 30, *DE* = 45 y *EA* = 25. Si el polígono *EFGHI* es semejante al anterior e *IE* = 20:



a) Calcula la razón de semejanza de los dos polígonos.

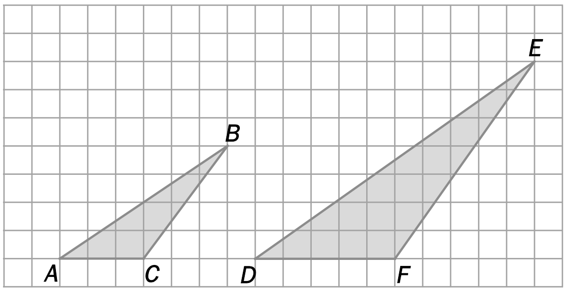
b) Halla los lados desconocidos de *EFGHI*.

a) La razón de semejanza del mayor respecto del menor es $k = \dfrac{DE}{IE} = \dfrac{45}{20} = 2{,}25$.

b) $EF = \dfrac{EA}{2{,}25} = \dfrac{25}{2{,}25} = 11{,}11$ $\qquad FG = \dfrac{AB}{2{,}25} = \dfrac{27}{2{,}25} = 12$

$GH = \dfrac{BC}{2{,}25} = \dfrac{30}{2{,}25} = 13{,}33$ $\qquad HI = \dfrac{CD}{2{,}25} = \dfrac{30}{2{,}25} = 13{,}33$

11.33. Con la ayuda del teorema de Pitágoras, calcula los lados de los triángulos *ABC* y *DEF* y comprueba si son semejantes.



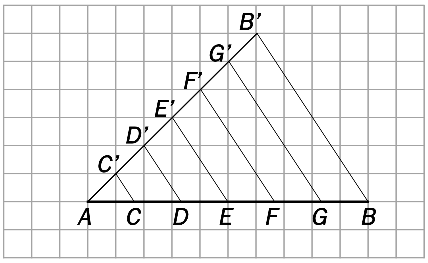
$AC = 3$ $\qquad BC = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ $\qquad AB = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52}$

$DF = 5$ $\qquad EF = \sqrt{5^2 + 7^2} = \sqrt{74}$ $\qquad ED = \sqrt{10^2 + 7^2} = \sqrt{149}$

Los lados no son proporcionales, ya que $\dfrac{3}{5} = 0{,}6$, $\dfrac{5}{\sqrt{74}} \approx 0{,}58$ y $\dfrac{\sqrt{52}}{\sqrt{149}} \approx 0{,}59$; por tanto, los dos triángulos no son semejantes.

División de segmentos. Criterios de semejanza

11.34. Divide un segmento de longitud 10 centímetros en seis partes iguales.



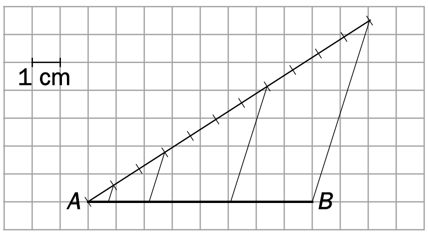
Sean *A* y *B* los extremos del segmento que se desea dividir.

Desde el extremo *A* se traza una semirrecta auxiliar sobre la que se llevan seis segmentos de la misma longitud (la que se quiera) y que tienen por extremos *C*′, *D*′, *E*′, *F*′, *G*′ y *B*′.

Se une *B*′ con *B* y se trazan paralelas a la recta *BB*′ por *C*′, *D*′, *E*′, *F*′ y *G*′ que cortan a *AB* en *C*, *D*, *E*, *F* y *G*.

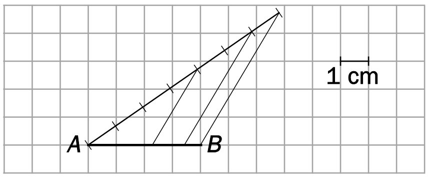
Gracias al teorema de Tales, se puede asegurar que los segmentos *AC*, *CD*, *DE*, *EF*, *FG* y *GB* son iguales.

11.35. Divide un segmento de 8 cm de longitud en cuatro partes proporcionales a 1, 2, 4 y 4.



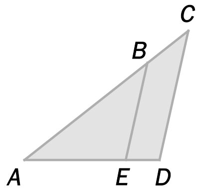
11.36. Divide un segmento de 4 cm en tres partes de forma que la primera sea doble de la segunda, y esta, doble de la tercera.

Se trata de dividir un segmento *AB* de 4 cm en partes proporcionales a 1, 2 y 4.



11.37. En la figura adjunta, los lados *CD* y *BE* son paralelos.

Se sabe que: *AB* = 3 *AE* = 2 *BC* = 1 *BE* = 2



a) ¿Cómo son los triángulos *ABE* y *ACD*?

b) Calcula las medidas de los segmentos *AD, ED* y *CD*.

c) ¿Cuánto vale la razón de semejanza?

a) Los triángulos *ABE* y *ACE* son semejantes, ya que están en posición de Tales.

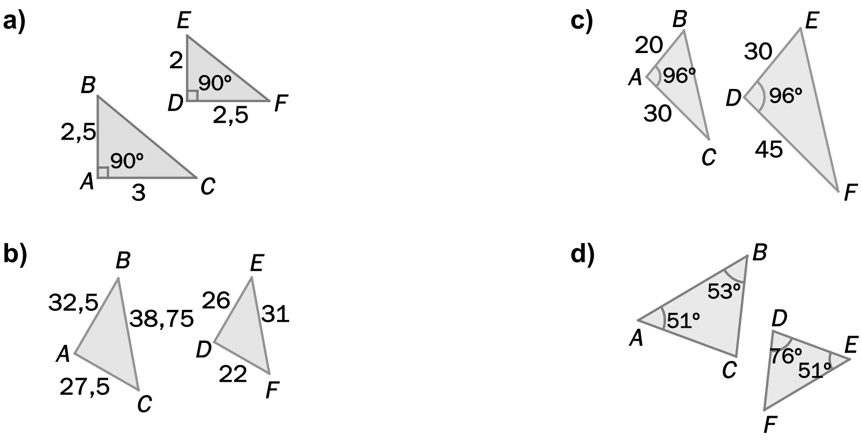
b) $\frac{AC}{AD}=\frac{AB}{AE} \Rightarrow \frac{3+1}{AD}=\frac{3}{2} \Rightarrow AD = \frac{8}{3}$

$\frac{AB}{AE}=\frac{BC}{ED} \Rightarrow \frac{3}{2}=\frac{1}{ED} \Rightarrow ED = \frac{2}{3}$

$\frac{BE}{AE}=\frac{CD}{AD} \Rightarrow \frac{2}{2}=\frac{CD}{8/3} \Rightarrow CD = \frac{8}{3}$

c) La razón de semejanza vale $\frac{4}{3}$.

11.38. Estudia si los siguientes pares de triángulos son o no semejantes.



a) Tienen un ángulo igual (el de 90º), pero los lados que lo forman no son proporcionales, ya que $\frac{2,5}{3} \neq \frac{2}{2,5}$. Por tanto, no son semejantes.

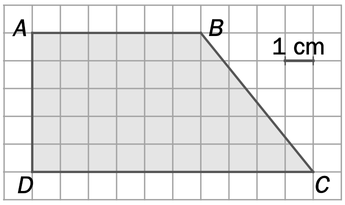
b) Los lados son proporcionales, ya que $\frac{32,5}{26}=\frac{27,5}{22}=\frac{38,75}{31}$ = 1,25. Por tanto, y de acuerdo con el tercer criterio, los triángulos son semejantes.

c) Tienen un ángulo igual y los lados que lo forman son proporcionales, ya que $\frac{20}{30}=\frac{30}{45}=\frac{2}{3}$. Por tanto, y de acuerdo con el segundo criterio, los triángulos son semejantes.

d) Los ángulos del primer triángulo son 53º, 51º, y 180º – 53º – 51º = 76º. Por tanto, los dos triángulos tienen dos ángulos iguales y, en aplicación del primer criterio, son semejantes.

Razón de longitudes, áreas y volúmenes

11.39. Dado el cuadrilátero de la figura:



a) Halla la medida de sus cuatro lados.

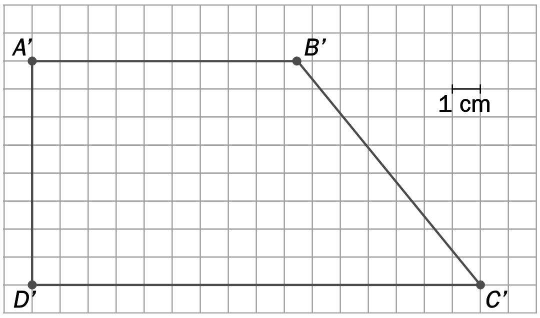
b) Halla su perímetro.

c) Dibuja un cuadrilátero de 44 centímetros de perímetro y semejante al anterior.

a) $AB = 6$ cm $BC = \sqrt{4^2+5^2} = \sqrt{41} \approx 6{,}4$ cm $CD = 10$ cm $DA = 5$ cm

b) $P = 21 + \sqrt{41} \approx 27{,}4$ cm

c) La razón de semejanza será la razón de los perímetros: $k = \dfrac{44}{21+\sqrt{41}} \approx 1{,}6$



Los lados del nuevo cuadrilátero medirán por tanto:

$A'B' \approx 1{,}6 \cdot 6 = 9{,}6$ cm

$B'C' \approx 1{,}6 \cdot 6{,}4 = 10{,}24$ cm

$C'D' \approx 1{,}6 \cdot 10 = 16$ cm

$D'A' \approx 1{,}6 \cdot 5 = 8$ cm

11.40. (TIC) Los lados de un pentágono miden 4, 5, 5, 5 y 6 centímetros, respectivamente. Calcula los lados de otro pentágono semejante al anterior y con perímetro de 37,5 centímetros.

La razón de semejanza coincide con la razón de perímetros $k = \dfrac{37{,}5}{4+5+5+5+6} = \dfrac{37{,}5}{25} = 1{,}5$.

Por tanto, los lados del nuevo pentágono son:

$4 \cdot 1{,}5 = 6$ cm; $5 \cdot 1{,}5 = 7{,}5$ cm; 7,5 cm; 7,5 cm, y $6 \cdot 1{,}5 = 9$ cm

11.41. (TIC) Los lados de un pentágono miden 4, 3, 3, 5 y 5 centímetros, respectivamente, y su área mide 25 centímetros cuadrados. Calcula los lados de otro pentágono semejante al anterior con área de 100 metros cuadrados.

La razón de las áreas es $\dfrac{100}{25} = 4$, con lo que la razón de semejanza es $k = \sqrt{4} = 2$.

Por tanto, los lados del nuevo pentágono son:

$4 \cdot 2 = 8$ cm; $3 \cdot 2 = 6$ cm; 6 cm; $5 \cdot 2 = 10$ cm, y 10 cm.

11.42. (TIC) Las medidas de un rectángulo son 3 y 5 centímetros. Calcula las medidas de otro rectángulo semejante al anterior y tal que su área mida 135 centímetros cuadrados.

El rectángulo original tiene de área $3 \cdot 5 = 15$ cm^2, con lo que la razón de áreas es $\dfrac{135}{15} = 9$ y la razón de semejanza es $k = \sqrt{9} = 3$.

Por tanto las medidas del nuevo rectángulo son $3 \cdot 3 = 9$ cm y $5 \cdot 3 = 15$ cm.

11.43. Un triángulo rectángulo tiene por catetos 3 y 4 centímetros. Halla la hipotenusa de otro triángulo semejante al anterior sabiendo que el área de este segundo triángulo es de 24 centímetros cuadrados.

La hipotenusa del triángulo original mide $\sqrt{3^2+4^2} = 5$ cm.

El triangulo original tiene de área $\dfrac{3 \cdot 4}{2} = 6$ cm^2, con lo que la razón de áreas es $\dfrac{24}{6} = 4$ y la razón de semejanza es $k = \sqrt{4} = 2$.

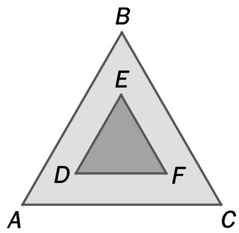
Por tanto, la hipotenusa del nuevo triángulo mide $5 \cdot 2 = 10$ cm.

11.44. (TIC) Las áreas de dos cuadriláteros semejantes son 18 y 28,125 metros cuadrados, respectivamente. ¿Cuánto mide el perímetro del menor si el del mayor es de 22,5 metros?

La razón de áreas es $\frac{28{,}125}{18} = 1{,}5625$, con lo que la razón de semejanza es $k = \sqrt{1{,}5625} = 1{,}25$.

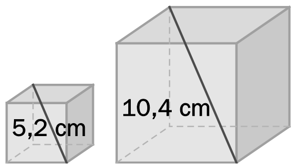
Como la razón de perímetros coincide con k, el perímetro del cuadrilátero menor es $\frac{22{,}5}{1{,}25} = 18$ cm.

11.45. (TIC) Los triángulos *ABC* y *DEF* son equiláteros. Calcula la razón de semejanza sabiendo que el área del mayor es de 6,93 centímetros cuadrados y el lado del menor mide 2 centímetros.



El área del triángulo menor es $\frac{2\cdot\sqrt{2^2-1^2}}{2} = \sqrt{3} \approx 1{,}73$ cm^2, con lo que la razón de áreas es $\frac{6{,}93}{1{,}73} \approx 4$ y por tanto la razón de semejanza es $k = \sqrt{4} = 2$.

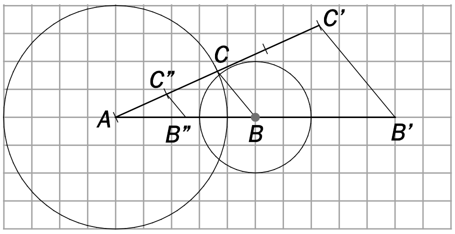
11.46. (TIC) Las diagonales de dos cubos miden 5,2 y 10,4 centímetros, respectivamente. Si el volumen del primero es de 27 centímetros cúbicos, ¿cuál es el volumen del segundo?



Los dos cubos son semejantes con razón de semejanza $k = \frac{10{,}4}{5{,}2} = 2$, con lo que la razón de los volúmenes es $k^3 = 8$ y, por tanto, el volumen del segundo cubo es $27 \cdot 8 = 216$ cm^3.

Construcción de polígonos semejantes

11.47. Dibuja un triángulo de lados 2, 4 y 5 centímetros. Construye otros triángulos semejantes al anterior con razones de semejanza 2 y $\frac{1}{2}$.

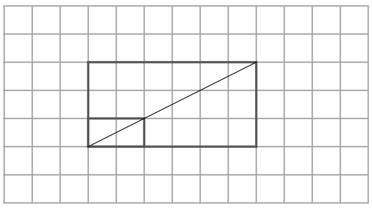


El triángulo *ABC* tiene por lados 5, 4 y 2

El triángulo *AB'C'* es semejante al *ABC* con razón de semejanza 2.

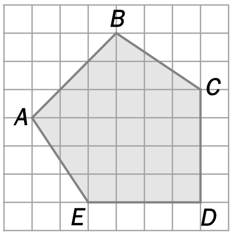
El triángulo *AB"C"* es semejante al *ABC* con razón de semejanza 0,5.

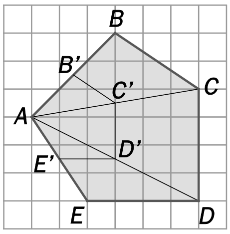
11.48. Construye un rectángulo de medidas 3 × 6 centímetros y, después, otro semejante al anterior con razón de semejanza $\frac{1}{3}$.



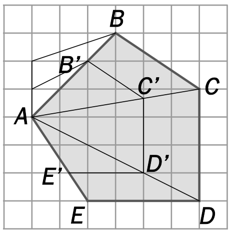
El segundo rectángulo medirá 1 × 2 centímetros.

11.49. Construye dos polígonos semejantes al de la figura con razones de semejanza $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{3}$.





$k = \frac{1}{2}$



$k = \frac{2}{3}$

Escalas

11.50. (TIC) En un mapa se indica que la escala es 1:25 000. ¿Cuál es la razón de semejanza entre la realidad y la realidad representada? Si la distancia entre dos ciudades en ese mapa es de 15,5 centímetros, ¿cuál será la distancia real que las separa? Da el resultado en kilómetros.

En el mapa, un centímetro representa 25 000 cm de la realidad.

La razón de semejanza es, por tanto, $k = \frac{25000}{1} = 25\,000$.

Los 15,5 cm del plano se corresponden con 15,5 · 25 000 = 387 500 cm = 3,875 km.

11.51. La altura de un edificio es de 30 metros. Se quiere construir una maqueta a escala 1:200. ¿Cuál será la altura de ese edificio en la maqueta?

La altura en la maqueta es de $\frac{30}{200} = 0{,}15$ m = 15 cm.

11.52. En una maqueta de un jardín botánico, la altura de una estatua es de 2,5 centímetros. Calcula la escala de la maqueta si la altura real de esa estatua es de 2 metros.

2 m = 200 cm $\Rightarrow \frac{200}{2{,}5} = 80 \Rightarrow$ La escala de la maqueta es 1: 80.

11.53. (TIC) La distancia entre dos ciudades representadas en un mapa de escala 1:50 000 es de 10 centímetros. Calcula la distancia que separa a dichas ciudades en otro mapa de escala 1:125 000.

En el mapa de 1:50 000, 10 cm son 10 · 50 000 = 500 000 cm = 5 km de la realidad.

En el mapa de 1:125 000, 5 km de la realidad son $\frac{500000}{125000} = 4$ cm en el mapa.

11.54. La distancia entre dos ciudades es de 350 kilómetros y la distancia que las separa en un mapa es de 7 centímetros. ¿Cuál es la escala de dicho mapa?

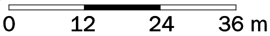
350 km = 35 000 000 cm $\Rightarrow \dfrac{35000000}{7} = 5\,000\,000 \Rightarrow$ La escala de la maqueta es 1:5 000 000.

11.55. (TIC) El cuarto de Javier es un rectángulo de dimensiones 3,15×3,78 metros. ¿Qué dimensiones tendrá el rectángulo que ha pintado en un plano con escala 1:21?

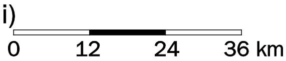
1 m en el plano son 21 m de la realidad, con lo que las dimensiones en el plano serán:

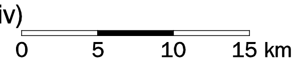
$\dfrac{3{,}15}{21} = 0{,}15$ m = 15 cm y $\dfrac{3{,}78}{21} = 0{,}18$ m = 18 cm

11.56. Relaciona cada una de las escalas dadas en forma gráfica con cada una de las escalas dadas mediante una proporción numérica.

i)


ii)


iii)


iv)


a) 1:500 000

b) 1:500

c) 1:1 200 000

d) 1:1200

En la escala gráfica I, 1 cm equivale a 12 m = 1 200 cm reales; por tanto, se corresponde con la escala numérica d.

En la escala gráfica II, 1 cm equivale a 5 m = 500 cm reales; por tanto, se corresponde con la escala numérica b.

En la escala gráfica III, 1 cm equivale a 12 km = 1 200 000 cm reales; por tanto, se corresponde con la escala numérica c.

En la escala gráfica IV, 1 cm equivale a 5 km = 500 000 cm reales; por tanto, se corresponde con la escala numérica a.

PROBLEMAS

11.57. La sombra de una casa de 21 metros de altura es de 28 metros. ¿Qué sombra proyectará en ese momento un árbol de 3 metros de alto?

En un mismo instante, los rayos del sol tienen la misma inclinación y, por tanto, los triángulos rectángulos cuyos catetos son las alturas y las sombras son semejantes.

Aplicando la semejanza de triángulos y siendo x la medida buscada:

$\dfrac{21}{28} = \dfrac{3}{x} \Rightarrow 21x = 84 \Rightarrow x = 4$ m

11.58. (TIC) Las dimensiones de un jardín rectangular en un plano de escala 1: 125 son 24 y 32 centímetros.

a) Calcula las dimensiones reales del jardín y expresa los resultados en metros.

b) Calcula el perímetro y el área del jardín.

a) 1 cm del plano se corresponde con 125 cm de la realidad.

Por tanto, las dimensiones reales son 24 · 125 = 3000 cm = 30 m y 32 · 125 = 4000 = 40 m.

b) El perímetro es $P = 2 \cdot (40 + 30) = 140$ m.

El área es $A = 40 \cdot 30 = 1200$ m^2.

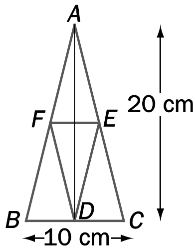
11.59. (TIC) La distancia entre Badajoz y Lisboa es de 230 kilómetros. Calcula la distancia que separa ambas ciudades en un mapa con escala 1:1 200 000.

1 cm del mapa se corresponde con $1200000 \text{ cm} = 12 \text{ km}$ de la realidad.

Por tanto, la distancia en el mapa que separa las dos ciudades será $\frac{230}{12} = 19{,}17$ cm.

11.60. Un triángulo isósceles tiene por base 10 metros y por altura 20 metros. Calcula el perímetro de dicho triángulo y del que se obtiene al unir los puntos medios de sus lados.

Observemos la siguiente figura:



Por el teorema de Pitágoras, $AC = \sqrt{20^2 + 5^2} = \sqrt{425} \approx 20{,}62$ m

El perímetro del triángulo ABC es, por tanto, $P = 10 + 2\sqrt{425} \approx 51{,}23$ m.

El triángulo DEF es igual que el triángulo AFE, que es semejante a ABC con razón de semejanza $\frac{1}{2}$.

Por tanto, el perímetro de DEF es la mitad del de ABC, es decir, $\frac{10 + 2\sqrt{425}}{2} = 5 + \sqrt{425} \approx 25{,}62$ m.

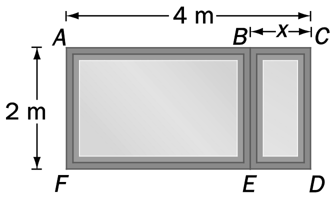
11.61. (TIC) Una empresa de vehículos fabrica dos camiones semejantes para transporte de carburantes. Las alturas respectivas son de 2 y 2,5 metros. El área necesaria para construir el depósito del camión menor es de 18 metros cuadrados y el volumen del depósito del camión mayor es de 48 metros cúbicos. Calcula el área necesaria para construir el depósito mayor y el volumen del depósito menor.

La razón de semejanza es $\frac{2{,}5}{2} = 1{,}25$.

El área del depósito mayor es $18 \cdot 1{,}25^2 = 28{,}125$ m^2.

El volumen del depósito menor es $\frac{48}{1{,}25^3} = 24{,}576$ m^3.

11.62. Se quiere construir un ventanal formado por dos rectángulos *ABEF* y *BCDE* con la forma y dimensiones que muestra la figura.



a) Calcula el valor del lado *x* = *BC* para que los rectángulos *ACDF* y *BCDE* sean semejantes.

b) Halla las áreas de los rectángulos anteriores y comprueba la relación que existe entre su razón y la razón de semejanza.

c) Comprueba si el rectángulo *ABEF* es también semejante a los anteriores.

a) $\frac{AC}{CD} = \frac{BE}{BC} \Rightarrow \frac{4}{2} = \frac{2}{x} \Rightarrow x = 1$ m

b) Área del rectángulo $ACDF$: $S_1 = 4 \cdot 2 = 8$ m^2

Área del rectángulo $BCDE$: $S_2 = 2 \cdot 1 = 2$ m^2

La razón de semejanza entre los dos rectángulos es $k = \frac{4}{2} = 2$.

La razón de áreas es $\frac{S_1}{S_2} = \frac{8}{2} = 4$, que coincide con k^2.

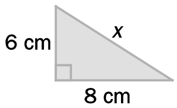
c) Los lados de *ABEF* miden 3 y 2 m, por lo que este rectángulo no es semejante a los anteriores ya que sus lados no son proporcionales a los de ellos.

10.23. En un triángulo rectángulo, la hipotenusa mide 15 centímetros, y uno de los catetos, 12. ¿Cuánto mide el otro cateto?

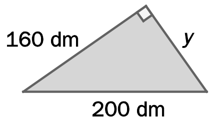
$c = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$ cm

10.24. En cada caso, calcula el lado desconocido.

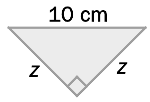
a)



b)



c)



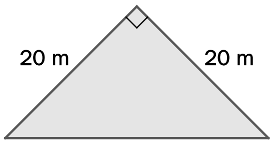
a) $x^2 = 6^2 + 8^2 \Rightarrow x^2 = 36 + 64 = 100 \Rightarrow x = \sqrt{100} = 10$ cm

b) $200^2 = 160^2 + y^2 \Rightarrow 40000 = 25600 + y^2 \Rightarrow y^2 = 40000 - 25600 = 14400 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = \sqrt{14400} = 120$ dm

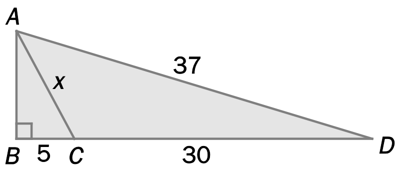
c) $z^2 + z^2 = 10^2 = 100 \Rightarrow 2z^2 = 100 \Rightarrow z^2 = 50 \Rightarrow z = \sqrt{50} = 7{,}07$ cm

10.25. Averigua el perímetro de un triángulo rectángulo isósceles cuyos catetos miden 20 metros cada uno.



$P = 20 + 20 + \sqrt{20^2 + 20^2} \approx 40 + 28{,}28 = 68{,}28$ m

10.26. Halla la longitud del lado desconocido, x.



$AB = \sqrt{37^2 - 35^2} = \sqrt{144} = 12$

$x = \sqrt{AB^2 + 5^2} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13$

10.27. Actividad resuelta.

10.28. Actividad resuelta.

10.29. Clasifica los siguientes triángulos.

a) $a = 11$ $b = 60$ $c = 61$

b) $a = 8$ $b = 4$ $c = 8$

c) $a = 15$ $b = 18$ $c = 8$

a) El lado mayor es $c = 61$. Calculamos:

$$\begin{cases} c^2 = 61^2 = 3721 \\ a^2 + b^2 = 11^2 + 60^2 = 121 + 3600 = 3721 \end{cases}$$

Como $c^2 = a^2 + b \Rightarrow$ El triángulo es rectángulo en C.

b) Uno de los lados mayores es $c = 8$. Calculamos:

$$\begin{cases} c^2 = 8^2 = 64 \\ a^2 + b^2 = 8^2 + 4^2 = 64 + 16 = 80 \end{cases}$$

Como $64 < 80 \Rightarrow c^2 < a^2 + b^2 \Rightarrow$ El triángulo es acutángulo.

c) El lado mayor es $b = 18$. Calculamos:

$$\begin{cases} b^2 = 18^2 = 324 \\ a^2 + c^2 = 15^2 + 8^2 = 225 + 64 = 289 \end{cases}$$

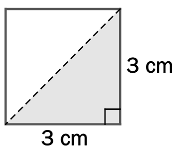
Como $324 > 289 \Rightarrow b^2 > a^2 + c^2 \Rightarrow$ El triángulo es obtusángulo con ángulo obtuso en *B.*

10.30. Carlos quiere hacer una estructura con listones de madera. Comienza construyendo un triángulo que debe ser rectángulo con listones de longitudes 1,05, 0,88 y 1,37 metros. ¿Podrá hacerlo?

$$\begin{cases} 1{,}37^2 = 1{,}8769 \\ 1{,}05^2 + 0{,}88^2 = 1{,}1025 + 0{,}7744 = 1{,}8769 \end{cases}$$

Sí podrá hacerlo, ya que los tres listones forman un triángulo rectángulo.

10.31. Calcula la medida de la diagonal de un cuadrado de lado 3 centímetros.

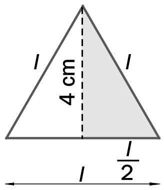


$D = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 4{,}24$ cm

10.32. La altura del muro del jardín de Ana es de 3 metros. ¿A qué distancia del muro debe colocar una escalera de 4 metros para que su extremo superior coincida exactamente con el punto más alto del muro?

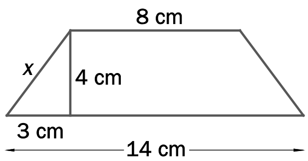
$d = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7} = 2{,}65$ m

10.33. Un triángulo equilátero tiene por altura 4 centímetros. Halla la medida de cada uno de sus lados.



$$4^2 = l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{3l^2}{4} \Rightarrow 3l^2 = 64 \Rightarrow l^2 = \frac{64}{3} \Rightarrow \text{l} = \sqrt{\frac{64}{3}} = 4{,}62 \text{ cm}$$

10.34. Calcula el perímetro de un trapecio isósceles de bases 8 y 14 centímetros y de altura 4 centímetros.



$x = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

Perímetro = 5 + 8 + 5 + 14 = 32 cm

10.35. Actividad interactiva.

10.61. (TIC) En los siguientes casos se da la medida de dos lados de un triángulo rectángulo; el mayor es la hipotenusa, y el menor, un cateto. Calcula el valor del otro cateto.

a) $a = 45$ **cm;** $b = 27$ **cm**

b) $a = 61$ **cm;** $c = 11$ **cm**

c) $a = 65$ **cm;** $c = 56$ **cm**

a) $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{45^2 - 27^2} = \sqrt{1296} = 36$ cm

b) $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{61^2 - 11^2} = \sqrt{3600} = 60$ cm

c) $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{65^2 - 56^2} = \sqrt{1089} = 33$ cm

10.62. Siendo *a* la hipotenusa de un triángulo rectángulo, y *b* y *c*, los catetos, calcula la medida del lado que falta en cada caso.

a) $a = 5$ **cm;** $b = \sqrt{5}$ **cm**

b) $a = \sqrt{13}$ **cm;** $b = 3$ **cm**

c) $b = \sqrt{10}$ **cm;** $c = \sqrt{6}$ **cm**

a) $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{5^2 - \left(\sqrt{5}\right)^2} = \sqrt{25 - 5} = \sqrt{20}$ cm

b) $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{\left(\sqrt{13}\right)^2 - 3^2} = \sqrt{13 - 9} = \sqrt{4} = 2$ cm

c) $a = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{\left(\sqrt{10}\right)^2 + \left(\sqrt{6}\right)^2} = \sqrt{16} = 4$ cm

10.63. Utilizando el recíproco del teorema de Pitágoras, di si los siguientes triángulos son rectángulos, acutángulos u obtusángulos.

a) $a = 9$ **cm** $b = 12$ **cm** $c = 15$ **cm**

b) $a = 10$ **cm** $b = 15$ **cm** $c = 20$ **cm**

c) $a = 2$ **cm** $b = 12$ **cm** $c = 12$ **cm**

d) $a = 45$ **cm** $b = 28$ **cm** $c = 53$ **cm**

e) $a = \sqrt{7}$ **cm** $b = 5$ **cm** $c = \sqrt{9}$ **cm**

a) $\begin{cases} c^2 = 15^2 = 225 \\ a^2 + b^2 = 9^2 + 12^2 = 225 \end{cases}$ Como $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow$ El triángulo es rectángulo en *C*.

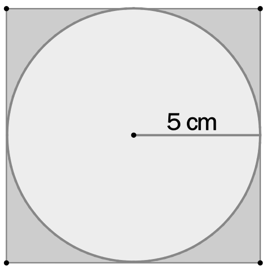
b) $\begin{cases} c^2 = 20^2 = 400 \\ a^2 + b^2 = 10^2 + 15^2 = 325 \end{cases}$ Como $c^2 > a^2 + b^2 \Rightarrow$ El triángulo es obtusángulo con ángulo obtuso en *C*.

c) $\begin{cases} b^2 = 12^2 = 144 \\ a^2 + c^2 = 2^2 + 12^2 = 148 \end{cases}$ Como $b^2 < a^2 + c^2 \Rightarrow$ El triángulo es acutángulo.

d) $\begin{cases} c^2 = 53^2 = 2809 \\ a^2 + b^2 = 45^2 + 28^2 = 2809 \end{cases}$ Como $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow$ El triángulo es rectángulo en *C*.

e) $\begin{cases} b^2 = 5^2 = 25 \\ a^2 + c^2 = \left(\sqrt{7}\right)^2 + \left(\sqrt{9}\right)^2 = 16 \end{cases}$ Como $b^2 > a^2 + c^2 \Rightarrow$ El triángulo es obtusángulo con ángulo obtuso en *B.*

10.64. Halla el perímetro y el área del cuadrado circunscrito a una circunferencia de radio 5 centímetros.

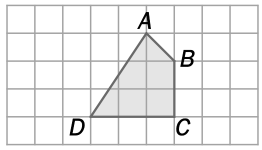


El lado del cuadrado mide 10 cm.

El perímetro valdrá 40 cm.

El área del cuadrado valdrá 100 cm^2.

10.65. Halla el perímetro del cuadrilátero de la figura.

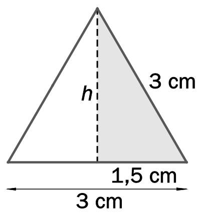


$AB + BC + CD + DA = \sqrt{1^2+1^2}+2+3+\sqrt{2^2+3^2} = 5+\sqrt{2}+\sqrt{13} \approx 10{,}02$

10.66. a) Halla la altura de un triángulo equilátero de lado 3 centímetros.

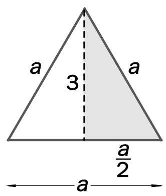
b) Halla el lado de un triángulo equilátero que tiene por altura 3 centímetros.

a)



$h = \sqrt{3^2 - 1{,}5^2} = \sqrt{6{,}75} \approx 2{,}6$ cm

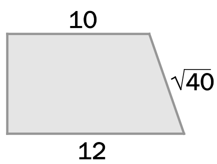
b)



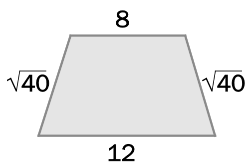
$a^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 = 3^2 \Rightarrow 3\dfrac{a^2}{4} = 9 \Rightarrow a^2 = 12 \Rightarrow a = \sqrt{12} \approx 3{,}46$ cm

10.67. Calcula el perímetro y el área de los siguientes trapecios.

a)



b)



a) Altura = $\sqrt{\left(\sqrt{40}\right)^2 - 2^2} = \sqrt{36} = 6$

Perímetro: $10 + \sqrt{40} + 12 + 6 = 28 + \sqrt{40} \approx 34{,}32$

Área: $S = \dfrac{(12+10)\cdot 6}{2} = 66$

b) Altura = $\sqrt{\left(\sqrt{40}\right)^2 - 2^2} = \sqrt{36} = 6$

Perímetro: $12 + \sqrt{40} + 8 + \sqrt{40} = 20 + 2\sqrt{40} \approx 32{,}65$

Área: $S = \dfrac{(12+8)\cdot 6}{2} = 60$

10.68. Halla el perímetro y el área de un rombo cuyas diagonales miden 15 y 8 centímetros, respectivamente.

El lado del rombo se puede calcular mediante el teorema de Pitágoras aplicado a uno de los cuatro triángulos que forman las diagonales, obteniéndose:

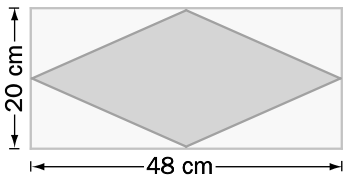
$l = \sqrt{7{,}5^2 + 4^2} = 8{,}5$ cm

Perímetro del rombo: 4 · 8,5 = 34 cm

Área del rombo: $S = \frac{15 \cdot 8}{2} = 60$ cm^2

.

10.69. Halla el perímetro del rombo de la figura sabiendo que sus vértices están situados en los puntos medios del rectángulo.



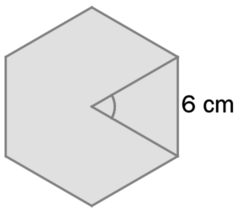
El lado del rombo mide $l = \sqrt{10^2 + 24^2} = 26$ cm.

El perímetro del rombo vale 26 · 4 = 104 cm.

10.70. Calcula la altura de un triángulo isósceles cuyo perímetro mide 36 metros, y su base, 10.

Los lados del triángulo son 13, 13 y 10 m; por tanto, la altura medirá $h = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ m.

10.71. Halla el perímetro y el área de un hexágono regular de lado 6 cm.



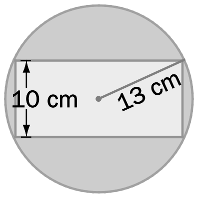
El perímetro vale 6 · 6 = 36 cm.

Por ser un hexágono regular, el triángulo de la figura es equilátero. Por tanto, se puede calcular la apotema del hexágono (que es la altura de este triángulo) mediante el teorema de Pitágoras:

$a = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{27} \approx 5{,}2$ cm

El área del hexágono será $S = \frac{\text{Perímetro} \cdot \text{apotema}}{2} = \frac{36 \cdot 5{,}2}{2} = 93{,}6$ cm^2.

10.77. En una circunferencia de 13 centímetros de radio inscribimos un rectángulo de 10 centímetros de altura. Calcula el perímetro del rectángulo.



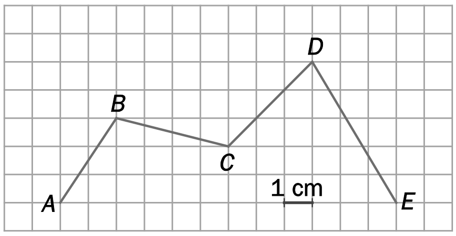
Se puede considerar un triángulo rectángulo cuya hipotenusa sea el radio de la circunferencia y cuyos catetos midan la mitad de los lados del rectángulo. Por tanto:

$\sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12$ cm será la mitad del otro lado.

Los lados del rectángulo miden entonces 10 y 24 cm, respectivamente.

El perímetro será: $P = (10 + 24) \cdot 2 = 68$ cm.

10.78. Halla la longitud de la poligonal de la figura.



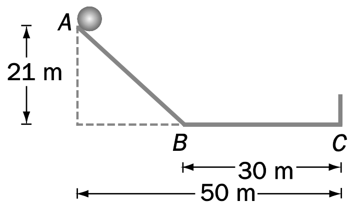
Aplicando cuatro veces el teorema de Pitágoras:

$\overline{AB} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13} = 3{,}61$ cm $\qquad \overline{BC} = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{16 + 1} = \sqrt{17} = 4{,}12$ cm

$\overline{CD} = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{9 + 9} = \sqrt{18} = 4{,}24$ cm $\qquad \overline{DE} = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34} = 5{,}83$ cm

Así: $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DE} = 17{,}8$ cm

10.79. La bola de la figura cae desde el punto *A*, pasa por *B* y llega a *C*, donde rebota para recorrer aún la mitad del trayecto que ya ha efectuado. Halla la distancia total que recorre.

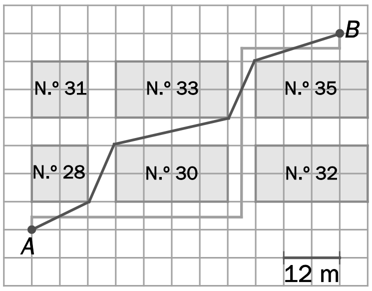


$AB = \sqrt{21^2 + 20^2} = \sqrt{441 + 400} = \sqrt{841} = 29$ m

Distancia hasta el punto *C*: *AB* + *BC* = 29 + 30 = 59 m

Distancia total = $59 + \frac{59}{2} = 88{,}5$ metros

10.83. Alicia vive en una urbanización, parte de la cual aparece representada en la figura, y quiere ir desde el punto *A* hasta el punto *B*.



a) Calcula la mínima distancia que tendría que recorrer si no hubiera edificios.

b) Calcula la distancia que recorre siguiendo el camino marcado en verde.

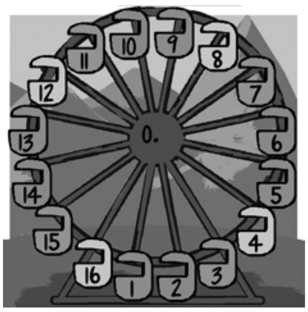
c) Calcula la distancia que recorre siguiendo el camino marcado en morado.

a) Si no hubiera edificios, recorrería la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos 11 · 6 = 66 m y 7 · 6 = 42 m. Por tanto, recorrería $\sqrt{66^2+42^2} \approx 78$ m.

b) 3 + 7 · 6 + 3 + 3 + 5 · 6 + 3 + 3 + 3 · 6 + 3 = 108 m (Más fácil (11 + 7) · 6 = 108)

c) $\sqrt{12^2+6^2}+\sqrt{12^2+6^2}+\sqrt{24^2+6^2}+\sqrt{12^2+6^2}+\sqrt{18^2+6^2} = 3\sqrt{180} + \sqrt{612} + \sqrt{360} \approx 84$ m

10.84. Una noria gira con centro el punto *O*. Posee 16 cochecitos numerados del 1 al 16 según muestra la figura.



a) Halla el ángulo que debe girar para que el cochecito 1 pase a la posición del 8.

b) Si se gira un ángulo de 135º y se parte de la posición inicial, ¿dónde se situarán los cochecitos 6 y 14?

a) Para que un coche pase a la posición siguiente, la noria debe girar $\frac{360º}{16}$ = 22º 30'.

Para que el coche 1 pase a ocupar la posición del coche 8, se debe producir un giro de:

7 · 22º 30' = 157º 30'.

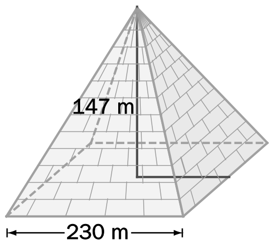
b) Como $\frac{135}{22,5}$ = 6, cuando se ejecuta un giro de 135º, los coches pasan a ocupar 6 posiciones adelante. Por tanto, el coche 6 pasa a ocupar la posición del 12, y el coche 14, la del 4.

13 Áreas y volúmenes de cuerpos geométricos

ACTIVIDADES INICIALES

13.I. La Gran Pirámide tiene una base cuadrada de unos 230 metros de largo, y una altura aproximada de 147 metros.

Imagina que se quiere cubrir con una sábana blanca. ¿Cuántos metros cuadrados de tela se necesitarían?



La apotema de cada triángulo mide unos 187 metros, por lo que las caras laterales tienen una superficie de unos 86 000 metros cuadrados.

13.II. Las pirámides son uno de los símbolos más representativos de Egipto, pero otras culturas también construyeron monumentos con esta forma. Investiga otras regiones del mundo en las que se conserven pirámides.

El ejemplo más sencillo son las pirámides de los incas y los mayas, en América.

13.III. Podemos encontrar reproducciones de pirámides construidas con distintos materiales, con supuestos efectos beneficiosos para la salud, o para atraer la buena suerte. ¿Crees que este tipo de amuletos tiene alguna base científica? Debate con tus compañeros.

Actividad de debate en el aula.

ACTIVIDADES PROPUESTAS

13.1. Halla las áreas lateral y total de un ortoedro de dimensiones 4, 5 y 7 centímetros.

$A_L = 2 \cdot 4 \cdot 5 + 2 \cdot 4 \cdot 7 = 96$ cm^2 $\quad$ $A_T = 2 \cdot 4 \cdot 5 + 2 \cdot 4 \cdot 7 + 2 \cdot 5 \cdot 7 = 166$ cm^2

13.2. Calcula el área total de un prisma regular hexagonal de 6 centímetros de altura, sabiendo que el lado de la base mide 4 centímetros, y su apotema, 3,5.

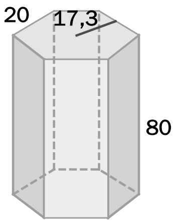
$A_T = p \cdot (h + a_p) = 6 \cdot 4 \cdot (6 + 3{,}5) = 228$ cm^2

13.3. Halla el área total y lateral de un cubo de arista *a* centímetros.

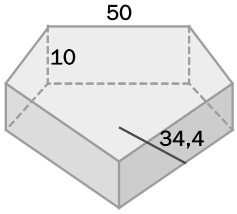
$A_L = 2 \cdot a \cdot a + 2 \cdot a \cdot a = 4a^2$ $\quad$ $A_T = 2 \cdot a \cdot a + 2 \cdot a \cdot a + 2 \cdot a \cdot a = 6a^2$

13.4. (TIC) Calcula el área total de los siguientes prismas regulares cuyas longitudes vienen dadas en milímetros.

a)



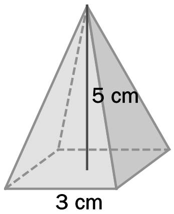
b)



a) $A_T = p \cdot (h + a_p) = 6 \cdot 20 \cdot (80 + 17{,}3) = 11\ 676\ \text{cm}^2$

b) $A_T = p \cdot (h + a_p) = 5 \cdot 50 \cdot (10 + 34{,}4) = 11\ 100\ \text{cm}^2$

13.5. Calcula las áreas lateral y total de la pirámide regular de la figura.

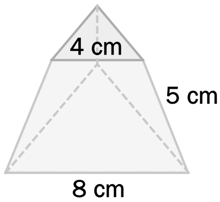


$A_p = \sqrt{1{,}5^2 + 5^2} \approx 5{,}22$ cm

$A_L = \dfrac{1}{2} \cdot p \cdot A_p = 31{,}32\ \text{cm}^2$

$A_T = A_L + A_B = 40{,}32\ \text{cm}^2$

13.6. Calcula las áreas lateral y total del siguiente tronco de pirámide regular de bases dos triángulos.



La medida de la altura H en este tronco de pirámide es $H = \sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{21} \approx 4{,}58$ cm.

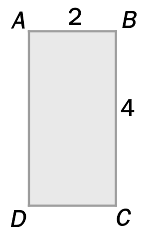
$A_L = \dfrac{p_1 + p_2}{2} H = \dfrac{24 + 12}{2}\sqrt{21} = 18\sqrt{21} \approx 82{,}49\ \text{cm}^2$

$A_T = A_L + A_{\text{BASE MAYOR}} + A_{\text{BASE MENOR}} = 18\sqrt{21} + \dfrac{8 \cdot \sqrt{8^2 - 4^2}}{2} + \dfrac{4 \cdot \sqrt{4^2 - 2^2}}{2} = 18\sqrt{21} + 4\sqrt{48} + 2\sqrt{12} \approx$

$\approx 117{,}1\ \text{cm}^2$

13.7. Actividad resuelta.

13.8. Calcula el área lateral de los cilindros que se generan al girar el rectángulo alrededor del lado *AB* y alrededor del lado *AD*. ¿Son iguales?

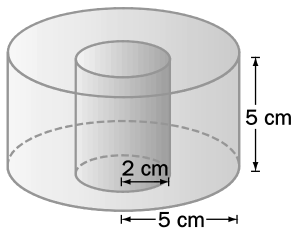


Alrededor del lado *AB*, $A_L = 2\pi rh = 2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 4 = 16\pi$ cm^2

Alrededor del lado *AD*, $A_L = 2\pi rh = 2 \cdot \pi \cdot 4 \cdot 2 = 16\pi$ cm^2

Sí, ambas áreas son iguales.

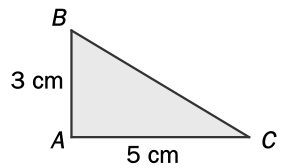
13.9. (TIC) Calcula el área de la siguiente pieza.



El área de la arandela es igual al área total del cilindro exterior, más el área lateral del cilindro interior y menos las dos bases del cilindro interior. Así:

$A = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 5 \cdot 5 + 2 \cdot 3{,}14 \cdot 5^2 + 2 \cdot 3{,}14 \cdot 2 \cdot 5 - 2 \cdot 3{,}14 \cdot 2^2 = 351{,}68$ cm^2

13.10. (TIC) Halla las áreas lateral y total del cono que se genera al girar el triángulo rectángulo alrededor del cateto *AB*.

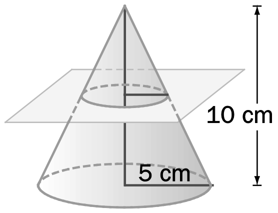


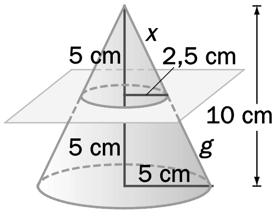
La generatriz del cono es $g = \sqrt{3^2 + 5^2} = 5{,}83$ cm.

$A_L = \pi \cdot r \cdot g = 3{,}14 \cdot 5 \cdot 5{,}83 = 91{,}53$ cm^2

$A_T = A_L + \pi \cdot r^2 = 91{,}53 + 3{,}14 \cdot 5^2 = 170{,}03$ cm^2

13.11. (TIC) Calcula las áreas lateral y total del tronco de cono que se obtiene al cortar el cono de la figura por un plano paralelo a la base que pasa por el punto medio de la altura.





Los dos triángulos rectángulos que aparecen en la figura son semejantes. Por tanto:

$$\frac{5}{r_2} = \frac{10}{r_1} \Rightarrow r_2 = \frac{5 \cdot 5}{10} = 2{,}5 \text{ cm}$$

Aplicando el teorema de Pitágoras: $g = \sqrt{5^2 + 2{,}5^2} \approx 5{,}59$ cm.

$A_L = \pi \cdot (r_1 + r_2) \cdot g = 3{,}14 \times 7{,}5 \times 5{,}59 = 131{,}64 \text{ cm}^2$

$A_T = A_L + \pi \cdot r_1^2 + \pi \cdot r_2^2 = 131{,}64 + 3{,}14 \times 25 + 3{,}14 \times 6{,}25 = 229{,}77 \text{ cm}^2$

13.12. Actividad resuelta.

13.13. (TIC) Calcula el área de las esferas cuyo radio es el que se indica.

a) 2 cm **b) 4,75 dm** **c) 0,5 m**

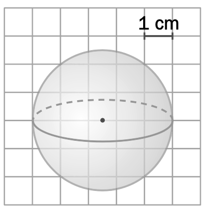
a) $A = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 2^2 = 50{,}24 \text{ cm}^2$

b) $A = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 4{,}75^2 = 283{,}4 \text{ dm}^2$

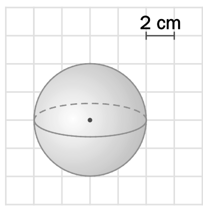
c) $A = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}5^2 = 3{,}14 \text{ m}^2$

13.14. Halla el área de las siguientes superficies esféricas.

a)



b)



a) $A = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 2{,}5^2 = 78{,}5 \text{ cm}^2$

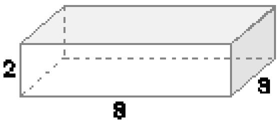
b) $A = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 4^2 = 200{,}96 \text{ cm}^2$

13.27. Actividad interactiva.

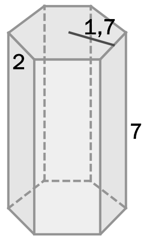
13.28. Actividad resuelta.

13.29. Calcula los volúmenes de los siguientes prismas, cuyas medidas están dadas en cm.

a)



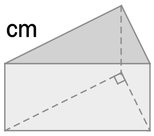
b)



a) $V = 8 \cdot 3 \cdot 2 = 48 \text{ cm}^3$

b) $V = \dfrac{p \cdot a_p}{2} \cdot h = \dfrac{6 \cdot 2 \cdot 1{,}7}{2} \cdot 7 = 71{,}4 \text{ cm}^3$

13.30. Halla el volumen del prisma de la figura.



$$V = A_{\text{BASE}} \cdot h = \frac{6 \cdot \sqrt{10^2 - 6^2}}{2} \cdot 4 = \frac{6 \cdot \sqrt{64}}{2} \cdot 4 = 96 \text{ cm}^3$$

13.31. (TIC) Halla el volumen de un prisma hexagonal regular cuyo lado de la base y altura miden 5 y 8 centímetros, respectivamente.

La apotema de la base mide $a_p = \sqrt{5^2 - 2{,}5^2} = 4{,}33$ cm.

El área de la base es $A_{\text{BASE}} = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4{,}33}{2} = 64{,}95 \text{ cm}^2$

El volumen del prisma es $V = A_{\text{BASE}} \cdot h = 64{,}95 \cdot 8 = 519{,}6 \text{ cm}^3$.

13.32. (TIC) Es invierno y hace mucho frío. Una piscina de 10 metros de larga por 6 de ancha se ha cubierto con una capa de hielo de 3 cm de espesor. ¿Cuántos litros de hielo habrá?

$V = 10 \cdot 6 \cdot 0{,}03 = 1{,}8 \text{ m}^3 = 1800 \text{ dm}^3 = 1800$ L

13.33. Queremos hacer un tetra brik de base cuadrada y con capacidad de medio litro. ¿Cuánto cartón necesitamos?

0,5 L = 0,5 dm^3 = 500 cm^3

Si llamamos *a* al lado de la base y *h* a la altura, medidos en centímetros, sabemos que el volumen es:

$V = a^2 \cdot h = 500 \text{ cm}^3$

La cantidad de cartón necesaria viene dada por:

$A_T = 2a^2 + 2ah + 2ah = 2a^2 + 4ah \text{ cm}^2$

De este modo, la solución dependerá del valor de *a* y *h*; por ejemplo, si *h* = 20 cm, tendremos:

$a^2 \cdot h = 500 \Rightarrow a^2 = 25 \Rightarrow a = 5 \text{ cm}$

y, por tanto, necesitaríamos $2 \cdot 25 + 4 \cdot 5 \cdot 20 = 450 \text{ cm}^2 = 4{,}5 \text{ m}^2$ de cartón.

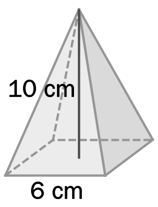
Otra posibilidad es asumir que el tetra brik tiene forma de cubo, es decir, *a* = *h*, de donde $a^3 = 500$ y, por tanto, $a = \sqrt[3]{500} \approx 7{,}94$ cm, con lo que necesitaríamos $6 \cdot a^2 \approx 378 \text{ cm}^2$ de cartón. De hecho, este es el caso en el que menos cantidad de cartón se necesitaría.

13.34. Actividad interactiva.

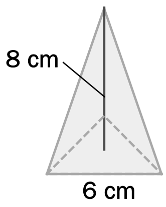
13.35. Actividad resuelta.

13.36. Calcula el volumen de las siguientes pirámides regulares.

a)



b)



a) $A_{BASE} = 6^2 = 36 \text{ cm}^2$

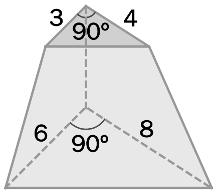
$$V = \frac{A_{BASE} \cdot h}{3} = \frac{36 \cdot 10}{3} = 120 \text{ cm}^3$$

b) Altura de la base: $h_B = \sqrt{6^2 - 3^2} = 5{,}2$ cm

$$A_{BASE} = \frac{6 \cdot 5{,}2}{2} = 15{,}6 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{A_{BASE} \cdot h}{3} = \frac{15{,}6 \cdot 8}{3} = 41{,}6 \text{ cm}^3$$

13.37. (TIC) Calcula el volumen del tronco de pirámide sabiendo que las medidas vienen dadas en metros y que las alturas de las pirámides completa y sobrante son de 6 y 3, respectivamente.



Volumen de la pirámide completa: $V_1 = \dfrac{A_{\text{BASE}} \cdot h}{3} = \dfrac{\frac{6 \cdot 8}{2} \cdot 6}{3} = 48 \text{ m}^3$

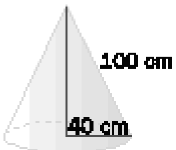
Volumen de la pirámide sobrante: $V_2 = \dfrac{A_{\text{BASE}} \cdot h}{3} = \dfrac{\frac{3 \cdot 4}{2} \cdot 3}{3} = 6 \text{ m}^3$

Volumen del tronco de pirámide: $V_1 - V_2 = 48 - 6 = 42 \text{ m}^3$

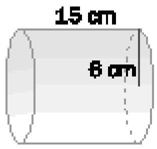
13.38. Actividad resuelta.

13.39. (TIC) Calcula el volumen de estos cuerpos.

a)



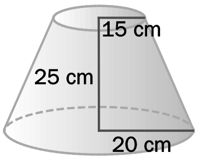
b)

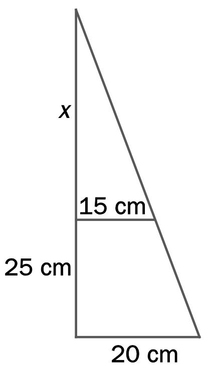


a) $V = \dfrac{A_{\text{BASE}} \cdot h}{3} = \dfrac{\pi \cdot 40^2 \cdot \sqrt{100^2 - 40^2}}{3} = 153\,485{,}74 \text{ cm}^3$

b) $V = A_{\text{BASE}} \cdot h = \pi \cdot 6^2 \cdot 15 = 1695{,}6 \text{ cm}^3$

13.40. (TIC) Calcula el volumen del tronco de cono.





El volumen será la diferencia entre el volumen del cono completo y el del cono sobrante.

Observemos la figura. Aplicando la semejanza de triángulos:

$\dfrac{x}{15} = \dfrac{x + 25}{20} \Rightarrow 20x = 15x + 375 \Rightarrow 5x = 375 \Rightarrow x = 75$ cm

El volumen del tronco de cono es, por tanto:

$V = \dfrac{3{,}14 \cdot 20^2 \cdot 100}{3} - \dfrac{3{,}14 \cdot 15^2 \cdot 75}{3} \approx 24204 \text{ cm}^3$

13.41. Actividad resuelta.

13.42. (TIC) Calcula el volumen de una esfera de diámetro 8 centímetros.

$$V = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 4^3}{3} \approx 268 \text{ cm}^3$$

13.43. (TIC) Halla el volumen de una semiesfera de radio 3 metros.

$$V = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3 \cdot 2} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 3^3}{6} = 56{,}52 \text{ cm}^3$$

13.44. (TIC) Un semicírculo de radio 3 centímetros gira alrededor de su diámetro. ¿Qué cuerpo geométrico genera? Calcula su volumen.

Se genera una esfera de radio 3 cm.

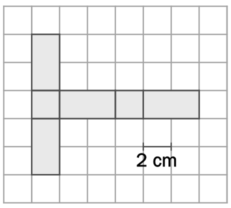
$$V = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 3^3}{3} = 113{,}04 \text{ cm}^3$$

EJERCICIOS

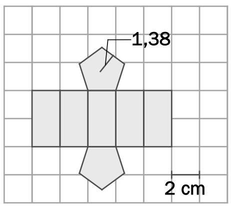
Área de los cuerpos geométricos

13.45. (TIC) Calcula el área total de los cuerpos geométricos que admiten los siguientes desarrollos planos.

a)



b)

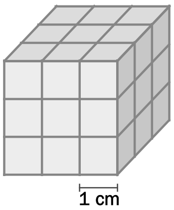


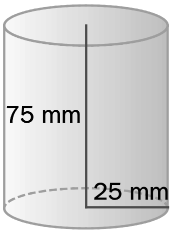
a) $10 \cdot 2^2 = 40 \text{ cm}^2$

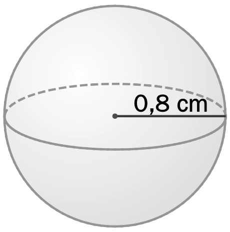
b) Área del pentágono $= \frac{p \cdot a_p}{2} = \frac{5 \cdot 2 \cdot 1{,}38}{2} = 6{,}9 \text{ cm}^2$

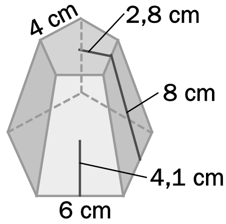
Área total $= 2 \cdot 6{,}9 + 10 \cdot 2^2 = 53{,}8 \text{ cm}^2$

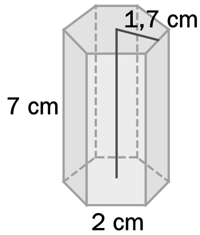
13.46. (TIC) Halla el área total de los siguientes cuerpos geométricos.

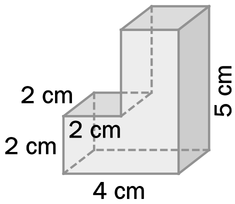
a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

f) 

a) $A_T = 6 \cdot 3^2 = 54 \text{ cm}^2$

b) $A_T = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h + 2 \cdot \pi \cdot r^2 = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 25 \cdot 75 + 2 \cdot 3{,}14 \cdot 25^2 = 15\,700 \text{ mm}^2$

c) $A_T = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}8^2 = 8{,}04 \text{ cm}^2$

d) $A_L = \dfrac{p_1 + p_2}{2} \cdot H = \dfrac{30 + 20}{2} \cdot 8 = 200 \text{ cm}^2$ $\quad A_T = 200 + \dfrac{30 \cdot 4{,}1}{2} + \dfrac{20 \cdot 2{,}8}{2} = 289{,}5 \text{ cm}^2$

e) $A_T = p \cdot (h + a_p) = 12 \cdot (7 + 1{,}7) = 104{,}4 \text{ cm}^2$

f) Observemos que el área total se puede calcular como el área del ortoedro de dimensiones 4, 2 y 5 cm, y restándole el área de dos rectángulos iguales de dimensiones 2 y 3 cm. Por tanto:

$A_T = 2 \cdot (4 \cdot 2 + 4 \cdot 5 + 2 \cdot 5) - 2 \cdot 2 \cdot 3 = 76 - 12 = 64 \text{ cm}^2$

13.47. Calcula el área lateral y total de un cilindro de radio de la base 45 dam y de altura 50 dam.

$A_L = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 45 \cdot 50 = 14\,130 \text{ dam}^2$

$A_T = A_L + 2 \cdot \pi \cdot r^2 = 14\,130 + 2 \cdot 3{,}14 \cdot 45^2 = 26\,847 \text{ dam}^2$

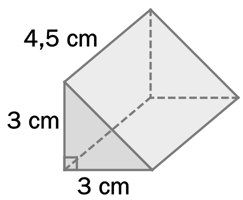
13.48. Un cono tiene por radio de la base 33 m y por generatriz 65 m. Calcula sus áreas lateral y total.

$A_L = \pi \cdot r \cdot g = 3{,}14 \cdot 33 \cdot 65 = 6735{,}3 \text{ m}^2$

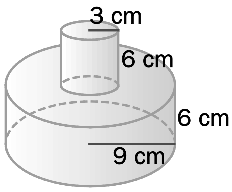
$A_T = A_L + \pi \cdot r^2 = 6735{,}3 + 3{,}14 \cdot 33^2 = 10\,154{,}76 \text{ m}^2$

13.49. (TIC) Halla el área total de los siguientes cuerpos.

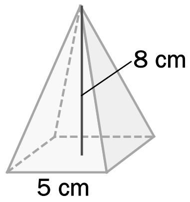
a)



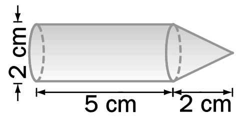
c)



b)



d)



a) $A_T = 2 \cdot \dfrac{3 \cdot 3}{2} + 4{,}5 \cdot \sqrt{3^2 + 3^2} + 2 \cdot 3 \cdot 4{,}5 = 9 + 4{,}5\sqrt{18} + 27 \approx 55{,}09 \text{ cm}^2$

b) $a_p = 2{,}5$ cm $\qquad A_p = \sqrt{8^2 + 2{,}5^2} \approx 8{,}38$ cm

$A_T = \dfrac{1}{2} \cdot p \cdot (A_p + a_p) = \dfrac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 \cdot (8{,}38 + 2{,}5) = 108{,}8 \text{ cm}^2$

c) El área total de la pieza se puede calcular sumando el área total del cilindro de debajo más el área lateral del cilindro de encima, es decir,

$A_T = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 9 \cdot 6 + 2 \cdot 3{,}14 \cdot 9^2 + 2 \cdot 3{,}14 \cdot 3 \cdot 6 = 960{,}84 \text{ cm}^2$

d) El área total de la pieza se puede calcular sumando el área total del cono más el área lateral del cilindro.

La generatriz del cono es $g = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} \approx 2{,}24$ cm.

Por tanto: $A_T = 3{,}14 \cdot 1 \cdot 2{,}24 + 3{,}14 \cdot 1^2 + 2 \cdot 3{,}14 \cdot 1 \cdot 5 = 41{,}57 \text{ cm}^2$

13.50. Calcula el área total de un cubo sabiendo que el perímetro de la base es de 24 decímetros.

El lado del cubo mide $l = \dfrac{24}{4} = 6$ dm; por tanto, $A_T = 6 \cdot 6^2 = 216 \text{ dm}^3$.

13.51. (TIC) Calcula las áreas lateral y total de un prisma heptagonal regular sabiendo que el lado de la base mide 25 milímetros, que la apotema de la base es de 26 milímetros y que la altura del prisma es de 5 centímetros.

$A_L = p \cdot h = 7 \cdot 25 \cdot 50 = 8750 \text{ mm}^2$

$A_T = p \cdot (h + a_p) = 7 \cdot 25 \cdot (50 + 26) = 13\,300 \text{ mm}^2$

13.52. La base de un ortoedro es un rectángulo con medidas una doble de la otra y con perímetro de 18 decímetros. La tercera medida del ortoedro es el triple de la menor de la base. Calcula el área total de este cuerpo geométrico.

Las medidas del ortoedro son 3, 6 y 9 cm. Por tanto, $A_T = 2 \cdot (3 \cdot 6 + 3 \cdot 9 + 6 \cdot 9) = 198 \text{ cm}^2$.

13.53. (TIC) Calcula el área total de un tetraedro si cada una de sus aristas mide 25 centímetros.

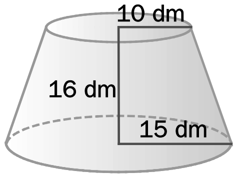
Todas las caras del tetraedro son triángulos equiláteros de lado 25 cm.

La altura de estas caras será $h = \sqrt{25^2 - 12{,}5^2} = \sqrt{468{,}75} \approx 21{,}65$ cm.

El área de una cara será $A = \dfrac{25 \cdot 21{,}65}{2} = 270{,}63$ cm^2.

El área total del tetraedro es $A_T = 270{,}63 \cdot 4 = 1082{,}52$ cm^2.

13.54. Halla el área lateral del siguiente tronco de cono.



La generatriz del tronco de cono es $g = \sqrt{16^2 + 5^2} = \sqrt{281} \approx 16{,}76$ dm.

El área lateral es $A_L = \pi \cdot (r_1 + r_2) \cdot g = 3{,}14 \cdot (10 + 15) \cdot 16{,}76 = 1315{,}66$ dm^2.

Unidades de volumen y capacidad

13.55. Copia y completa en tu cuaderno:

a) 45 hL = ________ L

b) 700 cL = ________ L

c) 72 daL = ________ hL

d) 4572,5 dL = ________ daL

e) 4500 dm^3 = ________ m^3

f) 25 dam^3 = ________ hm^3

g) 0,005 m^3 = ________ cm^3

h) 0,03 hm^3 = ________ m^3

a) 45 hL = 4500 L

b) 700 cL = 7 L

c) 72 daL = 7,2 hL

d) 4572,5 dL = 45,725 daL

e) 4500 dm^3 = 4,5 m^3

f) 25 dam^3 = 0,025 hm^3

g) 0,005 m^3 = 5000 cm^3

h) 0,03 hm^3 = 30 000 m^3

13.56. Expresa en litros las capacidades de:

a) 40 daL + 5L + 2 dL

b) 35 L + 45 dL + 370 cL + 4000 mL

c) 4 hL + 54 daL + 600 dL

d) 3,5 kL + 0,6 hL + 23 daL + 150 cL

a) 40 daL + 5 L + 2 dL = 400 L + 5 L + 0,2 L = 405,2 L

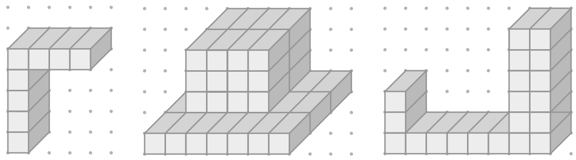
b) 35 L + 45 dL + 370 cL + 4000 mL = 35 L + 4,5 L + 3,7 L + 4 L = 47,2 L

c) 4 hL + 54 daL + 600 dL = 400 L + 540 L + 60 L = 1000 L

d) 3,5 kL + 0,6 hL + 23 daL + 150 cL = 3500 L + 60 L + 230 L + 1,5 L = 3791,5 L

Volumen de los cuerpos geométricos

13.60. Los siguientes cuerpos geométricos están formados por ladrillos todos iguales. Calcula el volumen de cada uno de ellos tomando como unidad el volumen de un ladrillo.



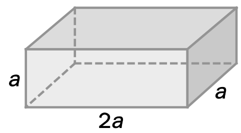
Primer cuerpo: 8 unidades cúbicas

Segundo cuerpo: 21 + 24 = 45 unidades cúbicas

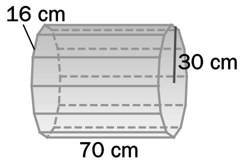
Tercer cuerpo: 8 + 12 = 20 unidades cúbicas

13.61. Calcula el volumen de los siguientes cuerpos geométricos.

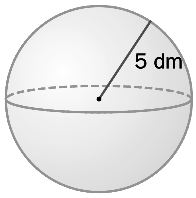
a)



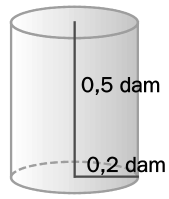
d)



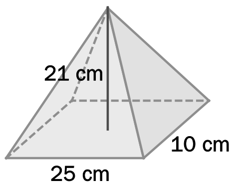
b)



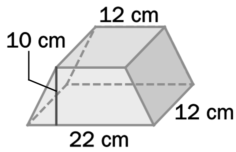
e)



c)



f)



a) $V = 2a \cdot a \cdot a = 2a^3$

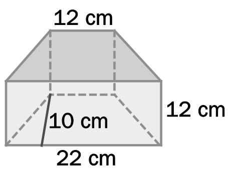
b) $V = \dfrac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3} = \dfrac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 5^3}{3} = 523{,}33 \text{ dm}^3$

c) $V = \dfrac{A_{\text{BASE}} \cdot h}{3} = \dfrac{25 \cdot 10 \cdot 21}{3} = 1750 \text{ cm}^3$

d) $V = A_{\text{BASE}} \cdot h = \dfrac{12 \cdot 16 \cdot 30}{2} \cdot 70 = 201\,600 \text{ cm}^3$

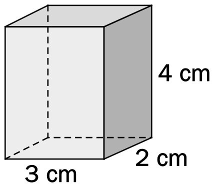
e) $V = \pi \cdot r^2 \cdot h = 3{,}14 \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}5 = 0{,}0628 \text{ dam}^3$

f) OJO: La figura no es un tronco de pirámide, ya que tiene aristas laterales paralelas. La figura es un prisma cuadrangular, como muestra el siguiente dibujo:



Por tanto: $V = A_{\text{BASE}} \cdot h = \dfrac{(22+12) \cdot 10}{2} \cdot 12 = 2040 \text{ cm}^3$

13.62. Dibuja un ortoedro de dimensiones 2, 3 y 4 centímetros y calcula la medida de su volumen.



$V = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24 \text{ cm}^3$

13.63. (TIC) Calcula cuántos litros caben en una esfera de radio 125 milímetros.

$$V = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3} = \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 125^3}{3} \approx 8\,177\,083 \text{ mm}^3 \approx 8{,}18 \text{ dm}^3 = 8{,}18 \text{ L}$$

13.64. Calcula el volumen de una pirámide de 3 centímetros de altura cuya base es un cuadrado de lado 4 centímetros.

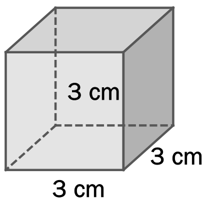
$$V = \frac{A_{\text{BASE}} \cdot h}{3} = \frac{4^2 \cdot 3}{3} = 16 \text{ cm}^3$$

13.65. Calcula el volumen de un cilindro sabiendo que el radio de la base mide 3 centímetros y que la altura mide dos veces el diámetro de la base.

$V = \pi \cdot r^2 \cdot h = 3{,}14 \cdot 3^2 \cdot 12 = 339{,}12 \text{ cm}^3$

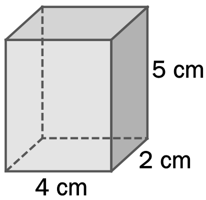
13.66. Dibuja un cubo de 27 centímetros cúbicos de volumen e indica la medida de su lado.

La medida del lado es $l = \sqrt[3]{27} = 3$ cm.

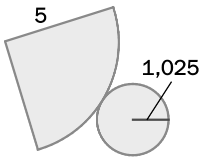


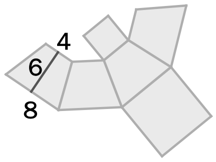
13.67. Dibuja un ortoedro con la única condición de que su volumen valga 40 cm³. Indica las dimensiones que has escogido.

Por ejemplo, se pueden tomar las dimensiones 2, 4 y 5 cm.



13.68. Calcula el volumen de los cuerpos geométricos que admiten como desarrollo plano estas representaciones (unidades en metros).

a) 

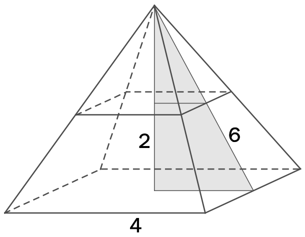
b) 

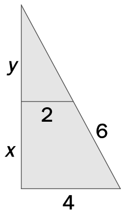
a) Se trata de un cono de generatriz 5 m y de radio de la base 1,025 m. La altura vale, por tanto,

$$h = \sqrt{5^2 - 1{,}025^2} \approx 4{,}89 \text{ m}$$

$$V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} = \frac{3{,}14 \cdot 1{,}025^2 \cdot 4{,}89}{3} = 5{,}38 \text{ m}^3$$

b) Se trata de un tronco de pirámide. El volumen será la diferencia entre el volumen de la pirámide completa y el de la pirámide sobrante. Observando el dibujo tenemos:





$$y = \sqrt{6^2 - 2^2} = \sqrt{32} \approx 5{,}66 \text{ m}$$

$$\frac{y}{2} = \frac{x+y}{4} \Rightarrow y = x = 5{,}66 \text{ m}$$

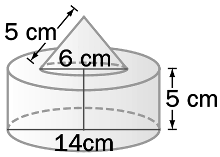
Por tanto: $V = \dfrac{8^2 \cdot 11{,}32}{3} - \dfrac{4^2 \times 5{,}66}{3} = 211{,}31 \text{ m}^3$

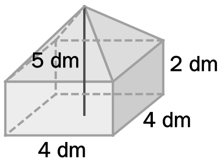
13.69. (TIC) Calcula el volumen de un cono de altura 4,5 decímetros y de generatriz 5,3 centímetros.

El radio de la base del cono es $r = \sqrt{5{,}3^2 - 4{,}5^2} = \sqrt{7{,}84} = 2{,}8$ dm.

El volumen es $V = \dfrac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} = \dfrac{3{,}14 \cdot 2{,}8^2 \cdot 4{,}5}{3} = 36{,}93 \text{ dm}^3$.

13.70. (TIC) Halla el volumen de los siguientes cuerpos geométricos.

a) 

b) 

a) El volumen solicitado es la suma de los volúmenes de un cilindro y un cono:

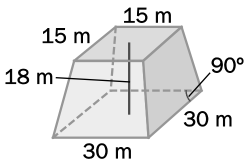
$$V = 3{,}14 \cdot 7^2 \cdot 5 + \frac{3{,}14 \cdot 3^2 \cdot \sqrt{5^2 - 3^2}}{3} \approx 807 \text{ cm}^3$$

b) El volumen solicitado es la suma de los volúmenes de un ortoedro y una pirámide:

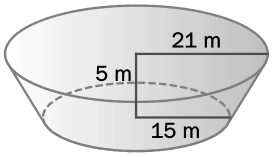
$$V = 4 \cdot 4 \cdot 2 + \frac{4^2 \cdot 3}{3} = 48 \text{ dm}^3$$

13.71. (TIC) Calcula el volumen del tronco de pirámide y el tronco de cono.

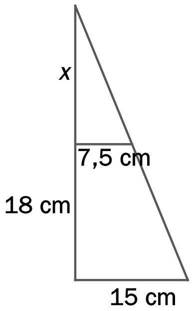
a)



b)



a) El volumen será la diferencia entre el volumen de la pirámide completa y el de la pirámide sobrante.



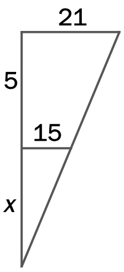
Observemos la figura. Aplicando la semejanza de triángulos:

$\dfrac{x}{7{,}5} = \dfrac{x+18}{15} \Rightarrow 15x = 7{,}5x + 135 \Rightarrow 7{,}5x = 135 \Rightarrow x = 18$ m

El volumen del tronco de pirámide es, por tanto:

$V = \dfrac{30^2 \cdot 36}{3} - \dfrac{15^2 \cdot 18}{3} = 9450 \text{ m}^3$

b) El volumen será la diferencia entre el volumen del cono completo y el del cono sobrante.



Observemos la figura. Aplicando la semejanza de triángulos:

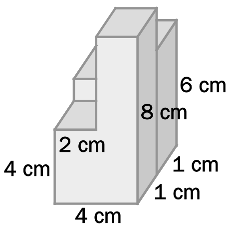
$\dfrac{x}{15} = \dfrac{x+5}{21} \Rightarrow 21x = 15x + 75 \Rightarrow 6x = 75 \Rightarrow x = 12{,}5$ m

El volumen del tronco de cono es, por tanto:

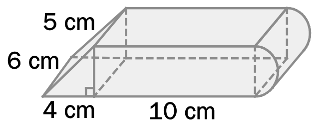
$V = \dfrac{3{,}14 \cdot 21^2 \cdot 17{,}5}{3} - \dfrac{3{,}14 \cdot 15^2 \cdot 12{,}5}{3} = 5133{,}9 \text{ m}^3$

13.72. (TIC) Halla el volumen de los siguientes cuerpos.

a)



b)



a) El volumen solicitado es la suma de los volúmenes de tres ortoedros de medidas 2, 1 y 4 cm; 2, 1 y 8 cm, y 4, 1 y 6 cm, respectivamente.

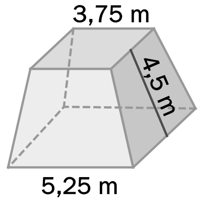
Por tanto: $V = 2 \cdot 1 \cdot 4 + 2 \cdot 1 \cdot 8 + 4 \cdot 1 \cdot 6 = 48 \text{ cm}^3$

b) El volumen solicitado es la suma de los volúmenes de un prisma triangular, un ortoedro y medio cilindro.

Por tanto: $V = \dfrac{4 \cdot \sqrt{5^2 - 4^2}}{2} \cdot 6 + 10 \cdot 6 \cdot \sqrt{5^2 - 4^2} + \dfrac{3{,}14 \cdot \left(\dfrac{\sqrt{5^2 - 4^2}}{2}\right)^2 \cdot 6}{2} = 237{,}2 \text{ cm}^3$

PROBLEMAS

13.73. Calcula cuántos metros cuadrados de madera se necesitan para construir el podio representado en la figura si no tiene base inferior, es decir, se apoya directamente sobre el suelo.



Área lateral: $A_L = \dfrac{p_1 + p_2}{2} \cdot H = \dfrac{4 \cdot 5{,}25 + 4 \cdot 3{,}75}{2} \cdot 4{,}5 = 81 \text{ m}^2$

Área de la base superior: $A_{\text{BASE SUP.}} = 3{,}75 \cdot 3{,}75 = 14{,}06 \text{ m}^2$

Área total de la figura: $A_T = 81 + 14{,}06 = 95{,}06 \text{ m}^2$

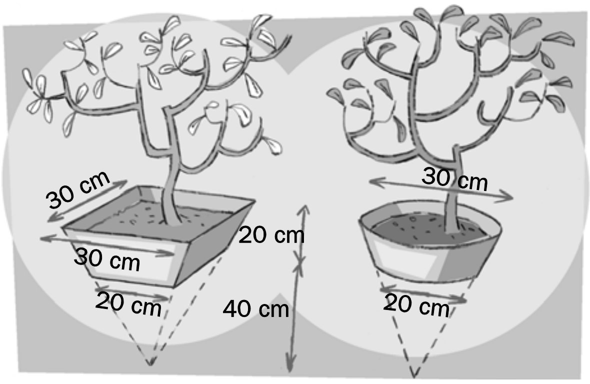
13.74. (TIC) Las dimensiones de una papelera cilíndrica son 20 centímetros de diámetro y 31 de altura. Calcula la superficie de material que se ha necesitado para fabricarla.

Área lateral: $A_L = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 10 \cdot 31 = 1946{,}8 \text{ cm}^2$

Área de la base inferior: $A_{\text{BASE INF.}} = \pi \cdot r^2 = 3{,}14 \cdot 10^2 = 314 \text{ cm}^2$

Área total de la figura: $A_T = 1946{,}8 + 314 = 2260{,}8 \text{ cm}^2 \approx 22{,}61 \text{ dm}^2$

13.75. Las figuras representan jardineras. ¿En cuál de ellas hay que echar más tierra para que se llenen?



Queremos determinar qué figura de las dadas, el tronco de pirámide o el tronco de cono, tiene mayor volumen.

En ambos casos el volumen es la diferencia entre el volumen de la figura (pirámide o cono) completa y el de la figura sobrante.

En ambos casos la altura de la figura completa es de 60 cm.

Lo mismo sucede con la altura de la figura sobrante, que es de 40 cm.

Además, el lado de la base de la pirámide completa coincide con el diámetro de la base del cono completo, ambos miden 30 cm. Lo mismo sucede con el lado de la base de la pirámide sobrante y el diámetro de la base del cono sobrante, ambos miden 20 cm.

El volumen del tronco de pirámide es, por tanto, $V_{\text{pirámide}} = \dfrac{30^2 \cdot 60}{3} - \dfrac{20^2 \cdot 40}{3} \approx 12666{,}67 \text{ cm}^3$.

El volumen del tronco de cono es, por tanto, $V_{\text{cono}} = \dfrac{\pi \cdot (30/2)^2 \cdot 60}{3} - \dfrac{\pi \cdot (20/2)^2 \cdot 40}{3} \approx 9943{,}33 \text{ cm}^3$.

De este modo, obtenemos que el tronco de pirámide, es decir, la primera jardinera, es el de mayor volumen.

13.76. Calcula el área y el volumen de las siguientes cajas de cartón de las que se conocen sus tres dimensiones sabiendo que tienen tapa inferior, pero no superior.

a) Largo = 20 cm, ancho = 15 cm, alto = 25 cm

b) Largo = 2 m, ancho = 150 cm, alto = 8 dm

c) Largo = 0,2 dm, ancho = 1,5 cm, alto = 40 mm

a) $A = 20 \cdot 15 + 2 \cdot 15 \cdot 25 + 2 \cdot 20 \cdot 25 = 2050 \text{ cm}^2$

$V = 20 \cdot 15 \cdot 25 = 7500 \text{ cm}^3$

b) $A = 2 \cdot 1{,}5 + 2 \cdot 1{,}5 \cdot 0{,}8 + 2 \cdot 2 \cdot 0{,}8 = 8{,}6 \text{ m}^2$

$V = 2 \cdot 1{,}5 \cdot 0{,}8 = 2{,}4 \text{ m}^3$

c) $A = 2 \cdot 1{,}5 + 2 \cdot 1{,}5 \cdot 4 + 2 \cdot 2 \cdot 4 = 31 \text{ cm}^2$

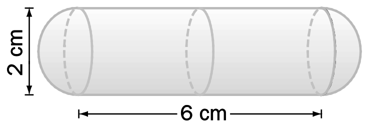
$V = 2 \cdot 1{,}5 \cdot 4 = 12 \text{ cm}^3$

13.77. Un depósito con forma de ortoedro y totalmente lleno de agua contiene 25 litros de este líquido. Dos de sus dimensiones son 40 y 50 centímetros, respectivamente. Calcula la medida de la tercera dimensión.

25 L = 25 dm^3 = 25 000 cm^3

La medida de la tercera dimensión será $\dfrac{25000}{40 \cdot 50} = 12{,}5$ cm.

13.78. (TIC) Para almacenar cierto medicamento contra las inflamaciones óseas de caballos, se quiere construir cápsulas con forma de cilindro y semiesferas en sus extremos tal y como muestra la figura. Calcula la cantidad de superficie que se precisa para construir cada cápsula, así como su volumen en cm^3.



El área total será la suma del área lateral del cilindro y el área de la esfera.

Por tanto: $A_T = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 1 \cdot 6 + 4 \cdot 3{,}14 \cdot 1^2 = 50{,}24 \text{ cm}^2$

El volumen será la suma de los volúmenes del cilindro y de la esfera.

Por tanto: $V = 3{,}14 \cdot 1^2 \cdot 6 + \dfrac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 1^3 \approx 23 \text{ cm}^3$

13.79. Una persona respira 16 veces por minuto. Cada vez introduce en sus pulmones 4,25 decilitros de aire. ¿Cuántos metros cúbicos de aire ha inspirado en un día entero? ¿Y en una semana?

$24 \cdot 60 \cdot 16 \cdot 4{,}25 = 97\,920$ dL = 9792 L = 9792 dm^3 = 9,792 m^3 de aire al día

$9{,}792 \cdot 7 = 68{,}544$ m^3 de aire a la semana

13.80. (TIC) Para transportar tierra se utilizan camiones capaces de mover 4,5 metros cúbicos como máximo. ¿Cuántos camiones serán necesarios para transportar la tierra cavada en una zanja de 5 metros de larga, 10 de ancha y 2 de profunda, suponiendo que al remover la tierra, esta aumenta en $\frac{1}{8}$ su volumen primitivo?

El volumen de la zanja será: $V = 5 \cdot 10 \cdot 2 = 100$ m^3.

El volumen de la tierra extraída después de removerla será: $V = 100 \times \left(1 + \frac{1}{8}\right) = \frac{900}{8} = 112{,}5$ m^3.

El número de camiones necesario será: $\frac{112{,}5}{4{,}5} = 25$.

13.81. (TIC) Juan no ha cerrado bien el grifo del agua. ¿Cuántos litros se han desperdiciado si cada minuto gotean 5 centímetros cúbicos de agua y el grifo ha permanecido abierto durante 24 horas?

$24 \cdot 60 \cdot 5 = 7200$ cm^3 = 7,2 dm^3 = 7,2 L

13.82. Se quiere abrir un cortafuegos para evitar el avance de un incendio forestal. Si se tarda 8,5 minutos en cavar un metro cúbico de tierra, ¿cuánto se tardará en abrir una zanja de 100 m de larga, 2 de ancha y 0,25 de profunda?

El volumen de la zanja es: $V = 100 \cdot 2 \cdot 0{,}25 = 50$ m^3.

La zanja tardará en excavarse, por tanto, $50 \cdot 8{,}5 = 425$ minutos = 7 horas 5 minutos.

13.83. Queremos que un estanque con forma de ortoedro sea capaz de contener 8,5 m^3 de agua. ¿Qué altura deberá tener si se sabe que su base posee 500 dm^2 de superficie?

$A_{BASE} = 500$ dm^2 = 5 m^2

La altura será: $h = \frac{V}{A_{BASE}} = \frac{8{,}5}{5} = 1{,}7$ m.

13.84. (TIC) El decímetro cúbico de mercurio tiene una masa de 13,6 kilogramos.

a) Calcula el peso de 2 litros de mercurio.

b) Indica el volumen, en centímetros cúbicos, que ocuparán 450 gramos de mercurio.

a) 2 L = 2 dm^3; por tanto, pesarán $2 \cdot 13{,}6 = 27{,}2$ kg.

b) 450 g = 0,45 kg; por tanto, ocuparán $\frac{0{,}45}{13{,}6} \approx 0{,}033$ dm^3 = 33 cm^3.

13.85. De una lata de conservas se desprendió el papel que rodeaba el envase. Se midieron las dimensiones del papel y se obtuvo como resultado 14 centímetros de base y 4 de altura.

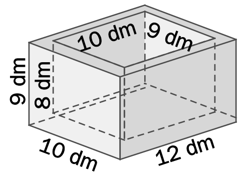
Calcula el volumen de la lata.

Calculamos el radio de la base: $2 \cdot \pi \cdot r = 14 \Rightarrow r \approx 2{,}23$ cm.

El volumen es, por tanto: $V = \pi \cdot r^2 \cdot h = 3{,}14 \cdot 2{,}23^2 \cdot 4 = 62{,}46$ cm^3.

13.86. (TIC) Un decímetro cúbico del material con que está construido el recipiente representado en la figura pesa 7,8 kilogramos.

Calcula cuánto pesa el recipiente.



El volumen de la figura será la diferencia entre el volumen del ortoedro exterior y el volumen del ortoedro interior.

Volumen del ortoedro exterior: $V_1 = 9 \cdot 10 \cdot 12 = 1080$ dm^3

Volumen del ortoedro interior: $V_2 = 8 \cdot 9 \cdot 10 = 720$ dm^3

Volumen del material: $V = V_1 - V_2 = 1080 - 720 = 360$ dm^3

El recipiente pesa 360 · 7,8 = 2808 kg.

13.87. Las dimensiones de una caja son: 36, 24 y 30 centímetros. En ella se quieren introducir paquetes con forma de ortoedro de aristas 5, 9 y 6 centímetros.

¿Cuántos paquetes caben en la caja?

A lo largo caben: 36 : 9 = 4 paquetes.

A lo ancho caben: 24 : 6 = 4 paquetes.

A lo alto caben: 30 : 5 = 6 paquetes.

En total caben: 4 · 4 · 6 = 96 paquetes.

Nota: Por ser el largo, ancho y alto de la caja múltiplos del largo, ancho y alto de cada paquete, respectivamente, cabe un número exacto de paquetes, quedando todo el espacio de la caja ocupado.

Por esta razón, también se puede calcular el número de paquetes que entran en la caja dividiendo el volumen de la misma por el volumen de cada paquete.

Volumen de la caja: 36 · 24 · 30 = 25 920 cm^3

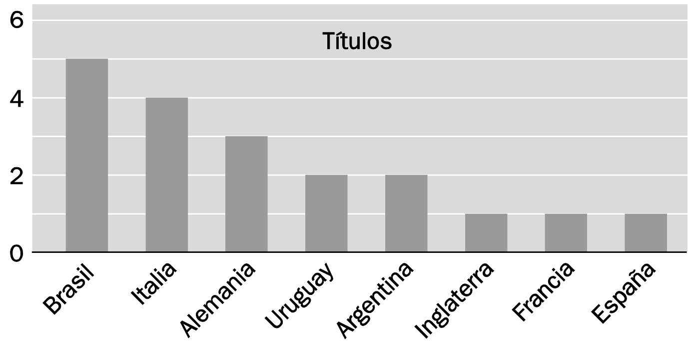
Volumen de cada paquete: 9 · 6 · 5 = 270 cm^3

Caben: 25 920 : 270 = 96 paquetes.

14 Estadística y probabilidad

ACTIVIDADES INICIALES

14.I. Los campeonatos se han repartido de esta forma: Brasil (5), Italia (4), Alemania (3), Uruguay y Argentina (2), Inglaterra, Francia y España (1). Representa un diagrama de barras con estos datos.



14.II. Cerca de 6000 jugadores han disputado alguna fase final. La tabla recoge los que más goles han marcado y en cuántos partidos. Ordena la tabla teniendo en cuenta la media de goles por partido.

Jugador	País	Goles	Partidos
Ronaldo	**Brasil**	**15**	**19**
Gerd Müller	**Alemania**	**14**	**13**
Miroslav Klose	**Alemania**	**14**	**19**
Just Fontaine	**Francia**	**13**	**6**
Pelé	**Brasil**	**12**	**14**
Jürgen Klinsmann	**Alemania**	**11**	**17**
Sándor Kocsis	**Hungría**	**11**	**5**

Jugador	País	Goles	Partidos	Media
Sándor Kocsis	Hungría	11	5	2,20
Just Fontaine	Francia	13	6	2,17
Gerd Müller	Alemania	14	13	1,08
Pelé	Brasil	12	14	0,86
Ronaldo	Brasil	15	19	0,79
Miroslav Klose	Alemania	14	19	0,74
Jürgen Klinsmann	Alemania	11	17	0,65

14.III. En cada mundial se asigna un número de plazas a cada continente. En Sudáfrica 2010 hubo 13 países europeos, 6 africanos, 3 asiáticos, 5 sudamericanos, 3 del resto de América y 2 de Oceanía. Con este reparto, participaron selecciones muy débiles, como Corea del Norte, y se quedaron fuera otras más potentes, como Rusia. ¿Qué crees que debe ser más importante, que estén las mejores selecciones o que estén representados países de todo el mundo? Debate con tus compañeros.

Debate en el aula.

ACTIVIDADES PROPUESTAS

14.1. Actividad resuelta.

14.2. Clasifica los siguientes caracteres estadísticos en cualitativos o cuantitativos.

a) El número de aprobados en un curso.

b) Peso de los recién nacidos en un hospital.

c) Color de las manzanas de una frutería.

a) Cuantitativo

b) Cuantitativo

c) Cualitativo

14.3. Indica si estos caracteres tienen variables estadísticas discretas o continuas.

a) Peso de los melones de una frutería.

b) Libros leídos en un año por distintos niños.

c) Goles marcados en los partidos de fútbol.

a) Continua

b) Discreta

c) Discreta

14.4. Actividad resuelta.

14.5. (TIC) Los resultados obtenidos al lanzar un dado cúbico 33 veces han sido:

4	**3**	**2**	**4**	**1**	**5**	**6**	**6**	**4**	**1**	**1**
2	**2**	**3**	**5**	**5**	**5**	**1**	**4**	**3**	**6**	**3**
1	**3**	**2**	**6**	**3**	**2**	**1**	**4**	**4**	**5**	**6**

Construye una tabla estadística.

x_i	f_i	h_i	F_i
1	6	$\frac{6}{33} = 0{,}18$	6
2	5	$\frac{5}{33} = 0{,}15$	6 + 5 = 11
3	6	$\frac{6}{33} = 0{,}18$	11 + 6 = 17
4	6	$\frac{6}{33} = 0{,}18$	17 + 6 = 23
5	5	$\frac{5}{33} = 0{,}15$	23 + 5 = 28
6	5	$\frac{5}{33} = 0{,}15$	28 + 5 = 33
	33	1	

14.6. (TIC) Haz una tabla estadística con el número de goles por partido en una jornada de Liga:

1 4 3 0 6 1 2 3 2 4

x_i	f_i	h_i	F_i
0	1	$\frac{1}{10} = 0,1$	1
1	2	$\frac{2}{10} = 0,2$	1 + 2 = 3
2	2	$\frac{2}{10} = 0,2$	3 + 2 = 5
3	2	$\frac{2}{10} = 0,2$	5 + 2 = 7
4	2	$\frac{2}{10} = 0,2$	7 + 2 = 9
6	1	$\frac{1}{10} = 0,1$	9 + 1 = 10
	10	1	

14.7. Actividad interactiva.

14.8. Actividad resuelta.

14.9. (TIC) Haz una tabla estadística con los datos sobre la duración, en minutos, de 20 películas agrupándolas en clases de amplitud 25 minutos.

90 120 122 95 145 75 66 207 45 77

148 69 110 180 88 90 95 110 85 125

Duración (min)	Marcas de clase x_i	f_i	h_i	F_i
$45 \leq x < 70$	57,5	3	$\frac{3}{20} = 0,15$	3
$70 \leq x < 95$	82,5	6	$\frac{6}{20} = 0,30$	3 + 6 = 9
$95 \leq x < 120$	107,5	4	$\frac{4}{20} = 0,2$	9 + 4 = 13
$120 \leq x < 145$	132,5	3	$\frac{3}{20} = 0,15$	13 + 3 = 16
$145 \leq x < 170$	157,5	2	$\frac{2}{20} = 0,1$	16 + 2 = 18
$170 \leq x < 195$	182,5	1	$\frac{1}{20} = 0,05$	18 + 1 = 19
$195 \leq x < 220$	207,5	1	$\frac{1}{20} = 0,05$	19 + 1 = 20
		20	1	

14.10. **(TIC) Construye una tabla estadística con las alturas, en metros, de los jugadores de baloncesto que participaron en el Mundial de Turquía 2010.**

1,91 1,92 2,16 1,95 1,82 2,06 2,04 1,90 2,07 2,02 1,99 2,09

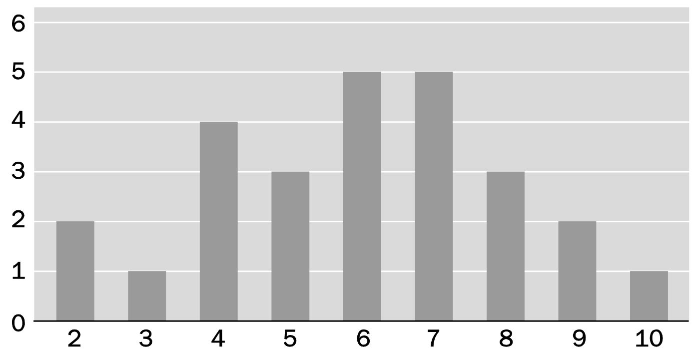
Altura (m)	Marcas de clase x_i	f_i	h_i	F_i
$1,82 \leq x < 1,92$	1,87	3	$\frac{3}{12} = 0,25$	3
$1,92 \leq x < 2,02$	1,97	3	0,25	3 + 3 = 6
$2,02 \leq x < 2,12$	2,07	5	0,42	6 + 5 = 11
$2,12 \leq x < 2,22$	2,17	1	0,08	11 + 1 = 12
		12	1	

14.11. **(TIC) Los siguientes datos corresponden a las calificaciones obtenidas en Matemáticas en una clase de 2.º de ESO:**

2 2 3 4 4 4 4 5 5 5 6 6 6 6 6 7 7 7 7 7 8 8 8 9 9 10

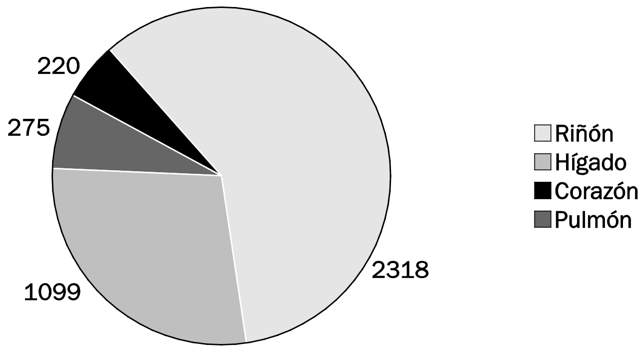
Construye una tabla de frecuencias y el diagrama de barras.

x_i	f_i	h_i	F_i
2	2	$\frac{2}{26} = 0,08$	2
3	1	0,04	2 + 1 = 3
4	4	0,15	3 + 4 = 7
5	3	0,12	7 + 3 = 10
6	5	0,19	10 + 5 = 15
7	5	0,19	15 + 5 = 20
8	3	0,12	20 + 3 = 23
9	2	0,08	23 + 2 = 25
10	1	0,04	25 + 1 = 26
	26	1	



14.12. (TIC) En la tabla se muestra el número de órganos donados en España en el año 2009. Represéntalos en un diagrama de sectores.

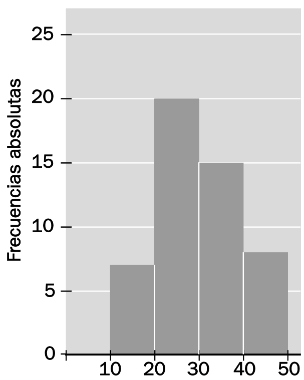
Órgano	Riñón	Hígado	Corazón	Pulmón
Número	2318	1099	275	220



14.13. Actividad resuelta.

14.14. (TIC) Haz un histograma de frecuencias absolutas con los datos que aparecen en la tabla.

Intervalos	Frecuencias absolutas
$10 \le x < 20$	7
$20 \le x < 30$	20
$30 \le x < 40$	15
$40 \le x < 50$	8



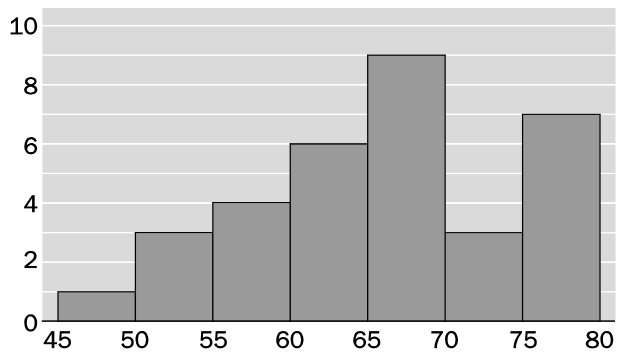
14.15. (TIC) Representa gráficamente los datos recogidos sobre la frecuencia cardiaca de 33 personas, considerando intervalos de amplitud 5.

67 72 56 51 62 66 69 67 63 77 75 52 47 66 58 65 79

77 59 60 76 62 62 61 67 75 76 56 54 72 65 68 70

Primero se agrupan los datos en una tabla de frecuencias absolutas y luego se construye el histograma.

Duración (min)	f_i
$45 \le x < 50$	1
$50 \le x < 55$	3
$55 \le x < 60$	4
$60 \le x < 65$	6
$65 \le x < 70$	9
$70 \le x < 75$	3
$75 \le x < 80$	7



14.16. Actividad interactiva.

14.17. Actividad resuelta.

14.18. (TIC) El número de alojamientos rurales en cierta comunidad autónoma se distribuye según los datos recogidos en esta tabla.

Tipo de alojamiento	N.º de plazas
Campings	160
Viviendas en alquiler	3600
Albergues	380
Habitaciones en viviendas	1400

a) ¿De qué tipo son los datos de estudio?

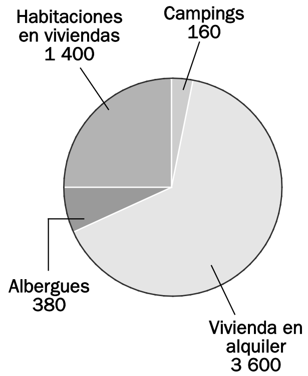
b) ¿Cuál es la moda?

c) Haz el diagrama de sectores

a) De tipo cualitativo.

b) La moda es “viviendas de alquiler”.

c)



14.19. (TIC) La tabla siguiente expresa el precio de varios ordenadores personales que hay en una tienda de informática.

Precios (euros)	N.º de ordenadores
$600 \leq x < 900$	60
$900 \leq x < 1200$	124
$1200 \leq x < 1500$	30
$1500 \leq x < 1800$	15
$1800 \leq x < 2100$	3

a) ¿Cuál es la clase modal?

b) ¿Cuál es la moda?

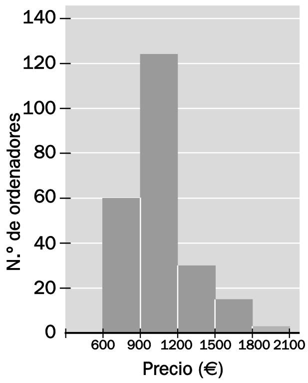
c) Representa los datos con un gráfico.

a) La clase modal es el intervalo $900 \leq x < 1200$.

b) La moda es la marca de la clase modal:

$$\frac{1200 + 900}{2} = 1050.$$

c)



14.20. Actividad resuelta.

14.21. Para hallar la nota de Matemáticas se multiplica por 5 la nota de problemas, por 4 la nota de cálculo y por 1 la nota de teoría.

Beatriz saca 8, 7 y 10, respectivamente, en cada apartado.

a) ¿Cuál es su calificación final?

b) ¿Cuántos puntos más debe sacar en cálculo para que su media sea de 9?

a) Su calificación final es: $\frac{5\cdot 8+4\cdot 7+10\cdot 1}{5+4+1} = \frac{78}{10} = 7{,}8$.

b) Si x es la nota que debe sacar en cálculo para que la media sea 9:

$$\frac{5\cdot 8+4\cdot x+10\cdot 1}{5+4+1} = 9 \Rightarrow \frac{50+4x}{10} = 9 \Rightarrow x = \frac{90-50}{4} = 10$$

Como sacó un 7 en cálculo, debe sacar 3 puntos más para que su media sea 9.

14.22. (TIC) Elabora una tabla estadística para estos datos agrupándolos en clases de amplitud 5.

147 145 148 150 156 162 158 154 152 164 146 145 141 153 161 164 142 147

Halla la media de los datos agrupados utilizando las marcas de clase.

Datos	Marcas de clase x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$
$141 \le x < 146$	143,5	4	574
$146 \le x < 151$	148,5	5	742,5
$151 \le x < 156$	153,5	3	460,5
$156 \le x < 161$	158,5	2	317
$161 \le x < 166$	163,5	4	654
		18	2748

La media es $\frac{2748}{18} = 152{,}67$.

14.23. Actividad interactiva.

14.24. (TIC) Calcula la mediana de los siguientes datos.

a) 2, 5, 1, 0, 6, 3, 7

b) 15, 21, 3, 49, 10, 47, 32, 47, 35, 12

c) 12, 8, 15, 12, 7, 8, 8, 15, 8

d) 1,3; 0; 2,7; 1,2; 0; 0; 1,3; 2,4; 0; 0,9

a) 0, 1, 2, 3, 5, 6, 7. Mediana = 3

b) 3, 10, 12, 15, 21, 32, 35, 47, 49. Mediana = 21

c) 7, 8, 8, 8, 8, 12, 12, 15, 15. Mediana = 8

d) 0; 0; 0; 0; 0,9; 1,2; 1,3; 1,3; 2,4; 2,7. Mediana = $\frac{0{,}9+1{,}2}{2} = 1{,}05$

14.25. (TIC) Los siguientes datos indican el tiempo semanal, en horas, que dedican 34 niños a jugar con la consola.

6 6 7 5 3 5 5 6 7 7 3 4 6 4 5 6 7 4 6 6 7 6 6 4 5 5 4 5 5 6 5 5 5 5

Halla la mediana.

3 3 4 4 4 4 4 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 7 7 7 7 7

Mediana = 5

14.26. Actividad resuelta.

14.27. Halla el rango de las edades de los componentes de una banda musical:

15 34 18 25 29 14 22 31 29 16 32

Rango = 34 – 14 = 20

14.28. Actividad interactiva.

14.29. Halla la desviación media de cada grupo:

Grupo *A*: 72 65 71 56 59 63 61 70 52 49

Grupo *B*: 50 93 90 70 69 68 72 71 70 71

¿Qué conclusión puedes sacar a la vista de los resultados obtenidos?

Grupo *A*: $\bar{x}_A = \dfrac{72+65+71+56+59+63+61+70+52+49}{10} = 61{,}8$

Grupo *B*: $\bar{x}_B = \dfrac{50+93+90+70+69+68+72+71+70+71}{10} = 72{,}4$

Grupo *A*:

Datos	Diferencias (Dato – media)	|Diferencia|
49	–12,8	12,8
52	–9,8	9,8
56	–5,8	5,8
59	–2,8	2,8
61	–0,8	0,8
63	1,2	1,2
65	3,2	3,2
70	8,2	8,2
71	9,2	9,2
72	10,2	10,2
		64

Grupo *B*:

Datos	Diferencias (Dato – media)	|Diferencia|
50	–22,4	22,4
68	–4,4	4,4
69	–3,4	3,4
70	–2,4	2,4
70	–2,4	2,4
71	–1,4	1,4
71	–1,4	1,4
72	–0,4	0,4
90	17,6	17,6
93	20,6	20,6
		76,4

La desviación media del grupo *A* es $\dfrac{64}{10} = 6{,}4$.

La desviación media del grupo *B* es $\dfrac{76{,}4}{10} = 7{,}64$.

Como la desviación media del grupo *B* es superior a la del *A*, sus datos están más dispersos.

EJERCICIOS

Caracteres y variables estadísticos

14.48. Copia en tu cuaderno la tabla y coloca cada uno de los siguientes caracteres estadísticos en la columna correspondiente.

CARACTERES ESTADÍSTICOS		
Cualitativos	**Cuantitativos**	
	Variables discretas	**Variables continuas**
•	•	•

a) Peso de una persona

b) Número de pulsaciones

c) Profesión

d) Color de ojos

e) Número de compañeros

f) Perímetro craneal

g) Estado civil

h) Empleados en una empresa

i) Medida de la palma de la mano

j) Número de libros leídos en un año

k) Deporte preferido

l) Distancia de tu casa a la biblioteca

m) Sexo de los nacidos en un hospital

n) Temperaturas mínimas de una semana

o) Número de veces que se va al cine

p) Género favorito de los miembros de una asociación de cinéfilos.

CARACTERES ESTADÍSTICOS		
Cualitativos	Cuantitativos	
	Variables discretas	Variables continuas
Profesión Color de ojos Estado civil Deporte preferido Sexo de los nacidos en un hospital Género favorito de los miembros de una asociación de cinéfilos	Número de compañeros Empleados en una empresa Número de libros leídos en un año Temperaturas mínimas de una semana Número de veces que se va al cine	Peso de una persona Número de pulsaciones Perímetro craneal Medida de la palma de la mano Distancia de tu casa a la biblioteca

14.49. Los alumnos de 2.º de ESO de un centro escolar visitan un jardín botánico y tienen que tomar datos para un trabajo de estadística en el que estudien:

a) Caracteres estadísticos cualitativos.

b) Variables estadísticas discretas.

c) Variables estadísticas continuas.

Da tres ejemplos para cada uno de los apartados.

a) Color de la hoja, procedencia, estación de floración.

b) Número de riegos diarios necesarios, número de podas anuales, número de cotiledones de la semilla.

c) Altura de la planta, grosor del tallo, superficie de la hoja.

Recuento de datos. Frecuencias

14.50. (TIC) Las edades de los componentes de una compañía de teatro juvenil son las siguientes.

15 17 14 19 17 16 13 12 15 16 13 12 19 13 12 18 17 16 15 14 13 12

a) Efectúa el recuento.

b) Forma la tabla de frecuencias completa.

a)

Edad	N.º de personas
12	4
13	4
14	2
15	3
16	3
17	3
18	1
19	2

b)

x_i	f_i	h_i	F_i
12	4	$\frac{4}{22} = 0{,}18$	4
13	4	0,18	8
14	2	0,09	10
15	3	0,14	13
16	3	0,14	16
17	3	0,14	19
18	1	0,05	20
19	2	0,09	22
	22	1	

14.51. (TIC)Estas fueron las temperaturas máximas en una ciudad durante el mes de abril.

12	**16**	**15,5**	**20**	**18**	**13**	**19,5**	**17**	**19**	**19**
18,5	**15**	**13**	**20,5**	**20**	**19**	**18**	**17**	**16**	**15**
11,5	**19**	**19**	**17**	**20**	**21**	**18**	**16**	**13**	**13,5**

a) Haz el recuento de los datos agrupados en 4 clases de amplitud 3.

b) Forma la tabla con las marcas de clase y las frecuencias.

a) y b)

Datos	Marcas de clase x_i	f_i	h_i	F_i
$11{,}5 \le x < 14{,}5$	13	6	$\frac{6}{30} = 0{,}2$	6
$14{,}5 \le x < 17{,}5$	16	9	0,3	15
$17{,}5 \le x < 20{,}5$	19	13	0,43	28
$20{,}5 \le x < 23{,}5$	22	2	0,07	30
		30	1	

Gráficos estadísticos

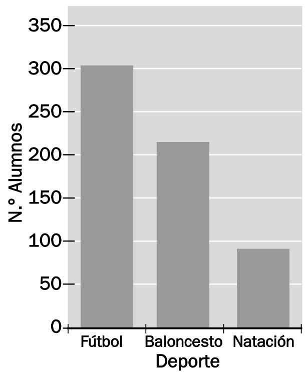
14.52. (TIC) El deporte preferido de un grupo de escolares viene dado por esta tabla.

Deporte	Fútbol	Baloncesto	Natación
Alumnos	305	215	80

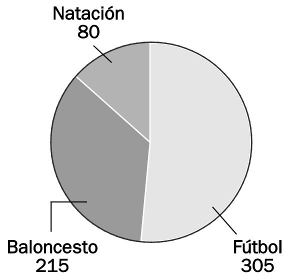
Representa la información en un gráfico.

a) Mediante un diagrama de barras. **b) Mediante un diagrama de sectores.**

a)



b)



14.53. (TIC) Las alturas, en centímetros, de 20 plantas de una determinada especie son estas.

6,1 5,3 6,2 5,6 4,8 4,9 5,2 5,6 6,1 6,2

5,9 5,8 5,7 5,1 4,9 5,2 5,3 6,1 5,9 5,8

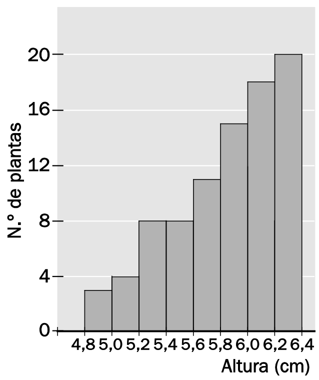
a) Elabora una tabla estadística para estos datos agrupándolos en 8 intervalos.

b) Haz el histograma de frecuencias absolutas acumuladas con los datos de la tabla.

a)

Datos	Marca de clase x_i	f_i	h_i	F_i
$4,8 \le x < 5$	4,9	3	$\frac{3}{20} = 0,15$	3
$5 \le x < 5,2$	5,1	1	0,05	4
$5,2 \le x < 5,4$	5,3	4	0,2	8
$5,4 \le x < 5,6$	5,5	0	0	8
$5,6 \le x < 5,8$	5,7	3	0,15	11
$5,8 \le x < 6$	5,9	4	0,2	15
$6 \le x < 6,2$	6,1	3	0,15	18
$6,2 \le x < 6,4$	6,3	2	0,1	20
		20	1	

b)



Media aritmética. Moda. Mediana

14.54. Halla la media aritmética y la moda de los siguientes conjuntos de datos.

a) **2 1 4 6 3**

b) **7 8 4 3 6 7**

c) **5 5 5 5 5 5 5 5**

d) **6 5 4 3 7 6 5 4 3 0 7 5**

a) $\overline{x} = \dfrac{2+1+4+6+3}{5} = 3{,}2$. Todos los datos son moda.

b) $\overline{x} = \dfrac{7+8+4+3+6+7}{6} = 5{,}83$. La moda es 7.

c) $\overline{x} = 5$. La moda es 5.

d) $\overline{x} = \dfrac{6+5+4+3+7+6+5+4+3+0+7+5}{12} = 4{,}58$. La moda es 5.

14.55. Halla el dato que falta en la serie 7 6 5 4 3 7 6 5 $\square$ sabiendo que la moda es 5.

Una vez hallado el dato, calcula la media aritmética.

Para que la moda sea 5, este dato debe aparecer más que los otros. Por tanto, el que falta es 5.

$\overline{x} = \dfrac{7+6+5+4+3+7+6+5+5}{9} = 5{,}33$

14.56. Calcula la mediana de los siguientes conjuntos de datos.

a) **15 17 14 19 17 16 13**

b) **15 17 14**

c) **12 18 17 16 15 14 13 12 15 10**

d) **4 7 5 6 6 8 8 8 6 6 8 9**

a) 13 14 15 16 17 17 19. Mediana = 16

b) 14 15 17. Mediana = 15

c) 10 12 12 13 14 15 15 16 17 18. Mediana = $\dfrac{14+15}{2} = 14{,}5$

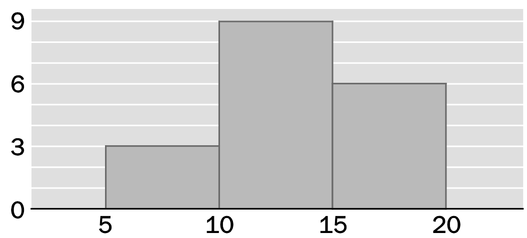
d) 4 5 6 6 6 6 7 8 8 8 8 9. Mediana = $\dfrac{6+7}{2} = 6{,}5$

14.57. Basándote en el siguiente histograma:

a) **Construye una tabla de frecuencias.**

b) **¿Cuál es la media de los datos?**

c) **¿Cuál es la clase modal?**



a)

Datos	Marcas de clase x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$
$5 \le x < 10$	7,5	3	22,5
$10 \le x < 15$	12,5	9	112,5
$15 \le x < 20$	17,5	6	105
		18	240

b) La media de los datos es $\dfrac{240}{18} = 13{,}3$.

c) La clase modal es $10 \le x < 15$.

14.58. En una oposición, la nota final se obtiene dando un peso del 60 % al ejercicio escrito y de un 40 % a los méritos previos.

Un opositor ha obtenido un 6,785 en el ejercicio escrito y tiene 4,7 puntos de méritos. Si la nota de corte para obtener plaza ha estado en 5,8, ¿obtiene plaza?

Media: $6{,}785 \cdot 0{,}6 + 4{,}7 \cdot 0{,}4 = 5{,}951$

Como su media es superior a la nota de corte, sí obtiene plaza.

14.59. Copia en tu cuaderno la tabla y complétala con los datos que faltan.

Datos	**2**	**4**	**6**	**8**
Frecuencia absoluta	**3**	•	•	•
Frecuencia relativa	•	•	**0,4**	•
Frecuencia acumulada	•	**8**	•	**20**

Calcula también la media, la moda y la mediana.

El total de datos es 20 por ser ese el valor de la frecuencia absoluta acumulada del último valor.

$F_1 = f_1 = 3$; $3 + f_2 = 8 \Rightarrow f_2 = 5$; $\dfrac{f_3}{20} = 0{,}4 \Rightarrow f_3 = 8$

$F_3 = 8 + 8 = 16$; $f_4 = 20 - 16 = 4$

Datos	2	4	6	8
Frecuencia absoluta	3	5	8	4
Frecuencia relativa	0,15	0,25	0,4	0,2
Frecuencia acumulada	3	8	16	20

Media: $\overline{x} = \dfrac{2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 + 6 \cdot 8 + 8 \cdot 4}{20} = 5{,}3$.

Moda = 6.

Mediana = 6

14.60. (TIC) El ahorro de 100 familias a lo largo de un año viene expresado por la siguiente tabla.

a) Halla el ahorro medio.

b) ¿Cuál es la clase modal?

c) ¿Cuál es la moda?

d) Representa el histograma y el polígono de frecuencias.

Ahorro (en euros)	Número de familias
$0 \le x < 600$	11
$600 \le x < 1200$	15
$1200 \le x < 1800$	25
$1800 \le x < 2400$	39
$2400 \le x < 3000$	10
	100

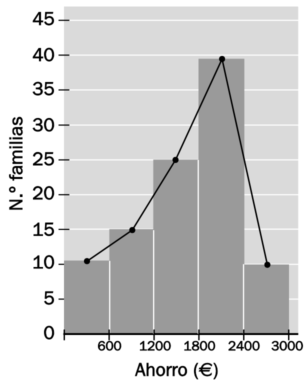
Ahorro (en euros)	Marcas de clase x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$
$0 \le x < 600$	300	11	3300
$600 \le x < 1200$	900	15	13 500
$1200 \le x < 1800$	1500	25	37 500
$1800 \le x < 2400$	2100	39	81 900
$2400 \le x < 3000$	2700	10	27 000
		100	163 200

a) Ahorro medio: $\frac{163\,200}{100} = 1632$ €

b) Clase modal: $1800 \le x < 2400$

c) Moda = 2100

d)



14.61. La media de 5 números es 39,2. La media de otros 7 números diferentes es 64,8. Calcula:

a) Cuánto suman los 5 primeros números.

b) Cuánto suman los otros 7 números.

c) La media de todos los números juntos.

a) La media indica que si todos los números fuesen iguales, su valor sería 39,2. Por tanto, su suma es $39{,}2 \cdot 5 = 196$.

b) Por la misma razón, la suma de los 7 números es $64{,}8 \cdot 7 = 453{,}6$.

c) Habría 5 números iguales a 39,2 y 7 iguales a 64,8 $\Rightarrow \overline{x} = \frac{5 \cdot 39{,}2 + 7 \cdot 64{,}8}{12} = \frac{196 + 453{,}6}{12} = 54{,}13$.

Medidas de dispersión

14.62. Averigua cuál de los siguientes conjuntos de datos tiene mayor dispersión.

a) 2 6 3 8 10 32 15

b) 110 112 111 113 111 110 111

c) 2,5 2,5 2,5 3,5 3,5 3,5

a) $\bar{x} = \dfrac{2+6+3+8+10+32+15}{7} = 10{,}86$

$$D_{\bar{x}} = \frac{|2-10{,}86|+|6-10{,}86|+|3-10{,}86|+|8-10{,}86|+|10-10{,}86|+|32-10{,}86|+|15-10{,}86|}{7} = 7{,}23$$

b) $\bar{x} = \dfrac{110+112+111+113+111+110+111}{7} = 111{,}14$

$$D_{\bar{x}} = \frac{|110-111{,}14|+|112-111{,}14|+|111-111{,}14|+|113-111{,}14|+|111-111{,}14|+|110-111{,}14|}{7} +$$

$$+\frac{|111-111{,}14|}{7} = 0{,}77$$

c) $\bar{x} = \dfrac{2{,}5+2{,}5+2{,}5+3{,}5+3{,}5+3{,}5}{6} = 3$

$$D_{\bar{x}} = \frac{|2{,}5-3|+|2{,}5-3|+|2{,}5-3|+|3{,}5-3|+|3{,}5-3|+|3{,}5-3|}{6} = 0{,}5$$

El conjunto de mayor dispersión es el del apartado a porque tiene la mayor desviación media.

14.63. Después de medirse, un grupo de amigos ha obtenido los siguientes resultados en centímetros.

165 167 162 175 171 169 172 170 169 171 172 175 169 170 172 166

Faltaba por llegar Luis, que mide 196 centímetros.

a) ¿Se altera el valor del rango?

b) Si Luis hubiese medido 174 centímetros, ¿se habría alterado el valor del rango?

a) El rango antes de llegar Luis es 175 – 162 = 13.

Después de llegar Luis es 196 – 162 = 34. Por tanto, sí se altera.

b) Si Luis hubiese medido 174 centímetros, no se habría alterado el valor del rango.

14.64. Los jugadores de dos equipos de fútbol se han pesado y los datos, en kilogramos, son los siguientes.

Equipo *A*: 72 65 71 56 59 63 61 70 52 49 68

Equipo *B*: 61 82 84 73 77 70 69 68 72 71 70

a) Calcula el recorrido de cada equipo.

b) Calcula la media en cada equipo.

c) Calcula la desviación media para cada equipo.

d) ¿Qué equipo tiene los datos más dispersos?

a) Recorrido del equipo *A*: 72 – 49 = 23; recorrido del equipo *B*: 84 – 61 = 23

b) $$\overline{x}_A = \frac{49+52+56+59+61+63+65+68+70+71+72}{11} = 62{,}36$$

$$\overline{x}_B = \frac{61+68+69+70+70+71+72+73+77+82+84}{11} = 72{,}45$$

c) Equipo *A*

x_i	Diferencias $(x_i - \overline{x}_A)$	|Diferencia|
49	–7,64	7,64
52	–4,64	4,64
56	–0,64	0,64
59	2,36	2,36
61	4,36	4,36
63	6,36	6,36
65	8,36	8,36
68	11,36	11,36
70	13,36	13,36
71	14,36	14,36
72	15,36	15,36
		88,8

Equipo *B*

x_i	Diferencias $(x_i - \overline{x}_B)$	|Diferencia|
61	–11,45	11,45
68	–4,45	4,45
69	–3,45	3,45
70	–2,45	2,45
70	–2,45	2,45
71	–1,45	1,45
72	–0,45	0,45
73	0,55	0,55
77	4,55	4,55
82	9,55	9,55
84	11,55	11,55
		52,35

$$D\overline{x}_A = \frac{88{,}8}{11} = 8{,}07 \qquad D\overline{x}_B = \frac{52{,}35}{11} = 4{,}76$$

d) El equipo *A* tiene los datos más dispersos que el *B*.

Sucesos. Probabilidad

14.65. Javier tiene una bolsa con pinturas de color naranja, amarillo y rosa. Sin mirar, saca dos pinturas para dárselas a Susana.

a) Escribe el espacio muestral.

b) Da dos sucesos compatibles.

c) Escribe dos sucesos incompatibles.

Se debe suponer que hay varios lápices de cada color.

a) *E* = {*NN*, *NA*, *NR*, *AA*, *AR*, *RR*}

b) *A* = "Una de las pinturas extraídas es naranja" y *B* = "Una de las pinturas extraídas es amarilla".

c) *A* = "Las dos pinturas extraídas son naranjas" y *B* = "Alguna de las pinturas extraídas es rosa".