MATEMATICAS. 4ºESO-B   TEMA 1: Números Reales

1.- Clasifica los números indicando los conjuntos numéricos a los que pertenecen:

$$\frac{\pi}{2} \qquad \sqrt{36} \qquad 2.25111\ldots \qquad \sqrt{-5} \qquad \frac{75}{-5}$$

2.- Representa en la recta real los números $\sqrt{17}$ y $\sqrt{13}$

3.- Representa en la recta real los números que verifican las siguientes relaciones:

1. $|x| < 1$ **2.** $|x| \geq 1$ **3.** $|x-2| < 1$

4. $|x-2| \leq 1$ **5.** $|x-2| > 1$ **6.** $|x-2| \geq 1$

4.- Pasar a fracción los siguientes decimales:

0.037, $0.\widehat{037}$, $0.03\hat{7}$, $1.\widehat{0001}$, 1.0001, $1.0\widehat{001}$

5.- Calcula:

1. $\left[\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{9}\right)+13\left(\frac{2}{3}-1\right)^2\right]:\left[\left(\frac{1}{2}-1\right):2\frac{1}{2}\right]=$

2. $1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{2}}}=$

6.- Realiza las siguientes operaciones:

1. $5.\hat{5}+0.1=$ **2.** $0.1+0.\hat{1}-0.0\hat{1}=$ **3.** $2.\hat{3}:1.5=$

7.- Agrupa las siguientes potencias:

1. $\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}:\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}=$ **2.** $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]^3=$ **3.** $\left\{\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]^3\right\}^{-4}=$ **4.** $\left(\frac{4}{9}\right)^{-2}:\left(\frac{27}{8}\right)^{-3}=$

5. $\dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^5\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}\left(\frac{81}{16}\right)^{-2}}{\left(\frac{3}{2}\right)^5\left(\frac{2}{3}\right)\left[\left(\frac{2}{3}\right)^5\right]^2\left(\frac{8}{27}\right)^3}=$

6. $\dfrac{\left(2-\frac{1}{5}\right)^2}{\left(3-\frac{2}{9}\right)^{-1}}:\dfrac{\left(\frac{6}{7}\cdot\frac{5}{4}-\frac{2}{7}:\frac{1}{2}\right)^3}{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}:\frac{1}{5}\right)}-5\frac{1}{7}=$

8.- Opera sacando factor común:

1. 1 $\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}=$ **2.** $\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{7}+\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{7}=$

9.- Realiza las siguientes operaciones con intervalos:

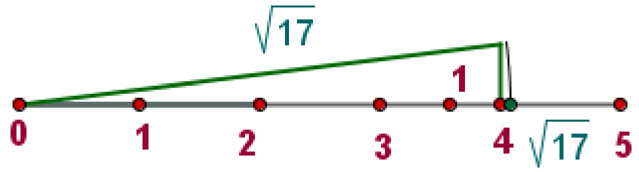
SOLUCIONES

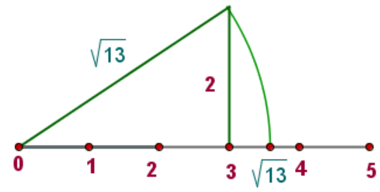
Ejercicio nº 1.-

$\frac{\pi}{2} \in \mathbb{R}$ $\sqrt{36} \in \mathbb{N}$ $2.25111... \in \mathbb{Q}$ $\sqrt{-5} \notin \mathbb{R}$ $\frac{75}{-5} \in \mathbb{Z}$

Ejercicio nº 2.-

$\sqrt{17} = 4^2 + 1^2$





Ejercicio nº 3.-

1.- |x| < 1 -1 < x < 1 x∈ (−1, 1)

2.- |x| ≥ 1 -1 ≥ x ≥ 1 x∈ (-∞, −1] ∪[1, +∞)

3.- |x −2| < 1 −1 < x −2 < 1 1 < x < 3 x ∈(1, 3)

4.- |x −2| ≤ 1 −1 ≤ x −2 ≤ 1 1 ≤x ≤ 3 x ∈[1, 3]

5.- |x −2| > 1 −1 > x −2 > 1 1 > x > 3 x ∈(−∞ , 1) ∪(3, +∞)

6.- |x −2| ≥ 1 −1 ≥ x −2 ≥ 1 1 ≥ x ≥ 3 x∈ (−∞ , 1] ∪[3, +∞)

Ejercicio nº 4.-

$0.037 = \frac{37}{1000}$ $0.\widehat{037} = \frac{37}{999}$ $0.03\hat{7} = \frac{37-3}{900} = \frac{34}{900} = \frac{17}{450}$

$1.\widehat{0001} = \frac{10001-1}{9999} = \frac{1000}{9999}$ $1.0001 = \frac{10001}{10000}$ $1.0\widehat{001} = \frac{10001-10}{9990} = \frac{9991}{9990}$

Ejercicio nº 5.-

1.-
$$\left[\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{9}\right)+13\left(\frac{2}{3}-1\right)^2\right]:\left[\left(\frac{1}{2}-1\right):2\frac{1}{2}\right] = = \left[\left(\frac{6-1}{9}\right)+13\left(\frac{2-3}{3}\right)^2\right]:\left[\left(\frac{1-2}{2}\right):\frac{2\cdot 2+1}{2}\right] =$$

$$= \left[\frac{5}{9}+13\left(\frac{-1}{3}\right)^2\right]:\left(-\frac{1}{2}:\frac{5}{2}\right) = = \left(\frac{5}{9}+13\cdot\frac{1}{9}\right):\left(\frac{1}{2}:\frac{5}{2}\right) = = \left(\frac{5}{9}+\frac{13}{9}\right):\left(\frac{2}{10}\right) =$$

$$= \frac{18}{9}:\left(-\frac{1}{5}\right) = 2:\left(-\frac{1}{5}\right) = -\frac{10}{1} = -10$$

2.-
$$1-\frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{2}}} = 1-\frac{1}{1-\frac{1}{\frac{2-1}{2}}} = 1-\frac{1}{1-\frac{1}{\frac{1}{2}}} = 1-\frac{1}{1-2} = 1-\frac{1}{-1} = 1+1 = 2$$

Ejercicio nº 6.-

1.- $5.\hat{6}+0.1=\frac{56-5}{9}+\frac{1}{10}=\frac{51}{9}+\frac{1}{10}=\frac{510+9}{90}=\frac{519}{90}$

2.- $0.1+0.\hat{1}-0.0\hat{1}=\frac{1}{10}+\frac{1}{9}-\frac{1}{90}=\frac{9+10-1}{90}=\frac{18}{90}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$

3.- $2.\hat{3}:1.5=\frac{23-2}{9}:\frac{15}{10}=\frac{21}{9}:\frac{3}{2}=\frac{42}{27}=\frac{14}{9}$

Ejercicio nº 7.-

1.- $\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}:\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}=\left(\frac{2}{3}\right)^{2}:\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}=\left(\frac{2}{3}\right)^{5}$

2.- $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\right]^{3}=\left(\frac{2}{3}\right)^{6}$

3.- $\left\{\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\right]^{3}\right\}^{-4}=\left(\frac{2}{3}\right)^{-24}=\left(\frac{3}{2}\right)^{24}$

4.- $\left(\frac{4}{9}\right)^{-2}:\left(\frac{27}{8}\right)^{-3}=\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\right]^{-2}:\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{3}\right]^{-3}=\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}:\left(\frac{3}{2}\right)^{-9}==\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}:\left(\frac{2}{3}\right)^{9}=\left(\frac{2}{3}\right)^{-13}=\left(\frac{3}{2}\right)^{13}$

5.- $$\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{5}\left(\frac{2}{3}\right)^{0}\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}\left(\frac{81}{16}\right)^{-2}}{\left(\frac{3}{2}\right)^{-5}\left(\frac{2}{3}\right)\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{5}\right]^{2}\left(\frac{8}{27}\right)^{3}}==\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{5}\left(\frac{2}{3}\right)^{0}\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{4}\right]^{-2}}{\left(\frac{3}{2}\right)^{-5}\left(\frac{2}{3}\right)\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{5}\right]^{2}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{3}\right]^{3}}==\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{5}\left(\frac{2}{3}\right)^{0}\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}\left(\frac{3}{2}\right)^{-8}}{\left(\frac{3}{2}\right)^{-5}\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{10}\left(\frac{2}{3}\right)^{9}}=$$

$$=\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{5}\left(\frac{2}{3}\right)^{0}\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}\left(\frac{2}{3}\right)^{8}}{\left(\frac{2}{3}\right)^{5}\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{10}\left(\frac{2}{3}\right)^{9}}==\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{10}}{\left(\frac{2}{3}\right)^{25}}=\left(\frac{2}{3}\right)^{-15}=\left(\frac{3}{2}\right)^{15}$$

6.- $$\frac{\left(2-\frac{1}{5}\right)^{2}}{\left(3-\frac{2}{9}\right)^{-1}}:\frac{\left(\frac{6}{7}\cdot\frac{5}{4}-\frac{2}{7}:\frac{1}{2}\right)^{3}}{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}:\frac{1}{5}\right)}-5\frac{1}{7}==\frac{\left(\frac{10-1}{5}\right)^{2}}{\left(\frac{27-2}{9}\right)^{-1}}:\frac{\left(\frac{30}{28}-\frac{4}{7}\right)^{3}}{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{12}:\frac{1}{5}\right)}-\frac{35+1}{7}=$$

$$=\frac{\left(\frac{9}{5}\right)^{2}}{\left(\frac{25}{9}\right)^{-1}}:\frac{\left(\frac{15}{14}-\frac{4}{7}\right)^{3}}{\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{12}\right)}-\frac{36}{7}==\frac{\left(\frac{9}{5}\right)^{2}}{\left(\frac{25}{9}\right)^{-1}}:\frac{\left(\frac{15-8}{14}\right)^{3}}{\left(\frac{6-5}{12}\right)}-\frac{36}{7}==\frac{\left(\frac{9}{5}\right)^{2}}{\left(\frac{25}{9}\right)^{-1}}:\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{3}}{\frac{1}{12}}-\frac{36}{7}=$$

$$=\frac{\frac{81}{25}}{\frac{9}{25}}:\frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{12}}-\frac{36}{7}=\frac{81}{9}:\frac{12}{8}-\frac{36}{7}==9:\frac{3}{2}-\frac{36}{7}=\frac{18}{3}-\frac{36}{7}=6-\frac{36}{7}=\frac{42-36}{7}=\frac{6}{7}$$

Ejercicio nº 8.-

1.- $\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}==\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{6}\cdot\frac{4}{4}=\frac{1}{6}$

2.- $\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{7}+\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{7}==\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{7}+\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{7}=\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{3}{7}+\frac{4}{7}\right)=\frac{1}{5}\cdot\frac{7}{7}=\frac{1}{5}$

1.- Calcula los valores de las siguientes potencias:

1. $16^{\frac{3}{2}} =$ 2. $8^{\frac{2}{3}} =$ 3. $81^{0.75} =$ 4. $8^{0.333\ldots} =$

2.- Escribe en forma de una sola potencia:

1. $30^3 \cdot (-3)^4 \cdot 3$	**2.** $5^7 : 5^3 =$	**3.** $(5^3)^4 =$	**4.** $(5 \cdot 2 \cdot 3)^4 =$
5. $(3^4)^4 =$	**6.** $[(5^3)^4]^2 =$	**7.** $(8^2)^3 =$	**8.** $3^5 \cdot (-2 \cdot 3)^3 \cdot 2^2 : 3^4 =$
9. $2^5 \cdot 2^4 \cdot 2 =$	**10.** $2^7 : 2^6 =$	**11.** $(2^2)^4 =$	**12.** $(9^3)^2 =$
13. $(2^5)^4 =$	**14.** $[(2^3)^4]^0 =$	**15.** $(4^3)^2 =$	**16.** $(4^{-2})^{-2} =$

3.- Extrae o introduce factores en las raíces:

1. $\sqrt{2 \cdot 3^2 \cdot 5^5}$ 2. $\sqrt[4]{2^7 \cdot 3^{14} \cdot 5^4}$ 3. $2\sqrt{3}$ 4. $2^2 \cdot 3^3 \sqrt[4]{6}$

4.- Poner en índice común: $\sqrt{2}$ $\sqrt[3]{2^2 \cdot 3^2}$ $\sqrt[4]{2^2 \cdot 3^3}$

5.- Realiza los siguientes productos y cocientes:

1. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{6} =$ 2. $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[4]{27} =$ 3. $\sqrt{12} \cdot \sqrt[3]{36} =$

4. $\dfrac{\sqrt[6]{128}}{\sqrt[6]{16}} =$ 5. $\dfrac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}} =$ 6. $\dfrac{\sqrt{256}}{\sqrt[3]{16}} =$

6.- Halla las sumas:

1. $2\sqrt{12} - 3\sqrt{75} + \sqrt{27} =$ 2. $\sqrt{24} - 5\sqrt{6} + \sqrt{486} =$

3. $2\sqrt{5} + \sqrt{45} + \sqrt{180} - \sqrt{80} =$ 4. $\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{250} =$

7.- Realiza las operaciones:

1. $\left(\sqrt{7} - \sqrt{2}\right)^2 =$ 2. $\left(2 - \sqrt{3}\right)^2 =$ 3. $\left(\sqrt{5} + 2\right) \cdot \left(\sqrt{5} - 2\right) =$

4. $\left(2\sqrt{5} + 3\sqrt{2}\right) \cdot \left(2\sqrt{5} - 3\sqrt{2}\right) =$ 5. $\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{250} + \sqrt[6]{4} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{4}} =$

8.- Opera y simplifica

1. $\sqrt[4]{\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{\dfrac{1}{8}}}} =$ 2. $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}}} =$ 3. $\sqrt{2\sqrt[3]{2\sqrt[4]{2}}} =$ 4. $\dfrac{\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[4]{a^3}}{\sqrt[6]{a^4}} =$

5. $\dfrac{1}{2 - \sqrt{3}} \cdot \dfrac{1}{2 + \sqrt{3}} =$ 6. $\sqrt{\dfrac{a-b}{(a-b)^2} \cdot \dfrac{a+b}{a^2 - b^2}} =$ 7. $\left(\dfrac{\sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[4]{18}}{\sqrt{6}}\right)^4 =$

9.- Racionaliza y simplifica:

1. $\dfrac{5}{2\sqrt{2}} =$ 2. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}} =$ 3. $\dfrac{2}{3 + \sqrt{3}} =$ 4. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} =$ 5. $\dfrac{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} =$

SOLUCIONES

Ejercicio nº 1.

1. $16^{\frac{3}{2}} = \sqrt{16^3} = \sqrt{\left(2^4\right)^3} = \sqrt{2^{12}} = 2^6 = 64$

2. $8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{\left(2^3\right)^2} = \sqrt[3]{2^6} = 2^2 = 4$

3. $81^{0.75} = 81^{\frac{75}{100}} = 81^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{81^3} = \sqrt[4]{\left(3^4\right)^3} = \sqrt[4]{3^{12}} = 3^3 = 27$

4. $8^{0.333...} = 8^{\frac{3}{9}} = 8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$

Ejercicio nº 2.-

1. $30^3 \cdot (-3)^4 \cdot 3 = (2 \cdot 3 \cdot 5)^3 \cdot 3^4 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 3^4 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3^8 \cdot 5^3 = \mathbf{2^3\ 3^8\ 5^3}$

2. $5^7 : 5^3 = \mathbf{5^4}$ **3.** $(5^3)^4 = \mathbf{5^{12}}$ **4.** $(5 \cdot 2 \cdot 3)^4 = \mathbf{30^4}$

5. $(3^4)^4 = \mathbf{3^{16}}$ **6.** $[(5^3)^4]^2 = (5^{12})^2 = \mathbf{5^{24}}$ **7.** $(8^2)^3 = [(2^3)^2]^3 = (2^6)^3 = \mathbf{2^{18}}$

8. $3^5 \cdot (-2 \cdot 3)^3 \cdot 2^2 : 3^4 = -3^5 \cdot 2^3 \cdot 3^3 \cdot 2^2 : 3^4 = \mathbf{-2^5\ 3^4}$ **9.** $2^5 \cdot 2^4 \cdot 2 = \mathbf{2^{10}}$ **10.** $2^7 : 2^6 = \mathbf{2}$

11. $(2^2)^4 = \mathbf{2^8}$ **12.** $(9^3)^2 = [(3^2)^3]^2 = (3^6)^2 = \mathbf{3^{12}}$ **13.** $(2^5)^4 = \mathbf{2^{20}}$

14. $[(2^3)^4]^0 = (2^{12})^0 = 2^0 = \mathbf{1}$ **15.** $(4^3)^2 = [(2^2)^3]^2 = (2^6)^2 = \mathbf{2^{12}}$ **16.** $(4^{-2})^{-2} = (2^2)^4 = 2^8$

Ejercicio nº 3.-

1. $\sqrt{2 \cdot 3^2 \cdot 5^5} = 3 \cdot 5^2\ \sqrt{2 \cdot 5}$

2. $\sqrt[4]{2^7 \cdot 3^{14} \cdot 5^4} = 2 \cdot 3^3 \cdot 5\ \sqrt[4]{2^3 \cdot 3^2}$

3. $2\sqrt{3} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = \sqrt{12}$

4. $2^2 \cdot 3^3\ \sqrt[4]{6} = \sqrt[4]{\left(2^2\right)^4 \cdot \left(3^3\right)^4 \cdot 2 \cdot 3} = = \sqrt[4]{2^8 \cdot 3^{12} \cdot 2 \cdot 3} = \sqrt[4]{2^9 \cdot 3^{13}}$

Ejercicio nº 4.-

m.c.m.$(2, 3, 4) = 12$; $\sqrt[12]{2^6}$ $\sqrt[12]{\left(2^2\right)^4 \cdot \left(3^2\right)^4}$ $\sqrt[12]{\left(2^2\right)^3 \cdot \left(3^3\right)^3}$; $\sqrt[12]{2^6}$ $\sqrt[12]{2^8 \cdot 3^8}$ $\sqrt[12]{2^6 \cdot 3^9}$

Ejercicio nº 5.-

1. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{12} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$

2. $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[4]{27} = \sqrt[12]{3^6} \cdot \sqrt[12]{\left(3^2\right)^4} \cdot \sqrt[12]{\left(3^3\right)^3} = \sqrt[12]{3^6 \cdot 3^8 \cdot 3^9} = \sqrt[12]{3^{23}} = 3\ \sqrt[12]{3^{11}}$

3. $\sqrt{12} \cdot \sqrt[3]{36} = \sqrt[6]{12^3} \cdot \sqrt[6]{36^2} = \sqrt[6]{\left(2^2 \cdot 3\right)^3 \cdot \left(2^2 \cdot 3^2\right)^2} = \sqrt[6]{2^6 \cdot 3^3 \cdot 2^4 \cdot 3^4} = \sqrt[6]{2^{10} \cdot 3^7} = 6\sqrt[6]{2^4 \cdot 3}$

4. $\dfrac{\sqrt[6]{128}}{\sqrt[6]{16}} = \sqrt[6]{\dfrac{128}{16}} = \sqrt[6]{\dfrac{2^7}{2^4}} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}$

5. $\dfrac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}} = \sqrt[6]{\dfrac{4^2}{2^3}} = \sqrt[6]{\dfrac{\left(2^2\right)^2}{2^3}} = \sqrt[6]{\dfrac{2^4}{2^3}} = \sqrt[6]{2}$

6. $\dfrac{\sqrt{256}}{\sqrt[3]{16}} = \sqrt[6]{\dfrac{(256)^3}{16^2}} = \sqrt[6]{\dfrac{\left(2^8\right)^3}{\left(2^4\right)^2}} = \sqrt[6]{\dfrac{2^{24}}{2^8}} = \sqrt[6]{2^{16}} = \sqrt[3]{2^8} = 2^2\sqrt[3]{2^2} = 4\ \sqrt[3]{4}$

Ejercicio nº 6.-

1. $2\sqrt{12} - 3\sqrt{75} + \sqrt{27} = 2\sqrt{2^2 \cdot 3} - 3\sqrt{3 \cdot 5^2} + \sqrt{3^3} = 4\sqrt{3} - 15\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = -8\sqrt{3}$

2. $\sqrt{24} - 5\sqrt{6} + \sqrt{486} = = \sqrt{2^3 \cdot 3} - 5\sqrt{6} + \sqrt{2 \cdot 3^5} = = 2\sqrt{6} - 5\sqrt{6} + 9\sqrt{6} = 6\sqrt{6}$

3. $2\sqrt{5} + \sqrt{45} + \sqrt{180} - \sqrt{80} = = 2\sqrt{5} + \sqrt{3^2 \cdot 5} + \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5} - \sqrt{2^4 \cdot 5} = = 2\sqrt{5} + 3\sqrt{5} + 6\sqrt{5} - 4\sqrt{5} = 7\sqrt{5}$

4. $\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{250} = = \sqrt[3]{2 \cdot 3^3} - \sqrt[3]{2^4} + \sqrt[3]{2 \cdot 5^3} = = 3\sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{2} + 5\sqrt[3]{2} = 6\sqrt[3]{2}$

Ejercicio nº 7.-

1. $\left(\sqrt{7} - \sqrt{2}\right)^2 = = \left(\sqrt{7}\right)^2 - 2 \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{2} + \left(\sqrt{2}\right)^2 = = 7 - 2\sqrt{14} + 2 = 9 - 2\sqrt{14}$

2. $\left(2 - \sqrt{3}\right)^2 = = 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} + \left(\sqrt{3}\right)^2 = = 4 - 4\sqrt{3} + 3 = 7 - 4\sqrt{3}$

3. $\left(\sqrt{5} + 2\right) \cdot \left(\sqrt{5} - 2\right) = = \left(\sqrt{5}\right)^2 - 2^2 = 5 - 4 = 1$

4. $\left(2\sqrt{5} + 3\sqrt{2}\right) \cdot \left(2\sqrt{5} - 3\sqrt{2}\right) = = \left(2\sqrt{5}\right)^2 - \left(3\sqrt{2}\right)^2 = = 2^2 \cdot \left(\sqrt{5}\right)^2 - 3^2\left(\sqrt{2}\right)^2 =$

$= 4 \cdot 5 - 9 \cdot 2 = 20 - 18 = 2$

5. $= \sqrt[3]{2^4} + \sqrt[3]{2 \cdot 5^3} + \sqrt[6]{2^2} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{2^2}} = = 2\sqrt[3]{2} + 5\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2} - \dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2^2} \cdot \sqrt[3]{2}} =$

$= 2\sqrt[3]{2} + 5\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2} - \dfrac{\sqrt[3]{2}}{2} = \dfrac{15}{2}\sqrt[3]{2}$

Ejercicio nº 8.-

1. $\sqrt[4]{\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{\dfrac{1}{8}}}} = \sqrt[4]{\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2^{-3}}}} = \sqrt[4]{\sqrt[6]{\dfrac{2^2}{\left(2^{-3}\right)^3}}} = \sqrt[4]{\sqrt[6]{\dfrac{2^2}{2^{-9}}}} = \sqrt[4]{\sqrt[6]{2^{11}}} = \sqrt[24]{2^{11}}$

2. $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}}} = \sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{2 \cdot 2^2}}}}} = \sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{2^3}}}}} = \sqrt[72]{2^3} = \sqrt[24]{2}$

3. $\sqrt{2\sqrt[3]{2\sqrt[4]{2}}} = \sqrt{\sqrt[3]{2^3 \cdot 2\sqrt[4]{2}}} = \sqrt{\sqrt[3]{2^4\sqrt[4]{2}}} = = \sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{\left(2^4\right)^4 \cdot 2}}} = \sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{2^{16} \cdot 2}}} = \sqrt[24]{2^{17}}$

4. $\dfrac{\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[4]{a^3}}{\sqrt[6]{a^4}} = = \sqrt[12]{\dfrac{a^6 \cdot \left(a^2\right)^4 \cdot \left(a^3\right)^3}{\left(a^4\right)^2}} = \sqrt[12]{\dfrac{a^6 \cdot a^8 \cdot a^9}{a^8}} = \sqrt[12]{a^{15}} = \sqrt[4]{a^5}$

5. $\dfrac{1}{2 - \sqrt{3}} \cdot \dfrac{1}{2 + \sqrt{3}} = = \dfrac{1}{2^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2} = \dfrac{1}{4 - 3} = 1$

6. $\sqrt{\dfrac{a - b}{\left(a - b\right)^2} \cdot \dfrac{a + b}{a^2 - b^2}} = = \sqrt{\dfrac{1}{\left(a - b\right)^2}} = \dfrac{1}{a - b}$

7. $\left(\dfrac{\sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[4]{18}}{\sqrt{6}}\right)^4 = \dfrac{\sqrt[3]{(12)^4} \cdot \sqrt[4]{(18)^4}}{\sqrt{(6)^4}} = \dfrac{\sqrt[3]{\left(2^2 \cdot 3\right)^4} \cdot 18}{\sqrt{(2 \cdot 3)^4}} = = \dfrac{18 \cdot \sqrt[3]{2^8 \cdot 3^4}}{\sqrt{2^4 \cdot 3^4}} = 18\sqrt[6]{\dfrac{\left(2^8 \cdot 3^4\right)^2}{\left(2^4 \cdot 3^4\right)^3}} = 18\sqrt[6]{\dfrac{2^{16} \cdot 3^8}{2^{12} \cdot 3^{12}}} =$

$= 18\sqrt[6]{\dfrac{2^4}{3^4}} = 18\sqrt[3]{\dfrac{2^2}{3^2}} = 18\sqrt[3]{\left(\dfrac{2}{3}\right)^2}$

Ejercicio nº 9.-

1. $$\frac{5}{2\sqrt{2}} = = \frac{5\cdot\sqrt{2}}{2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{5\cdot\sqrt{2}}{2\cdot\sqrt{2^2}} = \frac{5\cdot\sqrt{2}}{2\cdot 2} = \frac{5\cdot\sqrt{2}}{4}$$

2. $$\frac{1}{\sqrt[3]{3}} = \frac{\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{3^2}} = \frac{\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{3^3}} = \frac{\sqrt[3]{9}}{3}$$

3. $$\frac{2}{3+\sqrt{3}} = \frac{2\cdot\left(3-\sqrt{3}\right)}{\left(3+\sqrt{3}\right)\cdot\left(3-\sqrt{3}\right)} = \frac{6-2\sqrt{3}}{3^2-\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{6-2\sqrt{3}}{9-3} = \frac{6-2\sqrt{3}}{6} = \frac{3-\sqrt{3}}{3}$$

4. $$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = = \frac{\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)} = = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2^2}}{\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{2+\sqrt{6}}{3-2} = 2+\sqrt{6}$$

5. $$\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} = = \frac{\left(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)\cdot\left(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)}{\left(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)\cdot\left(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)} = = \frac{\left(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)^2}{\left(3\sqrt{2}\right)^2-\left(2\sqrt{3}\right)^2} =$$

$$= \frac{\left(3\sqrt{2}\right)^2-2\cdot 3\cdot\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{3}+\left(2\sqrt{3}\right)^2}{\left(3\sqrt{2}\right)^2-\left(2\sqrt{3}\right)^2} = = \frac{9\cdot 2-12\sqrt{6}+4\cdot 3}{9\cdot 2-4\cdot 3} = = \frac{18-12\sqrt{6}+12}{18-12} = = \frac{30-12\sqrt{6}}{6} = 5-2\sqrt{6}$$

MATEMATICAS. 4ºESO-B TEMA 3.1: Polinomios

1.- Indica cuales de estas expresiones son polinomios e indica su grado y término independiente.

1. $x^4 - 3x^5 + 2x^2 + 5$ **2.** $\sqrt{x} + 7x^2 + 2$ **3.** $x^3 - x - \frac{7}{2}$ **4.** $\frac{2}{x^2} - x - 7$

5. $x^3 + x^5 + x^2$ **6.** $x - 2x^{-3} + 8$ **7.** $1 - x^4$

2.- Realiza las siguientes operaciones con polinomios:

1. $2x^2y^3z + 3x^2y^3z =$ **2.** $2x^3 - 5x^3 =$ **3.** $3x^4 - 2x^4 + 7x^4 =$ **4.** $(12x^3) \cdot (4x) =$

5. $5 \cdot (2x^2y^3z) =$ **6.** $(5x^2y^3z) \cdot (2y^2z^2) =$ **7.** $(18x^3y^2z^5) \cdot (6x^3yz^2) =$ **8.** $(-2x^3) \cdot (-5x) \cdot (-3x^2) =$

9. $(12x^3) : (4x) =$ **10.** $(18x^6y^2z^5) : (6x^3yz^2) =$ **11.** $(36x^3y^7z^4) : (12x^2y^2) =$

12. $\frac{6x^3y^4z^2}{3x^2y^2z^2} =$ **13.** $\frac{24x^5y^4 + 18x^4y^5 - 48x^{10}y^3}{6x^2y^3} =$ **14.** $\frac{12x^3y^5 + 18x^5y^7 - 48x^{12}y^6}{3x^2y^2} =$

3.- Dados los polinomios: $P(x) = x^4 - 2x^2 - 6x - 1$ $Q(x) = x^3 - 6x^2 + 4$ $R(x) = 2x^4 - 2x - 2$

1. $P(x) + Q(x) - R(x) =$ **2.** $P(x) + 2\,Q(x) - R(x) =$ **3.** $Q(x) + R(x) - P(x) =$

4.- Realiza las siguientes operaciones con polinomios:

1. $(x^4 - 2x^2 + 2) \cdot (x^2 - 2x + 3) =$ **2.** $(2x^2 - 5x + 6) \cdot (3x^4 - 5x^3 - 6x^2 + 4x - 3) =$

3. $(x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 30x - 20) : (x^2 + 3x - 2) =$ **4.** $(x^6 + 5x^4 + 3x^2 - 2x) : (x^2 - x + 3) =$

5. $(x^5 + 2x^3 - x - 8) : (x^2 - 2x + 1) =$ **6.** $(x^3 + 2x + 70) : (x + 4) =$ **7.** $(x^5 - 32) : (x - 2) =$

5.- Desarrolla las siguientes expresiones:

1. $(x + 5)^2 =$ **2.** $(2x - 5)^2 =$ **3.** $(3x - 2) \cdot (3x + 2) =$ **4.** $(2x - 3)^3 =$

5. $(x + 2)^3 =$ **6.** $(3x^2 - 2)^2 =$ **7.** $(2x + 5)^3 =$ **8.** $9x^2 - 25 =$

9. $(x^2 - x + 1)^2 =$ **10.** $(3x^2 - 2x) \cdot (3x^2 + 2x) =$ **11.** $(-3x + 5) \cdot (-3x - 5) =$

6.- Aplicando el teorema del resto, halla el resto de las siguientes divisiones:

1. $(x^5 - 2x^2 - 3) : (x - 1)$ **2.** $(2x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 5x + 10) : (x + 2)$ **3.** $(x^4 - 3x^2 + 2) : (x - 3)$

4. $(x^3 - 5x - 1) : (x - 3)$ **5.** $(x^6 - 1) : (x + 1)$ **6.** $(x^4 - 2x^3 + x^2 + x - 1) : (x - 1)$

7.- Comprueba que los siguientes polinomios tienen como factores los que se indican:

1. $(x^3 - 5x - 1)$ tiene por factor $(x - 3)$ **2.** $(x^6 - 1)$ tiene por factor $(x + 1)$

3. $(x^4 - 2x^3 + x^2 + x - 1)$ tiene por factor $(x - 1)$ **4.** $(x^{10} - 1024)$ tiene por factor $(x + 2)$

8.- Hallar a y b para que el polinomio $x^5 - ax + b$ sea divisible por $x^2 - 4$.

9.- Determina a y b para que el polinomio $x^3 + ax^2 + bx + 5$ sea divisible por $x^2 + x + 1$.

10.- Encontrar el valor de k para que al dividir $2x^2 - kx + 2$ por $(x - 2)$ dé resto 4.

11.- Determinar el valor de m para que $3x^2 + mx + 4$ admita $x = 1$ como una de sus raíces.

12.- Hallar un polinomio de cuarto grado que sea divisible por $x^2 - 4$ y se anule para $x = 3$ y $x = 5$.

13.- Calcular el valor de a para que $x^3 - ax + 8$ tenga la raíz $x = -2$, y calcular las otras raíces.

SOLUCIONES

Ejercicio nº 1.

1. Grado: 5, término independiente: 5.
2. No es un polinomio, porque la parte literal del primer monomio está dentro de una raíz.
3. Grado: 3, término independiente: −7/2.
4. No es un polinomio, porque el exponente del primer monomio no es un número natural.
5. Grado: 5, término independiente: 0.
6. No es un polinomio, porque el exponente del 2º monomio no es un número natural.
7. Grado: 4, término independiente: 1.

Ejercicio nº 2.-

1. $2x^2y^3z + 3x^2y^3z = 5x^2y^3z$ **2.** $2x^3 - 5x^3 = -3x^3$ **3.** $3x^4 - 2x^4 + 7x^4 = 8x^4$

4. $(12x^3) \cdot (4x) = 48x^4$ **5.** $10x^2y^3z\,3^4$ **6.** $10x^2y^5z^3$

7. $108x^6y^3z^7$ **8.** $-30x^6$ **9.** $3x^2$

10. $3x^3yz^3$ **11.** $3xy^5z^4$ **12.** $2xy^2$

13. $4x^3y + 3x^2y^2 - 8x^8$ **14.** $4xy^3 + 6x^3y^5 - 16x^{10}y^4$

Ejercicio nº 3.-

1. $P(x) + Q(x) - R(x) = (x^4 - 2x^2 - 6x - 1) + (x^3 - 6x^2 + 4) - (2x^4 - 2x - 2) = x^4 - 2x^2 - 6x - 1 + x^3 - 6x^2 + 4 - 2x^4 + 2x + 2 = x^4 - 2x^4 + x^3 - 2x^2 - 6x^2 - 6x + 2x - 1 + 4 + 2 = -x^4 + x^3 - 8x^2 - 4x + 5$

2. $P(x) + 2\,Q(x) - R(x) = (x^4 - 2x^2 - 6x - 1) + 2 \cdot (x^3 - 6x^2 + 4) - (2x^4 - 2x - 2) = x^4 - 2x^2 - 6x - 1 + 2x^3 - 12x^2 + 8 - 2x^4 + 2x + 2 = x^4 - 2x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 12x^2 - 6x + 2x - 1 + 8 + 2 = -x^4 + 2x^3 - 14x^2 - 4x + 9$

3. $Q(x) + R(x) - P(x) = (x^3 - 6x^2 + 4) + (2x^4 - 2x - 2) - (x^4 - 2x^2 - 6x - 1) = x^3 - 6x^2 + 4 + 2x^4 - 2x - 2 - x^4 + 2x^2 + 6x + 1 = 2x^4 - x^4 + x^3 - 6x^2 + 2x^2 - 2x + 6x + 4 - 2 + 1 = x^4 + x^3 - 4x^2 + 4x + 3$

Ejercicio nº 4.-

1. $(x^4 - 2x^2 + 2) \cdot (x^2 - 2x + 3) = x^6 - 2x^5 + 3x^4 - 2x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 2x^2 - 4x + 6 = x^6 - 2x^5 - 2x^4 + 3x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 6x^2 - 4x + 6 = x^6 - 2x^5 + x^4 + 4x^3 - 4x^2 - 4x + 6$

2. $(2x^2 - 5x + 6) \cdot (3x^4 - 5x^3 - 6x^2 + 4x - 3) = 6x^6 - 10x^5 - 12x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 15x^5 + 25x^4 + 30x^3 - 20x^2 + 15x + 18x^4 - 30x^3 - 36x^2 + 24x - 18 = 6x^6 - 10x^5 - 15x^5 - 12x^4 + 25x^4 + 18x^4 + 8x^3 - 30x^3 + 30x^3 - 6x^2 - 20x^2 - 36x^2 + 15x + 24x - 18 = 6x^6 - 25x^5 + 31x^4 + 8x^3 - 62x^2 + 39x - 18$

3.

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & -2x^3 & -11x^2 & +30x & -20 & x^2 + 3x - 2 \\ \cline{6-6}
-x^4 & -3x^3 & +2x^2 & & & x^2 - 5x + 6 \\ \cline{1-3}
 & -5x^3 & -9x^2 & +30x & & \\
 & 5x^3 & +15x^2 & -10x & & \\ \cline{2-4}
 & & 6x^2 & +20x & -20 & \\
 & & -6x^2 & -18x & +12 & \\ \cline{3-5}
 & & & 2x & -8 &
\end{array}
$$

4.

$$
\begin{array}{rrrrrrr|l}
x^6 & & +5x^4 & & +3x^2 & -2x & & x^2 - x + 3 \\ \cline{8-8}
-x^6 & +x^5 & -3x^4 & & & & & x^4 + x^3 + 3x^2 - 6 \\ \cline{1-3}
 & x^5 & +2x^4 & & & & & \\
 & -x^5 & +x^4 & -3x^3 & & & & \\ \cline{2-4}
 & & 3x^4 & -3x^3 & +3x^2 & & & \\
 & & -3x^4 & +3x^3 & -9x^2 & & & \\ \cline{3-5}
 & & & & -6x^2 & -2x & & \\
 & & & & 6x^2 & -6x & +18 & \\ \cline{5-7}
 & & & & & -8x & +18 &
\end{array}
$$

5.

$$
\begin{array}{lllll}
x^5 & +2x^3 & & -x-8 & \big|\ x^2-2x+1 \\
-x^5+2x^4-x^3 & & & & \ \ x^3+2x^2+5x+8 \\
\quad 2x^4+x^3 & & & & \\
\quad -2x^4+4x^3-2x^2 & & & & \\
\qquad 5x^3-2x^2-x & & & & \\
\qquad -5x^3+10x^2-5x & & & & \\
\qquad\quad 8x^2-6x-8 & & & & \\
\qquad\quad -8x^2+16x-8 & & & & \\
\qquad\qquad 10x-16 & & & &
\end{array}
$$

6.

	1	0	2	70
-4		-4	16	-72
	1	-4	18	-2

$C(x) = x^2 - 4x + 18 \qquad R(x) = -2$

7.

	1	0	0	0	0	-32
2		2	4	8	16	32
	1	2	4	8	16	0

$C(x) = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16 \qquad R = 0$

Ejercicio nº 5.-

1. $(x + 5)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 = x^2 + 10x + 25$
2. $(2x - 5)^2 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 5 + 5^2 = 4x^2 - 20x + 25$
3. $(3x - 2) \cdot (3x + 2) = (3x)^2 - 2^2 = 9x^2 - 4$
4. $(2x - 3)^3 = (2x - 3)^2 \cdot (2x - 3) = \dots = 8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$
5. $(x + 2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$
6. $(3x^2 - 2)^2 = (3x^2)^2 + 2^2 - 2 \cdot (3x^2) \cdot 2 = 9x^4 - 12x^2 + 4$
7. $(2x + 5)^3 = 8x^3 + 60x^2 + 150x + 125$
8. $9x^2 - 25 = (3x + 5) \cdot (3x - 5)$
9. $(x^2 - x + 1)^2 = (x^2 - x + 1) \cdot (x^2 - x + 1) = (x^2)^2 + (-x)^2 + 1^2 + 2x^2 \cdot (-x) + 2x^2 \cdot 1 + 2 \cdot (-x) \cdot 1 =$
$= x^4 + x^2 + 1 - 2x^3 + 2x^2 - 2x = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1$
10. $(3x^2 - 2x) \cdot (3x^2 + 2x) = (3x^2)^2 - (2x)^2 = 9x^4 - 4x^2$
11. $(-3x + 5) \cdot (-3x - 5) = (3x)^2 - 5^2 = 9x^2 - 25$

Ejercicio nº 6.-

1. $R(1) = 1^5 - 2 \cdot 1^2 - 3 = -4$
2. $R(-2) = 2 \cdot (-2)^4 - 2 \cdot (-2)^3 + 3 \cdot (-2)^2 + 5 \cdot (-2) + 10 = 32 + 16 + 12 - 10 + 10 = 60$
3. $R(3) = 3^4 - 3 \cdot 3^2 + 2 = 81 - 27 + 2 = 56$
4. $R(3) = 3^3 - 5 \cdot 3 - 1 = 27 - 15 - 1 = 11$
5. $R(-1) = (-1)^6 - 1 = 0$
6. $R(1) = 1^4 - 2 \cdot 1^3 + 1^2 + 1 - 1 = 1 - 2 + 1 + 1 - 1 = 0$

Ejercicio nº 7.-

1. $(x^3 - 5x - 1)$ es divisible por $(x - 3)$ si y sólo si $P(x = 3) = 0$.
$P(3) = 3^3 - 5 \cdot 3 - 1 = 27 - 15 - 1 \neq 0$, por lo tanto $(x - 3)$ no es un factor.

2. $(x^6 - 1)$ es divisible por $(x + 1)$ si $P(x = -1) = 0$. $P(-1) = (-1)^6 - 1 = 0$, $(x + 1)$ es un factor.

3. $(x^4 - 2x^3 + x^2 + x - 1)$ es divisible por $(x - 1)$ si y sólo si $P(x = 1) = 0$.
$P(1) = 1^4 - 2 \cdot 1^3 + 1^2 + 1 - 1 = 1 - 2 + 1 + 1 - 1 = 0$, por tanto $(x - 1)$ es un factor

4. $(x^{10} - 1024)$ es divisible por $(x + 2)$ si y sólo si $P(x = -2) = 0$.
$P(-2) = (-2)^{10} - 1024 = 1024 - 1024 = 0$, por tanto $(x + 2)$ es un factor.

Ejercicio nº 8.-

$P(-2) = (-2)^5 - a \cdot (-2) + b = 0 \qquad -32 + 2a + b = 0 \qquad \mathbf{2a + b = 32}$

$P(2) = 2^5 - a \cdot 2 + b = 0 \qquad 32 - 2a + b = 0 \qquad \mathbf{-2a + b = -32}$

$$\begin{array}{r} 2a + b = \ \ 32 \\ \underline{-2a + b = -32} \\ 2b = \ \ 0 \end{array} \qquad b = 0 \qquad a = 16$$

Ejercicio nº 9.-

$$\begin{array}{rrrr|l} x^3 & +ax^2 & +bx & +5 & x^2 + x + 1 \\ \cline{5-5} -x^3 & -\ x^2 & -x & & x + a - 1 \\ \cline{1-4} & (a-1)x^2 & +(b-1)x & +5 & \\ & -(a-1)x^2 & -(a-1)x & -a+1 & \\ \cline{2-4} & & (b-a)x & -a+6 & \end{array}$$

$b - a = 0 \qquad -a + 6 = 0 \qquad \mathbf{a = 6} \qquad \mathbf{b = 6}$

Ejercicio nº 10.-

$P(2) = 2 \cdot 2^2 - k \cdot 2 + 2 = 4 \qquad 10 - 2k = 4 \qquad -2k = -6 \qquad \mathbf{k = 3}$

Ejercicio nº 11.-

$P(1) = 3 \cdot 1^2 + m \cdot 1 + 4 = 0 \qquad 3 + m + 4 = 0 \qquad \mathbf{m = -7}$

Ejercicio nº 12.-

$(x-3)\cdot(x-5)\cdot(x^2-4)=(x^2 - 8x + 15)\cdot(x^2-4)=x^4 - 4x^2 - 8x^3 + 32x + 15x^2 - 60=\mathbf{x^4-8x^3+11x^2+32x-60}$

Ejercicio nº 13.-

$P(-2) = (-2)^3 - a \cdot (-2) + 8 = 0 \qquad -8 + 2a + 8 = 0 \qquad a = 0$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & 0 & 8 \\ -2 & & -2 & 4 & -8 \\ \hline & 1 & -2 & 4 & 0 \end{array}$$

$(x + 2) \cdot (x^2 - 2x + 4)$

$x^2 - 2x + 4 = 0; \quad x = \dfrac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 4}}{2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 - 16}}{2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{-12}}{2} \notin \mathbb{R}$ No tiene más raíces reales.

1.- Factoriza los siguientes polinomios:

1. $x^3 + x^2$ **2.** $2x^4 + 4x^2$ **3.** $x^2 - 4$ **4.** $x^4 - 16$

5. $9 + 6x + x^2$ **6.** $x^2 - x - 6$ **7.** $x^4 - 10x^2 + 9$

8. $x^4 - 2x^2 - 3$ **9.** $2x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 6$ **10.** $2x^3 - 7x^2 + 8x - 3$

11. $x^3 - x^2 - 4$ **12.** $x^3 + 3x^2 - 4x - 12$ **13.** $6x^3 + 7x^2 - 9x + 2$

14. $9x^4 - 4x^2$ **15.** $2x^5 + 20x^3 + 100x$ **16.** $3x^5 - 18x^3 + 27x$

17. $2x^3 - 50x$ **18.** $2x^5 - 32x$ **19.** $2x^2 + x - 28$ **20.** $25x^2 - 1$

21. $36x^6 - 49$ **22.** $x^2 - 2x + 1$ **23.** $x^2 - 6x + 9$ **24.** $x^2 - 20x + 100$

25. $x^2+10x+25$ **26.** $x^2 + 14x + 49$ **27.** $x^3 - 4x^2 + 4x$ **28.** $3x^7 - 27x$

29. $x^2 - 11x + 30$ **30.** $3x^2 + 10x + 3$ **31.** $2x^2 - x - 1$

2.- Simplificar las fracciones algebraicas:

1. $\dfrac{x^2 - 3x}{x^2 + 3x} =$ **2.** $\dfrac{x^2 - 3x}{3 - x} =$ **3.** $\dfrac{x^2 + x - 2}{x^3 - x^2 - x + 1} =$

4. $\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 12} =$ **5.** $\dfrac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - x - 2} =$ **6.** $\dfrac{x^3 - 19x - 30}{x^3 - 3x^2 - 10x} =$

3.- Realiza las siguientes operaciones con fracciones algebraicas:

1. $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{2x}{x^2 - 1} - \dfrac{1}{x-1} =$ **2.** $\dfrac{x+2}{x^3 - 1} - \dfrac{1}{x-1} =$

3. $\dfrac{x^2 - 2x}{x^2 - 5x + 6} \cdot \dfrac{x^2 + 4x + 4}{x^2 - 4} =$ **4.** $\dfrac{9 - 6x + x^2}{9 - x^2} \cdot \dfrac{x^2 - 5x + 6}{3x^2 - 9x} =$

5. $\dfrac{x+2}{x^2 + 4x + 4} : \dfrac{x^2 - 4}{x^3 + 8} =$ **6.** $\dfrac{x^3 + 3x^2 - 4x - 12}{x^2 + 2x - 3} : \dfrac{4x - 2x^2}{x^3 - 2x^2 + x} =$

7. $\left(x + \dfrac{x}{x-1}\right) \cdot \left(x - \dfrac{x}{x-1}\right) =$ **8.** $\left(x + \dfrac{x}{x-1}\right) : \left(x - \dfrac{x}{x-1}\right) =$ **9.** $\dfrac{x}{1 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{x}}} =$

SOLUCIONES

Ejercicio nº 1.

1. $x^3 + x^2 = x^2\,(x + 1)$ La raíces son: $x = 0$ y $x = -1$

2. $2x^4 + 4x^2 = 2x^2\,(x^2 + 2)$

Sólo tiene una raíz $x = 0$; ya que el polinomio, $x^2 + 2$, no tiene ningún valor que lo anule; debido a que al estar la x al cuadrado siempre dará un número positivo, por tanto es irreducible.

3. $x^2 - 4 = (x + 2) \cdot (x - 2)$ Las raíces son $X = -2$ y $X = 2$

4. $x^4 - 16 = (x^2 + 4) \cdot (x^2 - 4) = (x + 2) \cdot (x - 2) \cdot (x^2 + 4)$ Las raíces son $x = -2$ y $x = 2$

$$9 + 6x + x^2 = (3 + x)^2$$

$$\downarrow \quad \uparrow \quad \downarrow$$

5. $3^2 \quad 2 \cdot 3 \cdot x \quad x^2$ La raíz es $x = -3$.

6. $x^2 - x - 6 = 0$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 + 4 \cdot 6}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} \nearrow x_1 = \frac{6}{2} = 3 \\ \searrow x_2 = \frac{-4}{2} = -2 \end{cases}$$

$$x^2 - x - 6 = (x + 2) \cdot (x - 3)$$

Las raíces son $x = 3$ y $x = -2$.

7. $x^4 - 10x^2 + 9$ $x^2 = t$ $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ $t^2 - 10t + 9 = 0$

$$t = \frac{10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 9}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{10 \pm 8}{2} = \begin{cases} \nearrow t_1 = \frac{18}{2} = 9 \\ \searrow t_2 = \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

$x^2 = 9$ $x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$ $x^2 = 1$ $x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$

$x^4 - 10x^2 + 9 = (x + 1) \cdot (x - 1) \cdot (x + 3) \cdot (x - 3)$

8. $x^4 - 2x^2 - 3$ $x^2 = t$ $t^2 - 2t - 3 = 0$

$$t = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 + 4 \cdot 3}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} \nearrow t_1 = \frac{6}{2} = 3 \\ \searrow t_2 = \frac{-2}{2} = -1 \end{cases}$$

$x^2 = 3$ $x = \pm\sqrt{3}$ $x^2 = -1$ $x = \pm\sqrt{-1} \in \mathbb{R}$

$x^4 - 2x^2 + 3 = (x^2 + 1) \cdot (x + \sqrt{3}) \cdot (x - \sqrt{3})$

9. $2x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 6$

1 Tomamos los divisores del término independiente: ±1, ±2, ±3.

2 Aplicando el teorema del resto sabremos para que valores la división es exacta.

$P(1) = 2 \cdot 1^4 + 1^3 - 8 \cdot 1^2 - 1 + 6 = 2 + 1 - 8 - 1 + 6 = 0$

3 Dividimos por Ruffini.

	2	1	−8	−1	6
1		2	3	−5	−6
	2	3	−5	−6	0

4 Por ser la división exacta, D = d · c $(x - 1) \cdot (2x^3 + 3x^2 - 5x - 6)$ Una raíz es x = 1.

5 Continuamos realizando las mismas operaciones al segundo factor.

6 Volvemos a probar por 1 porque el primer factor podría estar elevado al cuadrado.

$P(1) = 2 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 - 6 \neq 0$ $P(-1) = 2 \cdot (-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 - 5 \cdot (-1) - 6 = -2 + 3 + 5 - 6 = 0$

	2	3	−5	−6
−1		−2	−1	6
	2	1	−6	0

$(x - 1) \cdot (x + 1) \cdot (2x^2 + x - 6)$

Otra raíz es x = -1.

8 El tercer factor lo podemos encontrar aplicando la ecuación de 2º grado o tal como venimos haciéndolo, aunque tiene el inconveniente de que sólo podemos encontrar raíces enteras.

9 El 1 lo descartamos y seguimos probando por − 1.

$P(-1) = 2 \cdot (-1)^2 + (-1) - 6 \neq 0$

$P(2) = 2 \cdot 2^2 + 2 - 6 \neq 0$

$P(-2) = 2 \cdot (-2)^2 + (-2) - 6 = 2 \cdot 4 - 2 - 6 = 0$

	2	1	−6
−2		−4	6
	2	−3	0

$(x - 1) \cdot (x + 1) \cdot (x + 2) \cdot (2x - 3)$

10 Sacamos factor común 2 en último binomio. $2x - 3 = 2(x - 3/2)$

11 La factorización del polinomio queda:

$2x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 6 = 2(x - 1) \cdot (x + 1) \cdot (x + 2) \cdot (x - 3/2)$

12 Las raíces son : x = 1, x = − 1, x = −2 y x = 3/2

10. $2x^3 - 7x^2 + 8x - 3$ $\quad$ $P(1) = 2 \cdot 1^3 - 7 \cdot 1^2 + 8 \cdot 1 - 3 = 0$

	2	-7	8	-3
1		2	-5	3
	2	-5	3	0

$(x - 1) \cdot (2x^2 - 5x + 3)$

	2	-5	3
1		2	-3
	2	-3	0

$P(1) = 2 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + 3 = 0$

$(x - 1)^2 \cdot (2x - 3) = 2\,(x - 3/2) \cdot (x - 1)^2$ $\quad$ Las raíces son: $x = 3/2$ y $x = 1$

11. $x^3 - x^2 - 4$ $\quad$ $\{\pm1, \pm2, \pm4\}$ $\quad$ $P(1) = 1^3 - 1^2 - 4 \neq 0$ $\quad$ $P(-1) = (-1)^3 - (-1)^2 - 4 \neq 0$

	1	-1	0	-4
2		2	2	4
	1	1	2	0

$P(2) = 2^3 - 2^2 - 4 = 8 - 4 - 4 = 0$ $\quad$ $(x - 2)\cdot(x^2 + x + 2)$

$x^2 + x + 2 = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 8}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{2} \notin \mathbb{R}$$

$(x - 2) \cdot (x^2 + x + 2)$

Raíz: $x = 2$.

12. $x^3 + 3x^2 - 4x - 12$ $\quad$ $\{\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm12\}$ $\quad$ $P(1) = 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 - 12 \neq 0$

$P(-1) = (-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 - 4 \cdot (-1) - 12 \neq 0$ $\quad$ $P(2) = 2^3 + 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 - 12 = 8 + 12 - 8 - 12 = 0$

	1	3	-4	-12
2		2	10	12
	1	5	6	0

$(x - 2) \cdot (x^2 + 5x + 6)$ $\quad$ $x^2 + 5x + 6 = 0$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 6}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{-5 \pm 1}{2} = \begin{cases} \nearrow x_1 = \dfrac{-4}{2} = -2 \\ \searrow x_2 = \dfrac{-6}{2} = -3 \end{cases}$$

$(x - 2) \cdot (x + 2) \cdot (x + 3)$

Las raíces son : $x = 2$, $x = -2$, $x = -3$.

13. $6x^3 + 7x^2 - 9x + 2$ $\{\pm1, \pm2\}$ $P(1) = 6 \cdot 1^3 + 7 \cdot 1^2 - 9 \cdot 1 + 2 \neq 0$

$P(-1) = 6 \cdot (-1)^3 + 7 \cdot (-1)^2 - 9 \cdot (-1) + 2 \neq 0$ $P(2) = 6 \cdot 2^3 + 7 \cdot 2^2 - 9 \cdot 2 + 2 \neq 0$

$P(-2) = 6 \cdot (-2)^3 + 7 \cdot (-2)^2 - 9 \cdot (-2) + 2 = -48 + 28 + 18 + 2 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 6 & 7 & -9 & 2 \\ -2 & & -12 & 10 & -2 \\ \hline & 6 & -5 & 1 & 0 \end{array}$$

$(x+2) \cdot (6x^2 - 5x + 1)$ $6x^2 - 5x + 1 = 0$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 6}}{12} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{12} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{12} = \frac{5 \pm 1}{12} = \begin{cases} \nearrow x_1 = \dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2} \\ \searrow x_2 = \dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

$6 \cdot (x + 2) \cdot (x - 1/2) \cdot (x - 1/3)$

Raíces: $x = -2$, $x = 1/2$ y $x = 1/3$

14. $9x^4 - 4x^2 = x^2 \cdot (9x^2 - 4) = x^2 \cdot (3x + 2) \cdot (3x - 2)$

15. $2x^5 + 20x^3 + 100x = x \cdot (x^4 + 20x^2 + 100) = x \cdot (x^2 + 10)^2$

16. $3x^5 - 18x^3 + 27x = 3x \cdot (x^4 - 6x^2 + 9) = 3x \cdot (x^2 - 3)^2$

17. $2x^3 - 50x = 2x \cdot (x^2 - 25) = 2x \cdot (x + 5) \cdot (x - 5)$

18. $2x^5 - 32x = 2x \cdot (x^4 - 16) = 2x \cdot (x^2 + 4) \cdot (x^2 - 4) = 2x \cdot (x^2 + 4) \cdot (x + 2) \cdot (x - 2)$

19. $2x^2 + x - 28$; $2x^2 + x - 28 = 0$ $2x^2 + x - 28 = 2(x + 4) \cdot (x - 7/2)$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 28}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 224}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{225}}{4} = \frac{-1 \pm 15}{4} = \begin{cases} \nearrow x_1 = \dfrac{14}{4} = \dfrac{7}{2} \\ \searrow x_2 = \dfrac{-16}{4} = -4 \end{cases}$$

20. $25x^2 - 1 = (5x + 1) \cdot (5x - 1)$

21. $36x^6 - 49 = (6x^3 + 7) \cdot (6x^3 - 7)$

22. $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$

23. $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$

24. $x^2 - 20x + 100 = (x - 10)^2$

25. $x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$

26. $x^2 + 14x + 49 = (x + 7)^2$

27. $x^3 - 4x^2 + 4x = x \cdot (x^2 - 4x + 4) = x \cdot (x - 2)^2$

28. $3x^7 - 27x = 3x \cdot (x^6 - 9) = 3x \cdot (x^3 + 3) \cdot (x^3 - 3)$

29. $x^2 - 11x + 30 = 0$ $\qquad$ $x^2 - 11x + 30 = (x - 6) \cdot (x - 5)$

$$x = \frac{11 \pm \sqrt{11^2 - 4 \cdot 30}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{121 - 120}}{2} = \frac{11 \pm 1}{2} = \begin{cases} \nearrow x_1 = \dfrac{12}{2} = 6 \\ \searrow x_2 = \dfrac{10}{2} = 5 \end{cases}$$

30. $3x^2 + 10x + 3 = 0$ $\qquad$ $3x^2 + 10x + 3 = 3\,(x - 3) \cdot (x - 1/3)$

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{10^2 - 4\ 3 \cdot 3}}{6} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{5} = \frac{10 \pm \sqrt{64}}{6} = \frac{10 \pm 8}{6} = \begin{cases} \nearrow x_1 = \dfrac{18}{6} = 3 \\ \searrow x_2 = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

31. $2x^2 - x - 1 = 0$ $\qquad$ $2x^2 - x - 1 = 2\,(x - 1) \cdot (x + 1/2)$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 2}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} \nearrow x_1 = \dfrac{4}{4} = 1 \\ \searrow x_2 = \dfrac{-2}{4} = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

<u>Ejercicio nº 2.-</u>

1. $\dfrac{x^2 - 3x}{x^2 + 3x} = = \dfrac{x \cdot (x - 3)}{x \cdot (x + 3)} = = \dfrac{(x - 3)}{(x + 3)}$

2. $\dfrac{x^2 - 3x}{3 - x} = = \dfrac{x\,(x - 3)}{3 - x} = \dfrac{-x\,(x - 3)}{-3 + x} = -x$

3. $\dfrac{x^2 + x - 2}{x^3 - x^2 - x + 1} = = \dfrac{(x - 1) \cdot (x + 2)}{(x - 1) \cdot (x^2 - 1)} = = \dfrac{(x + 2)}{(x^2 - 1)}$

4. $\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 12} = \dfrac{(x - 2) \cdot (x - 3)}{(x - 3) \cdot (x - 4)} = = \dfrac{(x - 2)}{(x - 4)}$

5. $\dfrac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - x - 2} = \dfrac{(x + 1) \cdot (x - 3)}{(x - 2) \cdot (x + 1)} = = \dfrac{(x - 3)}{(x - 2)}$

6. $\dfrac{x^3 - 19x - 30}{x^3 - 3x^2 - 10x} = \dfrac{(x + 2) \cdot (x + 3) \cdot (x - 5)}{x \cdot (x + 2) \cdot (x - 5)} = = \dfrac{x + 3}{x}$

__Ejercicio nº 3.-__

1. $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2x}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}=$;

$$x^2-1=(x+1)\cdot(x-1)$$

$$\text{m.c.m.}(x+1,\ x^2-1,\ x-1)=(x+1)\cdot(x-1)$$

$$=\frac{x-1+2x-(x+1)}{(x+1)\cdot(x-1)}==\frac{x-1+2x-x-1}{(x+1)\cdot(x-1)}==\frac{2x-2}{(x-1)\cdot(x-1)}==\frac{2\cdot(x-1)}{(x+1)\cdot(x-1)}==\frac{2}{(x+1)}$$

2. $\dfrac{x+2}{x^3-1}-\dfrac{1}{x-1}=$;

$$x^3-1=(x-1)\cdot(x^2+x+1)$$

$$\text{m.c.m.}(x^3-1,\ x-1)=(x-1)\cdot(x^2+x+1)$$

$$=\frac{x+2-(x^2+x+1)}{(x-1)\cdot(x^2+x+1)}==\frac{x+2-x^2-x-1}{(x-1)\cdot(x^2+x+1)}==\frac{-(x^2-1)}{(x-1)\cdot(x^2+x+1)}=$$

$$=\frac{-(x-1)(x+1)}{(x-1)\cdot(x^2+x+1)}==\frac{-(x+1)}{x^2+x+1}$$

3. $\dfrac{x^2-2x}{x^2-5x+6}\cdot\dfrac{x^2+4x+4}{x^2-4}==\dfrac{(x^2-2x)\cdot(x^2+4x+4)}{(x^2-5x+6)\cdot(x^2-4)}=$

$$=\frac{x(x-2)\cdot(x+2)^2}{(x-2)\cdot(x-3)\cdot(x-2)\cdot(x+2)}==\frac{x(x+2)}{(x-2)\cdot(x-3)}$$

4. $\dfrac{9-6x+x^2}{9-x^2}\cdot\dfrac{x^2-5x+6}{3x^2-9x}==\dfrac{(9-6x+x^2)\cdot(x^2-5x+6)}{(9-x^2)\cdot(3x^2-9x)}=$

$$=\frac{(3-x)^2\cdot(x-3)\cdot(x-2)}{(3+x)\cdot(3-x)\cdot3x(x-3)}==\frac{(3-x)\cdot(x-2)}{3x\cdot(3+x)}$$

5. $\dfrac{x+2}{x^2+4x+4}:\dfrac{x^2-4}{x^3+8}==\dfrac{(x+2)\cdot(x^3+8)}{(x^2+4x+4)\cdot(x^2-4)}=$

$$=\frac{(x+2)\cdot(x+2)\cdot(x^2-2x+4)}{(x+2)^2\cdot(x+2)\cdot(x-2)}==\frac{x^2-2x+4}{x^2-4}$$

6. $\dfrac{x^3+3x^2-4x-12}{x^2+2x-3}:\dfrac{4x-2x^2}{x^3-2x^2+x}==\dfrac{(x^3+3x^2-4x-12)\cdot(x^3-2x^2+x)}{(x^2+2x-3)\cdot(4x-2x^2)}=$

$$=\frac{(x-2)\cdot(x+2)\cdot(x+3)\cdot x\cdot(x-1)^2}{(x+3)\cdot(x-1)\cdot2x\cdot(2-x)}==\frac{-(x-2)\cdot(x+2)\cdot(x-1)}{2\cdot(-2+x)}==-\frac{(x+2)\cdot(x-1)}{2}$$

7. $\left(x + \frac{x}{x-1}\right)\cdot\left(x \quad \frac{x}{x-1}\right) = x^2 - \left(\frac{x}{x-1}\right)^2 = x^2 - \frac{x^2}{(x-1)^2} = = \frac{x^2\cdot(x-1)^2 - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2\left[(x-1)^2 - 1\right]}{(x-1)^2} =$

$$= \frac{x^2\cdot(x-1-1)\cdot(x-1+1)}{(x-1)^2} = \frac{x^2\cdot(x-2)\cdot x}{(x-1)^2} = = \frac{x^3\cdot(x-2)}{(x-1)^2}$$

8. $\left(x + \frac{x}{x-1}\right) : \left(x - \frac{x}{x-1}\right) = = \frac{x\cdot(x-1) + x}{x-1} : \frac{x\cdot(x-1) - x}{x-1} =$

$$= \frac{x^2 - x + x}{x-1} : \frac{x^2 - x - x}{x-1} = = \frac{x^2}{x-1} : \frac{x^2 - 2x}{x-1} = \frac{x^2\cdot(x-1)}{x\cdot(x-2)\cdot(x-1)} = = \frac{x}{(x-2)}$$

9.

$$\frac{x}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}} = \frac{x}{1 + \frac{1}{\frac{x+1}{x}}} = \frac{x}{1 + \frac{x}{x+1}} = \frac{x}{\frac{x + 1 + x}{x+1}} = \frac{x}{\frac{2x+1}{x+1}} = \frac{x(x+1)}{2x+1}$$

1.- Resuelve las siguientes **ecuaciones de 1^er^ grado**:

1. $6\left(\frac{x+1}{8}-\frac{2x-3}{16}\right)=3\left(\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}\right)-\frac{3}{8}(3x-2)$ **2.** $2-\left[-2\cdot(x+1)-\frac{x-3}{2}\right]=\frac{2x}{3}-\frac{5x-3}{12}+3x$

3. $\frac{2}{3}\left[x-\left(1-\frac{x-2}{3}\right)\right]+1=x$ **4.** $2-\left[-2\cdot(x+1)-\frac{x-3}{2}\right]=\frac{2x}{3}-\frac{5x-3}{12}+3x$

2.- Resuelve las siguientes **ecuaciones de 2º grado**:

1. $x^2-5x+6=0$ **2.** $2x^2-7x+3=0$ **3.** $-x^2+7x-10=0$

4. $x^2-2x+1=0$ **5.** $x^2+x+1=0$ **6.** $x^2-4x+4=0$

7. $2x-3=1-2x+x^2$ **8.** $x^2+(7-x)^2=25$ **9.** $7x^2+21x-28=0$

10. $-x^2+4x-7=0$ **11.** $18=6x+x(x-13)$ **12.** $6x^2-5x+1=0$

13. $x^2+(x+2)^2=580$ **14.** $x^2-5x-84=0$ **15.** $4x^2-6x+2=0$

16. $x^2-\frac{7}{6}x+\frac{1}{3}=0$ **17.** $\frac{2}{5}x^2=0$ **18.** $x^2-5x=0$

19. $2x^2-6x=0$ **20.** $x^2-25=0$ **21.** $2x^2+8=0$

22. $12x^2-3x=0$ **23.** $4x^2-16=0$ **24.** $6x^2+3x=0$

3.- Resuelve las siguientes **ecuaciones bicuadradas**:

1. $x^4-10x^2+9=0$ **2.** $x^4-13x^2+36=0$ **3.** $x^4-61x^2+900=0$

4. $x^4-25x^2+144=0$ **5.** $x^4-16x^2-225=0$ **6.** $x^6-7x^3+6=0$

4.- Resuelve las siguientes **ecuaciones racionales**:

1. $\frac{1}{x^2-x}-\frac{1}{x-1}=0$ **2.** $\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+2}=\frac{1}{x^2-4}$ **3.** $\frac{3}{x}=1+\frac{x-13}{6}$

5.- Resuelve las siguientes **ecuaciones irracionales**:

1. $\sqrt{2x-3}-x=-1$ **2.** $\sqrt{5x+4}-1=2x$ **3.** $3\sqrt{x-1}+11=2x$

4. $\sqrt{x}+\sqrt{x-4}=2$ **5.** $\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+4}=6$

6.- Resuelve las siguientes **ecuaciones polinómicas**:

1. $2x^4+x^3-8x^2-x+6=0$ **2.** $x^4+12x^3-64x^2=0$ **3.** $2x^3-7x^2+8x-3=0$

4. $x^3-x^2-4=0$ **5.** $6x^3+7x^2-9x+2=0$ **6.** $x^3+3x^2-4x-12=0$

SOLUCIONES

Ejercicio nº 1.

1. $6\left(\frac{x+1}{8}-\frac{2x-3}{16}\right)=3\left(\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}\right)-\frac{3}{8}(3x-2)$ $\qquad \frac{6(x+1)}{8}-\frac{6(2x-3)}{16}=\frac{9}{4}x-\frac{3}{4}-\frac{9}{8}x+\frac{6}{8}$

$\frac{6x+6}{8}-\frac{12x-18}{16}=\frac{9}{4}x-\frac{3}{4}-\frac{9}{8}x+\frac{6}{8}$ $\qquad m.c.m.(8,\ 16,\ 4)=16$

$2(6x+6)-(12x-18)=36x-12-18x+12$; $\cancel{12x}+12-\cancel{12x}+18=36x-\cancel{12}-18x+\cancel{12}$

$12+18=36x-18x$ $\qquad 18x=30 \qquad 3x=5 \qquad x=\frac{5}{3}$

2. $2-\left[-2\cdot(x+1)-\frac{x-3}{2}\right]=\frac{2x}{3}-\frac{5x-3}{12}+3x$

Quitamos corchete: $2-\left(-2x-2-\frac{x-3}{2}\right)=\frac{2x}{3}-\frac{5x-3}{12}+3x$

Quitamos paréntesis: $2+2x+2+\frac{x-3}{2}=\frac{2x}{3}-\frac{5x-3}{12}+3x$

Quitamos denominadores: $24+24x+24+6\cdot(x-3)=8x-(5x-3)+36x$

Quitamos paréntesis: $24+24x+24+6x-18=8x-5x+3+36x$

Agrupamos términos: $24x+6x-8x+5x-36x=3-24-24+18$

Sumamos: $-9x=-27$

Dividimos los dos miembros por: −9 $\qquad x=3$

3. $\frac{2}{3}\left[x-\left(1-\frac{x-2}{3}\right)\right]+1=x$ $\qquad \frac{2}{3}\left(x-1+\frac{x-2}{3}\right)+1=x$

$\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}+\frac{2x-4}{9}+1=x$ $\qquad 6x-6+2x-4+9=9x \qquad -x=1 \qquad x=-1$

4. $2-\left[-2\cdot(x+1)-\frac{x-3}{2}\right]=\frac{2x}{3}-\frac{5x-3}{12}+3x$; $2-\left(-2x-2-\frac{x-3}{2}\right)=\frac{2x}{3}-\frac{5x-3}{12}+3x$

$2+2x+2+\frac{x-3}{2}=\frac{2x}{3}-\frac{5x-3}{12}+3x$; $24+24x+24+6\cdot(x-3)=8x-(5x-3)+36x$

$24+24x+24+6x-18=8x-5x+3+36x \qquad -9x=-27 \qquad x=3$

Ejercicio nº 2.

1. $x^2 - 5x + 6 = 0$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 6}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} \nearrow x_1 = \frac{6}{2} = 3 \\ \searrow x_2 = \frac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

2 $2x^2 - 7x + 3 = 0$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{4} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{4} = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{7 \pm 5}{4} = \begin{cases} \nearrow x_1 = \frac{12}{4} = 3 \\ \searrow x_2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

3. $-x^2 + 7x - 10 = 0$ $\quad (-1) \cdot (-x^2 + 7x - 10) = (-1) \cdot 0$ $\quad x^2 - 7x + 10 = 0$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 10}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} = \begin{cases} \nearrow x_1 = \frac{10}{2} = 5 \\ \searrow x_2 = \frac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

4. $x^2 - 2x + 1 = 0$ $\quad x = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{2 \pm 0}{2} = \frac{2}{2} = 1$

5. $x^2 + x + 1 = 0$ $\quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} \notin \mathbb{R}$

6. $x^2 - 4x + 4 = 0$ $\quad x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2} = \frac{4}{2} = 2$

7. $2x - 3 = 1 - 2x + x^2$ $\quad x^2 - 4x + 4 = 0$ $\quad x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2} = \frac{4}{2} = 2$

8. $x^2 + (7 - x)^2 = 25$ $\quad x^2 + 49 - 14x + x^2 = 25;$ $\quad 2x^2 - 14x + 24 = 0;$ $\quad x^2 - 7x + 12 = 0$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{2} = \frac{7 \pm 1}{2} = \begin{cases} \nearrow x_1 = 4 \\ \searrow x_2 = 3 \end{cases}$$

9. $7x^2 + 21x - 28 = 0$ $\quad x^2 + 3x - 4 = 0$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2} = \begin{cases} \nearrow x_1 = 1 \\ \searrow x_2 = -4 \end{cases}$$

10. $-x^2 + 4x - 7 = 0$ $\quad x^2 - 4x + 7 = 0$ $\quad x = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-28}}{2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{-12}}{2} \notin \mathbb{R}$

11. $18 = 6x + x(x-13)$ $\quad 18 = 6x + x^2 - 13x$ $\quad x^2 - 7x - 18 = 0$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49+72}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{121}}{2} = \frac{7 \pm 11}{2} = \begin{cases} \nearrow x_1 = \dfrac{18}{2} = 9 \\ \searrow x_2 = \dfrac{-4}{2} = -2 \end{cases}$$

12. $6x^2 - 5x + 1 = 0$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4\cdot 6}}{12} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{12} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{12} = \frac{5 \pm 1}{12} = \begin{cases} \nearrow x_1 = \dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2} \\ \searrow x_2 = \dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

13. $x^2 + (x+2)^2 = 580$ $\quad x^2 + x^2 + 4x + 4 = 580$ $\quad 2x^2 + 4x - 576 = 0$

$x^2 + 2x - 288 = 0$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+1152}}{2} = \frac{-2 \pm 34}{2} = \begin{cases} \nearrow x_1 = 16 \\ \searrow x_2 = -18 \end{cases}$$

14. $x^2 - 5x - 84 = 0$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25+336}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{361}}{2} = \frac{5 \pm 19}{2} = \begin{cases} \nearrow x_1 = \dfrac{24}{2} = 12 \\ \searrow x_2 = \dfrac{-14}{2} = -7 \end{cases}$$

15. $4x^2 - 6x + 2 = 0$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4\cdot 4\cdot 2}}{8} = \frac{6 \pm \sqrt{36-32}}{8} = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{8} = \frac{6 \pm 2}{8} = \begin{cases} \nearrow x_1 = \dfrac{8}{8} = 1 \\ \searrow x_2 = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

16. $x^2 - \dfrac{7}{6}x + \dfrac{1}{3} = 0$; $\quad 6x^2 - 7x + 2 = 0$;

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{7^2 - 4\cdot 6\cdot 2}}{12} = \frac{7 \pm \sqrt{49-48}}{12} = \frac{7 \pm \sqrt{1}}{12} = \frac{7 \pm 1}{12} = \begin{cases} \nearrow x_1 = \dfrac{8}{12} = \dfrac{2}{3} \\ \searrow x_2 = \dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

17. $\dfrac{2}{5}x^2 = 0$ $\quad 2x^2 = 0$ $\quad x = 0$

18. $x^2 - 5x = 0$ $\quad x(x-5) = 0$ $\quad x = 0$ $\quad x - 5 = 0$ $\quad x = 5$

19. $2x^2 - 6x = 0$ $\quad 2x(x-3) = 0$; $2x = 0$ $\quad x = 0$ $\quad x - 3 = 0$ $\quad x = 3$

20. $x^2 - 25 = 0$ $\quad x^2 = 25 \qquad x = \pm\sqrt{25}$ $\nearrow x_1 = \sqrt{25} = 5$ $\searrow x_2 = -\sqrt{25} = -5$

21. $2x^2 + 8 = 0 \qquad 2x^2 = -8 \qquad x^2 = -4 \qquad x = \pm\sqrt{-4} \notin \mathbb{R}$

22. $12x^2 - 3x = 0 \qquad 4x^2 - x = 0 \qquad x \cdot (4x - 1) = 0 \qquad$ **$x = 0$** $\quad 4x - 1 = 0 \qquad$ **$x = 1/4$**

23. $4x^2 - 16 = 0$ $\quad 4x^2 = 16 \qquad x^2 = 4 \qquad x = \pm\sqrt{4}$ $\nearrow x_1 = 2$ $\searrow x_2 = -2$

24. $6x^2 + 3x = 0 \qquad 3x\,(2x+1) = 0 \qquad 3x = 0 \qquad x = 0\,; \qquad 2x + 1 = 0 \qquad x = -\frac{1}{2}$

Ejercicio nº 3.-

1. $x^4 - 10x^2 + 9 = 0 \qquad x^2 = t \qquad x^4 - 10x^2 + 9 = 0 \qquad t^2 - 10t + 9 = 0$

$$t = \frac{10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 9}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{10 \pm 8}{2} = \begin{cases} \nearrow t_1 = \frac{18}{2} = 9 \\ \searrow t_2 = \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

$x^2 = 9 \qquad x = \pm\sqrt{9} = \pm 3 \qquad x^2 = 1 \qquad x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$

2. $x^4 - 13x^2 + 36 = 0\,; \; x^2 = t\,; \; t^2 - 13t + 36 = 0$

$$t = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{2} = \frac{13 \pm 5}{2} = \begin{cases} \nearrow t_1 = \frac{18}{2} = 9 \\ \searrow t_2 = \frac{8}{2} = 4 \end{cases}$$

$x^2 = 9 \qquad x = \pm\sqrt{9} = $ $\nearrow x_1 = 3$ $\searrow x_2 = -3$ $\qquad x^2 = 4 \qquad x = \pm\sqrt{4} = $ $\nearrow x_3 = 2$ $\searrow x_4 = -2$

3. $x^4 - 61x^2 + 900 = 0;\; x^2 = t\,; \; t^2 - 61t + 900 = 0$

$$t = \frac{61 \pm \sqrt{3721 - 3600}}{2} = \frac{61 \pm 11}{2} = \begin{cases} \nearrow t_1 = 36 \\ \searrow t_2 = 25 \end{cases}$$

$x^2 = 36 \qquad x = \pm\sqrt{36}$ $\nearrow x_1 = 6$ $\searrow x_2 = -6$ $\qquad x^2 = 25 \qquad x = \pm\sqrt{25}$ $\nearrow x_1 = 5$ $\searrow x_2 = -5$

4. $x^4 - 25x^2 + 144 = 0;\; x^2 = t\,; \; t^2 - 25t + 144 = 0$

$$t = \frac{25 \pm \sqrt{625 \quad 576}}{2} = \frac{25 \pm 7}{2} = \begin{cases} \nearrow t_1 = 16 \\ \searrow t_2 = 9 \end{cases}$$

$x^2 = 16 \qquad x = \pm\sqrt{16}$ $\nearrow x_1 = 4$ $\searrow x_2 = -4$ $\qquad x^2 = 9 \qquad x = \pm\sqrt{9}$ $\nearrow x_3 = 3$ $\searrow x_4 = -3$

5. $x^4 - 16x^2 - 225 = 0$; $x^2 = t$; $t^2 - 16t - 225 = 0$ $\quad t = \dfrac{16 \pm \sqrt{256+900}}{2} = \dfrac{16 \pm 34}{2} = \begin{cases} \nearrow t_1 = 25 \\ \searrow t_2 = -9 \end{cases}$

$x^2 = 25 \qquad x = \pm\sqrt{25} \begin{cases} \nearrow x_1 = 5 \\ \searrow x_2 = -5 \end{cases} \qquad x^2 = -9 \qquad x = \pm\sqrt{-9} \notin \mathbb{R}$

6. $x^6 - 7x^3 + 6 = 0$; $x^3 = t$; $t^2 - 7t + 6 = 0$ $\quad t = \dfrac{7 \pm \sqrt{49-24}}{2} = \dfrac{7 \pm 5}{2} = \begin{cases} \nearrow t_1 = \dfrac{12}{2} = 6 \\ \searrow t_2 = \dfrac{2}{2} = 1 \end{cases}$

$x^3 = 6 \qquad x = \sqrt[3]{6} \qquad x^3 = 1 \qquad x = \sqrt[3]{1} \qquad x = 1$

Ejercicio nº 4.-

1. $\dfrac{1}{x^2 - x} - \dfrac{1}{x-1} = 0 \quad x^2 - x = x(x-1) \qquad m.c.m.(x^2 - x,\ x-1) = x(x-1)$; $1 - x = 0 \qquad x = 1$

Comprobamos la solución: $\dfrac{1}{1-1} - \dfrac{1}{1-1} = 0 \qquad \dfrac{1}{0} - \dfrac{1}{0} = 0$

La ecuación no tiene solución porque para x = 1 se anulan los denominadores.

2. $\dfrac{1}{x-2} + \dfrac{1}{x+2} = \dfrac{1}{x^2-4} \qquad x^2 - 4 = (x-2)\cdot(x+2)$ mcm(x-2, x+2, x^2-4) = (x-2) (x+2)

$x + 2 + x - 2 = 1 \qquad 2x = 1 \qquad x = \dfrac{1}{2} \qquad \dfrac{1}{\frac{1}{2}-2} + \dfrac{1}{\frac{1}{2}+2} = \dfrac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4}$

$\dfrac{1}{-\frac{3}{2}} + \dfrac{1}{\frac{5}{2}} = \dfrac{1}{\frac{-15}{4}} \qquad -\dfrac{2}{3} + \dfrac{2}{5} = -\dfrac{4}{15} \qquad -\dfrac{4}{15} = -\dfrac{4}{15}$

La solución es: $x = \dfrac{1}{2}$

3. $\dfrac{3}{x} = 1 + \dfrac{x-13}{6}$; $m.c.m.(x, 6) = 6x$; $18 = 6x + x(x-13)$; $18 = 6x + x^2 - 13x$

$x^2 - 7x - 18 = 0 \qquad x = \dfrac{7 \pm \sqrt{49+72}}{2} = \dfrac{7 \pm \sqrt{121}}{2} = \dfrac{7 \pm 11}{2} = \begin{cases} \nearrow x_1 = \dfrac{18}{2} = 9 \\ \searrow x_2 = \dfrac{-4}{2} = -2 \end{cases}$

$\dfrac{3}{9} = 1 + \dfrac{9-13}{6} \qquad \dfrac{3}{9} = \dfrac{6-4}{6} \qquad \dfrac{3}{9} = \dfrac{2}{6} \qquad \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3}$

$\dfrac{3}{-2} = 1 + \dfrac{-2-13}{6} \qquad \dfrac{3}{-2} = \dfrac{6-15}{6} \qquad \dfrac{3}{-2} = \dfrac{-9}{5} \qquad -\dfrac{3}{2} = -\dfrac{3}{2}$

Ejercicio nº 5.-

1. $\sqrt{2x-3} = -1 + x$

1º Elevamos al cuadrado los dos miembros: $\left(\sqrt{2x-3}\right)^2 = (-1+x)^2$; $2x - 3 = 1 - 2x + x^2$

2ºResolvemos la ecuación: $x^2 - 4x + 4 = 0$ $\quad x = \frac{4 \pm \sqrt{16-16}}{2} = \frac{4}{2} = 2$

3ºComprobamos: $\sqrt{2 \cdot 2 - 3} - 2 = -1$ $\quad 1 - 2 = -1$; La solución es x = 2.

2. $\sqrt{5x+4} - 1 = 2x$ $\quad \sqrt{5x+4} = 2x + 1$ $\quad \left(\sqrt{5x+4}\right)^2 = (2x+1)^2$

$5x + 4 = 4x^2 + 4x + 1$ $\quad 4x^2 - x - 3 = 0$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{8} = \frac{1 \pm 7}{8} = \begin{cases} \nearrow x_1 - \frac{8}{8} - 1 \\ \searrow x_2 = \frac{-6}{8} = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

$\sqrt{5 \cdot 1 + 4} - 1 = 2 \cdot 1$ $\quad 3 - 1 = 2$ $\quad x = 1$; $\sqrt{5 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) + 4} - 1 = 2 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)$ $\quad -\frac{1}{2} \neq -\frac{3}{2}$

3. $3\sqrt{x-1} + 11 = 2x$ $\quad 3\sqrt{x-1} = 2x - 11$ $\quad \left(3\sqrt{x-1}\right)^2 = (2x-11)^2$

$9(x-1) = 4x^2 - 44x + 121$ $\quad 9x - 9 = 4x^2 - 44x + 121$ $\quad 4x^2 - 53x + 130 = 0$

$$x = \frac{53 \pm \sqrt{2809 - 2080}}{8} = \frac{53 \pm \sqrt{729}}{8} = \frac{53 \pm 27}{8} = \begin{cases} \nearrow x_1 = \frac{80}{8} = 10 \\ \searrow x_2 = \frac{26}{8} = \frac{13}{4} \end{cases}$$

$3\sqrt{10-1} + 11 = 2 \cdot 10$ $\quad 20 = 20$ $\quad 3\sqrt{\frac{13}{4} - 1} + 11 \neq 2 \cdot \frac{13}{4}$

4. $\sqrt{x} + \sqrt{x-4} = 2$ $\quad \sqrt{x} = 2 - \sqrt{x-4}$ $\quad \left(\sqrt{x}\right)^2 = \left(2 - \sqrt{x-4}\right)^2$

$x = 4 - 4\sqrt{x-4} + x - 4$ $\quad 4\sqrt{x-4} = 0$ $\quad \sqrt{x-4} = 0$

$\left(\sqrt{x-4}\right)^2 = 0^2$ $\quad x - 4 = 0$ $\quad x = 4$

$\sqrt{4} + \sqrt{4-4} = 2$ $\quad 2 + 0 = 2$

La ecuación tiene por solución x = 4.

5. $\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+4}=6$ $\quad \sqrt{2x-1}=6-\sqrt{x+4}$ $\quad \left(\sqrt{2x-1}\right)^2=\left(6-\sqrt{x+4}\right)^2$

$2x-1=36-12\sqrt{x+4}+x+4$; $x-41=-12\sqrt{x+4}$; $(x-41)^2=\left(-12\sqrt{x+4}\right)^2$

$x^2-82x+1681=144x+576$ $\quad x^2-226x+1105=0$ $\quad \nearrow x_1=5$, $\searrow x_2=221$

$\sqrt{2\cdot 5-1}+\sqrt{5+4}=6$ $\quad 3+3=6$ $\quad x=5$; $\sqrt{2\cdot 221-1}+\sqrt{221+4}=6$ $\quad 21+15\neq 6$

Ejercicio nº 6.-

1. $2x^4+x^3-8x^2-x+6=0$ $\quad P(1)=2\cdot 1^4+1^3-8\cdot 1^2-1+6=2+1-8-1+6=0$

	2	1	−8	−1	6
1		2	3	−5	−6
	2	3	−5	−6	0

$(x-1)\cdot(2x^3+3x^2-5x-6)=0$

$P(1)=2\cdot 1^3+3\cdot 1^2-5x-6\neq 0$ $\quad P(-1)=2\cdot(-1)^3+3\cdot(-1)^2-5\cdot(-1)-6=-2+3+5-6=0$

	2	3	−5	−6
−1		−2	−1	6
	2	1	−6	0

$(x-1)\cdot(x+1)\cdot(2x^2+x-6)=0$

$2x^2+x-6=0$; Las soluciones son: x = 1, x = −1, x = −2 y x = 3/2

2. $x^4+12x^3-64x^2=0$ $\quad x^2\left(x^2+12x-64\right)=0$ $\quad x^2=0$ $\quad x_1=0$

$x^2+12x-64=0$ $\quad x=\dfrac{-12\pm\sqrt{144+256}}{2}=\dfrac{-12\pm 20}{2}=$ $\nearrow x_2=4$, $\searrow x_3=-16$

3. $2x^3-7x^2+8x-3=0$ $\quad P(1)=2\cdot 1^3-7\cdot 1^2+8\cdot 1-3=0$

	2	−7	8	−3
1		2	−5	3
	2	−5	3	0

$(x-1)\cdot(2x^2-5x+3)=0$ $\quad P(1)=2\cdot 1^2-5\cdot 1+3=0$

	2	−5	3
1		2	−3
	2	−3	0

$(x-1)^2\cdot(2x-3)=0$

Las raíces son x = 3/2 y x = 1

4. $x^3 - x^2 - 4 = 0$ Posibles raíces enteras: $\{\pm1, \pm2, \pm4\}$

$P(1) = 1^3 - 1^2 - 4 \neq 0$ $P(-1) = (-1)^3 - (-1)^2 - 4 \neq 0$ $P(2) = 2^3 - 2^2 - 4 = 8 - 4 - 4 = 0$

	1	-1	0	-4
2		2	2	4
	1	1	2	0

$(x-2)\cdot(x^2+x+2) = 0$ $x^2+x+2 = 0$

$$x = \frac{-1+\sqrt{(-1)^2-4\cdot 2}}{2} = \frac{-1\pm\sqrt{1-8}}{2} = \frac{-1\pm\sqrt{-7}}{2} \notin \mathbb{R}$$

$(x-2)\cdot(x^2+x+2) = 0$ Raíz: $x = 2$.

5. $6x^3 + 7x^2 - 9x + 2 = 0$ Posibles raíces enteras: $\{\pm1, \pm2\}$

$P(1) = 6\cdot1^3 + 7\cdot1^2 - 9\cdot1 + 2 \neq 0$ $P(-1) = 6\cdot(-1)^3 + 7\cdot(-1)^2 - 9\cdot(-1) + 2 \neq 0$

$P(2) = 6\cdot2^3 + 7\cdot2^2 - 9\cdot2 + 2 \neq 0$ $P(-2) = 6\cdot(-2)^3 + 7\cdot(-2)^2 - 9\cdot(-2)+2 = -48+28+18+2=0$

	6	7	-9	2
-2		-12	10	-2
	6	-5	1	0

$(x+2)\cdot(6x^2-5x+1) = 0$ $6x^2-5x+1 = 0$

$$x = \frac{5\pm\sqrt{5^2-4\cdot6}}{12} = \frac{5\pm\sqrt{25-24}}{12} = \frac{5\pm\sqrt{1}}{12} = \frac{5\pm1}{12} = \begin{cases} \nearrow x_1 = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \\ \searrow x_2 = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$6(x+2)\cdot(x-1/2)\cdot(x-1/3) = 0$ **Raíces: $x = -2$, $x = 1/2$ y $x = 1/3$**

6. $x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0$ Posibles raíces enteras: $\{\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm12\}$

$P(1) = 1^3 + 3\cdot1^2 - 4\cdot1 - 12 \neq 0$ $P(-1) = (-1)^3 + 3\cdot(-1)^2 - 4\cdot(-1) - 12 \neq 0$

$P(2) = 2^3 + 3\cdot2^2 - 4\cdot2 - 12 = 8 + 12 - 8 - 12 = 0$

	1	3	-4	-12
2		2	10	12
	1	5	6	0

$(x-2)\cdot(x^2-5x+6) = 0$ $x^2-5x+6 = 0$

$$x = \frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot6}}{2} = \frac{-5\pm\sqrt{25-24}}{2} = \frac{-5\pm\sqrt{1}}{2} = \frac{-5\pm1}{2} = \begin{cases} \nearrow x_1 = \frac{-4}{2} = -2 \\ \searrow x_2 = \frac{-6}{2} = -3 \end{cases}$$

$(x-2)\cdot(x+2)\cdot(x+3) = 0$ **Las soluciones son : $x = 2$, $x = -2$, $x = -3$**

MATEMATICAS. 4ºESO-B. TEMA 5: Problemas de Sistemas

1.- Juan compró un ordenador y un televisor por 2.000 € y los vendió por 2.260 €. ¿Cuánto le costó cada objeto, sabiendo que en la venta del ordenador ganó el 10% y en la venta del televisor ganó el 15%?

2.- ¿Cuál es el área de un rectángulo sabiendo que su perímetro mide 16 cm y que su base es el triple de su altura?

3.- Una granja tiene pavos y cerdos, en total hay 58 cabezas y 168 patas. ¿Cuántos cerdos y pavos hay?

4.- Antonio dice a Pedro: "el dinero que tengo es el doble del que tienes tú", y Pedro contesta: "si tú me das seis euros tendremos los dos igual cantidad". ¿Cuánto dinero tenía cada uno?

5.- En una empresa trabajan 60 personas. Usan gafas el 16% de los hombres y el 20% de las mujeres. Si el número total de personas que usan gafas es 11. ¿Cuántos hombres y mujeres hay en la empresa?

6.- La cifra de las decenas de un número de dos cifras es el doble de la cifra de las unidades, y si a dicho número le restamos 27 se obtiene el número que resulta al invertir el orden de sus cifras. ¿Cuál es ese número?

7.- Por la compra de dos electrodomésticos hemos pagado 3.500 €. Si en el primero nos hubieran hecho un descuento del 10% y en el segundo un descuento del 8% hubiéramos pagado 3.170 €. ¿Cuál es el precio de cada artículo?

8.- Encuentra un número de dos cifras sabiendo que su cifra de la decena suma 5 con la cifra de su unidad y que si se invierte el orden de sus cifras se obtiene un número que es igual al primero menos 27.

9.- El producto de dos números es 4, y la suma de sus cuadrados 17. ¿Qué números son?

10.- Halla una fracción equivalente a 5/7 cuyos términos elevados al cuadrado sumen 1.184

11.- Un campo de fútbol tiene forma rectangular. El perímetro mide 300 m, y el largo es el doble del ancho. ¿Cuánto mide cada lado?

12.- Meli compra 3 DVD y 4 CD, y paga 100 €; y Ana compra 4 DVD y 3 CD en la misma tienda, y paga 110 €. ¿Cuánto cuesta cada DVD y CD?

13.- La suma de las edades de un padre y su hija es de 70 años. Dentro de 10 años la edad del padre será el doble de la edad de su hija. ¿Qué edad tiene ahora cada uno?

14.- La suma de dos números es 15, y la diferencia de sus cuadrados 15. ¿Qué números son?

15.- Los catetos de un triángulo rectángulo son proporcionales a 3 y 4, y la hipotenusa mide 25 m. Calcula cuánto mide cada cateto.

16.- Halla dos números sabiendo que su producto es 6 y la suma de sus cuadrados es 13.

17.- Juan ha leído ya la quinta parte de un libro. Cuando lea 90 páginas más, todavía le quedará la mitad del libro. ¿Cuántas páginas tiene el libro? ¿Cuántas páginas lleva leídas?

18.- Paloma vendió los dos quintos de una colección de cómics que tenía y luego compró 100 más. Tras esto tenía el mismo número que si hubiese comprado desde el principio 40 cómics. ¿Cuántos cómics tenía Paloma al principio?

19.- Un campo está plantado con un total de 250 árboles, entre olivos y almendros. Si el doble de almendros son 10 menos que el total de los olivos, ¿cuántos almendros habrá? ¿Y cuántos olivos?

20.- Vallar una finca rectangular de 750 m^2 precisa 110 m de cerca. ¿Qué dimensiones tiene?

SOLUCIONES

Ejercicio nº 1.

x $\rightarrow$ precio del ordenador.

y $\rightarrow$ precio del televisor.

$x + \frac{10x}{100} \rightarrow$ precio de venta del ordenador. $y + \frac{15y}{100} \rightarrow$ precio de venta del televisor.

$$\begin{cases} x + y = 2000 \\ x + \frac{10x}{100} + y + \frac{15y}{100} = 2260 \end{cases}; \quad \begin{cases} x + y = 2000 \\ 110x + 115y = 226\,000 \end{cases} \xrightarrow{\times(-110)} \begin{cases} -110x - 110y = -220\,000 \\ 110x + 115y = 226\,000 \end{cases} \quad 5y = 6000$$

y = 1200 x = 800 800 € $\rightarrow$ precio del ordenador. 1200 € $\rightarrow$ precio del televisor.

Ejercicio nº 2.

x $\rightarrow$ base del rectángulo.

y $\rightarrow$ altura del rectángulo. 2x + 2y $\rightarrow$ perímetro.

$$\begin{cases} x = 3y \\ 2x + 2y = 16 \end{cases} \quad 2 \cdot (3y) + 2y = 16 \quad 6y + 2y = 16 \quad y = 2 \quad x = 6$$

6 cm $\rightarrow$ base del rectángulo. 2 cm $\rightarrow$ altura del rectángulo.

Ejercicio nº 3.-

x $\rightarrow$ número de pavos.

y $\rightarrow$ número de cerdos.

$$\begin{cases} x + y = 58 \\ 2x + 4y = 168 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 58 \\ 2x + 4y = 168 \end{cases} \quad \begin{cases} -2x - 2y = -116 \\ 2x + 4y = 168 \end{cases} \quad 2y = 52 \quad y = 26$$

$x + 26 = 58$ $x = 32$ 32 $\rightarrow$ número de pavos. 26 $\rightarrow$ número de cerdos.

Ejercicio nº 4.-

x $\rightarrow$ dinero de Antonio.

y $\rightarrow$ dinero de Pedro.

$$\begin{cases} x = 2y \\ y + 6 = x - 6 \end{cases} \quad y + 6 = 2y - 6 \quad 6 + 6 = 2y - y \quad 12 = y$$

$x = 2 \cdot 12$ $x = 24$ 24 $\rightarrow$ dinero de Antonio. 12 $\rightarrow$ dinero de Pedro.

Ejercicio nº 5.-

x $\rightarrow$ número de hombres.

y $\rightarrow$ número de mujeres.

$\frac{16x}{100} \rightarrow$ hombres con gafas. $\frac{20y}{100} \rightarrow$ mujeres con gafas. $\begin{cases} x + y = 60 \\ 16x + 20y = 1100 \end{cases}$

$x = 60 - y$; $16(60 - y) + 20y = 1100$ $960 - 16y - 20y = 1100$

$4y = 140$ $y = 35$; $x + 35 = 60$ $y = 25$; 35 $\rightarrow$ nº de hombres; 25 $\rightarrow$ nº de mujeres.

Ejercicio nº 6.-

x $\rightarrow$ cifra de las unidades

y $\rightarrow$ cifra de las decenas

10x + y $\rightarrow$ número

10y + x $\rightarrow$ número invertido

y = 2x (10y + x) − 27 = 10x + y 10 · 2x + x − 27 = 10x + 2x

20x + x − 12x = 27 x = 3 y = 6 **Número** $\rightarrow$ 63

Ejercicio nº 7.-

x $\rightarrow$ precio del 1º.

y $\rightarrow$ precio del 2º.

$x - \frac{10x}{100}$ $\rightarrow$ descuento en el 1º. $y - \frac{8y}{100}$ $\rightarrow$ descuento en el 2º.

$$\begin{cases} x + y = 3500 \\ x - \frac{10x}{100} + y - \frac{8y}{100} = 3170 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 3500 \\ 90x + 92y = 317000 \end{cases} \xrightarrow{\cdot(-90)} \begin{cases} -90x - 90y = -315000 \\ 90x + 92y = 317000 \end{cases}$$

$$2y = 2000$$

$$y = 1000$$

$x + 1000 = 3500$ $x = 2500$ 2500 € $\rightarrow$ precio del 1º. 1000 € $\rightarrow$ precio del 2º.

Ejercicio nº 8.-

x $\rightarrow$ cifra de las unidades

y $\rightarrow$ cifra de las decenas

10x + y $\rightarrow$ número 10y + x $\rightarrow$ número invertido

$$\begin{cases} y = 5 - x \\ 10x + y = 10y + x - 27 \end{cases} \quad 9x - 9y = -27 \quad 9x - 9(5 - x) = -27 \quad 9x - 45 + 9x = -27$$

$18x = 18$ $x = 1$ $y = 5 - 1$ $y = 4$ **Número** $\rightarrow$ 41

Ejercicio nº 9.-

$$\left.\begin{matrix} x \cdot y = 4 \\ x^2 + y^2 = 17 \end{matrix}\right\} x = \frac{4}{y} \qquad y^4 - 17y^2 + 16 = 0 \qquad y^2 = \frac{17 \pm 15}{2}$$

Solución: $\left.\begin{matrix} x = 1; y = 4 \\ x = -1; y = -4 \end{matrix}\right\}$

Ejercicio nº 10.-

$$\left.\begin{matrix} \frac{x}{y} = \frac{5}{7} \\ x^2 + y^2 = 1184 \end{matrix}\right\} x = \frac{5y}{7} \qquad 25y^2 + 49y^2 = 58016 \qquad y = \pm 28; x = \pm 20$$

Solución: $\frac{20}{28}$

Ejercicio nº 11.-

2x + 2y = 300 x + y = 150

y = 2x y = 2x Se resuelve por sustitución. x = 50 m, y = 100 m

Ejercicio nº 12.-

3x +4y = 100

4x + 3y = 110 La solución es: un DVD cuesta 20 € un CD cuesta 10 €

Ejercicio nº 13.-

	Padre	Hija
Edad hoy	x	y
Edad dentro de 10 años	x + 10	y + 10

$x + y = 70$

$x + 10 = 2(y + 10)$ **Solución:** Edad del padre: x = 50 años. Edad de la hija: y = 20 años.

Ejercicio nº 14.-

$x + y = 15$

$x^2 - y^2 = 15$ Despejando y de la primera y sustituyendo en la segunda: **Solución:** x = 8, y = 7

Ejercicio nº 15.-

x y — 3= — 4

$x^2 + y^2 = 25^2$

Despejando **y** de la 1ª ecuación y sustituyendo en la segunda. $x1 = 15$, $y1 = 20$; $x2 = -15$, $y2 = -20$

Las soluciones negativas no tienen sentido.

Solución: Los catetos miden 15 m y 20 m

Ejercicio nº 16.-

$xy = 6$

$x^2 + y^2 = 13$ Despejando **y** de la 1ª ecuación: aparece una ecuación bicuadrada.

Las soluciones son: $x_1 = 2, y_1 = 3$ $x_2 = -2, y_2 = -3$ $x_3 = 3, y_3 = 2$ $x_4 = -3, y_4 = -2$

Solución: Los números pueden ser 2 y 3, y también – 2 y – 3

Ejercicio nº 17.-

| 1/5 | 90 | ½ |

Total = x páginas

$$\frac{1}{5}x + 90 + \frac{1}{2}x = x$$

Solución: Total páginas=300. Lleva 60 leídas

Ejercicio nº 18.-

| 2/5 | 3/5 | 100 |

Inicio = x comics Compra 100

$$\frac{3}{5}x + 100 = x + 40$$

Solución: Tenía x = 150 comics

Ejercicio nº 19.-

x $\rightarrow$ número de olivos $2y = x - 10$

y $\rightarrow$ número de almendros $x + y = 250$ **Solución:** x = 170; y = 80

Ejercicio nº 20.-

x $\rightarrow$ largo $x y = 750$

y $\rightarrow$ ancho $2x + 2y = 110$ **Solución:** La finca es de dimensiones 25 x 30 metros

MATEMATICAS. 4ºESO-B. TEMA 5: Sistemas de Ecuaciones

1.- Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones por el **método de sustitución**:

1. $\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ 3x + 4y = 0 \end{cases}$
3. $\begin{cases} \dfrac{x + 3y}{2} = 5 \\ 3x - y = 5y \end{cases}$
4. $\begin{cases} \dfrac{x + 3y}{2} = 5 \\ 4 - \dfrac{2x - y}{2} = 1 \end{cases}$
5. $\begin{cases} x + y = 60 \\ 16x + 20y = 1100 \end{cases}$
6. $\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 4x - 3y = -2 \end{cases}$

2.- Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones por el **método de igualación**:

1. $\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ 3x + 4y = 0 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 4x - 3y = -2 \end{cases}$
4. $\begin{cases} \dfrac{x + 3y}{2} = 5 \\ 3x - y = 5y \end{cases}$
5. $\begin{cases} \dfrac{x + 3y}{2} = 5 \\ 4 - \dfrac{2x - y}{2} = 1 \end{cases}$
6. $\begin{cases} x + y = 60 \\ 16x + 20y = 1100 \end{cases}$

3.- Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones por el **método de reducción**:

1. $\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 4x - 3y = -2 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 3x + 2y = 24 \\ x + 3y = 3 \end{cases}$
4. $\begin{cases} x + y = 3500 \\ x - \dfrac{10x}{100} + y - \dfrac{8y}{100} = 3170 \end{cases}$
5. $\begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ 3x + 4y = 0 \end{cases}$
6. $\begin{cases} \dfrac{x + y}{2} = x - 1 \\ \dfrac{x - y}{2} = y + 1 \end{cases}$
7. $\begin{cases} x + y = 2000 \\ x + \dfrac{10x}{100} + y + \dfrac{15y}{100} = 2260 \end{cases}$
8. $\begin{cases} x + y = 58 \\ 2x + 4y = 168 \end{cases}$

4.- Resuelve los siguientes **sistemas de ecuaciones:**

1. Resuelve gráficamente los sistemas:

   a) $\begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ 3x + 4y = 0 \end{cases}$
   b) $\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 4x - 3y = -2 \end{cases}$

2. Halla por el método que quieras la solución de los siguientes sistemas:

   a) $\begin{cases} \dfrac{x + y}{2} = x - 1 \\ \dfrac{x - y}{2} = y + 1 \end{cases}$
   b) $\begin{cases} \dfrac{x + 3y}{2} = 5 \\ 3x - y = 5y \end{cases}$
   c) $\begin{cases} \dfrac{x + 3y}{2} = 5 \\ 4 - \dfrac{2x - y}{2} = 1 \end{cases}$
   d) $\begin{cases} \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 4 \\ \dfrac{x}{3} + y = 1 \end{cases}$
   e) $\begin{cases} \dfrac{x + 1}{3} + \dfrac{y - 1}{2} = 0 \\ \dfrac{x + 2y}{3} \quad \dfrac{x + y + 2}{4} = 0 \end{cases}$

5.- Resuelve los siguientes **sistemas de ecuaciones no lineales**:

1. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x + y = 7 \end{cases}$
2. $\begin{cases} x + y = 7 \\ x \cdot y = 12 \end{cases}$
3. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 169 \\ x + y = 17 \end{cases}$
4. $\begin{cases} y^2 - 2y + 1 = x \\ \sqrt{x} + y = 5 \end{cases}$
5. $\begin{cases} \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = 13 \\ \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = 1 \end{cases}$

SOLUCIONES

Ejercicio nº 1.

1. $\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases}$ $\quad 2x = 16 - 4y \quad x = 8 - 2y$

$3(8 - 2y) - 4y = -6 \quad 24 - 6y - 4y = -6 \quad -10y = -30 \quad y = 3$

$x = 8 - 2 \cdot 3 = 8 - 6 \quad x = 2 \quad x = 2,\ y = 3$

2. $\begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ 3x + 4y = 0 \end{cases}$ $\quad 3x = -4y \quad x = \dfrac{-4y}{3}$

$2 \cdot \left(-\dfrac{4y}{3}\right) + 3y = -1 \quad \dfrac{-8y}{3} + 3y = -1 \quad -8y + 9y = -3 \quad y = -3 \quad x = \dfrac{-4 \cdot (-3)}{3} \quad x = 4$

3. $\begin{cases} \dfrac{x + 3y}{2} = 5 \\ 3x - y = 5y \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x + 3y = 10 \\ 3x - y = 5y \end{cases}$ $\quad \begin{matrix} x = 10 - 3y \\ 3x = 6y \end{matrix} \quad x = 2y$

$10 - 3y = 2y \quad y = 2 \quad x = 2 \cdot 2 \quad x = 4$

4. $\begin{cases} \dfrac{x + 3y}{2} = 5 \\ 4 - \dfrac{2x - y}{2} = 1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x + 3y = 10 \\ 8 - 2x + y = 2 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x + 3y = 10 \\ -2x + y = -6 \end{cases}$ $\quad x = 10 - 3y$

$-2(10 - 3y) + y = -5 \quad -20 + 6y + y = -6 \quad 7y = 14 \quad y = 2;\ x = 10 - 3 \cdot 2 \quad x = 4$

5. $\begin{cases} x + y = 60 \\ 16x + 20y = 1100 \end{cases};\ x = 60 - y;\ 16(60 - y) + 20y = 1100 \quad 960 - 16y + 20y = 1100$

$4y = 140 \quad y = 35 \quad x + 35 = 60 \quad x = 25$

6. $\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 4x - 3y = -2 \end{cases}$ $\quad 3x = 7 - 2y \quad x = \dfrac{7 - 2y}{3};\ 4\left(\dfrac{7 - 2y}{3}\right) - 3y = -2, \quad \dfrac{28 - 8y}{3} - 3y = -2$

$28 - 8y - 9y = -6; \quad -17y = -34; \quad y = 2 \quad x = \dfrac{7 - 2 \cdot 2}{3} \quad x = 1$

Ejercicio nº 2.

1. $\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases}$ $\quad 3x - -6 + 4y \quad x - \dfrac{-6 + 4y}{3};\ 2x = 16 - 4y \quad x = \dfrac{16 - 4y}{2}$

$\dfrac{-6 + 4y}{3} = \dfrac{16 + 4y}{2};\ 2(-6 + 4y) = 3(16 - 4y) \quad -12 + 8y = 48 - 12y$

$8y + 12y = 48 + 12 \quad 20y = 60 \quad y = 3$

$x = \dfrac{-6 + 4 \cdot 3}{3} = \dfrac{-6 - 12}{3} \quad x = 2 \quad x = 2,\ y = 3$

2. $\begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ 3x + 4y = 0 \end{cases}$ $\quad 3x = -4y \quad\quad x = \dfrac{-4y}{3}$

$2x = -1 - 3y \quad\quad x = \dfrac{-1-3y}{2} \quad\quad \dfrac{-1-3y}{2} = \dfrac{-4y}{3}$

$3(-1-3y) = 2(-4y) \quad\quad -3 - 9y = -8y \quad\quad y = -3 \quad\quad x = \dfrac{-4\cdot(-3)}{3} \quad\quad x = 4$

3. $\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 4x - 3y = -2 \end{cases}$ $\quad 3x = 7 - 2y \quad\quad x = \dfrac{7-2y}{3}$

$4x = -2 + 3y \quad\quad x = \dfrac{2+3y}{4}\,; \quad 4(7-2y) = 3(-2+3y) \quad\quad 28 - 8y = -6 + 9y$

$28 + 6 = 9y + 8y \quad\quad 34 = 17y \quad\quad y = 2 \quad\quad x = \dfrac{7-2\cdot 2}{3} \quad\quad x = 1$

4. $\begin{cases} \dfrac{x+3y}{2} = 5 \\ 4 - \dfrac{2x-y}{2} = 1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x + 3y = 10 \\ 8 - 2x + y = 2 \end{cases}$ $\quad \begin{matrix} x = 10 - 3y \\ 3x = 6y \end{matrix} \quad\quad x = 2y\,; \; x = 10 - 3y$

$10 - 3y = 2y \quad\quad 10 = 5y \quad\quad y = 2 \quad\quad x = 10 - 3\cdot 2 \quad\quad x = 4$

5. $\begin{cases} \dfrac{x+3y}{2} = 5 \\ 4 - \dfrac{2x-y}{2} = 1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x + 3y = 10 \\ 8 - 2x + y = 2 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x + 3y = 10 \\ -2x + y = -6 \end{cases}$ $\quad x = 10 - 3y$

$-2x = -6 - y \quad\quad 2x = 6 + y \quad\quad x = \dfrac{6+y}{2}\,; \quad 10 - 3y = \dfrac{6+y}{2}$

$20 - 6y = 6 + y \quad\quad 14 = 7y \quad\quad y = 2 \quad\quad x = 10 - 3\cdot 2 \quad\quad x = 4$

6. $\begin{cases} x + y = 60 \\ 16x + 20y = 1100 \end{cases}; \quad x = 60 - y\,; \quad 16x = 1100 - 20y \quad\quad x = \dfrac{1100-20y}{16}$

$60 - y = \dfrac{1100-20y}{16} \quad\quad 960 - 16y = 1100 - 20y \quad\quad -16y + 20y = 1100 - 960$

$4y = 140 \quad\quad y = 35 \quad\quad x + 35 = 60 \quad\quad x = 25$

Ejercicio nº 3.-

1. $\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} 3x - 4y = -6 \xrightarrow{\cdot 2} \\ 2x + 4y = 16 \xrightarrow{\cdot(-3)} \end{cases}$ $\quad \begin{cases} 6x - 8y = -12 \\ -6x - 12y = -48 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} \cancel{6x} - 8y = -12 \\ \cancel{-6x} - 12y = -48 \end{cases}$

$$-20y = -60 \quad\quad y = 3$$

$2x + 4\cdot 3 = 16 \quad\quad 2x + 12 = 16 \quad\quad 2x = 4 \quad\quad x = 2 \quad\quad x = 2,\; y = 3$

2. $\begin{cases}3x+2y=7\\4x-3y=-2\end{cases}$

$$\begin{cases}3x+2y=7\\4x-3y=-2\end{cases}\quad\begin{matrix}\xrightarrow{\times 3}\\\xrightarrow{\times 2}\end{matrix}\quad\begin{cases}9x+6y=21\\8x-6y=-4\end{cases}$$

$17x = 17 \qquad x=1$

$3\cdot 1+2y=7 \qquad 2y=4 \qquad y=2$

3. $\begin{cases}3x+2y=24\\x+3y=3\end{cases}$

$$\begin{array}{r}3x+2y=24\\-3x-9y=-9\\\hline -7y=15\end{array}$$

$y=-\dfrac{15}{7}$

$x+3\left(-\dfrac{15}{7}\right)=3 \qquad x-\dfrac{45}{7}=3$

$7x-45=21 \qquad 7x=66 \qquad x=\dfrac{66}{7}$

4. $\begin{cases}x+y=3500\\x-\dfrac{10x}{100}+y-\dfrac{8y}{100}=3170\end{cases}$; $\begin{cases}x+y=3500\\90x+92y=317000\end{cases}\xrightarrow{\times(-90)}\begin{cases}-90x-90y=-315000\\90x+92y=317000\end{cases}$

$2y = 2000$

$y=1000 \qquad x+1000=3500 \qquad x=2500$

5. $\begin{cases}2x+3y=-1\\3x+4y=0\end{cases} \qquad 3x=-4y \qquad x=\dfrac{-4y}{3}$

$2\cdot\left(-\dfrac{4y}{3}\right)+3y=-1 \qquad \dfrac{-8y}{3}+3y=-1 \qquad -8y+9y=-3 \qquad y=-3$; $x=\dfrac{-4\cdot(-3)}{3} \qquad x=4$

6. $\begin{cases}\dfrac{x+y}{2}=x-1\\\dfrac{x-y}{2}=y+1\end{cases} \qquad \begin{cases}x+y=2(x-1)\\x-y=2(y+1)\end{cases} \qquad \begin{cases}x+y=2x-2\\x-y=2y+2\end{cases}$

$\begin{cases}-x+y=-2\\x-3y=2\end{cases}$

$$\begin{array}{r}-x+y=-2\\x-3y=2\\\hline -2y=0\end{array}$$

$y=0 \qquad x-3\cdot 0=2 \qquad x=2$

7. $\begin{cases}x+y=2000\\x+\dfrac{10x}{100}+y+\dfrac{15y}{100}=2260\end{cases}$; $\begin{cases}x+y=2000\\110x+115y=226000\end{cases}\xrightarrow{\times(-110)}\begin{cases}-110x-110y=-220000\\110x+115y=226000\end{cases}$

$5y=6000$

$y=1200 \qquad x+1200=2000 \qquad x=800$

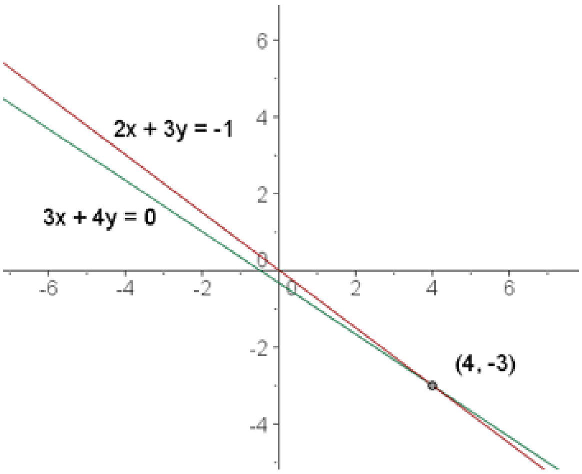
8. $\begin{cases}x+y=58\\2x+4y=168\end{cases} \qquad \begin{cases}x+y=58\\2x+4y=168\end{cases} \qquad \begin{cases}-2x-2y=-116\\2x+4y=168\end{cases}$

$2y=52$

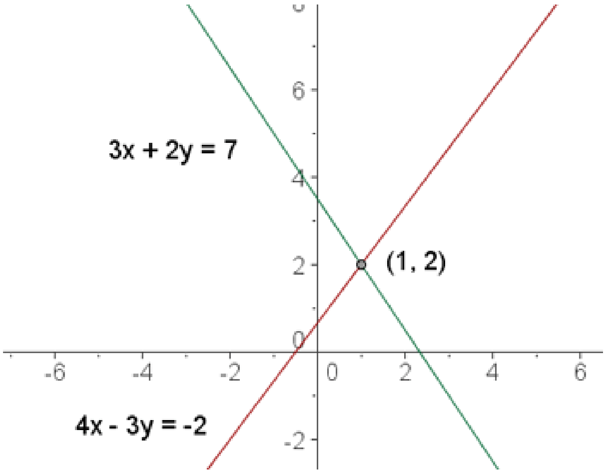
$y=26 \qquad x+26=58 \qquad x=32$

Ejercicio nº 4.-

1a.



1b.



2a. $\begin{cases} \dfrac{x+y}{2} = x-1 \\ \dfrac{x-y}{2} = y+1 \end{cases}$ $\begin{cases} x+y = 2(x-1) \\ x-y = 2(y+1) \end{cases}$ $\begin{cases} x+y = 2x-2 \\ x-y = 2y+2 \end{cases}$

$\begin{cases} -x+y = -2 \\ x-3y = 2 \end{cases}$ $\begin{array}{r} -x+y = -2 \\ \underline{x-3y = 2} \\ -2y = 0 \end{array}$ $y = 0$ $x - 3 \cdot 0 = 2$ $x = 2$

2b. $\begin{cases} \dfrac{x+3y}{2} = 5 \\ 3x - y = 5y \end{cases}$ $\begin{cases} x+3y = 10 \\ 3x-y = 5y \end{cases}$ $\begin{array}{l} x = 10-3y \\ 3x = 6y \end{array}$ $x = 2y$

$10 - 3y = 2y$ $y = 2$ $x = 2 \cdot 2$ $x = 4$

2c. $\begin{cases} \dfrac{x+3y}{2} = 5 \\ 4 - \dfrac{2x-y}{2} = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x+3y = 10 \\ 8-2x+y = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} x+3y = 10 \\ -2x+y = -6 \end{cases}$ $x = 10-3y$

$-2(10-3y)+y = -6$ $-20+6y+y = -6$ $7y = 14$ $y = 2$; $x = 10 - 3 \cdot 2$ $x = 4$

2d. $\begin{cases} \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 4 \\ \dfrac{x}{3} + y = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} 3x+2y = 24 \\ x+3y = 3 \end{cases}$ $\begin{array}{r} 3x+2y = 24 \\ \underline{-3x-9y = -9} \\ -7y = 15 \end{array}$ $y = -\dfrac{15}{7}$

$x + 3\left(-\dfrac{15}{7}\right) = 3$ $x - \dfrac{45}{7} = 3$

$7x - 45 = 21$ $7x = 66$ $x = \dfrac{66}{7}$

2e. $\begin{cases} \dfrac{x+1}{3} + \dfrac{y-1}{2} = 0 \\ \dfrac{x+2y}{3} - \dfrac{x+y+2}{4} = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2(x+1) + 3(y-1) = 0 \\ 4(x+2y) - 3(x+y+2) = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 2x + 2 + 3y - 3 = 0 \\ 4x + 8y - 3x - 3y - 6 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ x + 5y = 6 \end{cases}$ $\begin{array}{r} 2x + 3y = \ \ \ 1 \\ -2x - 10y = -12 \\ \hline -7y = -11 \end{array}$ $y = \dfrac{11}{7}$

$x + 5 \cdot \dfrac{11}{7} = 6$ $\quad x + \dfrac{55}{7} = 6$ $\quad 7x + 55 = 42$

$7x = -13$ $\quad x = -\dfrac{13}{7}$

Ejercicio nº 5.-

1. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x + y = 7 \end{cases}$; y=7−x; x^2 + (7−x)^2 =25; x^2 +49−14x +x^2 =25; 2x^2 −14x +24=0; x^2 −7x+12=0

$x = \dfrac{7 \pm \sqrt{49-48}}{2} = \dfrac{7 \pm 1}{2} = \begin{cases} \nearrow x_1 = 4 \\ \searrow x_2 = 3 \end{cases}$; **x = 3**; y = 7 − 3; **y = 4**; **x = 4**; y = 7 − 4; **y = 3**

2. $\begin{cases} x + y = 7 \\ x \cdot y = 12 \end{cases}$ $\quad y = 7 - x \quad x \cdot (7 - x) = 12 \quad 7x - x^2 = 12 \quad x^2 - 7x + 12 = 0$

$x = \dfrac{7 \pm \sqrt{49-48}}{2} = \dfrac{7 \pm 1}{2} \begin{cases} \nearrow x_1 = 4 \\ \searrow x_2 = 3 \end{cases}$

$x_1 = 4 \quad y = 7 - 4 \quad y_1 = 3 \qquad x_2 = 3 \quad y = 7 - 3 \quad y_2 = 4$

3. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 169 \\ x + y = 17 \end{cases}$ $\quad x = 17 - y \quad 2y^2 - 34y + 120 = 0 \quad y^2 - 17y + 60 = 0$

$y = \dfrac{17 \pm \sqrt{289 - 240}}{2} = \dfrac{17 \pm 7}{2} \begin{cases} \nearrow y_1 = 12 \\ \searrow y_2 = 5 \end{cases}$

$y_1 = 12 \quad x_1 = 17 - 12 \quad x_1 = 5 \qquad y_2 = 5 \quad x_1 = 17 - 5 \quad x_2 = 12$

4. $\begin{cases} y^2 - 2y + 1 = x \\ \sqrt{x} + y = 5 \end{cases}$ $\quad \sqrt{y^2 - 2y + 1} + y = 5 \quad \left(\sqrt{y^2 - 2y + 1}\right)^2 = (5 - y)^2$

$y^2 - 2y + 1 = 25 - 10y + y^2 \quad 8y = 24 \quad y = 3$

$x = 3^2 - 2 \cdot 3 + 1 \quad x = 4$

5. $\begin{cases} \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=13 \\ \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=1 \end{cases}$ $\quad \frac{1}{x}=u \quad \frac{1}{y}=v \quad \begin{cases} u^2+v^2=13 \\ u-v=1 \end{cases}$

$u=1+v \quad (1+v)^2+v^2=13 \quad 1+2v+v^2+v^2=13 \quad v^2+v-6=0$

$v=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\frac{-1\pm 5}{2}= \begin{matrix} \nearrow v_1=2 & u_1=3 \\ \searrow v_2=-3 & u_2=-2 \end{matrix}$

$\frac{1}{x_1}=3 \quad x_1=\frac{1}{3} \qquad \frac{1}{x_2}=-2 \quad x_2=-\frac{1}{2}$

$\frac{1}{y_1}=2 \quad y_1=\frac{1}{2} \qquad \frac{1}{y_2}=-3 \quad y_2=-\frac{1}{3}$

EJERCICIOS PROPUESTOS

5.1 Un triángulo puede definirse dando la medida de sus tres lados. Indica cuáles de las siguientes parejas de triángulos son semejantes.

a) 5, 6, 7 y 15, 18, 20

b) 4, 6, 8 y 1; 1,5; 2

a) $\frac{5}{15} = \frac{6}{18} \neq \frac{7}{20} \Rightarrow$ No son semejantes.

b) $\frac{4}{1} = \frac{6}{15} = \frac{8}{2} \Rightarrow$ Son semejantes.

5.2 Razona si son semejantes estas figuras.

a) Dos cuadrados.

b) Tres triángulos equiláteros.

c) Dos rectángulos.

a) Los ángulos de un cuadrado y de otro son todos iguales; además, al ser los cuatro lados iguales, siempre estarán en la misma proporción los de un cuadrado con los del otro.

b) Tres triángulos equiláteros tendrán los tres ángulos iguales de 60°, y como los lados de cada triángulo serán iguales, serán proporcionales los de un triángulo con los del otro.

c) Dos rectángulos, en general, no son semejantes porque los lados no tienen por qué ser proporcionales. Por ejemplo, si en un rectángulo $b = 1$ cm, $h = 2$ cm, y en otro, $b' = 1$ cm, $h' = 3$ cm, entonces $\frac{b}{b'} = 1 \neq \frac{h}{h'} = \frac{2}{3}$.

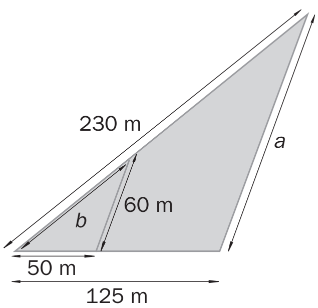
5.3 La escala de un mapa es de 1:2 500 000. ¿A cuántos kilómetros se encontrarán dos ciudades que en el mapa están separadas 12 centímetros?

Escala 1:2 500 000. En el mapa, 12 cm representan $12 \cdot 2\,500\,000 = 30\,000\,000$ cm $= 300$ km.

5.4 Un triángulo equilátero tiene 40 centímetros cuadrados de área. Halla el área del triángulo que se obtiene al unir los puntos medios de los lados.

Obtendremos un triángulo de razón $k = \frac{1}{2}$; por tanto, la razón de las áreas será $k^2 = \frac{1}{4}$. El área del nuevo triángulo será $A = \frac{1}{4} \cdot 40 = 10 \text{ cm}^2$.

5.5 Halla las medidas que faltan en la figura.



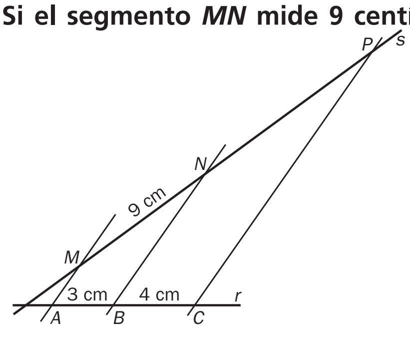
Aplicando el teorema de Tales,

$$\frac{125}{50} = \frac{a}{60} = \frac{230}{b}$$

Entonces, $a = 150$ m, y $b = 92$ m

5.6 En una recta *r* hay tres puntos *A, B* y *C* que distan sucesivamente 3 y 4 centímetros. Por esos puntos se trazan rectas paralelas que cortan a otra, *s*, en *M*, *N* y *P*.

Si el segmento *MN* mide 9 centímetros, ¿cuál es la distancia entre los puntos *N* y *P*?



$$\frac{3}{9} = \frac{4}{NP}$$

$NP = 12$ cm

5.7 Dibuja un triángulo cualquiera *ABC* y construye paso a paso dos triángulos semejantes a él.
a) Uno de razón 1 : 2
b) Otro de razón 2 : 1

Partiremos de un triángulo *ABC*.

a) Con los mismos ángulos y multiplicando por dos cada uno de sus lados obtenemos un triángulo de razón 1 : 2.

b) Si, con los mismos ángulos, dividimos los tres lados del triángulo *ABC* entre dos, obtenemos un nuevo triángulo de razón 2 : 1.

5.8 Determina si son semejantes los triángulos que se indican.
a) $\widehat{A} = 60°$, $\widehat{B} = 40°$ y $\widehat{A} = 80°$, $\widehat{E} = 60°$
b) $\widehat{A} = 90°$, $b = 6$, $c = 8$ y $\widehat{A}' = 90°$, $b' = 5$, $c' = 7$
c) $\widehat{A} = 45°$, $\widehat{B} = 75°$ y $\widehat{D} = 65°$, $\widehat{E} = 75°$
d) $a = 5$, $b = 8$, $\widehat{C} = 60°$ y $a' = 15$, $b' = 24$, $\widehat{C}' = 60°$

a) $\widehat{C} = 180 - (60 + 40) = 80°$ $\widehat{F} = 180 - (80 + 60) = 40°$
Los dos triángulos tienen todos sus ángulos iguales. Por el criterio 1 sabemos que son semejantes.

b) $\frac{6}{8} \neq \frac{5}{7}$ no son proporcionales los lados que comprenden al ángulo igual (criterio 3); por tanto, no son semejantes.

c) $\widehat{C} = 180 - (45 + 75) = 60°$ $\widehat{F} = 180 - (65 + 75) = 40°$
Solo tienen un ángulo igual; por tanto, no son semejantes (criterio 1).

d) $\frac{5}{15} = \frac{8}{24}$ son proporcionales y el ángulo que abarcan es igual; por tanto, son semejantes (criterio 3).

5.9 Los catetos de un triángulo rectángulo miden 6 y 8 centímetros. Si la hipotenusa de otro triángulo rectángulo semejante mide 20 centímetros, calcula las longitudes de la hipotenusa del primero y de los catetos del segundo.

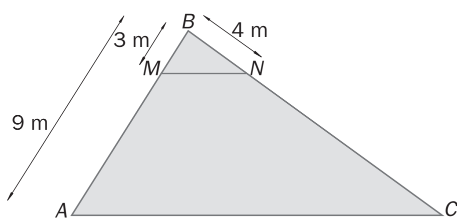
Utilizamos el teorema de Pitágoras para calcular la hipotenusa del primero:

$$h^2 = 6^2 + 8^2 \Rightarrow h^2 = 100 \Rightarrow h = 10 \text{ cm}$$

Como los triángulos son semejantes:

$$\frac{20}{10} = \frac{c_1}{6} = \frac{c_2}{8} \Rightarrow c_1 = 12 \text{ cm, y } c_2 = 16 \text{ cm}$$

5.10 Los lados *MN* y *AC* son paralelos. Calcula la medida del segmento *CN*.

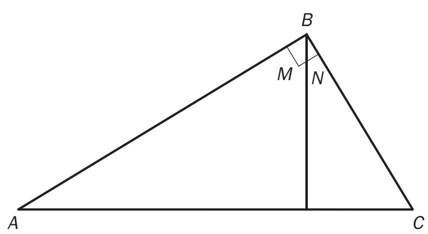


Llamamos x a la medida del segmento *CN*.

Por el teorema de Tales:

$$\frac{3}{9} = \frac{4}{4 + x} \Rightarrow 4 + x = 12 \Rightarrow x = 8 \text{ m}$$

5.11 En un triángulo rectángulo se traza la altura sobre la hipotenusa. ¿Son semejantes los triángulos en que ha quedado dividido el triángulo dado?



$$\left.\begin{array}{r}\widehat{B} + \widehat{N} = 90 \\ \widehat{M} + \widehat{N} = 90\end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{M}$$

Los triángulos tienen un ángulo igual además del ángulo recto; por el criterio 1 deducimos que son semejantes.

5.12 Comprueba que la razón de dos alturas correspondientes de dos triángulos semejantes es igual a la razón de semejanza.

$A_1 = \dfrac{b_1 \cdot h_1}{2}$ $\qquad$ $A_2 = \dfrac{b_2 \cdot h_2}{2}$

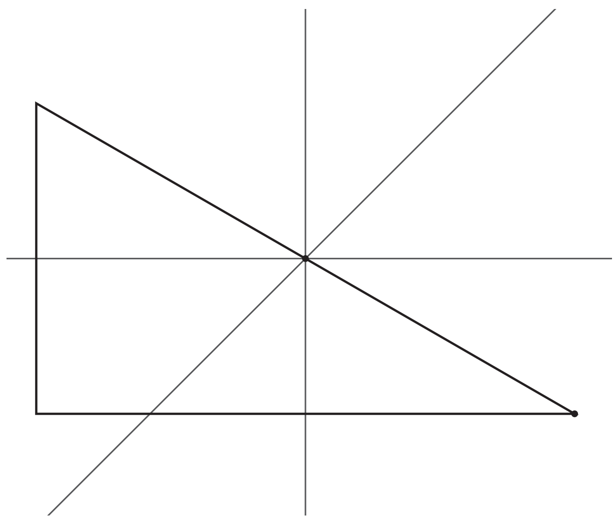
Si la razón de semejanza es k, la razón entre las áreas será k^2. Es decir: $k^2 = \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{\dfrac{b_1 \cdot h_1}{2}}{\dfrac{b_2 \cdot h_2}{2}} = \dfrac{b_1 \cdot h_1}{b_2 \cdot h_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \cdot \dfrac{h_1}{h_2} = k \cdot \dfrac{h_1}{h_2} \Rightarrow \dfrac{h_1}{h_2} = k$

5.13 La altura de un triángulo rectángulo mide 7 centímetros y divide a la hipotenusa en dos segmentos *m* y *n* tales que $m = \frac{1}{4}n$. Calcula *m* y *n*.

$7^2 = m \cdot n \quad \Rightarrow \quad 49 = \dfrac{1}{4}n \cdot n \quad \Rightarrow \quad 196 = n^2 \quad \Rightarrow \quad n = 14 \text{ cm} \quad \Rightarrow \quad m = \dfrac{1}{4} \cdot 14 = 3{,}5 \text{ cm}$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

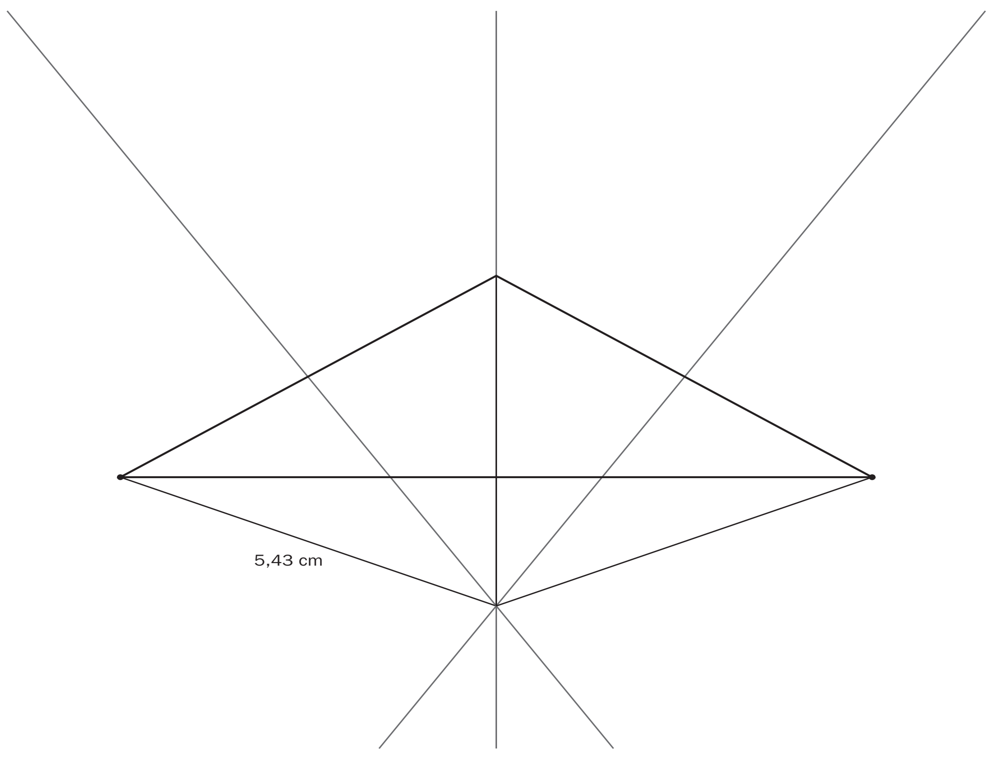
5.14 Si en otro caso las distancias entre los pueblos son de 8 kilómetros de *A* a *B*, de 10 de *B* a *C* y de 6 de *A* a *C*, ¿dónde deberá situarse el hospital?



Este ejercicio es algo más sencillo, ya que el triángulo resultante es rectángulo, y el circuncentro coincide con el punto medio de la hipotenusa. Por tanto, el hospital estará a 5 km de cada pueblo.

5.15 ¿Dónde estará ubicado el hospital si las distancias entre los pueblos son de 10 kilómetros de *A* a *B*, de 6 de *B* a *C* y de 6 de *A* a *C*?

En este caso, el circuncentro queda fuera del triángulo. La distancia a cada pueblo será de 5,43 km.



EJERCICIOS PARA ENTRENARSE

Figuras semejantes

5.16 **Calcula el valor de *a* y *b* para que los siguientes pares de triángulos sean semejantes.**

a) 3, *a*, 5 y 1,5; 2; *b*

b) $\frac{5}{2}$, 3, *a* y 10, *b*, 24

c) 3, *a*, 8 y $\frac{6}{5}$, $\frac{14}{5}$, *b*

d) 45°, 75°, 60° y 75°, $\widehat{A}$, $\widehat{B}$

a) $\frac{3}{1,5} = \frac{a}{2} = \frac{5}{b} \Rightarrow a = 4;\ b = 2,5$

b) $\frac{\frac{5}{2}}{10} = \frac{3}{b} = \frac{a}{24} \Rightarrow a = 6;\ b = 12$

c) $\frac{3}{\frac{6}{5}} = \frac{a}{\frac{14}{5}} = \frac{8}{b} \Rightarrow a = 7;\ b = \frac{16}{5}$

d) $\widehat{A} = 60°,\ \widehat{B} = 45°$

5.17 **El perímetro de un triángulo equilátero mide 30 centímetros.**

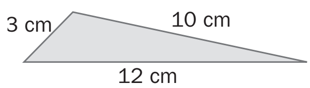
a) Halla las medidas de los lados de un triángulo equilátero semejante a él si la razón de semejanza es $k = \frac{1}{2}$.

b) ¿Cuál es la razón de sus áreas?

a) lado = 10 cm $l' = l \cdot k = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5$ cm

b) $\frac{A'}{A} = k^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

5.18 **Calcula las longitudes de los lados de un triángulo semejante al de la figura de modo que la razón de sus áreas sea $\frac{25}{4}$.**



$\frac{A'}{A} = \frac{25}{4} = k^2 \Rightarrow k = \frac{5}{2}$ es la razón de semejanza. Por tanto:

$a' = a \cdot k = 3 \cdot \frac{5}{2} = \frac{15}{2} = 7,5$ cm

$b' = b \cdot k = 10 \cdot \frac{5}{2} = 25$ cm

$c' = c \cdot k = 12 \cdot \frac{5}{2} = 30$ cm

5.19 **La arista de un cubo mide 8 metros. Halla la medida de la arista de otro cubo semejante a él si la razón de sus volúmenes es $\frac{1}{27}$.**

$\frac{V'}{V} = \frac{1}{27} = k^3 \Rightarrow k = \sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \frac{1}{3}$ es la razón de semejanza. Por tanto: $a' = a \cdot k = 8 \cdot \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$ m

5.20 **Los catetos de un triángulo rectángulo isósceles miden 30 centímetros. Calcula el perímetro de un triángulo semejante a él con razón de semejanza $k = \frac{1}{6}$.**

Por el teorema de Pitágoras, la hipotenusa mide: $x = \sqrt{1800}$ cm

Por tanto, el perímetro mide $p = 60 + \sqrt{1800}$ cm

$\frac{p'}{p} = \frac{1}{6} = k \Rightarrow p' = \frac{1}{6} \cdot \left(60 + \sqrt{1800}\right) = \frac{60 + \sqrt{1800}}{6} = 10 + 5\sqrt{2}$ cm

5.21 Javier se encuentra de vacaciones en Nueva York y dispone de un plano a escala 1:15 000 de la ciudad. Quiere ir desde su hotel a un museo que dista 3,5 centímetros en el plano. ¿Cuál es la distancia, medida en metros, que debe recorrer?

$15\,000 \cdot 3{,}5 = 52\,500 \text{ cm} = 525 \text{ m}$

5.22 Se realiza una fotocopia de un mapa, cuya escala es de 1:20 000, ampliándolo al 130%.

a) Si la distancia entre dos lugares del mapa es de 4,8 centímetros, ¿qué distancia los separa en la fotocopia realizada?

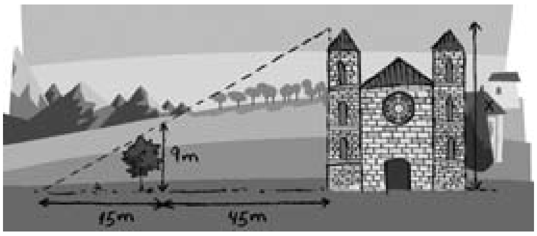
b) ¿Cuál es la distancia real que separa estos dos lugares?

a) $4{,}8 \cdot 1{,}3 = 6{,}24 \text{ cm}$

b) $1{:}20\,000 \Rightarrow 1 \text{ cm} = 20\,000 \text{ cm} = 200 \text{ m}$
Distancia real $= 4{,}8 \cdot 200 - 960 \text{ m}$

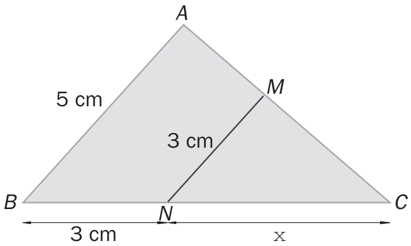
Teorema de Tales. Criterios de semejanza

5.23 Calcula la altura de la torre de la iglesia.



$$\frac{x}{9} = \frac{60}{15} \Rightarrow 15x = 540 \Rightarrow x = 36 \text{ m}$$

5.24 Si los segmentos *AB* y *MN* son paralelos, halla la medida del lado *BC*.

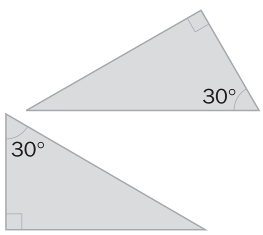


$$\frac{5}{3} = \frac{x+3}{x} \Rightarrow 5x = 3x + 9 \Rightarrow x = \frac{9}{2} = 4{,}5 \text{ cm}$$

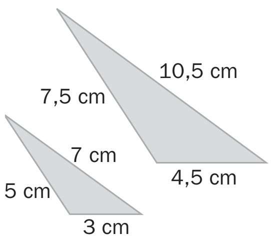
$BC = 3 + 4{,}5 = 7{,}5 \text{ cm}$

5.25 Determina si los siguientes pares de triángulos son semejantes, indicando, en caso afirmativo, el criterio de semejanza utilizado.

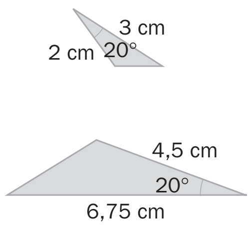
a)



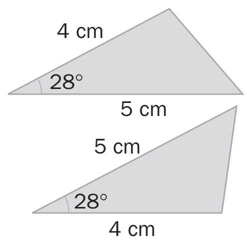
b)



c)

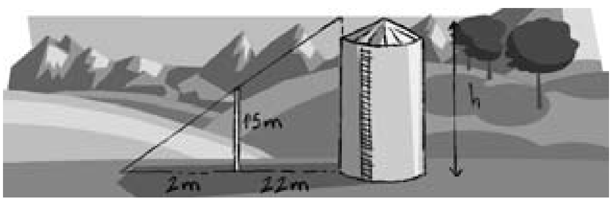


d)



a) Sí, ya que tienen dos ángulos iguales. Criterio 1.
b) Sí, ya que tienen sus tres lados proporcionales. Criterio 2.
c) Sí, ya que tienen un ángulo igual, y los lados correspondientes, proporcionales. Criterio 3.
d) Sí, ya que tienen un ángulo igual, y los lados correspondientes, iguales. Criterio 3.

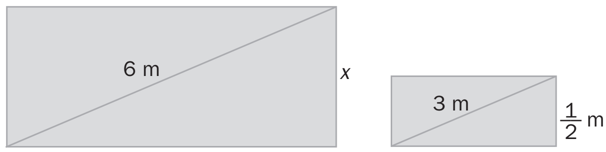
5.26 Para saber la altura del silo (depósito de trigo) de un pueblo, se alinea con él un palo y se mide su sombra. Halla la altura del silo.



$$\frac{h}{1{,}5} = \frac{24}{2} \Rightarrow 2h = 36 \Rightarrow h = 18 \text{ m}$$

Consecuencias de los criterios de semejanza

5.27 Si los rectángulos son semejantes, ¿cuál es el valor de *x*?



Razón = 6 : 3 = 2

$x = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$ m

5.28 Dos triángulos son semejantes. Si el perímetro del primero mide 52 centímetros y la razón de sus áreas es $\frac{64}{49}$, ¿cuál es el perímetro del segundo?

$$\frac{A'}{A} = \frac{64}{49} = k^2 \Rightarrow k = \frac{8}{7}$$

$$\frac{p'}{p} = k \Rightarrow p' = 52 \cdot \frac{8}{7} = \frac{416}{7} \approx 59{,}43 \text{ cm}$$

5.29 ¿Cuánto mide la altura de un triángulo rectángulo semejante al que tiene catetos de 12 y 16 centímetros si la razón de semejanza es $k = \frac{2}{3}$?

Calculamos la hipotenusa: $h^2 = 12^2 + 16^2 \Rightarrow h = 20$.

$A = \frac{12 \cdot 16}{2} = \frac{20 \cdot \text{altura}}{2}$ Despejamos la altura sobre la hipotenusa $\Rightarrow$ Altura = 9,6 cm

En el triángulo semejante: Altura' $= \frac{2}{3} \cdot 9{,}6 = 6{,}4$ cm

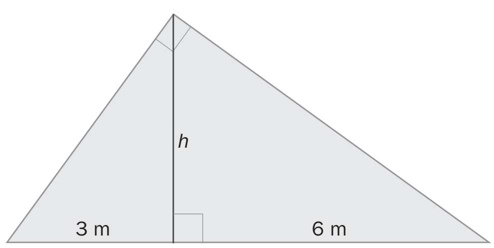
5.30 Se quiere construir dos rascacielos con base en forma de hexágono regular. La arista de la base de uno de ellos mide 2 decámetros. Calcula el área de la base del otro rascacielos sabiendo que la razón de sus perímetros es $\frac{3}{2}$.

Para hallar la apotema usamos el teorema de Pitágoras: $a^2 + 1^2 = 2^2 \Rightarrow a = \sqrt{3}$ dam

$$A = \frac{p \cdot a}{2} = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3} \text{ dam}^2$$

$$\frac{p'}{p} = \frac{3}{2} = k \Rightarrow \frac{A'}{A} = k^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow A' = 6\sqrt{3}\,\frac{9}{4} = \frac{27\sqrt{3}}{2} \text{ dam}^2$$

5.31 En la siguiente figura, ¿cuánto mide *h*?



Teorema de la altura: $h^2 = m \cdot n$

$h^2 = 3 \cdot 1\ 6 = 18$

$h = \sqrt{18}$ m $\Rightarrow$ $h = 3\sqrt{2}$ m

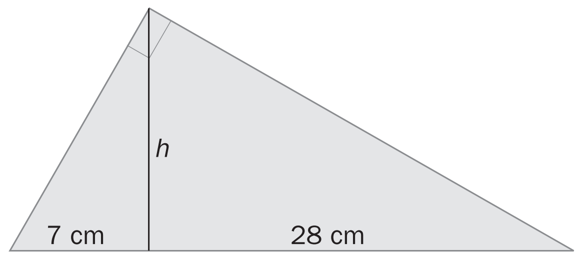
5.32 Calcula el área de un triángulo rectángulo en el que la altura sobre la hipotenusa la divide en dos segmentos de 8 y 2 centímetros, respectivamente.

Por el teorema de la altura: $h^2 = 8 \cdot 2 = 16 \Rightarrow h = \sqrt{16} = 4$ cm

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{(8+2) \cdot 4}{2} = 20 \text{ cm}^2$$

5.33 Halla las longitudes de los catetos del triángulo rectángulo de la figura y calcula su área.

Por el teorema de la altura:
$h^2 = 28 \cdot 7 = 196 \Rightarrow h = \sqrt{196} = 14$ cm
Por el teorema de Pitágoras:
$14^2 + 7^2 = c^2 \Rightarrow c = \sqrt{245} = 7\sqrt{5}$ cm $= 15{,}65$ cm
Por el teorema de Pitágoras:
$14^2 + 28^2 = b^2 \Rightarrow b = \sqrt{980} = 14\sqrt{5}$ cm $= 31{,}3$ cm
$A = \dfrac{b \cdot h}{2} = \dfrac{35 \cdot 14}{2} = 245$ cm^2

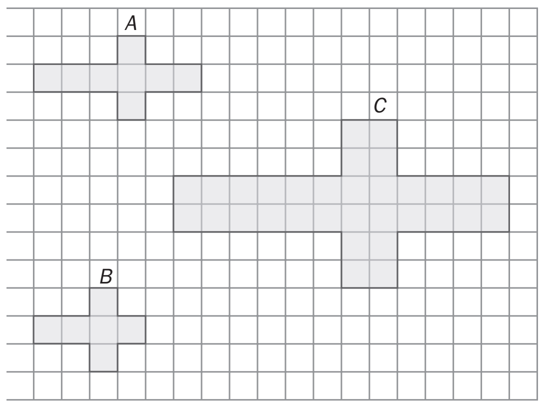


CUESTIONES PARA ACLARARSE

5.34 Razona si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones.
a) Todos los cuadrados son semejantes.
b) Los ángulos de dos triángulos semejantes son proporcionales.
c) Dos triángulos rectángulos con un ángulo agudo igual son semejantes.
d) Todas las circunferencias son semejantes.
e) Los polígonos iguales son semejantes y su razón de semejanza es 1.

a) Verdadera (ejercicio 2).
b) Falsa. Los ángulos son iguales.
c) Verdadera por el criterio 1.
d) Verdadera. Siempre están en la misma proporción el radio y el perímetro. El área guarda esa proporción al cuadrado.
e) Verdadera, ya que si son polígonos iguales, tienen lados y ángulos respectivamente iguales.

5.35 ¿Cuáles de los polígonos de la figura son semejantes?



A y *C* son semejantes, ya que todas sus dimensiones son proporcionales.

Razón $= \dfrac{12}{6} = \dfrac{6}{3} = \dfrac{2}{1} = 2$

5.36 Elige la respuesta correcta.
a) Dos triángulos son semejantes y la razón de semejanza es 3. Uno de ellos tiene un área de 6 unidades cuadradas. ¿Cuántas corresponden al área del otro?
i) 18 ii) 54 iii) 108
b) Dos prismas son semejantes y la razón de semejanza es 2. Uno de ellos tiene un volumen de 10 unidades cúbicas. ¿Cuántas corresponden al volumen del otro?
i) 40 ii) 200 iii) 80

a) Razón de longitudes = 3; razón de áreas = 9
ii) ya que $54\ u^2 = 9 \cdot 6\ u^2$

b) Razón de longitudes = 2; razón de volúmenes = 8
iii) ya que $80\ u^3 = 8 \cdot 10\ u^3$

5.37 Si dos pentágonos regulares *A* y *B* son semejantes, ¿cuáles de las siguientes igualdades son ciertas?

a) $\dfrac{\text{Perímetro de } A}{\text{Perímetro de } B} = \dfrac{\text{Apotema de } A}{\text{Apotema de } B}$ **b)** $\dfrac{\text{Perímetro de } A}{\text{Perímetro de } B} = \dfrac{\text{Área de } A}{\text{Área de } B}$ **c)** $\dfrac{\text{Perímetro de } A}{\text{Perímetro de } B} = \dfrac{\text{Diagonal de } A}{\text{Diagonal de } B}$

a) y c) Ciertas.
b) Falsa, ya que la razón de semejanza de las superficies es el cuadrado de la razón de longitudes.

5.38 Un patio circular tiene 200 metros cuadrados de superficie. Si el radio se triplicara, ¿se triplicaría también la superficie? Razona tu respuesta.

Área $A = \pi \cdot r^2 = 200$ m^2 Área $B = \pi \cdot (3r)^2 = 9 \cdot \pi \cdot r^2 = 9 \cdot 200 = 1800$ m^2

La superficie no se multiplica por 3, sino por 3^2, que, como ya sabemos, es la razón de las áreas de figuras con razón de semejanza 3.

PROBLEMAS PARA APLICAR

5.39 El logotipo de una empresa tiene la forma de un hexágono cuyos lados miden 3, 4, 5, 7, 8 y 9 centímetros.
En los carteles publicitarios se quiere dibujar un hexágono semejante de 117 centímetros de perímetro. ¿Cuánto miden los lados homólogos?

Perímetro del hexágono pequeño $= 3 + 4 + 5 + 7 + 8 + 9 = 36$ cm Razón $= \dfrac{117}{36} = 3{,}25$

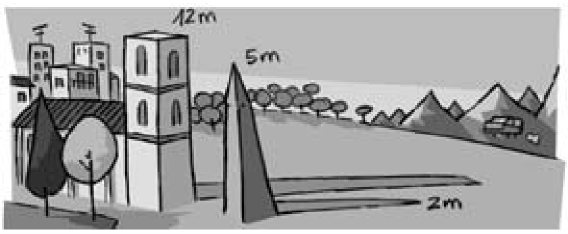
Lados del hexágono grande: $3 \cdot 3{,}25 = 9{,}75$ cm $4 \cdot 3{,}25 = 13$ cm $5 \cdot 3{,}25 = 16{,}25$ cm

$7 \cdot 3{,}25 = 22{,}75$ cm $8 \cdot 3{,}25 = 26$ cm $9 \cdot 3{,}25 = 29{,}25$ cm

5.40 En el plano de una vivienda en construcción aparece dibujado un salón rectangular de 13,5 centímetros cuadrados de área. Si la escala del plano es de 1:150, ¿cuál es el área real del salón?

Escala 1:150. Razón $= 150 : 1 = 150$ Área real $= (150)^2 \cdot 13{,}5 = 22\,500 \cdot 13{,}5 = 303\,750$ cm^2 $= 30{,}375$ m^2

5.41 A la misma hora del día, se miden las sombras que proyectan la torre del reloj y el obelisco de una plaza. Halla la altura de la torre del reloj.



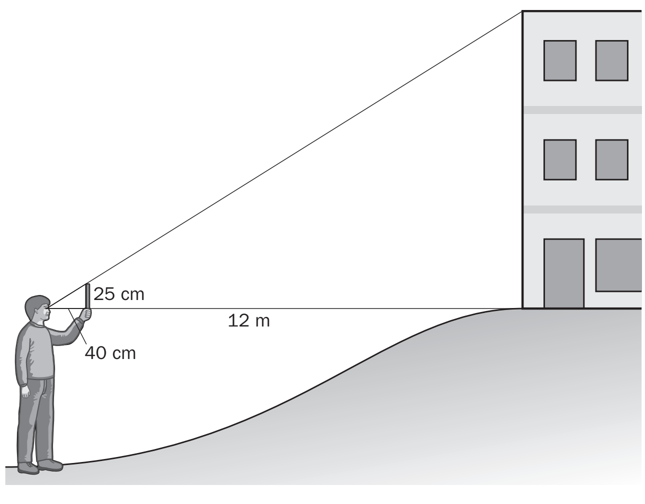
Triángulos semejantes $\rightarrow$ lados proporcionales

Razón $= \dfrac{12}{2} = 6 \Rightarrow$ Altura de la torre $= 6 \cdot$ altura del obelisco $=$
$= 6 \cdot 5 = 30$ m

5.42 Las alturas de Mónica y su madre en una fotografía, cuya escala es de 1:75, son 2,08 y 2,2 centímetros respectivamente.
Si encargan una ampliación que aumenta el tamaño de la fotografía en un 25%, ¿cuánto medirán las dos en ella? ¿Cuál será la escala?

Altura de Mónica en la ampliación: $2{,}08 \cdot 1{,}25 = 2{,}6$ cm
Altura de la madre en la ampliación: $2{,}2 \cdot 1{,}25 = 2{,}75$ cm
Escala de la ampliación: $\dfrac{75}{1{,}25} = 60 \Rightarrow 1:60$

5.43 Para realizar prácticas de óptica, un estudiante que mide 1,70 metros situado a 12 metros de un edificio, coloca frente a sus ojos una regla vertical de 25 centímetros con la que oculta exactamente la altura del mismo.
Si la distancia del ojo a la regla es de 40 centímetros, calcula la altura del edificio.



Triángulos semejantes $\Rightarrow$ alturas proporcionales

12 m = 1200 cm

Razón $= 1200 : 40 = 30$

Altura $= 25 \times 30 = 750$ cm $= 7{,}5$ m

Altura del edificio $= 7{,}5 + 1{,}7 = 9{,}2$ m

5.44 Los servicios de protección contra incendios de una comarca española emiten un informe sobre el número de hectáreas quemadas en el último incendio.
En su mapa de escala 1:60 000, la zona afectada tiene una superficie de 8 decímetros cuadrados. ¿Cuál es el resultado del informe?

$$\text{Razón} = \frac{60\,000}{1} = 60\,000$$

$$\text{Área real} = (60\,000)^2 \cdot 8 = 28\,800\,000\,000 \text{ cm}^2 = 288\,000\,000 \text{ m}^2 = 288 \text{ km}^2$$

5.45 Un arquitecto construye una maqueta de un centro de exposiciones cuya planta es un rectángulo de 90 × 50 centímetros y cuyo volumen es de 350 000 centímetros cúbicos.
Si la escala de la maqueta es de 1:150, calcula las dimensiones reales de la planta y el volumen del edificio.

Razón = 150
Largo de la planta real = 90 · 150 = 13 500 cm = 135 m
Ancho de la planta real = 50 · 150 = 7500 cm = 75 m
Volumen real del edificio = $(150)^3 \cdot 0{,}35 \text{ m}^3 = 1\,181\,250 \text{ m}^3$

5.46 Un estudiante de la Facultad de Bellas Artes desea trabajar en una figura a escala del *David* de Miguel Ángel cuya altura sea de 60 centímetros.
Si el auténtico *David* mide 4,34 metros de altura y tiene un volumen de 1,2 metros cúbicos, ¿cuál será el volumen de la escultura esculpida por el estudiante?

$$\text{Razón} = \frac{60}{434}$$

$$\text{Volumen de la figura} = \left(\frac{60}{434}\right)^3 \cdot 1{,}2 = 0{,}003 \text{ m}^3 = 3 \text{ dm}^3$$

5.47 Una tienda de fotografía ofrece varios tamaños, en centímetros, para positivar el negativo de las diapositivas.

9 × 12 12 × 15 14 × 18 20 × 30

¿En cuál de ellos se pierde menos contenido de la diapositiva si su tamaño es de 25 × 38 milímetros?

Si las dimensiones de los formatos no son semejantes a las de la diapositiva, siempre se perderá algo de la imagen. El formato que más se asemeje a la razón entre dimensiones será el que más aproveche la imagen.

$$\frac{25}{38} = 0{,}66$$

$$\frac{9}{12} = 0{,}75 \qquad \frac{12}{15} = 0{,}8 \qquad \frac{14}{18} = 0{,}78 \qquad \frac{20}{30} = 0{,}67$$

Con lo cual, el formato de 20 × 30 es el que más aprovecha el tamaño de la imagen retratada.

5.48 Se quiere construir una cometa utilizando trozos de tela con forma de triángulo rectángulo de colores distintos. Para ello se cortan los triángulos por la altura sobre la hipotenusa, de forma que esta se divide en dos segmentos de 30 y 50 centímetros, respectivamente. ¿Qué área deben tener los triángulos originales?

$$h^2 = 30 \cdot 50 = 1500 \Rightarrow h = \sqrt{1500} = 10\sqrt{15} \Rightarrow A = \frac{(30 + 50) \cdot 10\sqrt{15}}{2} = 400\sqrt{15} \text{ cm}^2$$

5.49 Tres amigos están situados en línea recta pegados a la pared de la casa de una amiga que les habla desde una ventana.
Uno de ellos se encuentra bajo la ventana, y los otros dos, a 5 y 3 metros a su izquierda y su derecha, respectivamente.
Si la chica observa a los de los extremos bajo un ángulo de 90º, ¿a qué altura está la ventana desde la que les habla?

$h^2 = 5 \cdot 3 = 15 \Rightarrow h = \sqrt{15}$ m es la distancia del amigo de en medio a la ventana.

Semejanza. Criterios de semejanza

5.50 Si la distancia entre dos ciudades es de 650 kilómetros, al medir en un mapa a escala 1:300 000, ¿qué distancia se obtiene?

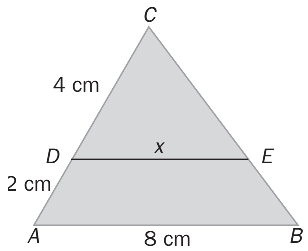
En la realidad: 650 km = 65 000 000 cm

En el mapa: 65 000 000 : 300 000 = 216,67 cm

5.51 La razón de las áreas de dos hexágonos regulares es $\frac{49}{36}$. Si el lado de uno de ellos mide 18 centímetros, ¿cuál es el perímetro del otro?

$$\frac{A'}{A} = k^2 = \frac{49}{36} \Rightarrow k = \frac{7}{6} \Rightarrow l' = l \cdot k = 18 \cdot \frac{7}{6} = 21 \text{ cm} \Rightarrow p' = 21 \cdot 6 = 126 \text{ cm}$$

5.52 Halla el valor de *x* sabiendo que los lados *AB* y *DE* son paralelos.

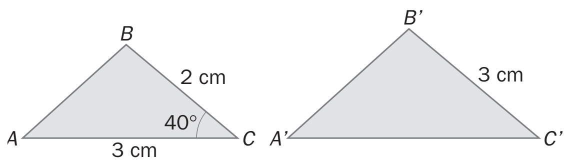


Por Tales sabemos que *CDE* y *CAB* son semejantes.

Razón $= \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

$\frac{3}{2}x = 8 \Rightarrow x = \frac{16}{3} = 5{,}33$ cm

5.53 Considera los triángulos *ABC* y *A′B′C′*. ¿Cuánto deben medir el lado *A′C′* y el ángulo $\widehat{C}'$ para que sean dos triángulos semejantes? ¿Qué criterio de semejanza utilizas?

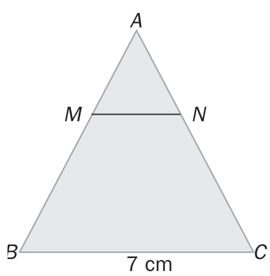


Si queremos que sean semejantes, el ángulo $\widehat{C}'$ debe valer 40º para ser igual al ángulo $\widehat{C}$, y los lados que forman dichos ángulos deben ser proporcionales:

$$k = \frac{\frac{8}{5}}{2} = \frac{4}{5} \Rightarrow A'C' = 3 \cdot \frac{4}{5} = \frac{12}{5} = 2{,}4 \text{ cm}$$

Consecuencias de los criterios de semejanza

5.54 Si *M* y *N* son los puntos medios de los lados *AB* y *AC*, ¿cuánto mide el segmento *MN*?



Por semejanza: $|MN| = \frac{1}{2}|BC| = \frac{1}{2}7 = \frac{7}{2} = 3{,}5$ cm

5.55 Los perímetros de dos triángulos isósceles son de 15 y 5 centímetros, respectivamente. ¿Cuál es la razón de semejanza?

Si el lado desigual del primero mide 3 centímetros, ¿cuánto miden los lados del segundo?

$$\frac{p'}{p} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

Lado desigual $= 3 \cdot \frac{1}{3} = 1$ cm

Lados iguales $= \frac{5-1}{2} = 2$ cm

5.56 Se realiza una fotocopia de un rectángulo de 8 centímetros de base y 6 de altura reduciendo su tamaño en un 25%. ¿Cuánto mide la diagonal del rectángulo fotocopiado?

Por el teorema de Pitágoras: $d = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10$ cm

Si se reduce un 25%, queda un 75%; entonces, $k = 0{,}75$.

$d' = d \cdot k = 10 \cdot 0{,}75 = 7{,}5$ cm

5.57 En un triángulo rectángulo, la altura sobre la hipotenusa la divide en dos segmentos que miden 4 y 16 centímetros, respectivamente. Halla el área de un triángulo semejante a él si la razón de semejanza es $k = \frac{1}{2}$.

Por el teorema de la altura: $h^2 = 4 \cdot 16 = 64 \Rightarrow h = \sqrt{64} = 8$ cm

$A = \dfrac{(4 + 16) \cdot 8}{2} = 80 \text{ cm}^2$

$\dfrac{A'}{A} = k^2 \Rightarrow A' = A \cdot k^2 = 80 \cdot \dfrac{1}{4} = 20 \text{ cm}^2$

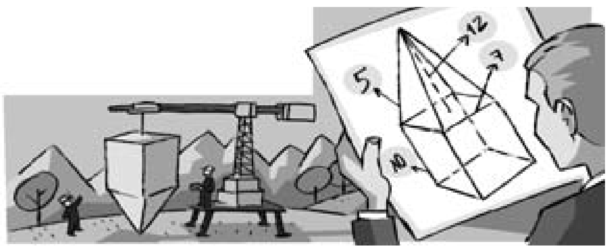
AMPLIACIÓN

5.58 Un alumno de 4.º de ESO necesita para la realización de un trabajo una copia reducida de un dibujo rectangular de 35 centímetros de alto y 15 de ancho.
¿Qué porcentaje de reducción tiene que aplicar para incluirlo en un hueco de 20 centímetros de alto?

Razón $= \dfrac{20}{35} = \dfrac{4}{7} < 0{,}58$ (se acota superiormente porque tiene que caber en el hueco)

Escala = 58% $\Rightarrow$ Tiene que reducirlo un 42%.

5.59 El Ayuntamiento de una ciudad tiene previsto construir una torre con las dimensiones del dibujo. Los profesionales que concursan para realizar el proyecto deben presentar una maqueta de 4,9 decímetros cúbicos. Calcula las dimensiones de la misma.



Volumen real $= 7 \cdot 5 \cdot 10 + \dfrac{7 \cdot 5 \cdot 12}{3} = 350 + 140 = 490 \text{ m}^3 = 490\,000 \text{ dm}^3$

Razón $= \sqrt[3]{\dfrac{4{,}9}{490\,000}} = \sqrt[3]{0{,}000\,01} = 0{,}02$

Dimensiones:

$12 \times 0{,}02 = 0{,}24$ m $= 2{,}4$ dm
$5 \times 0{,}02 = 0{,}1$ m $= 1$ dm
$7 \times 0{,}02 = 0{,}14$ m $= 1{,}4$ dm
$10 \times 0{,}02 = 0{,}2$ m $= 2$ dm

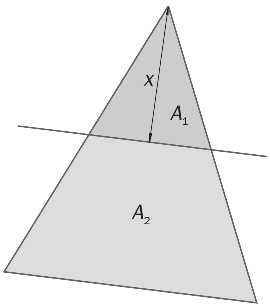
5.60 La diagonal de una pista deportiva rectangular mide 13 metros y la razón entre sus lados es 2,4.
Existe otra pista semejante con perímetro de 102 metros. ¿Cuánto mide su diagonal?

$\dfrac{b}{a} = 2{,}4 \Rightarrow b = 2{,}4a$

$x + x + 2{,}4x + 2{,}4x = 102 \Rightarrow 6{,}8x = 102 \Rightarrow x = 15 \text{ m} \Rightarrow 2{,}4x = 36$ m

Diagonal $= \sqrt{36^2 + 15^2} = 39$ m

5.61 **La altura del triángulo mayor de la figura es de 8 centímetros, y las bases de ambos son paralelas. Calcula el valor de x para que las áreas A_1 y A_2 sean iguales.**



En la figura se generan dos triángulos semejantes. Razón $= \frac{8}{x} b_2 = \frac{8}{x} b_1$

Área del triángulo pequeño $= \frac{b_1 \cdot x}{2}$

Área del triángulo grande $= \frac{b_2 \cdot 8}{2} = 4b_2$

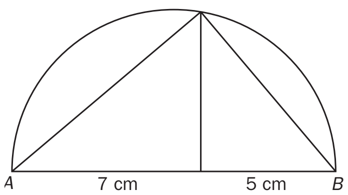
Área del trapecio $= \frac{(b_1 + b_2) \cdot (8 - x)}{2}$

Área del triángulo pequeño = área del trapecio

$$\frac{b_1 \cdot x}{2} = \frac{(b_1 + b_2) \cdot (8 - x)}{2} \Rightarrow b_1 \cdot x = \left(b_1 + \frac{8}{x} b_1\right)(8 - x) \Rightarrow x = \left(1 + \frac{8}{x}\right)(8 - x) \Rightarrow x = \frac{(x + 8)(8 - x)}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = 64 - x^2 \Rightarrow 2x^2 = 64 \Rightarrow x = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \text{ cm}$$

5.62 **Dibuja un cuadrado que tenga la misma área que un rectángulo cuyos lados miden 5 y 7 centímetros. Utiliza el teorema de la altura.**



$A_{\text{rectángulo}} = 5 \cdot 7 = 35 \text{ cm}^2 \qquad A_{\text{cuadrado}} = 35 \text{ cm}^2 \Rightarrow \text{lado} = \sqrt{35} \text{ cm}$

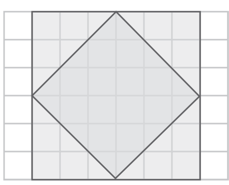
Para dibujar el lado $\sqrt{35}$ cm dibujamos un segmento AB de medida $5 + 7 = 12$ cm; con centro en el punto medio del segmento trazamos una semicircunferencia de radio 6 cm. A 7 cm de A trazamos una perpendicular a AB que se corte con la semicircunferencia. Este nuevo segmento será la altura del triángulo ABC. Además, por el teorema de la altura sabemos que $h^2 = 5 \cdot 7$; $h = \sqrt{35}$ cm = $\text{lado}_{\text{cuadrado}}$. Tomando esa medida con el compás podremos dibujar el cuadrado pedido.

PARA INTERPRETAR Y RESOLVER

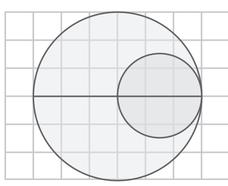
5.63 **Figuras semejantes**

Determina si la figura interior es semejante a la exterior y calcula, si es posible, la razón de semejanza, la de los perímetros y la de las áreas.

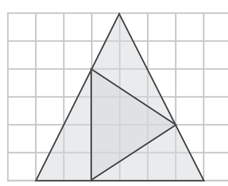
a)



b)



c)



a) Para los cuadrados

El lado del cuadrado menor es:

$$\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

La razón entre los perímetros es $\frac{7}{5}$.

La razón entre las áreas es $\frac{49}{25}$.

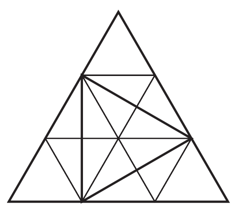
b) Para las circunferencias

La razón entre los perímetros es:

$$\frac{3}{1{,}5} = 2 \,.$$

La razón entre las áreas es $2^2 = 4$.

c) Para los triángulos



La razón entre las áreas es:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{18}{6} = 3$$

La razón entre los perímetros será $\sqrt{3}$.

5.64 Latas de diseño

Una conocida marca de refrescos ha diseñado una nueva forma de recipientes para su producto estrella. Las capacidades son de $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{2}$ de litro, respectivamente, y el diseño es el mismo para los dos, es decir, las latas son semejantes.

a) Calcula la altura de la lata grande sabiendo que la de la pequeña es de 12 centímetros.

b) Halla la superficie de la base de la lata pequeña sabiendo que la de la grande es de 75 centímetros cuadrados.

La razón de los volúmenes es: $\dfrac{V'}{V} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} = \dfrac{3}{2} = 1{,}5$

La razón de las medidas lineales será: $\dfrac{L'}{L} = \sqrt[3]{1{,}5} = 1{,}14$

La razón de las áreas será: $\dfrac{A'}{A} = \left(\sqrt[3]{1{,}5}\right)^2 = 1{,}30$

a) Si la altura de la lata menor es de 12 cm, la de la mayor será $h' = 12 \cdot 1{,}14 = 13{,}68$ cm.

b) Si la superficie de la base de la lata mayor es de 75 cm², la de la menor será $A = \dfrac{75}{1{,}3} = 57{,}69$ cm².

AUTOEVALUACIÓN

5.A1 Indica cuáles de los siguientes pares de triángulos son semejantes y, en ese caso, calcula la razón de semejanza de sus lados.

a) 3, 4, 5 y 4,5; 6; 7,5 cm

b) 2, 5, 6 y 4, 10, 11 cm

c) 5, 12, 13 y 12,5; 30; 32,5 cm

d) 4, 7, 10 y 2,4; 4,2; 6 cm

a) Sí $\Rightarrow k = \dfrac{3}{2}$ b) No c) Sí $\Rightarrow k = \dfrac{5}{2}$ d) Sí $\Rightarrow k = \dfrac{3}{5}$

5.A2 Si ambas figuras son semejantes, calcula el área de *A* sabiendo que la de *B* es de 43 unidades cuadradas.

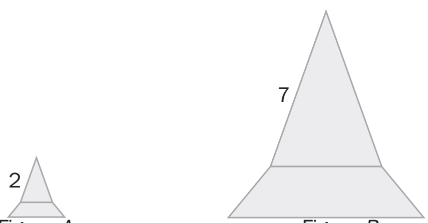


Figura *A* Figura *B*

Razón $= \dfrac{2}{7}$

$$A = \left(\frac{2}{7}\right)^2 \cdot 43 = \frac{4}{49} \cdot 43 = \frac{172}{49} = 3{,}51 \text{ u}^2$$

5.A3 Me han regalado una reproducción de la torre Eiffel a escala 1:4000 que mide 8 centímetros. ¿Cuál es la altura real del monumento?

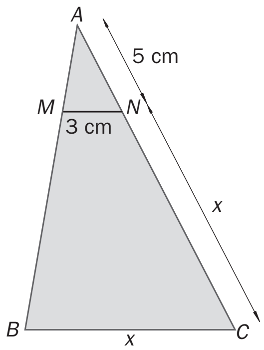
$8 \cdot 4000 = 32\,000$ cm $= 320$ m

5.A4 Los catetos de un triángulo rectángulo miden 3 y 4 centímetros, respectivamente. Se quiere dibujar otro triángulo rectángulo semejante de modo que el cateto menor mida 6 centímetros. ¿Cuánto debe medir el otro cateto?

Ya que los triángulos están en posición de Tales, son semejantes y, por tanto, sus lados son proporcionales:

$k = \dfrac{6}{3} = 2 \Rightarrow b = 4 \cdot 2 = 8$ cm

5.A5 **Considera los triángulos de la figura.**



a) ¿Cómo deben ser los lados *MN* y *BC* para que los triángulos *AMN* y *ABC* sean semejantes?

b) Halla el valor de *x*.

a) Deben ser paralelos.

b) $\frac{x+5}{5} = \frac{x}{3} \Rightarrow 3 \cdot (x+5) = 5x \Rightarrow 15 = 2x \Rightarrow x = \frac{15}{2} = 7{,}5$ cm

5.A6 **Calcula el perímetro de un rombo semejante a otro, cuyas diagonales miden 24 y 16 centímetros, si la razón de sus áreas es $k = \frac{1}{16}$.**

Por el teorema de Pitágoras:

$12^2 + 8^2 = l^2 \Rightarrow l = \sqrt{208} = 4\sqrt{13} \Rightarrow p = 4 \cdot l = 16\sqrt{13}$ cm

$\frac{A'}{A} = \frac{1}{16} = k^2 \Rightarrow k = \frac{1}{4}$

$\frac{p'}{p} = k \Rightarrow p' = k \cdot p = \frac{1}{4} \cdot 16\sqrt{13} = 4\sqrt{13}$ cm

5.A7 **En un triángulo rectángulo, la altura sobre la hipotenusa la divide en dos segmentos que miden 2 y 18 centímetros, respectivamente.**
Calcula el área de un triángulo rectángulo semejante con razón de semejanza $k = \frac{3}{2}$.

Por el teorema de la altura:

$h^2 = 18 \cdot 2 = 36 \Rightarrow h = \sqrt{36} = 6$ cm

$h' = h \cdot k = 6 \cdot \frac{3}{2} = 9$ cm

$b' = b \cdot k = 20 \cdot \frac{3}{2} = 30$ cm

$A = \frac{b' \cdot h'}{2} = \frac{30 \cdot 9}{2} = 135$ cm^2

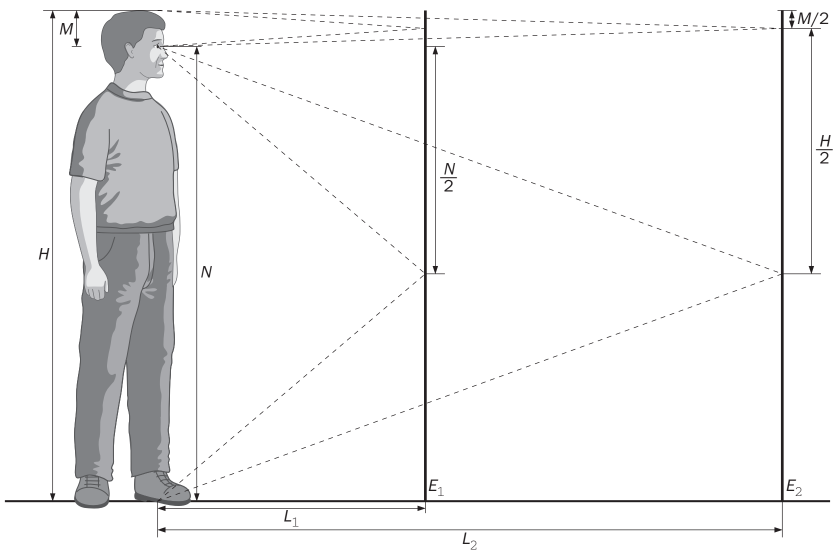
M U R A L D E M A T E M Á T I C A S

M A T E T I E M P O S

El espejo

¿Qué dimensiones debe tener un espejo para que puedas verte en él a ti mismo por completo?

Cuando se plantea el problema las primeras ideas que se dan son que depende de la distancia a que esté el espejo o que el mismo tamaño que la persona. Haciendo un análisis más profundo se comprueba que ambas conjeturas son erróneas.
Plantearemos el siguiente gráfico:



Podemos observar que el tamaño del espejo debe ser la mitad de la persona que mira y es independiente de la distancia a la que se lo coloque.

EJERCICIOS PROPUESTOS

3.1 Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $\frac{x}{4}+\frac{x}{6}=20$

b) $\left(\frac{x}{4}-1\right)\frac{2}{3}-\frac{x-1}{2}=2x$

c) $\frac{2x+3}{3}+\frac{7x-5}{4}=7$

d) $1-\frac{2(x-1)}{5}=\frac{3(2-x)}{2}$

a) $\frac{x}{4}+\frac{x}{6}=20$

M.c.m. de los denominadores 4 y 6: 12

Se multiplica la ecuación por 12: $3x+2x=240$

Se reducen términos semejantes: $5x=240$

Se divide por 5: $x=48$.

b) $\left(\frac{x}{4}-1\right)\frac{2}{3}-\frac{x-1}{2}=2x \Rightarrow \frac{x-4}{4}\cdot\frac{2}{3}-\frac{x-1}{2}=2x$

Se simplifica: $\frac{x-4}{2}\cdot\frac{1}{3}-\frac{x-1}{2}=2x \Rightarrow \frac{x-4}{6}-\frac{x-1}{2}=2x$

Se multiplican por 6 la ecuación: $x-4-3x+3=12x$

Se reducen términos semejantes: $-1=14x$

Se divide por 14: $x=-\frac{1}{14}$

c) $\frac{2x+3}{3}+\frac{7x-5}{4}=7$

M.c.m. los denominadores 3 y 4: 12

Se multiplican la ecuación: $8x+12+21x-15=84$

Se reducen términos semejantes: $29x=87$

Solución: $x=3$

d) $1-\frac{2(x-1)}{5}=\frac{3(2-x)}{2}$

$1-\frac{2x-2}{5}=\frac{6-3x}{2} \Rightarrow 10-4x+4=30-15x \Rightarrow 11x=16 \Rightarrow x=\frac{16}{11}$

3.2 Calcula la solución de estas ecuaciones.

a) $x^2-10x+24=3$

b) $5x^2-9x+4=0$

c) $-x^2+2x=0$

d) $x(2x-5)=6-x$

e) $2x-6=2x(x+2)$

f) $x^2-9=-2x^2$

a) $x^2-10x+24=3 \Rightarrow x^2-10x+21=0 \qquad x=\frac{10\pm\sqrt{(-10)^2-4\cdot1\cdot21}}{2\cdot1}=\frac{10\pm\sqrt{16}}{2}=\frac{10\pm4}{2}=\left\langle\begin{array}{l}7\\3\end{array}\right.$

b) $5x^2-9x+4=0 \qquad x=\frac{9\pm\sqrt{(-9)^2-4\cdot5\cdot4}}{2\cdot5}=\frac{9\pm1}{10}=\left\langle\begin{array}{l}1\\ \frac{8}{10}=\frac{4}{5}\end{array}\right.$

c) $-x^2+2x=0 \Rightarrow x(-x+2)=0$; $x=0$ ó $x=2$

d) $x(2x-5)=6-x \Rightarrow 2x^2-5x=6-x \Rightarrow 2x^2-4x-6=0 \Rightarrow x^2-2x-3=0$

$x=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot1\cdot(-3)}}{2}=\frac{2\pm4}{2}=\left\langle\begin{array}{l}3\\-1\end{array}\right.$

e) $2x-6=2x(x+2) \Rightarrow 2x-6=2x^2+4x \Rightarrow 2x^2+2x+6=0 \Rightarrow x^2+x+3=0$

$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot1\cdot3}}{2\cdot1}=\frac{1\pm\sqrt{-11}}{2}$ No tiene solución.

f) $x^2-9=-2x^2 \Rightarrow 3x^2=9 \Rightarrow x^2=3 \Rightarrow x=\pm\sqrt{3}$

3.3 Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

b) $x^6 - 10x^3 + 9 = 0$

c) $x^4 - 26x^2 = -25$

d) $x^6 - 64x^3 = 0$

e) $4x^2 + 8x = 0$

f) $3x^3 - 12x^2 + 12x = 0$

a) $x^2 = z;\ x^4 = z^2 \Rightarrow z^2 - 5z + 4 = 0$

$$z = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 3}{2} = \left\langle \begin{array}{l} 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \\ 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \end{array} \right.$$

b) $x^3 = z;\ x^6 = z^2;\ z^2 - 10z + 9 = 0$

$$z = \frac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1} = \frac{10 \pm 8}{2} = \left\langle \begin{array}{l} 9 \Rightarrow x^3 = 9 \Rightarrow x = \sqrt[3]{9} \\ 1 \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow x = 1 \end{array} \right.$$

c) $x^2 = z \Rightarrow x^4 = z^2;\ z^2 - 26z + 25 = 0$

$$z = \frac{26 \pm \sqrt{(-26)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25}}{2 \cdot 1} = \frac{26 \pm 24}{2} = \left\langle \begin{array}{l} 25 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = \pm 5 \\ 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \end{array} \right.$$

d) $x^3(x^3 - 64) = 0 \Rightarrow\ x^3 = 0 \Rightarrow\ x = 0$ ó $x^3 = 64 \Rightarrow\ x = 4$

e) $4x(x + 2) = 0 \Rightarrow\ x = 0$ ó $x = -2$

f) $3x(x^2 - 4x + 4) = 0 \Rightarrow x = 0$ ó $x = \dfrac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \dfrac{4 \pm 0}{2} = 2 \Rightarrow$ Raíz doble

3.4 Halla las soluciones de estas ecuaciones.

a) $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$

b) $x^3 - 6x^2 + 3x + 10 = 0$

a)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & & 1 & 3 & 2 \\ \hline & 1 & 3 & 2 & 0 \end{array}$$

$P(x) = (x - 1)(x^2 + 3x + 2)$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm 1}{2} = \left\langle \begin{array}{l} -1 \\ -2 \end{array} \right.$$

Soluciones: $x = 1$, $x = -1$ y $x = -2$

b)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -6 & 3 & 10 \\ -1 & & -1 & 7 & -10 \\ \hline & 1 & -7 & 10 & 0 \end{array}$$

$P(x) = (x + 1)(x^2 - 7x + 10)$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10}}{2 \cdot 1} = \frac{7 \pm 3}{2} = \left\langle \begin{array}{l} 5 \\ 2 \end{array} \right.$$

Soluciones: $x = -1$, $x = 2$ y $x = 5$

3.5 Encuentra las soluciones de las siguientes ecuaciones racionales.

a) $\dfrac{2}{x} - \dfrac{2 - x}{x + 3} = 1$

b) $\dfrac{x}{x + 1} + \dfrac{2}{x + 2} = 3$

a) $\dfrac{2(x + 3)}{x(x + 3)} - \dfrac{(2 - x)x}{x(x + 3)} = \dfrac{x(x + 3)}{x(x + 3)} \Rightarrow 2x + 6 - 2x + x^2 = x^2 + 3x \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 2$

b) $\dfrac{x(x + 2)}{(x + 1)(x + 2)} + \dfrac{2(x + 1)}{(x + 1)(x + 2)} = \dfrac{3(x + 1)(x - 2)}{(x + 1)(x + 2)} \Rightarrow x^2 + 2x + 2x + 2 = 3x^2 + 9x + 6 \Rightarrow 2x^2 + 5x + 4 = 0$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 \pm \sqrt{-7}}{4} \Rightarrow \text{No existe solución.}$$

3.6 **Resuelve estas ecuaciones radicales.**

a) $\sqrt{x^2 + 5x + 1} = x + 2$

b) $\sqrt{40 - x^2} + 4 = x$

c) $\sqrt{2x - 1} + \sqrt{x + 4} = 6$

d) $\sqrt{6 + x} + 2x = -2$

a) $\left(\sqrt{x^2 + 5x + 1}\right)^2 = (x + 2)^2 \Rightarrow x^2 + 5x + 1 = x^2 + 4x + 4 \Rightarrow x = 3$

Comprobación: $\sqrt{3^2 + 5 \cdot 3 + 1} = 3 + 2$

b) $\left(\sqrt{40 - x^2}\right)^2 = (x - 4)^2 \Rightarrow 40 - x^2 = x^2 - 8x + 16 \Rightarrow 2x^2 - 8x - 24 = 0$

$$x^2 - 4x - 12 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 8}{2} = \left\langle \begin{array}{l} 6 \\ -2 \end{array} \right.$$

Comprobación: $x = 6 \Rightarrow \sqrt{40 - 6^2} + 4 = 6 \Rightarrow$ Sí es correcto.

$x = -2 \Rightarrow \sqrt{40 - (-2)^2} + 4 \neq -2 \Rightarrow$ No es correcto.

c) $\left(\sqrt{2x - 1}\right)^2 = \left(6 - \sqrt{x + 4}\right)^2 \Rightarrow 2x - 1 = 36 - 12\sqrt{x + 4} + x + 4 \Rightarrow \left(12\sqrt{x + 4}\right)^2 = (41 - x)^2$

$144(x + 4) = 1681 - 82x + x^2 \Rightarrow 144x + 576 = 1681 - 82x + x^2 \Rightarrow x^2 - 226x + 1105 = 0$

$$x = \frac{226 \pm \sqrt{(-226)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1105}}{2 \cdot 1} = \frac{226 \pm 216}{2} = \left\langle \begin{array}{l} 221 \\ 5 \end{array} \right.$$

Comprobación: $x = 5 \Rightarrow \sqrt{2 \cdot 5 - 1} + \sqrt{5 + 4} = 6 \Rightarrow$ Sí es correcto.

$x = 221 \Rightarrow \sqrt{2 \cdot 221 - 1} + \sqrt{221 + 4} = 21 + 15 \neq 6 \Rightarrow$ No es correcto.

d) $\left(\sqrt{6 + x}\right)^2 = (-2 - 2x)^2 \Rightarrow 6 + x = 4 + 8x + 4x^2 \Rightarrow 4x^2 + 7x - 2 = 0$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-2)}}{2 \cdot 4} = \frac{-7 \pm 9}{8} = \left\langle \begin{array}{l} \frac{1}{4} \\ -2 \end{array} \right.$$

Comprobación: $x = \frac{1}{4} \Rightarrow \sqrt{6 + \frac{1}{4}} + 2\frac{1}{4} = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3 \Rightarrow$ No es correcto.

$x = -2 \Rightarrow \sqrt{6 - 2} + 2(-2) = 2 - 4 = -2 \Rightarrow$ Sí es correcto.

3.7 **Resuelve las siguientes ecuaciones.**

a) $2 \log_2 x = 10$

b) $\log_x 625 = 4$

c) $3 \log x = -6$

d) $\ln(3 - x) = 0$

a) $2 \log_2 x = 10 \Rightarrow \log_2 x = 5 \Rightarrow x = 2^5 \Rightarrow x = 32$

b) $\log_x 625 = 4 \Rightarrow x^4 = 625$, luego $x = 5$

c) $3 \log x = -6 \Rightarrow \log x = -2 \Rightarrow x = 10^{-2} \Rightarrow x = 0{,}01$

d) $\ln(3 - x) = 0 \Rightarrow 3 - x = 1 \Rightarrow x = 2$

3.8 **Encuentra la solución de estas ecuaciones.**

a) $\log x + \log 50 = 4$

b) $\log x + \log 100 = 0$

c) $\log x^3 - 2 \log x = \log 10$

d) $\log 3x - 1 = 0$

a) $\log 50x = 4 \Rightarrow 50x = 10^4 \Rightarrow 50x = 10\,000 \Rightarrow x = 200$

b) $\log x + \log 100 = 0 \Rightarrow \log x = -\log 100 \Rightarrow \log x = -2 \Rightarrow x = 10^{-2} \Rightarrow x = 0{,}01$

c) $\log x^3 - 2 \log x = \log 10 \Rightarrow \log \frac{x^3}{x^2} = \log 10 \Rightarrow \log x = \log 10$; luego $x = 10$

d) $\log 3x = 1 \Rightarrow 10 = 3x \Rightarrow x = \frac{10}{3}$

3.9 ¿Es correcto el proceso de resolución de estas ecuaciones? En caso contrario, indica el error.

a) $\log(x+1) - \log 2 = \log x \Rightarrow \log\left(\dfrac{x+1}{2}\right) = \log x \Rightarrow \left(\dfrac{x+1}{2}\right) = x \Rightarrow x+1 = 2x \Rightarrow x = 1$

b) $\log(x-2) \cdot \log 2 = \log x \Rightarrow \log(x-2)^2 = \log x \Rightarrow (x-2)^2 = x \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow x = 4, x = 1$

a) Correcto.

b) Error: $\log(x-2) \cdot \log 2 \neq \log(x-2)^2$

3.10 Encuentra la solución de estas ecuaciones.

a) $4 \cdot 5^x = 500$

b) $5 \cdot 5^{2x} = 2500$

c) $6^{2x+2} = 46\,656$

d) $7 \cdot 3^{x-1} = 567$

a) $4 \cdot 5^x = 500 \Leftrightarrow 5^x = 125 \Leftrightarrow 5^x = 5^3 \Leftrightarrow x = 3$

b) $5 \cdot 5^{2x} = 2500 \Leftrightarrow 5^{2x} = 500 \Leftrightarrow \log_5(5^{2x}) = \log_5 500 \Leftrightarrow 2x = \log_5 500 \Leftrightarrow x = \dfrac{\log 500}{2 \cdot \log 5}$

c) $6^{2x+2} = 46\,656 \Leftrightarrow 6^{2x+2} = 6^6 \Leftrightarrow 2x + 2 = 6 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2$

d) $7 \cdot 3^{x-1} = 567 \Leftrightarrow 3^{x-1} = 81 \Leftrightarrow 3^{x-1} = 3^4 \Leftrightarrow x - 1 = 4 \Leftrightarrow x = 5$

3.11 Resuelve estas ecuaciones exponenciales.

a) $2^x + 2^{x+1} = 384$

b) $5^x + 5^{x+1} + 5^{x+2} = 775$

c) $9^x - 10 \cdot 3^{x+1} + 81 = 0$

d) $4^x - 9 \cdot 2^x = -20$

a) $2^x + 2 \cdot 2^x = 3 \cdot 2^7 \Leftrightarrow (1+2)2^x = 3 \cdot 2^7 \Leftrightarrow 2^x = 2^7 \Leftrightarrow x = 7$

b) $5^x + 5 \cdot 5^x + 25 \cdot 5^x = 775 \Leftrightarrow (1 + 5 + 25) \cdot 5^x = 775 \Leftrightarrow 31 \cdot 5^x = 775 \Leftrightarrow 5^x = 25 \Leftrightarrow x = 2$

c) $(3^x)^2 - 10 \cdot 3 \cdot 3^x + 81 = 0$; Llamamos $3^x = u \Leftrightarrow u^2 - 30u + 81 = 0$

$$\Leftrightarrow u = \frac{30 \pm \sqrt{(-30)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 81}}{2 \cdot 1} = \frac{30 \pm 24}{2} = \begin{cases} 27 \Leftrightarrow 3^x = 27 \Leftrightarrow 3^x = 3^3 \Leftrightarrow x = 3 \\ 3 \Leftrightarrow 3^x = 3 \Leftrightarrow 3^x = 3^1 \Leftrightarrow x = 1 \end{cases}$$

d) $(2^x)^2 - 9 \cdot 2^x = -20$; Llamamos $2^x = u \Leftrightarrow u^2 - 9u + 20 = 0$

$$\Leftrightarrow u = \frac{9 \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 20}}{2 \cdot 1} = \frac{9 \pm 1}{2} = \begin{cases} 5 \Leftrightarrow 2^x = 5 \Leftrightarrow \log_2(2^x) = \log_2 5 \Leftrightarrow x = \dfrac{\log 5}{\log 2} \\ 4 \Leftrightarrow 2^x = 4 \Leftrightarrow 2^x = 2^2 \Leftrightarrow x = 2 \end{cases}$$

3.12 Resuelve estos sistemas de ecuaciones lineales.

a) $\begin{cases} \dfrac{3x}{4} + \dfrac{2y}{3} = 5 \\ \dfrac{x}{2} + y = 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2(2x - 1) + 9 = 8 - 3y \\ 6x - y = 7 \end{cases}$

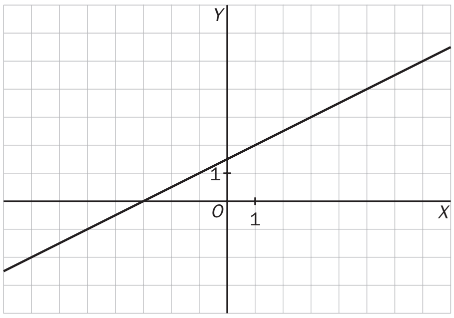
a) $\begin{cases} 9x + 8y = 60 \\ x + 2y = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9x + 8y = 60 \\ 4x + 8y = 40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x = 20 \Rightarrow x = 4 \\ 2y = 6 \Rightarrow y = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x - 2 + 9 = 8 - 3y \\ 6x - y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x + 3y = 1 \\ 18x - 3y = 21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 22x = 22 \Rightarrow x = 1 \\ -y = 7 - 6 \Rightarrow y = -1 \end{cases}$

3.13 Indica de qué tipo son estos sistemas según el número de soluciones que tienen.

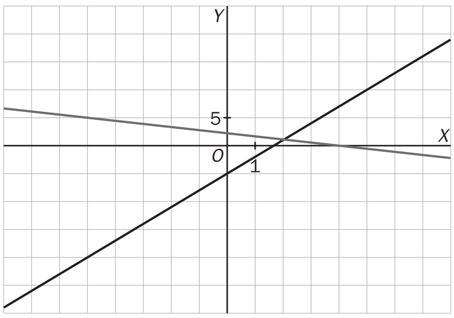
a) $\begin{cases} x - 2y + 3 = 0 \\ 3x + 9 = 6y \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x - 2y = -3 \\ 3x - 6y = -9 \end{cases}$



Las rectas coinciden en todos sus puntos; por tanto, el sistema tiene infinitas soluciones, es decir, es un sistema compatible indeterminado.

b) $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$



El sistema es compatible determinado. Tiene una única solución en el punto (2, 1).

3.14 Encuentra las soluciones de estos sistemas.

a) $\begin{cases} 2^x - 5^y = 3 \\ 4 \cdot 2^x - 5 \cdot 5^y = 7 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2^{x+1} - 3^{y+1} = -1 \\ 2^{x+1} + 8 \cdot 3^y = 32 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} \log x^3 + \log y = 6 \\ \log (xy) = 4 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} \log x^2 = 2 - 2\log y \\ \log\left(\dfrac{x}{y}\right) = -1 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 2^x - 5^y = 3 \\ 4 \cdot 2^x - 5 \cdot 5^y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^x = 3 + 5^y \\ 4 \cdot (3 + 5^y) - 5 \cdot 5^y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^x = 3 + 5^y \\ 12 + 4 \cdot 5^y - 5 \cdot 5^y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5^y = 5 \Rightarrow y = 1 \\ 2^x = 3 + 5 = 8 \Rightarrow x = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2^{x+1} - 3^{y+1} = -1 \\ 2^{x+1} + 8 \cdot 3^y = 32 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^{x+1} - 3 \cdot 3^y = -1 \\ 2^{x+1} + 8 \cdot 3^y = 32 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -11 \cdot 3^y = -33 \Rightarrow 3^y = 3 \Rightarrow y = 1 \\ 2^{x+1} - 9 = -1 \Rightarrow 2^{x+1} = 8 \Rightarrow x + 1 = 3 \Rightarrow x = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \log x^3 + \log y = 6 \\ \log (xy) = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log x^3 + \log y = 6 \\ \log x + \log y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log x^3 - \log x = 2 \Rightarrow \log \dfrac{x^3}{x} = 2 \Rightarrow \\ \log x^2 = 2 \Rightarrow 2\log x = 2 \Rightarrow \log x = 1 \Rightarrow x = 10 \\ \log y = 4 - \log 10 \Rightarrow \log y = 3 \Rightarrow y = 1000 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \log x^2 = 2 - 2\log y \\ \log\left(\dfrac{x}{y}\right) = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log x + \log y = 1 \\ \log x - \log y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\log x = 0 \Rightarrow x = 1 \\ 0 = 2 - 2\log y \Rightarrow \log y = 1 \Rightarrow y = 10 \end{cases}$

3.15 Resuelve estos sistemas.

a) $\begin{cases} x^2 - xy = 6 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} (x - y)^2 - xy = 6 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x^2 - y^2 = -1 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 1 \\ xy = 6 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x^2 - xy = 6 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - xy = 6 \\ x = -2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4y^2 + 2y^2 = 6 \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1 \\ x = \pm 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \quad y = -1 \\ x = -2 \quad y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x^2 - y^2 = -1 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \\ y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} (x - y)^2 - xy = 6 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \begin{cases} (x - 2x + 1)^2 - x(2x - 1) = 6 \\ y = 2x - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-x + 1)^2 - 2x^2 + x = 6 \Rightarrow \\ x^2 - 2x + 1 - 2x^2 + x = 6 \\ x^2 + x + 5 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2} \end{cases}$

No tiene solución.

d) $\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 1 \\ xy = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{36}{y^2} - 2y^2 = 1 \\ x = \dfrac{6}{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{36}{y^2} - \dfrac{2y^4}{y^2} = \dfrac{y^2}{y^2} \Rightarrow 2y^4 + y^2 - 36 = 0 \\ \text{Llamo } u = y^2 \; u^2 = y^4 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2u^2 + u - 36 = 0 \Rightarrow u = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-36)}}{2 \cdot 2} = \dfrac{-1 \pm 17}{4} = \left\langle \begin{array}{l} 4 \Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2 \\ \dfrac{-9}{2} \Rightarrow y^2 = \dfrac{-9}{2} \Rightarrow \text{No tiene solución.} \end{array} \right.$

$\Rightarrow y = 2 \quad x = 3$ ó $y = -2 \quad x = -3$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

3.16 La leche desnatada de una determinada marca contiene un 0,25% de materia grasa, y la leche entera, un 4%.
Calcula la cantidad que hay que mezclar de cada tipo para conseguir leche semidesnatada con un 1,5% de grasa.

Cantidad de leche desnatada: x

grasa $\dfrac{0{,}25x}{100}$

Cantidad de leche entera: y

grasa $\dfrac{4y}{100}$

$$\frac{0{,}25x}{100} + \frac{4y}{100} = \frac{1{,}5(x + y)}{100} \Rightarrow 0{,}25x + 4y = 1{,}5x + 1{,}5y \Rightarrow 2{,}5y = 1{,}25x \Rightarrow x = 2y$$

Doble cantidad de leche desnatada que de entera.

3.17 Un peluquero quiere conseguir una disolución de agua oxigenada al 6%. Dispone de dos botellas, una al 3% y otra al 33%. ¿Cómo debe realizar la mezcla para obtener la disolución que desea? ¿Qué cantidades necesita para lograr aproximadamente un litro?

Tipo I: x $\quad 0{,}03x + 0{,}33y = 0{,}06(x + y) \Rightarrow 0{,}03x + 0{,}33y = 0{,}06x + 0{,}06y$

Tipo II: y $\quad 0{,}27y = 0{,}03x \Rightarrow x = 9y$

Nueve partes de la primera agua oxigenada por cada parte de la segunda.

Para lograr un litro: 0,9 litros al 3% y 0,1 litros al 33%.

E J E R C I C I O S   P A R A   E N T R E N A R S E

Ecuaciones de primero y segundo grado

3.18 Resuelve estas ecuaciones lineales.

a) $-4x + 3 = 7x - 19$

b) $\dfrac{-3x}{4} + \dfrac{1}{2} = -5x + 26$

c) $-5(2x - 1) + 3x - 2 = -(6x - 4) + 7$

d) $\dfrac{4x - 3}{5x + 1} = \dfrac{9}{16}$

e) $\dfrac{x + 3}{6} + \dfrac{2x - 1}{3} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{x - 5}{12} - \dfrac{2}{3}$

f) $\dfrac{3(x - 2)}{5} + 2(-3x + 1) - \dfrac{2}{5} = \dfrac{-4x + 3}{15} + \dfrac{16}{3}$

a) $-4x + 3 = 7x - 19 \Rightarrow -11x = -22 \Rightarrow x = 2$

b) $\dfrac{-3x}{4} + \dfrac{1}{2} = -5x + 26 \Rightarrow -3x + 2 = -20x + 104 \Rightarrow 17x = 102 \Rightarrow x = 6$

c) $-5(2x - 1) + 3x - 2 = -(6x - 4) + 7 \Rightarrow -10x + 5 + 3x - 2 = -6x + 4 + 7 \Rightarrow x = -8$

d) $\dfrac{4x - 3}{5x + 1} = \dfrac{9}{16} \Rightarrow 16(4x - 3) = 9(5x + 1) \Rightarrow 64x - 48 = 45x + 9 \Rightarrow 19x = 57 \Rightarrow x = 3$

e) $\dfrac{x + 3}{6} + \dfrac{2x - 1}{3} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{x - 5}{12} - \dfrac{2}{3} \Rightarrow 2x + 6 + 8x - 4 + 3 = x - 5 - 8 \Rightarrow 9x = -18 \Rightarrow x = -2$

f) $\dfrac{3(x - 2)}{5} + 2(-3x + 1) - \dfrac{2}{5} = \dfrac{-4x + 3}{15} + \dfrac{16}{3}$

$9x - 18 - 90x + 30 - 6 = -4x + 3 + 80 \Rightarrow -77x = 77 \Rightarrow x = -1$

3.19 Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado con paréntesis y denominadores.

a) $3(2x - 5) + 8x - 6 = \dfrac{x}{2} - (5x + 3)$

b) $\dfrac{3(x + 3)}{2} - 2(2 - 3x) = 8x - 1 - 2(x + 3)$

c) $\dfrac{x - 4}{5} - 4(-2x + 1) - \dfrac{(-4x + 2)}{10} = 2(x - 3) + \dfrac{5x + 6}{2}$

d) $\dfrac{6 - 2(x - 3)}{7x} = \dfrac{8}{-4}$

a) $3(2x - 5) + 8x - 6 = \dfrac{x}{2} - (5x + 3) \Leftrightarrow 12x - 30 + 16x - 12 = x - 10x - 6 \Leftrightarrow 37x = 36 \Leftrightarrow x = \dfrac{36}{37}$

b) $\dfrac{3(x + 3)}{2} - 2(2 - 3x) = 8x - 1 - 2(x + 3) \Leftrightarrow 3x + 9 - 8 + 12x = 16x - 2 - 4x - 12 \Leftrightarrow 3x = -15 \Leftrightarrow x = -5$

c) $\dfrac{x - 4}{5} - 4(-2x + 1) - \dfrac{(-4x + 2)}{10} = 2(x - 3) + \dfrac{5x + 6}{2} \Leftrightarrow \dfrac{x - 4}{5} + 8x - 4 - \dfrac{-4x + 2}{10} = 2x - 6 + \dfrac{5x + 6}{2}$

$\Leftrightarrow 2x - 8 + 80x - 40 + 4x - 2 = 20x - 60 + 25x + 30 \Leftrightarrow 41x = 20 \Leftrightarrow x = \dfrac{20}{41}$

d) $\dfrac{6 - 2(x - 3)}{7x} = \dfrac{8}{-4} \Leftrightarrow 6 - 2x + 6 = -14x \Leftrightarrow 12x = -12 \Leftrightarrow x = -1$

3.20 Clasifica en tu cuaderno las siguientes ecuaciones de segundo grado según el número de soluciones distintas que tengan.

a) $5x^2 + 6x + 2 = 0$

b) $-3x^2 + 4x + 5 = 0$

c) $x^2 - 6x + 1 = 0$

d) $x^2 - 5 = 0$

I. 0 soluciones

II. 1 solución

III. 2 soluciones

a) $b^2 - 4ac = 36 - 4 \cdot 5 \cdot 2 < 0 \Rightarrow$ a) I

b) $b^2 - 4ac = 16 - 4 \cdot (-3) \cdot 5 > 0 \Rightarrow$ b) III

c) $b^2 - 4ac = 36 - 4 \cdot 1 \cdot 1 > 0 \Rightarrow$ c) III

d) $b^2 - 4ac = 0 - 4 \cdot (-5) \cdot 1 > 0 \Rightarrow$ d) III

3.21 Calcula la solución de las siguientes ecuaciones de segundo grado.

a) $6x^2 - 11x + 3 = 0$

b) $x^2 - 6x - 7 = 0$

c) $x^2 - 6x + 9 = 0$

d) $-2x^2 + 2x + 24 = 0$

e) $3x^2 + x + 5 = 0$

f) $4x^2 + 4x + 1 = 0$

a) $x = \dfrac{11 \pm \sqrt{(-11)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 6}}{2 \cdot 6} = \dfrac{11 \pm 7}{12} = \left\langle \begin{array}{l} \dfrac{18}{12} = \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3} \end{array} \right.$

b) $x = \dfrac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-7)}}{2 \cdot 1} = \dfrac{6 \pm 8}{2} = \left\langle \begin{array}{l} 7 \\ -1 \end{array} \right.$

c) $x = \dfrac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1} = \dfrac{6 \pm 0}{2} = 3 \Rightarrow$ Raíz doble.

d) $x^2 - x - 12 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)}}{2 \cdot 1} = \dfrac{1 \pm 7}{2} = \left\langle \begin{array}{l} 4 \\ -3 \end{array} \right.$

e) $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5}}{2 \cdot 3} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{-59}}{6} \Rightarrow$ No tiene solución.

f) $x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1}}{2 \cdot 4} = \dfrac{-4 \pm 0}{8} = \dfrac{-1}{2} \Rightarrow$ Raíz doble.

3.22 Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado utilizando un procedimiento diferente de la fórmula general.

a) $3x^2 - 27 = 0$

b) $x^2 + 2x + 1 = 0$

c) $-7x^2 + \dfrac{5}{2}x = 0$

d) $(x - 2)^2 - 25 = 0$

a) $3x^2 = 27 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$

b) $x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x + 1)^2 = 0 \Rightarrow x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow$ Raíz doble

c) $x\left(-7x + \dfrac{5}{2}\right) = 0 \Rightarrow x = 0$ ó $-7x + \dfrac{5}{2} = 0 \Rightarrow x = \dfrac{5}{14}$

d) $(x - 2)^2 = 25 \Rightarrow \begin{cases} x - 2 = 5 \Rightarrow x = 7 \\ x - 2 = -5 \Rightarrow x = -3 \end{cases}$

3.23 **Halla la solución de estas ecuaciones de segundo grado.**

a) $\dfrac{3x^2}{2} - \dfrac{4x-1}{4} = \dfrac{2x(x-3)}{6} + \dfrac{17}{12}$

b) $3x^2 - 4x + 5(x^2 - 2) = \dfrac{3x(x-2)}{2} + 14$

c) $6x^2 - 1 + \dfrac{2x(-x+3)}{3} = \dfrac{5x^2-2}{6} - 4x^2 + \dfrac{59}{6}$

d) $\dfrac{3(-x+2)}{5} + 4x\left(\dfrac{-2x+1}{3}\right) = x(-3x+1) - \dfrac{1}{2}$

e) $\dfrac{3x-1}{5} = \dfrac{13}{4x+5}$

a) $\dfrac{3x^2}{2} - \dfrac{4x-1}{4} = \dfrac{2x(x-3)}{6} + \dfrac{17}{12}$

$18x^2 - 12x + 3 = 4x^2 - 12x + 17 \Rightarrow 14x^2 = 14 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

b) $3x^2 - 4x + 5(x^2 - 2) = \dfrac{3x(x-2)}{2} + 14 \Rightarrow 6x^2 - 8x + 10x^2 - 20 = 3x^2 - 6x + 28 \Rightarrow 13x^2 - 2x - 48 = 0$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 13 \cdot (-48)}}{2 \cdot 13} = \frac{2 \pm 50}{26} = \left\langle \begin{array}{l} 2 \\ \dfrac{-48}{26} = \dfrac{-24}{13} \end{array} \right.$$

c) $6x^2 - 1 + \dfrac{2x(-x+3)}{3} = \dfrac{5x^2-2}{6} - 4x^2 + \dfrac{59}{6}$

$36x^2 - 6 - 4x^2 + 12x = 5x^2 - 2 - 24x^2 + 59 \Rightarrow 51x^2 + 12x - 63 = 0 \Rightarrow 17x^2 + 4x - 21 = 0$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 17 \cdot (-21)}}{2 \cdot 17} = \frac{-4 \pm 38}{34} = \left\langle \begin{array}{l} 1 \\ \dfrac{-42}{34} = \dfrac{-21}{17} \end{array} \right.$$

d) $\dfrac{3(-x+2)}{5} + 4x\left(\dfrac{-2x+1}{3}\right) = x(-3x+1) - \dfrac{1}{2}$

$-18x + 36 - 80x^2 + 40x = -90x^2 + 30x - 15 \Rightarrow 10x^2 - 8x + 51 = 0$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 10 \cdot 51}}{2 \cdot 10} = \frac{8 \pm \sqrt{-1976}}{20} \Rightarrow \text{No tiene solución.}$$

e) $\dfrac{3x-1}{5} = \dfrac{13}{4x+5} \Rightarrow (3x-1)(4x+5) = 65 \Rightarrow 12x^2 + 15x - 4x - 5 = 65 \Rightarrow 12x^2 + 11x - 70 = 0$

$$x = \frac{-11 \pm \sqrt{11^2 - 4 \cdot 12 \cdot (-70)}}{2 \cdot 12} = \frac{-11 \pm 59}{24} = \left\langle \begin{array}{l} 2 \\ \dfrac{-70}{24} = \dfrac{-35}{12} \end{array} \right.$$

Resolución de otros tipos de ecuaciones

3.24 **Resuelve las siguientes ecuaciones aplicando un cambio de variable.**

a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

b) $3x^4 - 15x^2 + 12 = 0$

c) $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$

d) $x^6 - 2x^3 + 1 = 0$

e) $x^8 - 17x^4 + 16 = 0$

f) $x^{10} - 31x^5 - 32 = 0$

a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

Cambio: $u = x^2$ $u^2 = x^4 \Rightarrow u^2 - 13u + 36 = 0$

$$u = \frac{13 \pm \sqrt{(-13)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36}}{2 \cdot 1} = \frac{13 \pm 5}{2} = \left\langle \begin{array}{l} 9 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3 \\ 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \end{array} \right.$$

b) $3x^4 - 15x^2 + 12 = 0$

Cambio: $u = x^2$ $u^2 = x^4 \Rightarrow 3u^2 - 15u + 12 = 0 \Rightarrow u^2 - 5u + 4 = 0$

$$u = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 3}{2} = \left\langle \begin{array}{l} 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \\ 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \end{array} \right.$$

c) $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$

Cambio: $u = x^3\ u^2 = x^6 \Rightarrow u^2 - 7u - 8 = 0$

$$u = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1} = \frac{7 \pm 9}{2} = \left\langle \begin{array}{l} 8 \Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x = 2 \\ -1 \Rightarrow x^3 = -1 \Rightarrow x = -1 \end{array} \right.$$

d) $x^6 - 2x^3 + 1 = 0$

Cambio: $u = x^3\ u^2 = x^6 \Rightarrow u^2 - 2u + 1 = 0$

$$u = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 0}{2} = 1 \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow x = 1$$

e) $x^8 - 17x^4 + 16 = 0$

Cambio: $u = x^4\ u^2 = x^8 \Rightarrow u^2 - 17u + 16 = 0$

$$u = \frac{17 \pm \sqrt{(-17)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16}}{2 \cdot 1} = \frac{17 \pm 15}{2} = \left\langle \begin{array}{l} 16 \Rightarrow x^4 = 16 \Rightarrow x = \pm 2 \\ 1 \Rightarrow x^4 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \end{array} \right.$$

f) $x^{10} - 31x^5 - 32 = 0$

Cambio: $u = x^5\ u^2 = x^{10} \Rightarrow u^2 - 31u - 32 = 0$

$$u = \frac{31 \pm \sqrt{(-31)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-32)}}{2 \cdot 1} = \frac{31 \pm 33}{2} = \left\langle \begin{array}{l} 32 \Rightarrow x^5 = 32 \Rightarrow x = 2 \\ -1 \Rightarrow x^5 = -1 \Rightarrow x = -1 \end{array} \right.$$

3.25 **Encuentra la solución de estas ecuaciones por factorización.**

a) $-2x^3 + 4x^2 + 18x - 36 = 0$

b) $4x^3 - 24x^2 + 48x - 32 = 0$

c) $-3x^4 + 3x^3 + 12x^2 - 12x = 0$

d) $6x^4 - 5x^3 - 43x^2 + 70x - 24 = 0$

a) $-2x^3 + 4x^2 + 18x - 36 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrr} & -2 & 4 & 18 & -36 \\ 2 & & -4 & 0 & 36 \\ \hline & -2 & 0 & 18 & 0 \end{array}$$

$P(x) = (x - 2)(-2x^2 + 18) \Rightarrow 2x^2 = 18 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$

Soluciones: $x = 2$, $x = -3$ y $x = 3$

b) $4x^3 - 24x^2 + 48x - 32 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 4 & -24 & 48 & -32 \\ 2 & & 8 & -32 & 32 \\ \hline & 4 & -16 & 16 & 0 \end{array}$$

$P(x) = (x - 2)(4x^2 - 16x + 16) =$
$= 4(x - 2)(x^2 - 4x + 4) =$
$= 4(x - 2)(x - 2)^2 = 4(x - 2)^3$

Solución $x = 2$ raíz triple

c) $-3x^4 + 3x^3 + 12x^2 - 12x = 0$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & -4 & 4 \\ 1 & & 1 & 0 & -4 \\ \hline & 1 & 0 & -4 & 0 \end{array}$$

$P(x) = -3x(x^3 - x^2 - 4x + 4) =$
$= -3x(x - 1)(x^2 - 4) =$
$= -3x(x - 1)(x - 2)(x + 2)$

Soluciones $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ y $x = -2$

d) $6x^4 - 5x^3 - 43x^2 + 70x - 24 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 6 & -5 & -43 & 70 & -24 \\ 2 & & 12 & 14 & -58 & 24 \\ \hline & 6 & 7 & -29 & 12 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} & 6 & 7 & -29 & 12 \\ -3 & & -18 & 33 & -12 \\ \hline & 6 & -11 & 4 & 0 \end{array}$$

$$x = \frac{11 \pm \sqrt{(-11)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 4}}{2 \cdot 6} = \frac{11 \pm 5}{12} = \left\langle \begin{array}{l} \frac{16}{12} = \frac{4}{3} \\ \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

$P(x) = (x - 2)(6x^3 + 7x^2 - 29x + 12) =$
$= (x - 2)(x + 3)(6x^2 - 11x + 4) =$
$= 6(x - 2)(x + 3)\left(x - \frac{4}{3}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)$

Soluciones: $x = 2$, $x = -3$, $x = \frac{4}{3}$ y $x = \frac{1}{2}$

3.26 **Resuelve las siguientes ecuaciones racionales.**

a) $\dfrac{4}{x-2} - \dfrac{6}{x+3} = \dfrac{1}{3}$

b) $\dfrac{x+1}{3x-2} + \dfrac{2x+1}{x+5} = \dfrac{3}{2}$

c) $\dfrac{4x+2}{x^2+2x+1} + \dfrac{3}{2} = \dfrac{x+5}{x+1}$

d) $\dfrac{3}{x+1} - \dfrac{6}{x+4} = \dfrac{-2}{4x-8}$

a) $\dfrac{4}{x-2} - \dfrac{6}{x+3} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{12(x+3)}{3(x-2)(x+3)} - \dfrac{18(x-2)}{3(x-2)(x+3)} = \dfrac{(x-2)(x+3)}{3(x-2)(x+3)} \Rightarrow$

$\Rightarrow 12x + 36 - 18x + 36 = x^2 + x - 6 \Rightarrow x^2 + 7x - 78 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-78)}}{2 \cdot 1} = \frac{-7 \pm 19}{2} = \begin{cases} 6 \\ -13 \end{cases}$$

b) $\dfrac{x+1}{3x-2} + \dfrac{2x+1}{x+5} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow \dfrac{2(x+1)(x+5)}{2(3x-2)(x+5)} + \dfrac{2(2x+1)(3x-2)}{2(3x-2)(x+5)} = \dfrac{3(3x-2)(x+5)}{2(3x-2)(x+5)} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x^2 + 12x + 10 + 12x^2 - 2x - 4 = 9x^2 + 39x - 30 \Rightarrow 5x^2 - 29x + 36 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{29 \pm \sqrt{(-29)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 36}}{2 \cdot 5} = \frac{29 \pm 11}{10} = \begin{cases} 4 \\ \dfrac{18}{10} = \dfrac{9}{5} \end{cases}$$

c) $\dfrac{4x+2}{x^2+2x+1} + \dfrac{3}{2} = \dfrac{x+5}{x+1} \Rightarrow \dfrac{4x+2}{(x+1)^2} + \dfrac{3}{2} = \dfrac{x+5}{x+1} \Rightarrow \dfrac{2(4x+2)}{2(x+1)^2} + \dfrac{3(x+1)^2}{2(x+1)^2} = \dfrac{2(x+5)(x+1)}{2(x+1)^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 8x + 4 + 3x^2 + 6x + 3 = 2x^2 + 12x + 10 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm 4}{2} = \begin{cases} 1 \\ -3 \end{cases}$$

d) $\dfrac{3}{x+1} - \dfrac{6}{x+4} = \dfrac{-2}{4x-8} \Rightarrow \dfrac{3}{x+1} - \dfrac{6}{x+4} = \dfrac{-1}{2(x-2)} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{6(x+4)(x-2)}{2(x+1)(x+4)(x-2)} - \dfrac{12(x+1)(x-2)}{2(x+1)(x+4)(x-2)} = \dfrac{-(x+1)(x+4)}{2(x+1)(x+4)(x-2)} \Rightarrow$

$\Rightarrow 6x^2 + 12x - 48 - 12x^2 + 12x + 24 = -x^2 - 5x - 4 \Rightarrow 5x^2 - 29x + 20 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{29 \pm \sqrt{(-29)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 20}}{2 \cdot 5} = \frac{29 \pm 21}{10} = \begin{cases} 5 \\ \dfrac{8}{10} = \dfrac{4}{5} \end{cases}$$

3.27 **Halla la solución de estas ecuaciones radicales.**

a) $x - \sqrt{x} - 6 = 0$

b) $\sqrt{8-x} = 2 - x$

c) $\sqrt{x} - \dfrac{2}{\sqrt{x}} = 1$

d) $2\sqrt{x-1} - 5 = \dfrac{3}{\sqrt{x-1}}$

e) $x + \sqrt{x-1} - 3 = 0$

f) $\sqrt{7x+1} = 2\sqrt{x+4}$

g) $\sqrt{5x+1} - 2 = \sqrt{x+1}$

a) $x - \sqrt{x} - 6 = 0 \Rightarrow (x-6)^2 = (\sqrt{x})^2 \Rightarrow x^2 - 12x + 36 = x \Rightarrow x^2 - 13x + 36 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{13 \pm \sqrt{(-13)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36}}{2 \cdot 1} = \frac{13 \pm 5}{2} = \begin{cases} 9 \\ 4 \end{cases}$$

Comprobación: $x = 9 \Rightarrow 9 - 3 - 6 = 0 \Rightarrow$ Es correcto.

$x = 4 \Rightarrow 4 - 2 - 6 \neq 0 \Rightarrow$ No es correcto.

b) $\sqrt{8-x} = 2 - x \Rightarrow 8 - x = 4 - 4x + x^2 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} 4 \\ -1 \end{cases}$$

Comprobación: $x = 4 \Rightarrow \sqrt{8-4} \neq 2 - 4 \Rightarrow$ No es correcto.

$x = -1 \Rightarrow \sqrt{8+1} = 2 + 1 \Rightarrow$ Es correcto.

c) $\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} = 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{x}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \Rightarrow x - 2 = \sqrt{x} \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = x \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 3}{2} = \left\langle \begin{matrix} 4 \\ 1 \end{matrix} \right.$

Comprobación: $x = 4 \Rightarrow \sqrt{4} - \frac{2}{\sqrt{4}} = 1 \Rightarrow$ Es correcto; $x = 1 \Rightarrow \sqrt{1} - \frac{2}{\sqrt{1}} \neq 1 \Rightarrow$ No es correcto.

d) $2\sqrt{x-1} - 5 = \frac{3}{\sqrt{x-1}} \Rightarrow \frac{2\sqrt{x-1}\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}} - \frac{5\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}} = \frac{3}{\sqrt{x-1}} \Rightarrow 2x - 2 - 5\sqrt{x-1} = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow -5\sqrt{x-1} = -2x + 5 \Rightarrow 25(x-1) = 4x^2 - 20x + 25 \Rightarrow 25x - 25 = 4x^2 - 20x + 25 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4x^2 - 45x + 50 = 0 \Rightarrow x = \frac{45 \pm \sqrt{(-45)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 50}}{2 \cdot 4} = \frac{45 \pm 35}{8} = \left\langle \begin{matrix} 10 \\ \frac{10}{8} = \frac{5}{4} \end{matrix} \right.$

Comprobación: $\begin{cases} x = 10 \Rightarrow 2\sqrt{10-1} - 5 = \dfrac{3}{\sqrt{10-1}} \Rightarrow \text{Es correcto.} \\ x = \dfrac{5}{4} \Rightarrow 2\sqrt{\dfrac{5}{4} - 1} - 5 \neq \dfrac{3}{\sqrt{\dfrac{5}{4} - 1}} \Rightarrow 2\dfrac{1}{2} - 5 \neq \dfrac{3}{\dfrac{1}{2}} \Rightarrow \text{No es correcto.} \end{cases}$

e) $x + \sqrt{x-1} - 3 = 0 \Rightarrow \sqrt{x-1} = 3 - x \Rightarrow x - 1 = 9 - 6x + x^2 \Rightarrow x^2 - 7x + 10 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10}}{2 \cdot 1} = \frac{7 \pm 3}{2} = \left\langle \begin{matrix} 5 \\ 2 \end{matrix} \right.$

Comprobación: $x = 5 \Rightarrow 5 + \sqrt{5-1} - 3 \neq 0 \Rightarrow$ No es correcto; $x = 2 \Rightarrow 2 + \sqrt{2-1} - 3 = 0 \Rightarrow$ Es correcto.

f) $\sqrt{7x+1} = 2\sqrt{x+4} \Rightarrow 7x + 1 = 4(x+4) \Rightarrow 7x + 1 = 4x + 16 \Rightarrow 3x = 15 \Rightarrow x = 5$

Comprobación: $x = 5 \Rightarrow \sqrt{7 \cdot 5 + 1} = 2\sqrt{5+4} \Rightarrow$ Sí es correcto.

g) $\sqrt{5x+1} - 2 = \sqrt{x+1} \Rightarrow 5x + 1 - 4\sqrt{5x+1} + 4 = x + 1 \Rightarrow 4x + 4 = 4\sqrt{5x+1} \Rightarrow x + 1 = \sqrt{5x+1} \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 5x + 1 \Rightarrow x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x-3) = 0 \Rightarrow x = 0$ y $x = 3$

Comprobación: $x = 0 \Rightarrow \sqrt{0+1} - 2 \neq \sqrt{1} \Rightarrow$ No es correcto; $x = 3 \Rightarrow \sqrt{5 \cdot 3 + 1} - 2 = \sqrt{3+1} \Rightarrow$ Sí es correcto.

Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

3.28 Resuelve las siguientes ecuaciones de tipo exponencial.

a) $6^{3-x} = 216$

b) $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7} = \left(\frac{7}{3}\right)^{7x-3}$

c) $3^x\left(\frac{1}{3}\right)^{x-3} = \left(\frac{1}{27}\right)^x$

d) $3 \cdot 4^x + 3 \cdot 4^{x+1} + 4^{x+2} = 62$

e) $13^{2x} - 6 \cdot 13^x + 5 = 0$

f) $10^x - 5^{x-1} \cdot 2^{x-2} = 950$

a) $6^{3-x} = 216 \Rightarrow 6^{3-x} = 6^3 \Rightarrow 3 - x = 3 \Rightarrow x = 0$

b) $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7} = \left(\frac{7}{3}\right)^{7x-3} \Rightarrow \left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7} = \left(\frac{3}{7}\right)^{-7x+3} \Rightarrow 3x - 7 = -7x + 3 \Rightarrow 10x = 10 \Rightarrow x = 1$

c) $3^x\left(\frac{1}{3}\right)^{x-3} = \left(\frac{1}{27}\right)^x \Rightarrow \frac{3^x}{3^{x-3}} = \frac{1}{3^{3x}} \Rightarrow 3^3 = 3^{-3x} \Rightarrow 3 = -3x \Rightarrow x = -1$

d) $3 \cdot 4^x + 3 \cdot 4^{x+1} + 4^{x+2} = 62 \Rightarrow 3 \cdot 4^x + 12 \cdot 4^x + 16 \cdot 4^x = 62 \Rightarrow 31 \cdot 4^x = 62 \Rightarrow 4^x = 2 \Rightarrow 2^{2x} = 2 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

e) $13^{2x} - 6 \cdot 13^x + 5 = 0$; Cambio: $u = 13^x \quad u^2 = 13^{2x} \Rightarrow u^2 - 6u + 5 = 0$

$u = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm 4}{2} = \left\langle \begin{matrix} 5 \Rightarrow 13^x = 5 \Rightarrow \log_{13} 13^x = \log_{13} 5 \Rightarrow x = \log_{13} 5 = \dfrac{\log 5}{\log 13} \\ 1 \Rightarrow 13^x = 1 \Rightarrow x = 0 \end{matrix} \right.$

f) $10^x - 5^{x-1} \cdot 2^{x-2} = 950 \Rightarrow 10^x - 5 \cdot 5^{x-2} \cdot 2^{x-2} = 950 \Rightarrow 10^2 10^{x-2} - 5 \cdot 10^{x-2} = 950 \Rightarrow 95 \cdot 10^{x-2} = 950 \Rightarrow$
$\Rightarrow 10^{x-2} = 10 \Rightarrow x - 2 = 1 \Rightarrow x = 3$

3.29 Resuelve estas ecuaciones de tipo logarítmico.

a) $\log(x-1)+\log(x+1)=3\log 2+\log(x-2)$

b) $\log(x-2)-\dfrac{1}{2}\log(3x-6)=\log 2$

c) $\log_9\sqrt[5]{27}=2x-1$

d) $\log_x\dfrac{\sqrt[5]{8}}{2}=-0{,}4$

e) $\log_7(x-2)-\log_7(x+2)=1-\log_7(2x-7)$

a) $\log(x-1)+\log(x+1)=3\log 2+\log(x-2)\Rightarrow \log[(x-1)\cdot(x+1)]=\log[2^3\cdot(x-2)]\Rightarrow$

$\Rightarrow x^2-1=8x-16\Rightarrow x^2-8x+15=0\Rightarrow x=\dfrac{8\pm\sqrt{(-8)^2-4\cdot 1\cdot 15}}{2\cdot 1}=\dfrac{8\pm 2}{2}=\left\langle\begin{matrix}5\\3\end{matrix}\right.$

b) $\log(x-2)-\dfrac{1}{2}\log(3x-6)=\log 2\Rightarrow 2\log(x-2)-\log(3x-6)=2\log 2\Rightarrow$

$\Rightarrow \log\dfrac{(x-2)^2}{3x-6}=\log 2^2\Rightarrow\dfrac{(x-2)^2}{3x-6}=4\Rightarrow x^2-4x+4=12x-24\Rightarrow x^2-16x+28=0\Rightarrow$

$\Rightarrow x=\dfrac{16\pm\sqrt{(-16)^2-4\cdot 1\cdot 28}}{2\cdot 1}=\dfrac{16\pm 12}{2}=\left\langle\begin{matrix}14\\2\ \text{No vale}\end{matrix}\right.$

c) $\log_9\sqrt[5]{27}=2x-1\Rightarrow 9^{2x-1}=\sqrt[5]{27}\Rightarrow 3^{4x-2}=3^{\frac{3}{5}}\Rightarrow 4x-2=\dfrac{3}{5}\Rightarrow 20x-10=3\Rightarrow 20x=13\Rightarrow x=\dfrac{13}{20}$

d) $\log_x\dfrac{\sqrt[5]{8}}{2}=-0{,}4\Rightarrow\dfrac{\sqrt[5]{8}}{2}=x^{-0,4}\Rightarrow 2^{\frac{3}{5}-1}=x^{-0,4}\Rightarrow 2^{\frac{-2}{5}}=x^{-0,4}\Rightarrow 2^{-0,4}=x^{-0,4}\Rightarrow x=2$

e) $\log_7(x-2)-\log_7(x+2)=1-\log_7(2x-7)\Rightarrow\log_7(x-2)-\log_7(x+2)=\log_7 7-\log_7(2x-7)\Rightarrow$

$\Rightarrow\log_7\dfrac{x-2}{x+2}=\log_7\dfrac{7}{2x-7}\Rightarrow\dfrac{x-2}{x+2}=\dfrac{7}{2x-7}\Rightarrow(x-2)(2x-7)=7(x+2)\Rightarrow 2x^2-11x+14=7x+14\Rightarrow$

$\Rightarrow 2x^2-18x=0\Rightarrow 2x(x-9)=0\Rightarrow x=0$. No es correcta y $x=9$. Correcta.

Sistemas de ecuaciones

3.30 Indica el número de soluciones de los siguientes sistemas lineales. Hállalas.

a) $\begin{cases}4x-y=2\\x+3y=7\end{cases}$ **b)** $\begin{cases}2x-y=5\\4x+3y=5\end{cases}$

a) $\begin{cases}4x-y=2\\x+3y=7\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}12x-3y=6\\x+3y=7\end{cases}$ $\overline{13x\quad=13}$ $\Rightarrow\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$

b) $\begin{cases}2x-y=5\\4x+3y=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}6x-3y=15\\4x+3y=5\end{cases}$ $\overline{10x\quad=20}$ $\Rightarrow\begin{cases}x=2\\y=-1\end{cases}$

3.31 Resuelve los siguientes sistemas.

a) $\begin{cases}\dfrac{x}{5}-\dfrac{2y}{3}=6\\[2mm]\dfrac{-x}{10}+\dfrac{5y}{6}=-6\end{cases}$ **b)** $\begin{cases}x-y=1\\[1mm]\dfrac{2}{5}x+\dfrac{3}{4}y=5\end{cases}$ **c)** $\begin{cases}3(-2x+1)-4y=1\\4x-2(3y+1)=8\end{cases}$ **d)** $\begin{cases}\dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{2}=0\\[2mm]\dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{4}=2\end{cases}$

a) $\begin{cases}\dfrac{x}{5}-\dfrac{2y}{3}=6\\[2mm]\dfrac{-x}{10}+\dfrac{5y}{6}=-6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3x-10y=90\\-3x+25y=-180\end{cases}$ $\overline{+15y=-90}$ $\Rightarrow\begin{cases}y=-6\\x=10\end{cases}$

b) $\begin{cases}x-y=1\\[1mm]\dfrac{2}{5}x+\dfrac{3}{4}y=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=y+1\\8x+15y=100\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}8(y+1)+15y=100\Rightarrow 23y=92\Rightarrow y=4\\x=5\end{cases}$

c) $\begin{cases}3(-2x+1)-4y=1\\4x-2(3y+1)=8\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-6x-4y=-2\\4x-6y=10\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-12x-8y=-4\\12x-18y=30\end{cases}$ $\overline{-26y=26}$ $\Rightarrow\begin{cases}y=-1\\x=1\end{cases}$

d) $\begin{cases}\dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{2}=0\\[2mm]\dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{4}=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x-3y=0\\2x+3y=24\end{cases}$ $\overline{4x\quad=24}$ $\Rightarrow\begin{cases}x=6\\y=4\end{cases}$

3.32 Resuelve los siguientes sistemas no lineales.

a) $\begin{cases} x^2 - xy = 5 \\ 3x + y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x^2 - y^2 = -20 \\ xy = -12 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7 \\ x + y = 5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 5x^2 + y^2 = 25 \\ 3x^2 - y^2 = -25 \end{cases}$

e) $\begin{cases} (x - y)^2 = 49 \\ x^2 + 2xy + y^2 = 9 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 17 \\ x + xy + y = 9 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x^2 - xy = 5 \\ 3x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - xy = 5 \\ 3x^2 + xy = x \end{cases} \Rightarrow 4x^2 - x - 5 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 + 80}}{8} = \dfrac{1 \pm 9}{8} = \left\langle \begin{array}{l} \dfrac{10}{8} = \dfrac{5}{4} \\ -1 \end{array} \right. \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5}{4} & y = 1 - 3 \cdot \dfrac{5}{4} = \dfrac{-11}{4} \\ x = -1 & y = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x^2 - y^2 = -20 \\ xy = -12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-12}{y} \\ 4\dfrac{144}{y^2} - y^2 = -20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 576 - y^4 = -20y^2 \Rightarrow y^4 - 20y^2 - 576 = 0 \\ \text{Cambio: } y^2 = u \quad y^4 = u^2\, u^2 - 20u - 576 = 0 \end{cases}$

$u = \dfrac{20 \pm \sqrt{400 + 4 \cdot 576}}{2} = \dfrac{20 \pm 52}{2} \left\langle \begin{array}{l} 36 \Rightarrow y^2 = 36 \Rightarrow y = \pm 6 \Rightarrow \\ -16 \qquad \text{No tiene solución} \end{array} \right. \begin{cases} y = 6 & x = -2 \\ y = -6 & x = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7 \\ x + y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (5 - y)^2 - (5 - y)y + y^2 = 7 \\ x = 5 - y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 25 - 10y + y^2 - 5y + y^2 + y^2 = 7 \\ 3y^2 - 15y + 18 = 0 \Rightarrow y^2 - 5y + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow y = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} \left\langle \begin{array}{l} 3 \Rightarrow x = 2 \\ 2 \Rightarrow x = 3 \end{array} \right.$

d) $\begin{cases} 5x^2 + y^2 = 25 \\ 3x^2 - y^2 = -25 \end{cases} \Rightarrow 8x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y^2 = 25 \Rightarrow y = \pm 5$

e) $\begin{cases} (x - y)^2 = 49 \\ x^2 + 2xy + y^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x - y)^2 = 49 \\ (x + y)^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = \pm 7 \\ x + y = \pm 3 \end{cases}$

$\begin{cases} x - y = 7 \\ x + y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 10 \\ -2y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y = 7 \\ x + y = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 4 \\ -2y = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -5 \end{cases}$

$\begin{cases} x - y = -7 \\ x + y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = -4 \\ -2y = -10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y = -7 \\ x + y = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = -10 \\ -2y = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -5 \\ y = 2 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 17 \\ x + xy + y = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(1 + y) + y = 9 \Rightarrow x = \dfrac{9 - y}{1 + y} \\ \left(\dfrac{9 - y}{1 + y}\right)^2 + y^2 = 17 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{(9 - y)^2}{(1 + y)^2} + \dfrac{y^2(1 + y)^2}{(1 + y)^2} = \dfrac{17(1 + y)^2}{(1 + y)^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 81 - 18y + y^2 + y^2 + 2y^3 + y^4 = 17 + 34y + 17y^2 \Rightarrow y^4 + 2y^3 - 15y^2 - 52y + 64 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 2 & -15 & -52 & 64 \\ 1 & & 1 & 3 & -12 & -64 \\ \hline & 1 & 3 & -12 & -64 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} & 1 & 3 & -12 & -64 \\ 4 & & 4 & 28 & 64 \\ \hline & 1 & 7 & 16 & 0 \end{array}$$

$y^4 + 2y^3 - 15y^2 - 52y + 64 = (y - 1)(y - 4)(y^2 + 7y + 16) \Rightarrow y = \dfrac{-7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 16}}{2} = \dfrac{-7 \pm \sqrt{-25}}{2} \Rightarrow$

No tiene más soluciones $\Rightarrow y = 1 \quad x = 4 \quad$ ó $\quad y = 4 \quad x = 1$

3.33 Resuelve los siguientes sistemas no lineales.

a) $\begin{cases} 2^x + 5^y = 9 \\ 2^{x+2} + 5^{y+1} = 41 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 5^{x+2} - 4^y = -3 \\ 3 \cdot 5^{x+1} - 4^{y-2} = -1 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 2 \log x + \log y = 5 \\ \log (xy) = 4 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} \log x + \log y = 2 \\ x - 6y = 1 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 2^x + 5^y = 9 \\ 2^{x+2} + 5^{y+1} = 41 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^x + 5^y = 9 \\ 4 \cdot 2^x + 5 \cdot 5^y = 41 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 \cdot 2^x + 4 \cdot 5^y = 36 \\ 4 \cdot 2^x + 5 \cdot 5^y = 41 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5^y = 5 \Rightarrow y = 1 \\ 2^x + 5 = 9 \Rightarrow 2^x = 4 \Rightarrow x = 2 \end{cases}$

$$-5^y = -5$$

b) $\begin{cases} 5^{x+2} - 4^y = -3 \\ 3 \cdot 5^{x+1} - 4^{y-2} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5 \cdot 5^{x+1} - 4^2 \cdot 4^{y-2} = -3 \\ 3 \cdot 5^{x+1} - 4^{y-2} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5 \cdot 5^{x+1} - 16 \cdot 4^{y-2} = -3 \\ -48 \cdot 5^{x+1} + 16 \cdot 4^{y-2} = 16 \end{cases} \Rightarrow 5^{x+1} = \frac{-13}{43} \Rightarrow$ No tiene solución.

$$-43 \cdot 5^{x+1} = 13$$

c) $\begin{cases} 2 \log x + \log y = 5 \\ \log (xy) = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log (x^2 \cdot y) = 5 \\ \log (xy) = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 \cdot y = 10^5 \\ xy = 10^4 \end{cases} \Rightarrow$ Se divide la primera ecuación entre la segunda $\Rightarrow x = 10$; entonces, $y = 10^3 = 1000$

d) $\begin{cases} \log x + \log y = 2 \\ x - 6y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log (x \cdot y) = 2 \\ x = 1 + 6y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \cdot y = 10^2 \Rightarrow (1 + 6y)y = 100 \Rightarrow 6y^2 + y - 100 = 0 \\ y = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 + 2400}}{12} = \left\langle \begin{array}{l} 4 \\ \dfrac{-50}{12} = \dfrac{-25}{6} \end{array} \right. \end{cases}$

Entonces: $y = 4; x = 25$ ó $y = \frac{-25}{6}; x = -24$

3.34 Dos números suman $\frac{-1}{15}$ y su producto es $\frac{-2}{15}$. Calcúlalos. ¿De qué ecuación de segundo grado son solución estos dos números?

$$\begin{cases} x + y = -\dfrac{1}{15} \\ x \cdot y = -\dfrac{2}{15} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{2}{15y} + y = -\dfrac{1}{15} \\ x = -\dfrac{2}{15y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 + 15y^2 = -y \Rightarrow 15y^2 + y - 2 = 0 \\ y = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 + 120}}{30} = \dfrac{-1 \pm 11}{30} \left\langle \begin{array}{l} \dfrac{10}{30} = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{-12}{30} = -\dfrac{2}{5} \end{array} \right. \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1}{3} & x = -\dfrac{2}{15 \cdot \dfrac{1}{3}} = -\dfrac{2}{5} \\ y = -\dfrac{2}{5} & x = -\dfrac{2}{15 \cdot \left(-\dfrac{2}{5}\right)} = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Estos números son solución de la ecuación:

$$\left(x + \frac{2}{5}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right) = 0 \Rightarrow (5x + 2)(3x - 1) = 0 \Rightarrow 15x^2 + x - 2 = 0$$

CUESTIONES PARA ACLARARSE

3.35 Sea la ecuación bicuadrada $ax^4 + bx^2 + c = 0$, con a, b y c distintos de 0.
a) ¿Cabe la posibilidad de que sus soluciones sean $x = 1$, $x = 3$, $x = -2$ y $x = 5$? ¿Por qué?
b) ¿Qué condición deben cumplir los coeficientes para que la ecuación anterior no tenga solución?

a) No, porque para que la ecuación sea bicuadrada, las soluciones tienen que ser opuestas dos a dos.

b) Si $b^2 - 4ac < 0$, la ecuación no tendrá solución.

Si $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} < 0$ y los dos números obtenidos son negativos, la ecuación bicuadrada no tendrá solución.

3.36 Indica si las siguientes expresiones son verdaderas o falsas.

a) $\log_a x = \log_b y \Rightarrow x = y$

b) $a^n = b^m \Rightarrow n = m$

c) $\log \sqrt[3]{x^7} = \dfrac{7}{3} \log x$

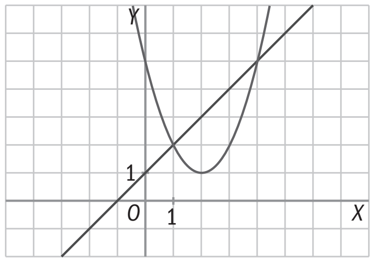
d) $a^{2x-3} = (a^2)^x \cdot \dfrac{1}{a^3}$

a) Falsa. Solo será cierta si $a = b$.
b) Falsa. Solo será cierta si $a = b$.
c) Verdadera.
d) Verdadera.

3.37 Sea la ecuación exponencial $a^x = b$ (con $a > 1$). Relaciona en tu cuaderno estas dos columnas.

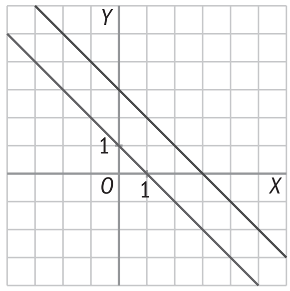
$b > 0 \longrightarrow x = \log_a b$
$b = 0 \longrightarrow x \notin \mathbf{R}$
$b = a \longrightarrow x = 1$

3.38 Las dos gráficas siguientes representan las ecuaciones de un sistema.
a) ¿Es un sistema lineal o no lineal? ¿Por qué?
b) ¿Cuáles son sus soluciones?



a) Es un sistema no lineal. Una de las gráficas no es una recta.
b) Las soluciones son: $x = 1$, $y = 2$, y $x = 4$, $y = 5$.

3.39 Observa las dos rectas correspondientes a un sistema de ecuaciones. ¿Cómo han de ser los coeficientes de las incógnitas en ambas ecuaciones?



Los coeficientes de x e y serán proporcionales, no así el término independiente.

PROBLEMAS PARA APLICAR

3.40 Shalma vive en un poblado de Kenia y debe caminar hasta el poblado vecino para ir a la escuela. En la primera media hora recorre un cuarto del trayecto, y en la media hora siguiente, dos quintos del trayecto restante, quedándole todavía 4,5 kilómetros por recorrer.
¿A qué distancia se encuentra la escuela?

Llamamos x a la distancia de su casa a la escuela.

$$\frac{x}{4} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3x}{4} = x - 4{,}5 \Rightarrow \frac{x}{4} + \frac{6x}{20} = x - 4{,}5 \Rightarrow 5x + 6x = 20x - 90 \Rightarrow 9x = 90 \Rightarrow x = 10 \text{ km}$$

3.41 Calcula las dimensiones de un rectángulo sabiendo que su diagonal mide 15 centímetros, y su área, 108 centímetros cuadrados.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 15^2 \\ x \cdot y = 108 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{108}{y}\right)^2 + y^2 = 15^2 \\ x = \dfrac{108}{y} \end{cases} \quad 108^2 + y^4 = 225y^2 \Rightarrow y^4 - 225y^2 + 11\,664 = 0$$

Cambio: $u = y^2$, $u^2 = y^4$ $\qquad u^2 - 225u + 11\,664 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow u = \frac{225 \pm \sqrt{225^2 - 4 \cdot 11\,664}}{2} = \frac{225 \pm 63}{2} \left\langle \begin{array}{l} 144 \Rightarrow y = 12;\ x = 9 \\ 81 \Rightarrow y = 9;\ x = 12 \end{array} \right.$$

Las soluciones negativas no las consideramos porque las dimensiones de un rectángulo tienen que ser positivas.
El rectángulo tendrá por dimensiones 9×12 cm.

3.42 De un rombo se sabe que su área es 120 centímetros cuadrados, y que la proporción existente entre la diagonal mayor y la diagonal menor es 10 : 3.
Calcula la medida de las diagonales.

$$\begin{cases} \dfrac{Dd}{2} = 120 \\ 3D = 10d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D\dfrac{3D}{10} = 240 \\ d = \dfrac{3D}{10} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D^2 = 800 \Rightarrow D = 20\sqrt{2} \text{ cm} \\ d = \dfrac{3 \cdot 20\sqrt{2}}{10} \Rightarrow d = 6\sqrt{2} \text{ cm} \end{cases}$$

3.43 Las personas que asistieron a una reunión se estrecharon la mano. Una de ellas advirtió que los apretones de mano fueron 66. ¿Cuántas personas concurrieron a la reunión?

En la reunión hay x personas. Cada persona da la mano a $x - 1$ personas.

$$\frac{x(x-1)}{2} = 66 \Rightarrow x(x-1) = 132 \Rightarrow x^2 - x - 132 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot (-132)}}{2} = \frac{1 \pm 23}{2} \left\langle \begin{matrix} 12 \\ -11 \end{matrix} \right.$$

Concurrieron 12 personas.

3.44 Una ebanista quiere partir un listón de madera de 30 centímetros de longitud en tres trozos para construir una escuadra, de manera que el trozo de mayor longitud mida 13 centímetros.
¿Cuál es la longitud de los otros trozos?

$$\begin{cases} x + y + 13 = 30 \\ x^2 + y^2 = 13^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 17 - y \\ (17 - y)^2 + y^2 = 169 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 289 - 34y + y^2 + y^2 = 169 \Rightarrow \\ 2y^2 - 34y + 120 = 0 \Rightarrow y^2 - 17y + 60 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{17 \pm \sqrt{289 - 4 \cdot 60}}{2} = \frac{17 \pm 7}{2} = \left\langle \begin{matrix} 12 \text{ cm} \Rightarrow x = 5 \text{ cm} \\ 5 \text{ cm} \Rightarrow x = 12 \text{ cm} \end{matrix} \right.$$

Los otros dos trozos miden 5 y 12 cm.

3.45 La edad de mi nieto será dentro de tres años un cuadrado perfecto, y hace tres años era exactamente la raíz cuadrada de ese cuadrado perfecto. ¿Cuál es la edad actual de mi nieto?

$$\begin{cases} x + 3 = y^2 \\ x - 3 = \sqrt{y^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \begin{cases} x + 3 = y^2 \\ x - 3 = y \end{cases} \\ \hline 6 = y^2 - y \end{array} \Rightarrow y^2 - y - 6 = 0 \Rightarrow y = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot (-6)}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \left\langle \begin{matrix} 3 \\ -2 \end{matrix} \right. \Rightarrow y = 3,\ x = 9 - 3 = 6$$

Tiene 6 años.

3.46 En unos laboratorios se ha comprobado que el número de células de una muestra se quintuplica cada minuto transcurrido.
Si inicialmente había dos células, ¿cuántos minutos deben transcurrir para que el número de células sea de 19 531 250?

$$2 \cdot 5^x = 19\,531\,250 \Rightarrow 5^x = 9\,765\,625 \Rightarrow 5^x = 5^{10} \Rightarrow x = 10$$

3.47 Una empresa de reciclado de papel mezcla pasta de papel de baja calidad, que compra por 0,25 euros el kilogramo, con pasta de mayor calidad, de 0,40 euros, para conseguir 50 kilogramos de pasta de 0,31 euros el kilogramo.
¿Cuántos kilogramos utiliza de cada tipo de pasta?

$$\begin{cases} x + y = 50 \\ 0{,}25x + 0{,}4y = 50 \cdot 0{,}31 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{r} \begin{cases} 0{,}25x + 0{,}25y = 12{,}5 \\ 0{,}25x + 0{,}4y = 15{,}5 \end{cases} \\ \hline -0{,}15y = -3 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} y = 20 \\ x = 30 \end{cases}$$

Se utilizan 30 kg de pasta de baja calidad y 20 kg de pasta de mayor calidad.

3.48 Utilizando la regla de la división, averigua el dividendo y el divisor de la misma sabiendo que el cociente es 2; el resto, 7, y que el producto de ambos es igual a 490.

$$\begin{cases} D = 2d + 7 \\ D \cdot d = 490 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} (2d + 7)d = 490 \Rightarrow 2d^2 + 7d - 490 = 0 \\ d = \dfrac{-7 \pm \sqrt{49 + 4 \cdot 2 \cdot 490}}{4} = \left\langle \begin{array}{l} 14 \\ -17{,}5 \end{array} \right. \end{array} \Rightarrow \begin{cases} d = 14 \\ D = 35 \end{cases}$$

El resultado $d = -17{,}5$ no es entero, por eso no lo consideramos.

3.49 Si a uno de los lados de un cuadrado se le aumenta su longitud en 5 centímetros y a su lado contiguo en 3 centímetros, el área de la figura aumenta en 71 centímetros cuadrados.
Calcula el lado del cuadrado.

$$(x + 5) \cdot (x + 3) = x^2 + 71 \Rightarrow x^2 + 8x + 15 = x^2 + 71 \Rightarrow 8x = 56 \Rightarrow x = 7 \text{ cm}$$

El lado mide 7 cm.

3.50 Las edades actuales de una mujer y su hijo son 49 y 25 años. ¿Hace cuántos años el producto de sus edades era 640?

Hace x años: $(49 - x)(25 - x) = 640 \Rightarrow 1225 - 74x + x^2 = 640 \Rightarrow x^2 - 74x + 585 = 0$

$$x = \frac{74 \pm \sqrt{(-74)^2 - 4 \cdot 585}}{2} = \frac{74 \pm 56}{2} = \left\langle \begin{array}{l} 65 \\ 9 \end{array} \right.$$

Hace 65 años no pudo ser porque no habían nacido. Por tanto, la respuesta correcta es hace 9 años.

3.51 En la civilización egipcia, debido a las periódicas inundaciones del Nilo, se borraban los lindes de separación de la tierra y, para la reconstrucción de las fincas, necesitaban saber construir ángulos rectos. En un viejo papiro se puede leer lo siguiente: "La altura del muro, la distancia al pie del mismo y la línea que une ambos extremos son tres números consecutivos".
Halla dichos números.

Tres números consecutivos: x, $x + 1$, $x + 2$

$$x^2 + (x + 1)^2 = (x + 2)^2 \Rightarrow x^2 + x^2 + 2x + 1 = x^2 + 4x + 4 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \left\langle \begin{array}{l} 3 \\ -1 \end{array} \right.$$

Los números serán: 3, 4 y 5.

3.52 Una agricultora quiere comprobar cuál es el número de hectáreas de superficie que posee su terreno rectangular de cultivo. Sabe que la distancia máxima existente entre dos puntos del mismo es de 25 decámetros y que la proporción entre el largo y el ancho es 4:3.
Si una hectárea equivale a 100 decámetros cuadrados, ¿cuántas hectáreas tiene la superficie?

La distancia máxima entre dos puntos del rectángulo corresponderá a la diagonal de este.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25^2 \\ 3x = 4y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{4}{3}y \\ \dfrac{16}{9}y^2 + y^2 = 625 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{25}{9}y^2 = 625 \Rightarrow y^2 = 225 \Rightarrow y = 15 \text{ dam} \\ x = \dfrac{4}{3}15 = 20 \text{ dam} \end{cases}$$

Obviamente, solo consideramos las soluciones positivas.
Área $= 15 \cdot 20 = 300 \text{ dam}^2 = 3$ hectáreas

3.53 Una muestra radiactiva se va desintegrando de modo que, cada cinco años, su masa se reduce a la mitad. Si se tienen 800 gramos de dicha sustancia, ¿en cuánto tiempo se reducirá su masa a 50 gramos?

$$800\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{5}} = 50 \Rightarrow \frac{1}{2^{\frac{x}{5}}} = \frac{1}{16} \Rightarrow 2^{\frac{x}{5}} = 2^4 \Rightarrow \frac{x}{5} = 4 \Rightarrow x = 20 \text{ años}$$

3.54 Con la ayuda de los alumnos de varios centros escolares se están rehabilitando las casas de un pueblo abandonado. Ahora se ocupan de la remodelación de un depósito de 1000 metros cúbicos que abastece de agua potable al pueblo. Tiene forma de prisma cuadrangular tal que la altura es el cuadrado del lado de la base menos 15 metros.
Calcula la longitud del lado de la base y la altura del depósito.

$$\begin{cases} x^2 \cdot h = 1000 \\ h = x^2 - 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (h + 15) \cdot h = 1000 \\ x^2 = h + 15 \end{cases} \Rightarrow h^2 + 15\,h - 1000 = 0 \Rightarrow h = \frac{-15 \pm \sqrt{225 + 4000}}{2} = \left\langle \begin{array}{l} 25 \\ -40 \end{array} \right.$$

Nos quedamos con las soluciones positivas: $h = 25$ m

$x^2 = 40 \Rightarrow x = 2\sqrt{10}$ m

R E F U E R Z O

Ecuaciones polinómicas, racionales y radicales

3.55 Resuelve las siguientes ecuaciones utilizando las estrategias estudiadas según el tipo de ecuación.

a) $-2(5x - 1) + \frac{3x - 2}{3} - \frac{55}{3} = 4(x - 1)$

b) $20x^2 + 11x - 3 = 0$

c) $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$

d) $\frac{5x}{x - 4} + 1 = \frac{4}{x + 3}$

e) $4x^3 - 4x^2 - 14x + 14 = 0$

f) $\sqrt{12 - x} = x + 8$

a) $-2(5x - 1) + \frac{3x - 2}{3} - \frac{55}{3} = 4(x - 1) \Rightarrow -30x + 6 + 3x - 2 - 55 = 12x - 12 \Rightarrow -39x = 39 \Rightarrow x = -1$

b) $20x^2 + 11x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{-11 \pm \sqrt{121 + 240}}{40} = \left\langle \begin{array}{l} \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{4} \end{array} \right.$

c) $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$ cambio $u = x^2 \Rightarrow u^2 - 5u - 36 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow u = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 144}}{2} = \left\langle \begin{array}{l} 9 \Rightarrow x = \pm 3 \\ -4 \Rightarrow \text{ No es correcta} \end{array} \right.$

d) $\frac{5x}{x - 4} + 1 = \frac{4}{x + 3} \Rightarrow \frac{(5x)(x + 3)}{(x - 4)(x + 3)} + \frac{(x - 4)(x + 3)}{(x - 4)(x + 3)} = \frac{4(x - 4)}{(x + 3)(x - 4)} \Rightarrow$

$5x^2 + 15x + x^2 - x - 12 = 4x - 16 \Rightarrow 6x^2 + 10x + 4 = 0 \Rightarrow 3x^2 + 5x + 2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{6} = \left\langle \begin{array}{l} \frac{-2}{3} \\ -1 \end{array} \right.$

e) $4x^3 - 4x^2 - 14x + 14 = 0 \Rightarrow 2x^3 - 2x^2 - 7x + 7 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -2 & -7 & 7 \\ 1 & & 2 & 0 & -7 \\ \hline & 2 & 0 & -7 & 0 \end{array}$$

$P(x) = (x - 1)(2x^2 - 7) \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

$2x^2 - 7 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{7}{2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{7}{2}}$

f) $\sqrt{12 - x} = x + 8 \Rightarrow 12 - x = x^2 + 16x + 64 \Rightarrow x^2 + 17x + 52 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{-17 \pm \sqrt{289 - 208}}{2} = \left\langle \begin{array}{l} -4 \\ -13 \end{array} \right.$

Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

3.56 Calcula la solución de estas ecuaciones exponenciales.

a) $4^x - 9 \cdot 2^x + 8 = 0$ **b) $2^{x-1} + 2^{x+2} = 72$** **c) $\sqrt[3]{128} = 4^{2x}$**

a) $4^x - 9 \cdot 2^x + 8 = 0 \Rightarrow 2^{2x} - 9 \cdot 2^x + 8 = 0$; cambio $2^x = u \Rightarrow u^2 - 9u + 8 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow u = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 32}}{2} = \left\langle \begin{array}{l} 8 \Rightarrow 2^x = 2^3 \Rightarrow x = 3 \\ 1 \Rightarrow 2^x = 2^0 \Rightarrow x = 0 \end{array} \right.$$

b) $2^{x-1} + 2^{x+2} = 72 \Rightarrow 2^{x-1} + 2^3 \cdot 2^{x-1} = 72 \Rightarrow 9 \cdot 2^{x-1} = 72 \Rightarrow 2^{x-1} = 8 \Rightarrow 2^{x-1} = 2^3 \Rightarrow x = 4$

c) $\sqrt[3]{128} = 4^{2x} \Rightarrow 2^{\frac{7}{3}} = 2^{4x} \Rightarrow \frac{7}{3} = 4x \Rightarrow x = \frac{7}{12}$

3.57 Resuelve estas ecuaciones logarítmicas.

a) $\log_9(x + 1) - \log_9(1 - x) = \log_9(2x + 3)$ **b) $\log_9 \sqrt[5]{27} = 2x - 1$** **c) $\log x = \frac{1}{2}\log(x + 2)$**

a) $\log_9(x + 1) - \log_9(1 - x) = \log_9(2x + 3) \Rightarrow \log_9 \frac{x+1}{1-x} = \log_9(2x + 3) \Rightarrow \frac{x+1}{1-x} = 2x + 3 \Rightarrow x + 1 = (2x + 3)(1 - x) \Rightarrow$

$\Rightarrow x + 1 = -x - 2x^2 + 3 \Rightarrow 2x^2 + 2x - 2 = 0 \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4}}{2} = \left\langle \begin{array}{l} \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow \text{Sí es solución} \\ \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \Rightarrow \text{No es solución} \end{array} \right.$$

b) $\log_9 \sqrt[5]{27} = 2x - 1 \Rightarrow \sqrt[5]{27} = 9^{2x-1} \Rightarrow 3^{\frac{3}{5}} = 3^{4x-2} \Rightarrow \frac{3}{5} = 4x - 2 \Rightarrow 3 = 20x - 10 \Rightarrow 20x = 13 \Rightarrow x = \frac{13}{20}$

c) $\log x = \frac{1}{2}\log(x + 2) \Rightarrow x = \sqrt{x + 2} \Rightarrow x^2 = x + 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2} = \left\langle \begin{array}{l} 2 \Rightarrow \text{Sí es solución} \\ -1 \Rightarrow \text{No es solución} \end{array} \right.$

Sistemas de ecuaciones

3.58 Resuelve los siguientes sistemas lineales.

a) $\begin{cases} 4x - y = -8 \\ x - 5y = -21 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -3t + 5m = 19 \\ 2t + 4m = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -2(x - 3) + 4(-3y + 1) = 14 \\ 4(-2x + 1) - (y + 4) = 16 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 4x - y = -8 \\ x - 5y = -21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 20x - 5y = -40 \\ x - 5y = -21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 4 \end{cases}$

$19x \quad = -19$

b) $\begin{cases} -3t + 5m = 19 \\ 2t + 4m = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6t + 10m = 38 \\ 6t + 12m = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ t = -3 \end{cases}$

$22m = 44$

c) $\begin{cases} -2(x - 3) + 4(-3y + 1) = 14 \\ 4(-2x + 1) - (y + 4) = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x - 12y = 4 \\ -8x - y = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -8x - 48y = 16 \\ -8x - y = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = -2 \end{cases}$

$-47y = 0$

3.59 Encuentra la solución de los siguientes sistemas de ecuaciones no lineales.

a) $\begin{cases} 2x - y = -1 \\ y^2 - 2x^2 = 7 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x^2 + 3xy + y^2 = 61 \\ x \cdot y = 12 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 6 \\ x \cdot y = 2 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} (x - y)^2 = 1 \\ x^2 - y^2 = 7 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 2x - y = -1 \\ y^2 - 2x^2 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x + 1 \\ (2x + 1)^2 - 2x^2 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 + 4x - 6 = 0 \\ x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} \end{cases} \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow y = 2 \cdot 1 + 1 = 3 \\ x = -3 \Rightarrow y = 2(-3) + 1 = -5 \end{array} \right.$

b) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 6 \\ x \cdot y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{8}{y^3} + y^3 = 6 \\ x = \dfrac{2}{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8 + y^6 = 6y^3 \Rightarrow y^6 - 6y^3 + 8 = 0 \text{ cambio } u = y^3 \Rightarrow u^2 - 6u + 8 = 0 \\ u = \dfrac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \left\langle \begin{array}{l} 4 \Rightarrow y = \sqrt[3]{4};\ x = \dfrac{2}{\sqrt[3]{4}} = \sqrt[3]{2} \\ 2 \Rightarrow y = \sqrt[3]{2};\ x = \dfrac{2}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{4} \end{array} \right. \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 + 3xy + y^2 = 61 \\ x \cdot y = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 3 \cdot 12 + y^2 = 61 \\ x = \dfrac{12}{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{144}{y^2} + y^2 = 25 \Rightarrow y^4 - 25y^2 + 144 = 0 \\ \text{Cambio } u = y^2 \quad u^2 - 25u + 144 = 0 \end{cases}$

$$u = \frac{25 \pm \sqrt{625 - 576}}{2} = \left\langle \begin{array}{l} 16 \Rightarrow \pm 4 \\ 9 \Rightarrow \pm 3 \end{array} \right.$$

$y = 4, x = 3$ $\qquad y = -4, x = -3$ $\qquad y = 3, x = 4$ $\qquad y = -3, x = -4$

d) $\begin{cases} (x - y)^2 = 1 \\ x^2 - y^2 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x - y) = \pm 1 \\ (x - y)(x + y) = 7 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Quedan dos posibles sistemas: $\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y = -1 \\ x + y = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = -3 \end{cases}$

AMPLIACIÓN

3.60 El gran matemático suizo Leonhard Euler planteaba el siguiente problema como introducción al álgebra: "Dos campesinas llevaron en total cien huevos al mercado. Una de ellas tenía más mercancía que la otra, pero recibió por ella la misma cantidad de dinero que la otra. Una vez vendidos todos, la primera campesina dijo a la segunda: "Si yo hubiera llevado la misma cantidad de huevos que tú, habría recibido 15 cruceros". La segunda contestó: "Y si yo hubiera vendido los huevos que tenías tú, habría sacado de ellos $6 + \frac{2}{3}$ cruceros". ¿Cuántos llevó cada una?

Una lleva x huevos, y la otra, $100 - x$; en total, las dos reciben y cruceros.

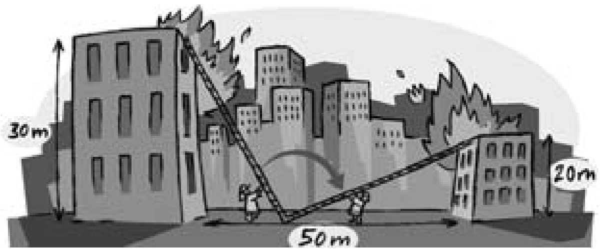
A la primera campesina le pagan a $\dfrac{y}{x}$ cruceros por huevo, mientras que a la segunda le pagan a $\dfrac{y}{100 - x}$

$$\begin{cases} (100 - x) \cdot \dfrac{y}{x} = 15 \\ x \cdot \dfrac{y}{100 - x} = 6 + \dfrac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{15x}{100 - x} \\ \dfrac{x}{100 - x} \cdot \dfrac{15x}{100 - x} = \dfrac{20}{3} \end{cases} \Rightarrow 45x^2 = 20(100 - x)^2 \Rightarrow 25x^2 + 4000x - 200\,000 = 0 \Rightarrow x^2 + 160x - 8000 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{-160 \pm \sqrt{25\,600 + 32\,000}}{2} = \left\langle \begin{array}{l} 40 \\ -200 \end{array} \right.$$

La primera llevaba 40 huevos, y la segunda, 60.

3.61 La siguiente figura muestra la posición que debe ocupar una escalera de bomberos sobre dos edificios para que éstos puedan subir.



Calcula la longitud de la escalera y la posición sobre la que debe posarse la escalera en la acera.

$$\begin{cases} y^2 = 30^2 + x^2 \\ y^2 = 20^2 + (50 - x)^2 \end{cases} \Rightarrow 900 + x^2 = 400 + 2500 - 100x + x^2 \Rightarrow 100x = 2000 \Rightarrow x = 20 \text{ m}$$

$$y^2 = 900 + 400 = 1300 \Rightarrow y = 36{,}06 \text{ m debe medir}$$

La escalera debe medir 36,06 m y estar situada a 20 m de la primera casa.

3.62 En la Antigüedad estaba muy extendida en la India la idea de expresar los enunciados de los problemas en verso. Uno de esos problemas, enunciado en prosa, es el siguiente.
"Un grupo de abejas, cuyo número era igual a la raíz cuadrada de la mitad de todo su enjambre, se posó sobre un jazmín, habiendo dejado muy atrás a $\frac{8}{9}$ del enjambre; solo una abeja del mismo enjambre revoloteaba en torno a un loto, atraída por el zumbido de una de sus amigas. ¿Cuántas abejas formaban el enjambre?"

$$\sqrt{\frac{x}{2}} = \frac{1}{9}x + 1 \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{x^2}{81} + \frac{2x}{9} + 1 \Rightarrow 2x^2 - 45x + 162 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{45 \pm \sqrt{2025 - 1296}}{4} = \left\langle \begin{array}{l} 18 \\ \frac{9}{4} \end{array} \right.$$

El enjambre lo formaban 18 abejas.

3.63 Resuelve los siguientes sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas utilizando los mismos métodos que con dos ecuaciones.

a) $\begin{cases} x - y + z = 6 \\ 2x + 3y - z = -7 \\ x + 5y + 3z = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 5x + 2y - z = -4 \\ x - 3y + 4z = 5 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x - y + z = 6 \\ 2x + 3y - z = -7 \\ x + 5y + 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 2y + 2z = 12 \\ 2x + 3y - z = -7 \\ 2x + 10y + 6z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 2y + 2z = 12 \\ -5y + 3z = 19 \\ -12y - 4z = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 2y + 2z = 12 \\ -60y + 36z = 228 \\ -60y - 20z = 60 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x - 2y + 2z = 12 \\ -60y + 36z = 228 \\ 56z = 168 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = 3 \end{cases}$$

b) $\begin{cases} 5x + 2y - z = -4 \\ x - 3y + 4z = 5 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x + 2y - z = -4 \\ 5x - 15y + 20z = 25 \\ 5x - 5y + 5z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x + 2y - z = -4 \\ +17y - 21z = -29 \\ +7y - 6z = -4 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5x + 2y - z = -4 \\ +119y - 147z = -203 \\ +119y - 102z = -68 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x + 2y - z = -4 \\ +119y - 147z = -203 \\ -45z = -135 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

3.64 María y Bianca forman pareja para realizar el trabajo en grupo que ha encargado la profesora de Biología sobre los efectos de las drogas en el organismo. Si hicieran el trabajo conjuntamente, tardarían 2 horas. María, ella sola, emplearía 3 horas más que Bianca, también en solitario.

¿Cuántas horas tardaría cada una de ellas por separado en hacer el trabajo?

Bianca tardaría x horas; en una hora realiza $\frac{1}{x}$ del trabajo.

María tardaría $x + 3$ horas; en una hora realiza $\frac{1}{x+3}$ del trabajo.

Entre las dos juntas tardarían 2 horas; en una hora realizan $\frac{1}{2}$ del trabajo.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+3} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2(x+3)}{2x(x+3)} + \frac{2x}{2x(x+3)} = \frac{x(x+3)}{2x(x+3)} \Rightarrow 2x + 6 + 2x = x^2 + 3x \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \left\langle \begin{array}{l} 3 \\ -2 \end{array} \right.$$

Bianca tardaría 3 horas, y María, 6.

PARA INTERPRETAR Y RESOLVER

3.65 Cinco animales

Se está realizando un estudio sobre la evolución de ciertas características físicas de cinco especies animales a lo largo de su vida. Para ello se ha observado, en particular y de forma especial, a un ejemplar de cada una de ellas.

Una de las variables que interesan para el estudio es la masa corporal que tenía cada uno de esos cinco ejemplares hace 18 meses. Inexplicablemente, los únicos datos con los que se cuenta son los ofrecidos en la siguiente tabla.

Animales	Masa conjunta (kg)	Animales	Masa conjunta (kg)
Perro y gato	30	Gato y cerdo	93
Perro y pato	27	Gato y cabra	72
Perro y cerdo	107	Pato y cerdo	90
Perro y cabra	86	Pato y cabra	69
Gato y pato	13	Cerdo y cabra	149

Calcula la masa que tenía el cerdo en esa época.

Si se suman todos los valores ofrecidos por la tabla, se obtiene cuatro veces la masa de los cinco animales juntos.

Así: Perro + Gato + Pato + Cerdo + Cabra $= \frac{30 + 27 + ... + 149}{4} = \frac{736}{4} = 184$

Por tanto: Cerdo $= 184 - (\text{Perro} + \text{Gato}) - (\text{Pato} + \text{Cabra}) = 184 - 30 - 69 = 85$ kg

3.66 Ecuaciones relacionadas

¿Es posible resolver dos ecuaciones a la vez? Sigue estos pasos y compruébalo.

a) Resuelve estas ecuaciones.

$$1.\quad 2x^2 + 3x - 5 = 0 \qquad 2.\ -5x^2 + 3x + 2 = 0$$

b) Resuelve también estas otras ecuaciones.

$$1.\ 18x^2 - 9x - 2 = 0 \qquad 2.\ -2x^2 - 9x + 18 = 0$$

c) Si se sabe que $x = r$ es una solución de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, comprueba que $\frac{1}{r}$ es una solución de la ecuación $cx^2 + bx + a = 0$.

d) Sin necesidad de resolver las ecuaciones, completa la tabla.

Ecuación	Soluciones
$x^2 + \sqrt{2}x - 4 = 0$	$x = \sqrt{2}$ $\quad x = -2\sqrt{2}$
$-4x^2 + \sqrt{2}x + 1 = 0$	
$2x^2 - 7x - 4 = 0$	$x = 4$ $\quad x = -\frac{1}{2}$
$4x^2 + 7x - 2 = 0$	
$2x^2 - x - 1 = 0$	$x = 1$ $\quad x = -\frac{1}{2}$
	$x = 1$ $\quad x = -2$

a) $x = \frac{-3 \pm 7}{4} = \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{5}{2} \end{cases}$ $\qquad x = \frac{-3 \pm 7}{-10} = \begin{cases} x = -\frac{2}{5} \\ x = 1 \end{cases}$

b) $x = \frac{9 \pm 15}{36} = \begin{cases} x = \frac{24}{36} = \frac{2}{3} \\ x = -\frac{6}{36} = -\frac{1}{6} \end{cases}$ $\qquad x = \frac{9 \pm 15}{-4} = \begin{cases} x = \frac{24}{-4} = -6 \\ x = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \end{cases}$

c) Sabemos que $a \cdot r^2 + b \cdot r + c = 0$

Pero:

$$c \cdot \left(\frac{1}{r}\right)^2 + b \cdot \frac{1}{r} + a = \frac{c}{r^2} + \frac{b}{r} + a = \frac{c + br + ar^2}{r^2} = \frac{0}{r^2} = 0$$

Por tanto, $\frac{1}{r}$ es solución de la ecuación $cx^2 + bx + a = 0$.

d)

Ecuación	Soluciones
$x^2 + \sqrt{2}x - 4 = 0$	$x = \sqrt{2}$ $\quad x = -2\sqrt{2}$
$-4x^2 + \sqrt{2}x + 1 = 0$	$x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad x = -\frac{\sqrt{2}}{4}$
$2x^2 - 7x - 4 = 0$	$x = 4$ $\quad x = -\frac{1}{2}$
$4x^2 + 7x - 2 = 0$	$x = \frac{1}{4}$ $\quad x = -2$
$2x^2 - x - 1 = 0$	$x = 1$ $\quad x = -\frac{1}{2}$
$-x^2 - x + 2 = 0$	$x = 1$ $\quad x = -2$

3.A1 Encuentra la solución de la siguiente ecuación de primer grado.

$$\frac{3(-2x+1)}{2} - 5(x-3) = \frac{3x-1}{4} + \frac{1}{2}$$

$$-12x + 6 - 20x + 60 = 3x - 1 + 2 \Rightarrow -35x = -65 \Rightarrow x = \frac{13}{7}$$

3.A2 Resuelve esta ecuación de segundo grado: $\frac{4x+5}{3} = \frac{1}{2x+3}$

$$(4x+5)(2x+3) = 3 \Rightarrow 8x^2 + 22x + 12 = 0 \Rightarrow 4x^2 + 11x + 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{-11 \pm \sqrt{121 - 96}}{8} = \left\langle \begin{array}{l} \frac{-3}{4} \\ -2 \end{array} \right.$$

3.A3 Halla la solución de esta ecuación radical: $\sqrt{4x + 13} + 2 = \sqrt{-2x + 3}$

$$4x + 13 + 4\sqrt{4x+13} + 4 = -2x + 3 \Rightarrow 2\sqrt{4x+13} = -3x - 7 \Rightarrow 16x + 52 = 9x^2 + 42x + 49 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9x^2 + 26x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{-26 \pm \sqrt{676 + 108}}{18} = \left\langle \begin{array}{l} \frac{1}{9} \\ -3 \end{array} \right.$$

Comprobación: $\begin{cases} x = \frac{1}{9} & \sqrt{4\frac{1}{9} + 13} + 2 \neq \sqrt{-2\frac{1}{9} + 3} \Rightarrow \text{No es solución.} \\ x = -3 & \sqrt{-12 + 13} + 2 = \sqrt{6 + 3} \Rightarrow \text{Sí es solución.} \end{cases}$

3.A4 Resuelve las siguientes ecuaciones racionales.

a) $\frac{x^2 - 3}{2} = \frac{-3}{2x^2 + 1}$ **b)** $\frac{3}{x-2} + \frac{8}{x+5} = \frac{x+1}{x^2 + 3x - 10}$

a) $(x^2 - 3)(2x^2 + 1) = -6 \Rightarrow 2x^4 - 5x^2 - 3 = 0 \Rightarrow$ Cambio: $u = x^2 \Rightarrow 2u^2 - 5u - 3 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow u = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{4} = \left\langle \begin{array}{l} \frac{-1}{2} \Rightarrow \text{No es solución} \\ 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3} \Rightarrow \text{Sí es solución} \end{array} \right.$$

b) $\frac{3}{x-2} + \frac{8}{x+5} = \frac{x+1}{(x-2)(x+5)} \Rightarrow \frac{3(x+5)}{(x-2)(x+5)} + \frac{8(x-2)}{(x-2)(x+5)} = \frac{x+1}{(x-2)(x+5)} \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x + 15 + 8x - 16 = x + 1 \Rightarrow 10x = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{5}$

3.A5 Halla la solución de esta ecuación de grado 4: $6x^4 + 7x^3 - 52x^2 - 63x - 18 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 6 & 7 & -52 & -63 & -18 \\ 3 & & 18 & 75 & 69 & 18 \\ \hline & 6 & 25 & 23 & 6 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} & 6 & 25 & 23 & 6 \\ -3 & & -18 & -21 & -6 \\ \hline & 6 & 7 & 2 & 0 \end{array} \qquad x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 48}}{12} = \left\langle \begin{array}{l} \frac{-1}{2} \\ \frac{-2}{3} \end{array} \right.$$

$$P(x) = (x-3)(6x^3 + 25x^2 + 23x + 6) = (x-3)(x+3)(6x^2 + 7x + 2) = 6(x-3)(x+3)\left(x + \frac{2}{3}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

Soluciones: $x = 3$, $x = -3$, $x = -\frac{2}{3}$, $x = -\frac{1}{2}$

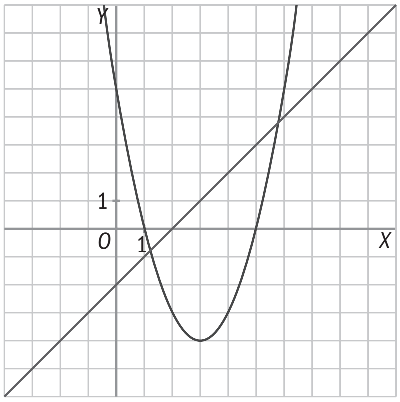
3.A6 Resuelve la siguiente ecuación logarítmica: $\log_3 \sqrt[5]{81} = 3x + 2$

$$\log_3 \sqrt[5]{81} = 3x + 2 \Rightarrow \sqrt[5]{81} = 3^{3x+2} \Rightarrow 3^{\frac{4}{5}} = 3^{3x+2} \Rightarrow \frac{4}{5} = 3x + 2 \Rightarrow 4 = 15x + 10 \Rightarrow 15x = -6 \Rightarrow x = \frac{-2}{5}$$

3.A7 Calcula la solución de esta ecuación exponencial: $9^x - 10 \cdot 3^x + 9 = 0$

$$3^{2x} - 10 \cdot 3^x + 9 = 0 \text{ cambio } u = 3^x \Rightarrow u^2 - 10u + 9 = 0 \Rightarrow u = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{2} = \left\langle \begin{array}{l} 9 \Rightarrow 3^x = 9 \Rightarrow x = 2 \\ 1 \Rightarrow 3^x = 1 \Rightarrow x = 0 \end{array} \right.$$

3.A8 Averigua cuáles son las ecuaciones del sistema cuya representación gráfica es la siguiente. ¿Cuáles son las soluciones del sistema?



$$\begin{cases} x - y = 2 \\ y = (x - 1)(x - 5) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x - 2 \\ x - 2 = x^2 - 6x + 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - 7x + 7 = 0 \\ x = \dfrac{7 \pm \sqrt{49 - 28}}{2} = \left\langle \begin{array}{l} \dfrac{7 + \sqrt{21}}{2} \Rightarrow y = \dfrac{3 + \sqrt{21}}{2} \\ \dfrac{7 - \sqrt{21}}{2} \Rightarrow y = \dfrac{3 - \sqrt{21}}{2} \end{array} \right. \end{cases}$$

3.A9 Encuentra la solución del siguiente sistema de ecuaciones no lineales. $\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 = 29 \\ x^2 - 4y = 5 \end{cases}$

$$\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 = 29 \\ 3x^2 - 12y = 15 \end{cases} \Rightarrow y^2 + 6y - 7 = 0 \Rightarrow \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 28}}{2} = \left\langle \begin{array}{l} 1 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3 \\ -7 \Rightarrow x^2 = -23 \Rightarrow \text{No tiene solución.} \end{array} \right.$$

$$2y^2 + 12y = 14$$

Soluciones: $x = 3, y = 1 \quad x = -3, y = 1$

MURAL DE MATEMÁTICAS

MATETIEMPOS

¿Dónde está el error?

En la resolución de esta ecuación hay un error.

$$\frac{2x + 3}{4x + 6} = 2 \rightarrow 2x + 3 = 8x + 12 \rightarrow -6x = 9 \rightarrow x = -\frac{3}{2}$$

¿Puedes encontrarlo? ¿Sabrías resolver correctamente la ecuación?

Una ecuación especial

La primera idea que surge es que al ser el denominador el doble que el numerador, el cociente no puede ser igual a 2, luego la ecuación no tiene solución.

Resolviendo algebraicamente la ecuación se tiene:

$$2x + 3 = 2(4x + 6) \Rightarrow 2x + 3 = 8x + 12 \Rightarrow 2x - 8x = 12 - 3 \Rightarrow -6x = 9$$

$$x = -\frac{9}{6} = -\frac{3}{2}$$

Aunque algebraicamente la ecuación tiene solución, debe hacerse notar al estudiante que antes de iniciar un problema debe analizarlo y que en este caso la ecuación tiene un dominio cuyos valores deben ser diferentes a $-\frac{3}{2}$, o sea $4x + 6 \neq 0$.

$$D\text{: } \mathbf{R} - \left\{\frac{-3}{2}\right\}$$

Como el resultado es de $-\frac{3}{2}$, la ecuación no tiene solución en su dominio.

EJERCICIOS PROPUESTOS

6.1 Indica la medida de estos ángulos en radianes.

a) 0º **b) 45º** **c) 60º** **d) 120º**

a) $0º = 0 \text{ rad}$

b) $\frac{2\pi\text{rad}}{360º} = \frac{x}{45º} \Rightarrow x = \frac{2\pi \cdot 45}{360} = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$

c) $\frac{2\pi\text{rad}}{360º} = \frac{x}{60º} \Rightarrow x = \frac{2\pi \cdot 60}{360} = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$

d) $\frac{2\pi\text{rad}}{360º} = \frac{x}{120º} \Rightarrow x = \frac{2\pi \cdot 120}{360} = \frac{2\pi}{3} \text{ rad}$

6.2 Expresa en grados los siguientes ángulos.

a) $\frac{\pi}{6}$ rad **b) 0,8 rad** **c) $\frac{3\pi}{4}$ rad** **d) 3π rad**

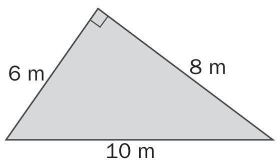
a) $\frac{360º}{2\pi\text{rad}} = \frac{x}{\frac{\pi}{6}\text{ rad}} \Rightarrow x = \frac{360 \cdot \pi}{12\pi} = 30º$

b) $\frac{360º}{2\pi\text{rad}} = \frac{x}{0{,}8 \text{ rad}} \Rightarrow x = \frac{288}{2\pi} = \frac{144}{\pi} = 45{,}86º = 45º\ 51'\ 35''$

c) $\frac{360º}{2\pi\text{rad}} = \frac{x}{\frac{3\pi}{4}\text{ rad}} \Rightarrow x = \frac{1080 \cdot \pi}{8\pi} = 135º$

d) $\frac{360º}{2\pi\text{rad}} = \frac{x}{3\pi \text{ rad}} \Rightarrow x = \frac{1080 \cdot \pi}{2\pi} = 540º$

6.3 Calcula las razones trigonométricas del ángulo agudo de menor amplitud.



$\text{sen } \alpha = \frac{6}{10} = 0{,}6$

$\cos \alpha = \frac{8}{10} = 0{,}8$

$\text{tg } \alpha = \frac{6}{8} = 0{,}75$

6.4 Halla las razones trigonométricas de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo sabiendo que la hipotenusa y uno de sus catetos miden 13 y 5 centímetros, respectivamente.

Para calcular el otro cateto usamos el teorema de Pitágoras:

$x^2 + 5^2 = 13^2 \Rightarrow x^2 = 144 \Rightarrow x = 12$

$\text{sen } \alpha = \frac{12}{13} = 0{,}923$ $\cos \alpha = \frac{5}{13} = 0{,}385$ $\text{tg } \alpha = \frac{12}{5} = 2{,}4$

$\text{sen } \beta = \frac{5}{13} = 0{,}385$ $\cos \beta = \frac{12}{13} = 0{,}923$ $\text{tg } \beta = \frac{5}{12} = 0{,}417$

6.5 Calcula las restantes razones trigonométricas de un ángulo agudo sabiendo que:

a) $\text{sen } \alpha = \frac{\sqrt{3}}{5}$ **b) $\cos \alpha = \frac{1}{3}$**

a) $\cos^2 \alpha + \text{sen}^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha + \left(\frac{\sqrt{3}}{5}\right)^2 = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{3}{25} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{22}{25} \Rightarrow \cos \alpha \frac{\sqrt{22}}{5}$

$\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \text{tg } \alpha = \frac{\frac{\sqrt{3}}{5}}{\frac{\sqrt{22}}{5}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{22}} = \frac{\sqrt{66}}{22}$

b) $\text{sen}^2 \alpha + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1 \Rightarrow \text{sen}^2 \alpha = 1 - \frac{1}{9} \Rightarrow \text{sen}^2 \alpha = \frac{8}{9} \Rightarrow \text{sen } \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \text{tg } \alpha = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{3}} = 2\sqrt{2}$

6.6 La tangente de un ángulo agudo α es igual a $\frac{4}{3}$. Halla sen α y cos α.

$\text{tg}^2\,\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \frac{16}{9} + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \frac{25}{9} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow = \frac{9}{25} = \cos^2\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{3}{5}$

$\text{sen}^2\,\alpha + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\,\alpha = 1 - \frac{9}{25} \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = \frac{4}{5}$

6.7 Simplifica la siguiente expresión: $(\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha) + (\text{sen}^2\,\alpha - \cos^2\alpha)$.

$(\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha) + (\text{sen}^2\,\alpha - \cos^2\alpha) = 2\text{sen}^2\,\alpha$

6.8 Calcula las razones trigonométricas de estos ángulos.

a) π rad **b) 270º**

a) $\text{sen}\,\pi = \frac{0}{1} = 0$ $\cos\pi = \frac{-1}{1} = -1$ $\text{tg}\,\pi = \frac{0}{-1} = 0$

b) $\text{sen}\,270° = \frac{-1}{1} = -1$ $\cos 270° = \frac{0}{1} = 0$ $\text{tg}\,270° = \frac{-1}{0} = \infty$

6.9 La tangente de un ángulo del tercer cuadrante es tg $\alpha = 4$. Halla las otras dos razones trigonométricas de este ángulo.

Tercer cuadrante sen $\alpha < 0$, cos $\alpha < 0$, tg $\alpha > 0$; tomaremos las raíces negativas.

$4^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{17} \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{\sqrt{17}}{17}$ $4 = \frac{\text{sen}\,\alpha}{-\frac{\sqrt{17}}{17}} \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = -\frac{4\sqrt{17}}{17}$

6.10 Calcula el valor de las siguientes razones trigonométricas.

a) sen $\frac{5\pi}{6}$ **b) cos $\left(-\frac{\pi}{6}\right)$**

a) $\text{sen}\,\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$ b) $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

6.11 Halla las razones trigonométricas de estos ángulos.

a) 150º **c) 225º**

b) −120º **d) 300º**

a) $\text{sen}\,150° = \text{sen}\,(180 - 30) = \text{sen}\,30° = \frac{1}{2}$ $\cos 150° = \cos(180 - 30) = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\text{tg}\,150° = \text{tg}\,(180 - 30) = -\text{tg}\,30° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

b) $\text{sen}\,(-120°) = -\text{sen}\,(120°) = -\text{sen}\,(180 - 60) = -\text{sen}\,60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos(-120°) = \cos(120°) = \cos(180 - 60) = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$

$\text{tg}\,(-120°) = -\text{tg}\,(120°) = -\text{tg}\,(180 - 60) = \text{tg}\,60° = \sqrt{3}$

c) $\text{sen}\,225° = \text{sen}\,(180 + 45) = -\text{sen}\,45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\cos 225° = \cos(180 + 45) = -\cos 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\text{tg}\,225° = \text{tg}\,(180 + 45) = \text{tg}\,45° = 1$

d) $\text{sen}\,300° = \text{sen}\,(-60) = -\text{sen}\,60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\cos 300° = \cos(-60°) = \cos 60° = \frac{1}{2}$

$\text{tg}\,300° = \text{tg}\,(-60) = -\text{tg}\,60° = -\sqrt{3}$

6.12 Con la ayuda de la calculadora, halla el seno, el coseno y la tangente de estos ángulos.

a) 275º **b) 124º 16′** **c) 1,5 rad** **d) $\frac{2\pi}{5}$ rad**

a) sen 275º = −0,996 cos 275º = 0,087 tg 275º = −11,43

b) sen 124º 16′ = 0,826 cos 124º 16′ = −0,563 tg 124º 16′ = −1,468

c) sen 1,5 rad = −1 cos 1,5 rad = 0 tg 1,5 rad = ∞

d) sen $\frac{2\pi}{5}$ rad = 0,951 cos $\frac{2\pi}{5}$ rad = 0,309 tg $\frac{2\pi}{5}$ rad = 3,078

6.13 Resuelve estas ecuaciones trigonométricas.

a) tg $x = -1$ **c) sen $x = 0$**

b) cos $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ **d) cos $x = -0,7561$**

a) Segundo y cuarto cuadrante: $x = 360 - 45 = 315º$ ó $x = 180 - 45 = 135º$ $\begin{cases} x = 135º + 360º\,k \\ x = 315º + 360º\,k \end{cases}$ con $k \in \mathbf{Z}$.

Equivalentemente: $x = 135º + 180º\,k$ con $k \in \mathbf{Z}$

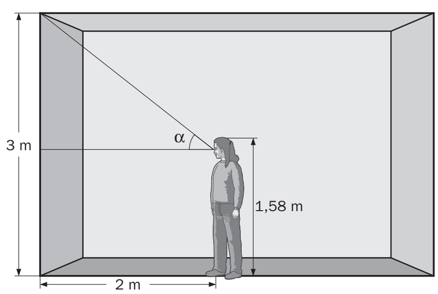
b) Primero y cuarto: $x = 45º$ ó $x = 360 - 45 = 315º$ $\begin{cases} x = 45º + 360º\,k \\ x = 315º + 360º\,k \end{cases}$ con $k \in \mathbf{Z}$.

c) $x = 0$ ó $x = 180º$ $\begin{cases} x = 360º\,k \\ x = 180º + 360º\,k \end{cases}$ con $k \in \mathbf{Z}$. Equivalentemente, $x + 180º\,k$ con $k \in \mathbf{Z}$

d) Segundo y tercero: $x = 139,122º = 139º\ 7'\ 18''$ ó $x = 220,878º = 220º\ 52'\ 42''$ $\begin{cases} x = 139º\ 7'\ 18'' + 360º\,k \\ x = 220º\ 52'\ 42'' + 360º\,k \end{cases}$ con $k \in \mathbf{Z}$.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

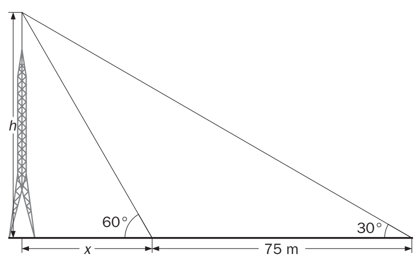
6.14 Inés mide 158 centímetros y la altura de su aula es de 3 metros.
Si se sitúa a 2 metros de la pared, ¿qué ángulo de elevación obtiene?



$3 - 1,58 = 1,42$ m

$\text{tg}\ \alpha = \frac{1,42}{2} = 0,71 \Rightarrow \alpha = 35º\ 22'\ 29''$

6.15 Desde el suelo se ve el punto más alto de una antena bajo un ángulo de 30º con la horizontal. Si nos acercamos 75 metros hacia su pie, este ángulo mide 60º. Halla la altura de la antena.



$$\begin{cases} \text{tg}\ 60º = \frac{h}{x} \\ \text{tg}\ 30º = \frac{h}{x + 75} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{3} = \frac{h}{x} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{h}{x + 75} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{3}x = h \\ \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}x}{x + 75} \end{cases} \quad \begin{aligned} &\Rightarrow x + 75 = 3x \Rightarrow x = \frac{75}{2} = 37,5 \\ &h = 37,5\sqrt{3}\ \text{m} \end{aligned}$$

E J E R C I C I O S   P A R A   E N T R E N A R S E

Medida de ángulos

6.16 Expresa en radianes la medida de estos ángulos.

a) 30º

b) 240º

c) 90º

d) 270º

e) 135º

f) 300º

a) $\frac{2\pi \text{rad}}{360^\circ} = \frac{x}{30^\circ} \Rightarrow x = \frac{2\pi \cdot 30}{360} = \frac{\pi}{6}$ rad

b) $\frac{2\pi \text{rad}}{360^\circ} = \frac{x}{240^\circ} \Rightarrow x = \frac{2\pi \cdot 240}{360} = \frac{4\pi}{3}$ rad

c) $\frac{2\pi \text{rad}}{360^\circ} = \frac{x}{90^\circ} \Rightarrow x = \frac{2\pi \cdot 90}{360} = \frac{\pi}{2}$ rad

d) $\frac{2\pi \text{rad}}{360^\circ} = \frac{x}{270^\circ} \Rightarrow x = \frac{2\pi \cdot 270}{360} = \frac{3\pi}{2}$ rad

e) $\frac{2\pi \text{rad}}{360^\circ} = \frac{x}{135^\circ} \Rightarrow x = \frac{2\pi \cdot 135}{360} = \frac{3\pi}{4}$ rad

f) $\frac{2\pi \text{rad}}{360^\circ} = \frac{x}{300^\circ} \Rightarrow x = \frac{2\pi \cdot 300}{360} = \frac{5\pi}{3}$ rad

6.17 Indica la medida en el sistema sexagesimal de los siguientes ángulos expresados en radianes.

a) 5π

b) $\frac{5\pi}{6}$

c) $\frac{7\pi}{4}$

d) $\frac{\pi}{8}$

e) $\frac{4\pi}{3}$

f) $\frac{7\pi}{11}$

a) $\frac{360^\circ}{2\pi \text{rad}} = \frac{x}{5\pi \text{rad}} \Rightarrow x = \frac{1800 \cdot \pi}{2\pi} = 900^\circ$

b) $\frac{360^\circ}{2\pi \text{rad}} = \frac{x}{\frac{5\pi}{6} \text{ rad}} \Rightarrow x = \frac{360 \cdot 5\pi}{12\pi} = 150^\circ$

c) $\frac{360^\circ}{2\pi \text{rad}} = \frac{x}{\frac{7\pi}{4} \text{ rad}} \Rightarrow x = \frac{360 \cdot 7\pi}{8\pi} = 315^\circ$

d) $\frac{360^\circ}{2\pi \text{rad}} = \frac{x}{\frac{\pi}{8} \text{ rad}} \Rightarrow x = \frac{360 \cdot \pi}{16\pi} = 22{,}5^\circ = 22^\circ\ 30'$

e) $\frac{360^\circ}{2\pi \text{rad}} = \frac{x}{\frac{4\pi}{3} \text{ rad}} \Rightarrow x = \frac{360 \cdot 4\pi}{6\pi} = 240^\circ$

f) $\frac{360^\circ}{2\pi \text{rad}} = \frac{x}{\frac{7\pi}{11} \text{ rad}} \Rightarrow x = \frac{360 \cdot 7\pi}{22\pi} = 114^\circ\ 32'\ 44''$

6.18 Halla el ángulo del intervalo [0º, 360º] que corresponde a:

a) 450º

b) 720º

c) 1300º

d) 1800º

e) 540º

f) 900º

a) $450^\circ = 360^\circ \cdot 1 + 90^\circ$. El ángulo es 90º.

b) $720^\circ = 360^\circ \cdot 2 + 0^\circ$. El ángulo es 0º.

c) $1300^\circ = 360^\circ \cdot 3 + 220^\circ$. El ángulo es 220º.

d) $1800^\circ = 360^\circ \cdot 5 + 0^\circ$. El ángulo es 0º.

e) $540^\circ = 360^\circ \cdot 1 + 180^\circ$. El ángulo es 180º.

f) $900^\circ = 360^\circ \cdot 2 + 180^\circ$. El ángulo es 180º.

6.19 Expresa en radianes el ángulo α, menor que 360º, al que equivalen estos ángulos.

a) 480º

b) 1235º

c) 930º

d) 1440º

a) 480º = 360º · 1 + 120º. El ángulo es 120º. $\frac{2\pi \text{rad}}{360^\circ} = \frac{x}{120^\circ} \Rightarrow x = \frac{2\pi \cdot 120}{360} = \frac{2\pi}{3}$ rad

b) 1235º = 360º · 3 + 155º. El ángulo es 155º. $\frac{2\pi \text{rad}}{360^\circ} = \frac{x}{155^\circ} \Rightarrow x = \frac{2\pi \cdot 155}{360} = \frac{31\pi}{36}$ rad

c) 930º = 360º · 2 + 210º. El ángulo es 210º. $\frac{2\pi \text{rad}}{360^\circ} = \frac{x}{210^\circ} \Rightarrow x = \frac{2\pi \cdot 210}{360} = \frac{7\pi}{6}$ rad

d) 1440º = 360º · 4 + 0º. El ángulo es 0º = 0 rad.

6.20 Calcula el ángulo equivalente en sentido positivo a cada uno de los siguientes. Utiliza en cada caso la misma unidad de medida en que vienen dados.

a) -330°

b) $-\frac{3\pi}{4}$ rad

c) -120°

d) $-\frac{\pi}{2}$ rad

a) $360^\circ - 330^\circ = 30^\circ$

b) $2\pi - \frac{3\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$ rad

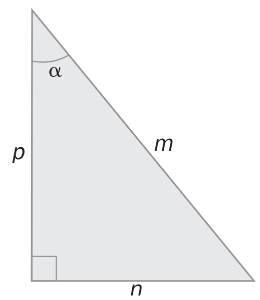
c) $360^\circ - 120^\circ = 240^\circ$

d) $2\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$ rad

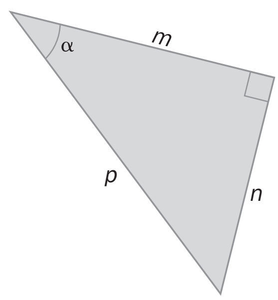
Razones trigonométricas en triángulos rectángulos

6.21 Escribe, en función de *m*, *n* y *p*, el seno, el coseno y la tangente del ángulo α en estos triángulos rectángulos.

a)



b)



a) sen $\alpha = \frac{n}{m}$; cos $\alpha = \frac{p}{m}$; tg $\alpha = \frac{n}{p}$

b) sen $\alpha = \frac{n}{p}$; cos $\alpha = \frac{m}{p}$; tg $\alpha = \frac{n}{m}$

6.22 La hipotenusa y los catetos de un triángulo rectángulo miden 10, 8 y 6 decímetros, respectivamente. ¿Cuáles son las razones trigonométricas del ángulo agudo de menor amplitud del triángulo?

El ángulo agudo más pequeño es el opuesto al cateto más pequeño.

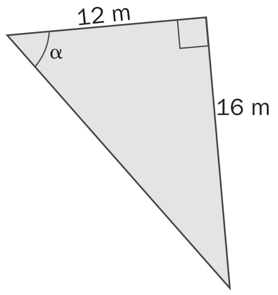
sen $\alpha = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

cos $\alpha = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

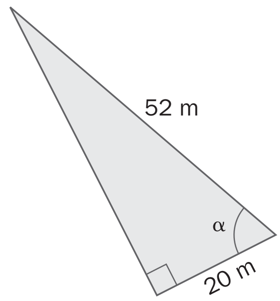
tg $\alpha = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

6.23 Halla las razones trigonométricas del ángulo α en cada triángulo rectángulo.

a)



b)



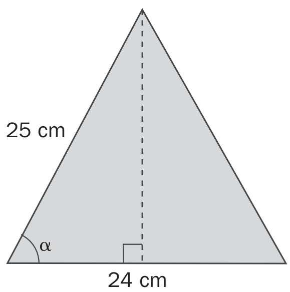
a) Si a es la hipotenusa, $a = \sqrt{16^2 + 12^2} = 20$

$$\text{sen } \alpha = \frac{16}{20} = \frac{4}{5};\ \cos \alpha = \frac{12}{20} = \frac{3}{5};\ \text{tg } \alpha = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$$

b) Si b es el cateto opuesto, $b = \sqrt{52^2 - 20^2} = 48$

$$\text{sen } \beta = \frac{48}{52} = \frac{12}{13};\ \cos \beta = \frac{20}{52} = \frac{5}{13};\ \text{tg } \beta = \frac{48}{20} = \frac{12}{5}$$

6.24 Calcula las razones trigonométricas del ángulo α.



$$h = \sqrt{25^2 - 12^2} = 21{,}93 \text{ cm}$$

$$\text{sen } \alpha = \frac{21{,}93}{25} = 0{,}8772;\ \cos \alpha = \frac{12}{25} = 0{,}48$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{21{,}93}{12} = 1{,}8295$$

6.25 Calcula el coseno y la tangente de un ángulo agudo α si sen $\alpha = 0{,}6$.

$$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow 0{,}6^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - 0{,}36 \Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{1 - 0{,}36} = 0{,}8$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} = \frac{0{,}6}{0{,}8} = 0{,}75$$

6.26 Halla el seno y la tangente de un ángulo agudo α cuyo coseno vale $\frac{4}{5}$.

$$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \text{sen}^2 \alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}^2 \alpha = 1 - \frac{16}{25} \Rightarrow \text{sen } \alpha = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$$

6.27 Calcula el seno y el coseno de un ángulo agudo α si su tangente es igual a $\sqrt{5}$.

$$1 + \text{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow 1 + \left(\sqrt{5}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{6} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

$$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}^2 \alpha + \left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right)^2 = 1 \Rightarrow \text{sen}^2 \alpha = 1 - \frac{6}{36} \Rightarrow \text{sen } \alpha = \sqrt{\frac{30}{36}} = \frac{\sqrt{30}}{6}$$

6.28 Halla la medida en el sistema sexagesimal de los ángulos del primer cuadrante que cumplen cada una de las siguientes condiciones.

a) $\mathbf{sen\ \alpha = \frac{1}{5}}$

b) $\mathbf{tg\ \beta = 4}$

c) $\mathbf{cos\ \gamma = \frac{5}{9}}$

d) $\mathbf{sen\ \delta = 0{,}4}$

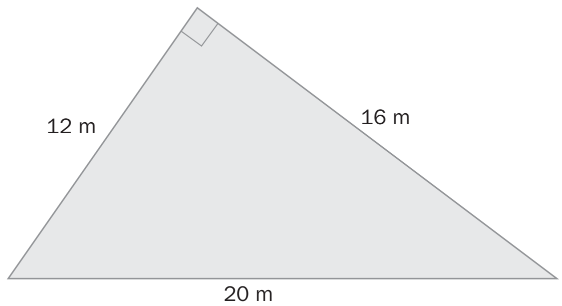
a) $\alpha = 11^\circ\ 32'\ 13''$

b) $\beta = 75^\circ\ 57'\ 49''$

c) $\gamma = 56^\circ\ 15'\ 4''$

d) $\delta = 23^\circ\ 34'\ 41''$

6.29 Calcula la medida de los ángulos del triángulo.



Comprobamos que el triángulo es rectángulo:

$12^2 + 16^2 = 20^2$

$\text{sen}\ \alpha = \frac{12}{20} \Rightarrow \alpha = 36^\circ\ 52'\ 12''$

$\beta = 90^\circ - 36^\circ\ 52'\ 12'' = 53^\circ\ 7'\ 48''$

Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera

6.30 Sin calcular su valor, indica el signo que tienen las siguientes razones trigonométricas.

a) cos 315º

b) sen 150º

c) tg 190º

d) sen 850º

e) tg 118º

f) cos 230º

g) sen 340º

h) cos 460º

a) $\cos 315^\circ > 0$

b) $\text{sen}\ 150^\circ > 0$

c) $\text{tg}\ 190^\circ > 0$

d) $\text{sen}\ 850^\circ > 0$

e) $\text{tg}\ 118^\circ < 0$

f) $\cos 230^\circ < 0$

g) $\text{sen}\ 340^\circ < 0$

h) $\cos 460^\circ < 0$

6.31 ¿En qué cuadrantes se pueden encontrar cada uno de los siguientes ángulos?

a) $\mathbf{\alpha}$**, si sen** $\mathbf{\alpha > 0}$

b) $\mathbf{\beta}$**, si tg** $\mathbf{\beta > 0}$

c) $\mathbf{\chi}$**, si cos** $\mathbf{\chi < 0}$

d) $\mathbf{\delta}$**, si sen** $\mathbf{\delta < 0}$

a) En el primero y en el segundo

b) En el primero y en el tercero

c) En el segundo y en el tercero

d) En el tercero y en el cuarto

6.32 Calcula las razones trigonométricas de los ángulos de 135º y 225º a partir de las del ángulo de 45º.

$\text{sen}\ 135^\circ = \text{sen}\ 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos 135^\circ = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\text{tg}\ 135^\circ = -\text{tg}\ 45^\circ = -1$

$\text{sen}\ 225^\circ = -\text{sen}\ 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos 225^\circ = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\text{tg}\ 225^\circ = \text{tg}\ 45^\circ = 1$

6.33 Halla las otras dos razones trigonométricas del ángulo α en cada caso.

a) Si $\cos\alpha = \frac{6}{7}$ y $270° \le \alpha \le 360°$

b) Si $\operatorname{sen}\alpha = \frac{3}{8}$ y $90° \le \alpha \le 180°$

c) Si $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2}$ y $180° \le \alpha \le 270°$

a) $\left(\frac{6}{7}\right)^2 + \operatorname{sen}^2\alpha = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}^2\alpha = 1 - \frac{36}{49} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = -\sqrt{\frac{13}{49}} = -\frac{\sqrt{13}}{7}$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-\frac{\sqrt{13}}{7}}{\frac{6}{7}} = -\frac{\sqrt{13}}{6}$$

b) $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \left(\frac{3}{8}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = 1 - \frac{9}{64} \Rightarrow \cos\alpha = -\sqrt{\frac{55}{64}} = -\frac{\sqrt{55}}{8}$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{3}{8}}{-\frac{\sqrt{55}}{8}} = -\frac{3\sqrt{55}}{55}$$

c) $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow 1 + \left(\sqrt{2}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \sqrt{2}\cdot\frac{-\sqrt{3}}{3} = -\frac{\sqrt{6}}{3}$$

6.34 Calcula las razones trigonométricas del ángulo α, expresado en radianes, en cada caso.

a) Si $\operatorname{tg}\alpha = 5$ y $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$

b) Si $\cos\alpha = 0{,}8$ y $\frac{3\pi}{2} \le \alpha \le 2\pi$

a) $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow 1 + 5^2 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{26} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{26}}{26}$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = 5\frac{\sqrt{26}}{26} = \frac{5\sqrt{26}}{26}$$

b) $0{,}8^2 + \operatorname{sen}^2\alpha = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}^2\alpha = 0{,}36 \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = -0{,}6 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{-0{,}6}{0{,}8} = -\frac{3}{4}$

6.35 Si α es un ángulo agudo y $\cos\alpha = \frac{5}{9}$, ¿cuáles son las razones trigonométricas del ángulo $\alpha + 180°$?

$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \left(\frac{5}{9}\right)^2 + \operatorname{sen}^2\alpha = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}^2\alpha = 1 - \frac{25}{81} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \sqrt{\frac{56}{81}} = \frac{2\sqrt{14}}{9}$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{2\sqrt{14}}{9}}{\frac{5}{9}} = \frac{2\sqrt{14}}{5}$$

$\operatorname{sen}(\alpha + 180) = -\frac{2\sqrt{14}}{9}$, $\cos(\alpha + 180) = -\frac{5}{9}$, $\operatorname{tg}(\alpha + 180) = \frac{2\sqrt{14}}{5}$

6.36 El coseno de un ángulo del primer cuadrante vale $\frac{12}{13}$. Calcula:

a) sen (α + 180º)

b) tg (90º − α)

c) cos (180º − α)

d) sen (−α)

$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \left(\frac{12}{13}\right)^2 + \text{sen}^2\,\alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\,\alpha = 1 - \frac{144}{169} \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = \sqrt{\frac{25}{169}} = \frac{5}{13}$

$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{5}{13}}{\frac{12}{13}} = \frac{5}{12}$

a) $\text{sen}\,(180° + \alpha) = -\text{sen}\,\alpha = -\frac{5}{13}$

b) $\text{tg}\,(90° - \alpha) = \frac{1}{\text{tg}\,\alpha} = \frac{12}{5}$

c) $\cos\,(180° - \alpha) = -\cos\alpha = -\frac{12}{13}$

d) $\text{sen}\,(-\alpha) = -\text{sen}\,\alpha = -\frac{5}{13}$

6.37 Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas. Expresa los resultados en grados.

a) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $1 - 2\cos x = 0$

c) $\text{sen}\,x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\text{tg}\,x = 1$

a) $x = \text{arcos}\,-\frac{\sqrt{3}}{2} = 150°$ ó $x = 210°$ $\begin{cases} x = 150° + 360°\,k \\ x = 210° + 360°\,k \end{cases}$ con $k \in \mathbf{Z}$

b) $\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 60°$ ó $x = 300°$ $\begin{cases} x = 60° + 360°\,k \\ x = 300° + 360°\,k \end{cases}$ con $k \in \mathbf{Z}$

c) $x = 240°$ ó $x = 300° \Rightarrow \begin{cases} x = 240° + 360°\,k \\ x = 300° + 360°\,k \end{cases}$ con $k \in \mathbf{Z}$

d) $x = 45°$ ó $x = 225° \Rightarrow x = 45° + 180°\,k$ con $k \in \mathbf{Z}$

6.38 Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas. Expresa los resultados en radianes.

a) $\text{tg}\,x = -2$

b) $2 - 5\cos x = 6$

c) $\text{sen}\,x = 0{,}81$

d) $4\,\text{sen}\,x + 1 = 0$

a) $\text{arctg}\,(-2) = -0{,}35\pi \Rightarrow x = -0{,}35\pi + k\pi$ con $k \in \mathbf{Z}$

b) $\cos x = -\frac{4}{5} \Rightarrow x = \text{arcos}\left(-\frac{4}{5}\right) = 0{,}8\pi$ ó $x = 1{,}2\,\pi \Rightarrow \begin{cases} x = 0{,}8\pi + 2k\pi \\ x = 1{,}2\pi + 2k\pi \end{cases}$ con $k \in \mathbf{Z}$

c) $x = \text{arcsen}\,0{,}81 = 0{,}3\pi$ ó $x = 0{,}7\pi \Rightarrow \begin{cases} x = 0{,}3\pi + 2k\pi \\ x = 0{,}7\pi + 2k\pi \end{cases}$ con $k \in \mathbf{Z}$

d) $\text{sen}\,x = -\frac{1}{4} \Rightarrow x = \text{arcsen}\left(-\frac{1}{4}\right) = 1{,}92\pi$ ó $x = 1{,}08\pi \Rightarrow \begin{cases} x = 1{,}08\pi + 2k\pi \\ x = 1{,}92\pi + 2k\pi \end{cases}$ con $k \in \mathbf{Z}$

6.39 Demuestra las siguientes igualdades trigonométricas.

a) $\text{tg}^2\,\alpha \cdot (1 - \text{sen}^2\,\alpha) = \text{sen}^2\,\alpha$

b) $\frac{\text{sen}\,\alpha \cdot \cos\alpha}{\text{tg}\,\alpha} = 1 - \text{sen}^2\,\alpha$

c) $(1 + \text{tg}^2\,\alpha) \cdot \cos^2\alpha = 1$

a) $\text{tg}^2\,\alpha \cdot (1 - \text{sen}^2\,\alpha) = \text{tg}^2\,\alpha \cdot \cos^2\alpha = \frac{\text{sen}^2\,\alpha}{\cos^2\alpha} \cdot \cos^2\alpha = \text{sen}^2\,\alpha$

b) $\frac{\text{sen}\,\alpha \cdot \cos\alpha}{\text{tg}\,\alpha} = \frac{\text{sen}\,\alpha \cdot \cos^2\alpha}{\text{sen}\,\alpha} = \cos^2\alpha = 1 - \text{sen}^2\,\alpha$

c) $(1 + \text{tg}^2\,\alpha) \cdot \cos^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \cdot \cos^2\alpha = 1$

6.40 Razona si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas.

a) El coseno de un ángulo agudo es positivo.

b) La tangente de un ángulo del segundo o del tercer cuadrante es negativa.

c) El seno de un ángulo es positivo si está comprendido entre 0º y 180º.

d) Hay dos ángulos entre 0 y 2π radianes con el mismo valor de la tangente.

a) Verdadera.

b) Falsa. En el tercero, el seno y el coseno son negativos, y, por tanto, la tangente es positiva.

c) Verdadera.

d) Verdadera.

6.41 Comprueba si existe un ángulo α tal que sen $\alpha = \frac{1}{4}$ y cos $\alpha = \frac{3}{4}$.

$\text{sen}^2\, \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{1 + 9}{16} \neq 1$ No puede existir.

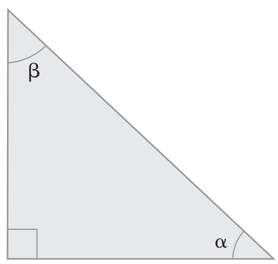
6.42 Los lados de un triángulo miden 45, 27 y 36 centímetros. Demuestra que el seno de uno de sus ángulos vale $\frac{3}{5}$.

¿Cuáles son las otras dos razones trigonométricas de ese ángulo?

Primero hay que comprobar que es rectángulo: $45^2 = 27^2 + 36^2 \Rightarrow 2025 = 729 + 1296$.

$\text{sen}\, \alpha = \frac{27}{45} = \frac{3}{5} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{36}{45} = \frac{4}{5} \Rightarrow \text{tg}\, \alpha = \frac{27}{36} = \frac{3}{4}$

6.43 Si sen α = 0,68 y cos α = 0,73, calcula sen β y cos β.



$\cos \beta = \text{sen}\, \alpha = 0{,}68$

$\text{sen}\, \beta = \cos \alpha = 0{,}73$

6.44 Escribe en radianes el cuadrante en el que se encuentra un ángulo α si:

a) sen α = 0,35

b) tg α = −1,5

c) cos α = −0,9

a) $0 \leq \alpha \leq \pi$

b) $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$ y $\frac{3\pi}{2} \leq \alpha \leq 2\pi$

c) $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{3\pi}{2}$

6.45 ¿Qué relación existe entre las tangentes de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo?

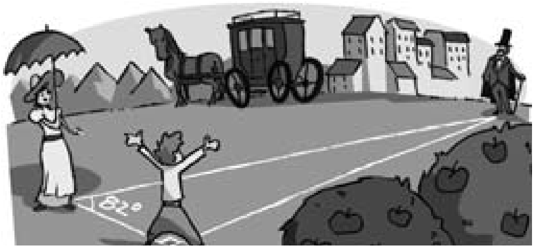
$\text{tg}\, \beta = \frac{1}{\text{tg}\, \alpha}$

6.46 **En el momento del día en que los rayos del sol forman un ángulo de 60º con la horizontal, la sombra que proyecta un árbol en el suelo es de 2,6 metros.**

¿Cuánto mide el árbol?

Si h es la altura del árbol, $\text{tg } 60° = \frac{h}{2,6} \Rightarrow h = 2,6 \cdot \text{tg } 60° = 4,5$ m

6.47 **Para medir la distancia entre dos puntos muy alejados *A* y *B*, se han situado dos personas sobre ellos. Una tercera persona está en un punto *C*, a 50 metros de distancia de *A*.**



Calcula la distancia que separa los puntos *A* y *B*.

Si a es la distancia que separa los puntos A y B: $\text{tg } 82° = \frac{a}{50} \Rightarrow a = 50 \cdot \text{tg } 82° = 355,77$ m.

6.48 **Unas cigüeñas han construido su nido sobre el tejado de un edificio a 25 metros del suelo. Un chico lo observa desde un punto situado a 50 metros del edificio.**

Calcula el ángulo de observación.

$$\text{tg } \alpha = \frac{25}{50} \Rightarrow \alpha = \text{arctg } \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 26,57°$$

6.49 **Juan ha subido en un globo aerostático hasta una altura de 50 metros. Sus padres siguen el vuelo desde el suelo.**

a) ¿A qué distancia del punto A se encuentran los padres de Juan?

b) Si el globo continúa subiendo en la misma dirección y se detiene cuando el ángulo de observación de Juan es de 60º, ¿a cuántos metros de altura se encuentra el globo en este momento?

a) Si a es la distancia: $\text{tg } 75° = \frac{a}{50} \Rightarrow a = 50 \cdot \text{tg } 75° = 186,60$ m.

b) Si h es la distancia al suelo: $\text{tg } 60° = \frac{180,60}{h} \Rightarrow h = \frac{180,6}{\text{tg } 60°} = 107,74$ m.

6.50 **El tronco de una palmera mide 3,5 metros y crece de forma inclinada debido al peso de la parte superior. La perpendicular desde su parte más alta hasta la tierra mide 2 metros.**

Calcula el ángulo de inclinación del tronco respecto a la vertical.

$\cos \alpha = \frac{20}{35} = \frac{4}{7} \Rightarrow \alpha = \arccos \frac{4}{7} \Rightarrow \alpha = 55,15°$

6.51 Alba va a poner una bombilla de bajo consumo en una lámpara que está situada a 2 metros del suelo.

Alba mide 1,53 metros, y cada lado de la escalera, 70 centímetros. Averigua si alcanza con ella para poner la bombilla.

Al abrir la escalera, sus lados forman con el suelo un triángulo isósceles. La altura del triángulo es la altura a la que estará el último peldaño una vez abierta.

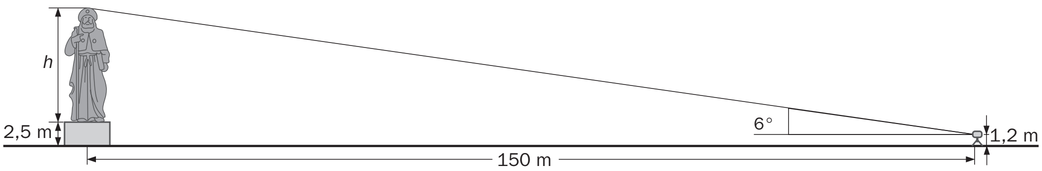
$$\text{sen } 50° = \frac{h}{70} \Rightarrow h = 70 \cdot \text{sen } 50° = 53{,}62 \text{ cm.}$$

La altura a la que llegará la cabeza de Alba es: $53{,}62 + 153 = 206{,}62$ cm.

Por tanto, llegará para cambiar la bombilla sin esfuerzo.

6.52 En el centro de una plaza de forma circular de 300 metros de diámetro hay una estatua sobre un pedestal que mide 2,5 metros de altura.

Con un teodolito situado en el borde de la plaza se observa la parte más alta de la estatua bajo un ángulo de 6°. Si la mira del teodolito se encuentra a 1,2 metros sobre el suelo, ¿cuánto mide la estatua?



El radio de la plaza es de 150 m. Si h es la altura de la estatua: $\text{tg } 6° = \dfrac{h + 2{,}5 - 1{,}2}{150} \Rightarrow$

$$\Rightarrow h + 1{,}3 = 150 \cdot \text{tg } 6° = 15{,}77 \text{ m} \Rightarrow h = 15{,}77 - 1{,}3 = 14{,}47 \text{ m}$$

6.53 Desde un lugar situado junto al pie de una montaña se observa el pico más alto de la misma con un ángulo de elevación de 45º. Si se retrocede 1061 metros, el ángulo es de 30º.

Calcula la altura de la montaña.

Si h es la altura, y x, la distancia de la base de esta al primer punto de observación:

$$\left.\begin{array}{l} \text{tg } 45º = \dfrac{h}{x} \\ \text{tg } 30º = \dfrac{h}{x + 1061} \end{array}\right\} x = h$$

$$\text{tg } 30º = \frac{h}{x + 1061} \Rightarrow \text{tg } 30º \cdot h + 1061 \cdot \text{tg } 30º = h \Rightarrow h = \frac{1061 \cdot \text{tg } 30º}{1 - \text{tg } 30º} = 1449{,}35 \text{ m}$$

6.54 Una antena se ha clavado en el suelo. Para que permanezca vertical y bien sujeta se han colocado dos anclajes en el suelo a ambos lados de la antena alineados con su base.

La distancia entre los anclajes es de 40 metros y, si se observa la parte más alta de la antena desde cada uno de ellos, los ángulos de elevación son de 30º y 60º, respectivamente.

Calcula la altura de la antena.

Si h es la altura, y x, la distancia de la base de esta al punto en el que el ángulo de observación es de 60º:

$$\left.\begin{array}{l} \text{tg } 60º = \dfrac{h}{x} \\ \text{tg } 30º = \dfrac{h}{40 - x} \end{array}\right\} h = x \cdot \text{tg } 60º$$

$$\text{tg } 30º = \frac{\text{tg } 60º \cdot x}{40 - x} \Rightarrow 40 \cdot \text{tg } 30º - \text{tg } 30º \cdot x = \text{tg } 60º \cdot x \Rightarrow x = \frac{40 \cdot \text{tg } 30º}{\text{tg } 60º + \text{tg } 30º} = 10 \text{ m}, h = 10\sqrt{3} \text{ m}$$

REFUERZO

Medida de ángulos

6.55 Calcula la medida en radianes de estos ángulos.

a) 36º

b) 20º

c) 216º

d) 160º

e) 324º

f) 290º

a) $\dfrac{2\pi\text{rad}}{360º} = \dfrac{x}{36º} \Rightarrow x = \dfrac{2\pi \cdot 36}{360} = \dfrac{\pi}{5}$ rad

b) $\dfrac{2\pi\text{rad}}{360º} = \dfrac{x}{20º} \Rightarrow x = \dfrac{2\pi \cdot 20}{360} = \dfrac{\pi}{9}$ rad

c) $\dfrac{2\pi\text{rad}}{360º} = \dfrac{x}{216º} \Rightarrow x = \dfrac{2\pi \cdot 216}{360} = \dfrac{6\pi}{5}$ rad

d) $\dfrac{2\pi\text{rad}}{360º} = \dfrac{x}{160º} \Rightarrow x = \dfrac{2\pi \cdot 160}{360} = \dfrac{8\pi}{9}$ rad

e) $\dfrac{2\pi\text{rad}}{360º} = \dfrac{x}{324º} \Rightarrow x = \dfrac{2\pi \cdot 324}{360} = \dfrac{9\pi}{5}$ rad

f) $\dfrac{2\pi\text{rad}}{360º} = \dfrac{x}{290º} \Rightarrow x = \dfrac{2\pi \cdot 290}{360} = \dfrac{29\pi}{18}$ rad

6.56 Expresa en grados:

a) 4π **rad**

b) $\dfrac{9\pi}{4}$ **rad**

c) $\dfrac{7\pi}{9}$ **rad**

d) $\dfrac{13\pi}{6}$ **rad**

e) $\dfrac{5\pi}{12}$ **rad**

f) $\dfrac{11\pi}{5}$ **rad**

a) $\dfrac{360^\circ}{2\pi\text{rad}} = \dfrac{x}{4\pi\text{rad}} \Rightarrow x = \dfrac{360 \cdot 4\pi}{2\pi} = 720^\circ$

b) $\dfrac{360^\circ}{2\pi\text{rad}} = \dfrac{x}{\dfrac{9\pi}{4}\text{rad}} \Rightarrow x = \dfrac{360 \cdot 9\pi}{8\pi} = 405^\circ$

c) $\dfrac{360^\circ}{2\pi\text{rad}} = \dfrac{x}{\dfrac{7\pi}{9}\text{rad}} \Rightarrow x = \dfrac{360 \cdot 7\pi}{18\pi} = 140^\circ$

d) $\dfrac{360^\circ}{2\pi\text{rad}} = \dfrac{x}{\dfrac{13\pi}{6}\text{rad}} \Rightarrow x = \dfrac{360 \cdot 13\pi}{12\pi} = 390^\circ$

e) $\dfrac{360^\circ}{2\pi\text{rad}} = \dfrac{x}{\dfrac{5\pi}{12}\text{rad}} \Rightarrow x = \dfrac{360 \cdot 5\pi}{24\pi} = 75^\circ$

f) $\dfrac{360^\circ}{2\pi\text{rad}} = \dfrac{x}{\dfrac{11\pi}{5}\text{rad}} \Rightarrow x = \dfrac{360 \cdot 11\pi}{10\pi} = 396^\circ$

6.57 ¿A qué ángulo menor que 360º equivalen los siguientes?

a) 720º

b) 1050º

c) 990º

d) 840º

e) 600º

f) 1260º

a) 720º = 360º · 2 + 0º. El ángulo es 0º.

b) 1050º = 360º · 2 + 330º . El ángulo es 330º.

c) 990º = 360º · 2 + 270º. El ángulo es 270º.

d) 840º = 360º · 2 + 120º. El ángulo es 120º.

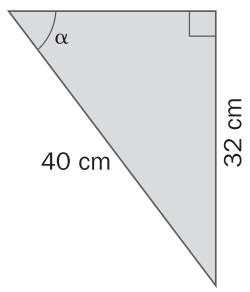
e) 600º = 360º · 1 + 240º. El ángulo es 240º.

f) 1260º = 360º · 3 + 180º. El ángulo es 180º.

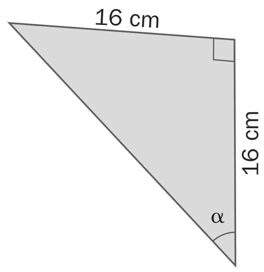
Razones trigonométricas en triángulos rectángulos

6.58 Halla las razones trigonométricas del ángulo α en estos triángulos rectángulos.

a)



b)



a) Si b es el cateto que falta: $b = \sqrt{40^2 - 32^2} = 24$.

$\text{sen } \alpha = \dfrac{32}{40} = \dfrac{4}{5}$; $\cos \alpha = \dfrac{24}{40} = \dfrac{3}{5}$; $\text{tg } \alpha = \dfrac{32}{24} = \dfrac{4}{3}$

b) Si a es la hipotenusa: $a = \sqrt{16^2 + 16^2} = 16\sqrt{2}$.

$\text{sen } \alpha = \dfrac{16}{16\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos \alpha = \dfrac{16}{16\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\text{tg } \alpha = \dfrac{16}{16} = 1$

6.59 Calcula la tangente del ángulo agudo α en cada caso.

a) Si $\cos \alpha = 0{,}2$

b) Si $\text{sen } \alpha = \dfrac{5}{8}$

a) $1 + \text{tg}^2 \alpha = \dfrac{1}{\cos^2 \alpha} = \dfrac{1}{0{,}2^2} = 25 \Rightarrow \text{tg } \alpha = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

b) $\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \left(\dfrac{5}{8}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \dfrac{25}{64} \Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{\dfrac{39}{64}} = \dfrac{\sqrt{39}}{8}$

$\text{tg } \alpha = \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\dfrac{5}{8}}{\dfrac{\sqrt{39}}{8}} = \dfrac{5\sqrt{39}}{39}$

Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera

6.60 Si cos 70º = 0,34, halla:

a) sen 20º

b) cos 110º

c) cos 250º

d) cos 290º

a) sen 20º = sen (90º − 70º) = cos 70º = 0,34

b) cos 110º = cos (180º − 70º) = −cos 70º = −0,34

c) cos 250º = cos (180º + 70º) = −cos 70º = −0,34

d) cos 290º = cos (−70º) = cos 70º = 0,34

6.61 Si α es un ángulo agudo y sen α = 0,64, calcula:

a) sen (180º − α)

b) cos (90º − α)

c) sen (−α)

d) sen (α + 180º)

a) sen (180º − α) = sen α = 0,64

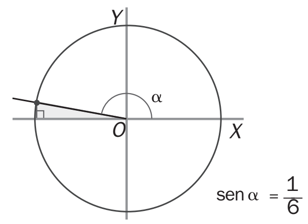
b) cos (90º − α) = sen α = 0,64

c) sen (−α) = −sen α = −0,64

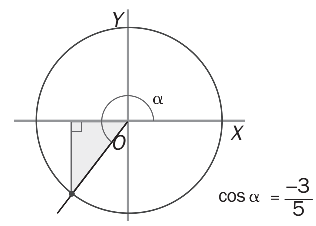
d) sen (α + 180º) = −sen α = −0,64

6.62 Halla el valor de los ángulos.

a)



b)



a) $\text{sen}\ \alpha = \dfrac{1}{6}$ en el segundo cuadrante $\Rightarrow \alpha = 170{,}41^\circ$

b) $\cos \alpha = \dfrac{-3}{5}$ en el tercer cuadrante $\Rightarrow \alpha = 233{,}13^\circ$

6.63 Calcula las otras dos razones trigonométricas del ángulo α en cada caso.

a) Si $\cos \alpha = -\dfrac{4}{7}$ y $180^\circ \leq \alpha \leq 270^\circ$

b) Si $\text{sen}\ \alpha = -\dfrac{9}{10}$ y $270^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$

c) Si $\text{tg}\ \alpha = -\sqrt{8}$ y $90^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$

a) $\left(-\dfrac{4}{7}\right)^2 + \text{sen}^2\ \alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\ \alpha = 1 - \dfrac{16}{49} \Rightarrow \text{sen}\ \alpha = -\sqrt{\dfrac{33}{49}} = -\dfrac{\sqrt{33}}{7}$ $\quad \text{tg}\ \alpha = \dfrac{-\dfrac{\sqrt{33}}{7}}{-\dfrac{4}{7}} = \dfrac{\sqrt{33}}{4}$

b) $\left(-\dfrac{9}{10}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \dfrac{81}{100} \Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{\dfrac{19}{100}} = \dfrac{\sqrt{19}}{10}$ $\quad \text{tg}\ \alpha = \dfrac{-\dfrac{9}{10}}{\dfrac{\sqrt{19}}{10}} = -\dfrac{9\sqrt{19}}{19}$

c) $1 + \left(-\sqrt{8}\right)^2 = \dfrac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \dfrac{1}{9} \Rightarrow \cos \alpha = -\dfrac{1}{3}$; $-\sqrt{8} = \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{-\dfrac{1}{3}} \Rightarrow \text{sen}\ \alpha = -\sqrt{8}\left(-\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

6.64 Calcula las razones trigonométricas de los siguientes ángulos reduciéndolos primero a uno equivalente menor que 360º.

a) 450º

b) 2190º

c) 1125º

d) 630º

a) $450^\circ = 360^\circ + 90^\circ$

$\text{sen } 450^\circ = \text{sen } 90^\circ = 1$, $\cos 450^\circ = \cos 90^\circ = 0$, $\text{tg } 450^\circ = \text{tg } 90^\circ = \infty$

b) $2190^\circ = 360^\circ \cdot 6 + 30^\circ$

$\text{sen } 2190^\circ = \text{sen } 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos 2190^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\text{tg } 2190^\circ = \text{tg } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$

c) $1125^\circ = 360^\circ \cdot 3 + 45^\circ$

$\text{sen } 1125^\circ = \text{sen } 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 1125^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\text{tg } 1125^\circ = \text{tg } 45^\circ = 1$

d) $630^\circ = 360^\circ + 270^\circ$

$\text{sen } 630^\circ = \text{sen } 270^\circ = -1$, $\cos 630^\circ = \cos 270^\circ = 0$, $\text{tg } 630^\circ = \text{tg } 270^\circ = \infty$

6.65 El seno de un ángulo agudo α vale $\frac{7}{9}$. Calcula:

a) $\cos(\alpha + 90^\circ)$

b) $\text{sen}(\alpha + 270^\circ)$

c) $\text{tg}(540^\circ - \alpha)$

d) $\text{tg}(\alpha + 1440^\circ)$

$$\left(\frac{7}{9}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = 1 - \frac{49}{81} \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{\frac{32}{81}} = \frac{4\sqrt{2}}{9} \quad \text{tg } \alpha = \frac{\frac{7}{9}}{\frac{4\sqrt{2}}{9}} = \frac{7\sqrt{2}}{8}$$

a) $\cos(\alpha + 90^\circ) = -\text{sen } \alpha = -\frac{7}{9}$

b) $\text{sen}(\alpha + 270) = -\cos\alpha = -\frac{4\sqrt{2}}{9}$

c) $\text{tg}(540^\circ - \alpha) = -\text{tg } \alpha = -\frac{7\sqrt{2}}{8}$

d) $\text{tg}(\alpha + 1440) = \text{tg } \alpha = \frac{7\sqrt{2}}{8}$

6.66 Si $\cos\alpha = \frac{10}{11}$ y $\frac{3\pi}{2} \le \alpha \le 2\pi$, calcula las razones trigonométricas de estos ángulos.

a) $\alpha + \pi$

b) $2\pi - \alpha$

c) $\pi - \alpha$

d) $\frac{\pi}{2} - \alpha$

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \left(\frac{10}{11}\right)^2 + \text{sen}^2\alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\alpha = 1 - \frac{100}{121} \Rightarrow \text{sen } \alpha = -\sqrt{\frac{21}{121}} = -\frac{\sqrt{21}}{11}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos\alpha} = \frac{-\frac{\sqrt{21}}{11}}{\frac{10}{11}} = -\frac{\sqrt{21}}{10}$$

a) $\text{sen}(\pi + \alpha) = -\text{sen } \alpha = \frac{\sqrt{21}}{11}$; $\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha = -\frac{10}{11}$; $\text{tg}(\pi + \alpha) = \text{tg } \alpha = -\frac{\sqrt{21}}{10}$

b) $\text{sen}(2\pi - \alpha) = -\text{sen } \alpha = \frac{\sqrt{21}}{11}$; $\cos(2\pi - \alpha) = \cos\alpha = \frac{10}{11}$; $\text{tg}(2\pi - \alpha) = -\text{tg } \alpha = \frac{\sqrt{21}}{10}$

c) $\text{sen}(\pi - \alpha) = \text{sen } \alpha = -\frac{\sqrt{21}}{11}$; $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha = -\frac{10}{11}$; $\text{tg}(\pi - \alpha) = -\text{tg } \alpha = \frac{\sqrt{21}}{10}$

d) $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha = \frac{10}{11}$; $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \text{sen } \alpha = -\frac{\sqrt{21}}{11}$; $\text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{\text{tg } \alpha} = -\frac{10\sqrt{21}}{21}$

6.67 Si tg $\alpha = -\sqrt{15}$ y $\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \pi$, halla las razones trigonométricas de los ángulos suplementario y opuesto a α.

$1 + \left(\sqrt{15}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{16} \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{1}{4}$; $-\sqrt{15} = \frac{\text{sen } \alpha}{-\frac{1}{4}} \Rightarrow \text{sen } \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$

$\text{sen } (\pi - \alpha) = \text{sen } \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$; $\cos (\pi - \alpha) = -\cos \alpha = \frac{1}{4}$; $\text{tg } (\pi - \alpha) = -\text{tg } \alpha = \sqrt{15}$

$\text{sen } (-\alpha) = -\text{sen } \alpha = -\frac{\sqrt{15}}{4}$; $\cos (-\alpha) = \cos \alpha = -\frac{1}{4}$; $\text{tg } (-\alpha) = -\text{tg } \alpha = \sqrt{15}$

6.68 Demuestra estas igualdades trigonométricas.

a) $\frac{\text{sen}^4 \alpha - \cos^4 \alpha}{\text{sen}^2 \alpha - \cos^2 \alpha} = 1$

b) $\cos \alpha + \frac{\text{sen}^2 \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha}$

a) $\frac{\text{sen}^4 \alpha - \cos^4 \alpha}{\text{sen}^2 \alpha - \cos^2 \alpha} = \frac{(\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha) \cdot (\text{sen}^2 \alpha - \cos^2 \alpha)}{\text{sen}^2 \alpha - \cos^2 \alpha} = 1$

b) $\cos \alpha + \frac{\text{sen}^2 \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha + \text{sen}^2 \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha}$

6.69 Resuelve estas ecuaciones.

a) $|\text{sen } x| = 1$

b) $|\cos x| = \frac{1}{2}$

c) $|\text{tg } x| = 1$

d) $|\text{sen } x| = \frac{1}{2}$

a) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ con $k \in \mathbf{Z}$

b) $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ó $x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$; $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$; $x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$ con $k \in \mathbf{Z}$

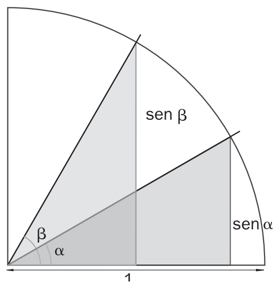
c) $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ó $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$; $x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$; $x = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi$ con $k \in \mathbf{Z}$

d) $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ó $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$; $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$; $x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$ con $k \in \mathbf{Z}$

6.70 ¿Cantidades proporcionales?

En la figura aparece dibujado el primer cuadrante de la circunferencia goniométrica.

En ella se consideran dos ángulos α y β tales que la amplitud del segundo es igual a la del primero aumentada en un 50%.



a) Halla el valor del seno de cada uno de los ángulos si $\alpha = 30°$. Determina en qué porcentaje ha aumentado el seno de β en relación con el de α.

b) ¿En qué porcentaje aumenta el seno de β si el ángulo α mide 60°?

c) ¿Crees que los senos de los ángulos son proporcionales a las amplitudes de los mismos?

a) $\text{sen}\ \alpha = \text{sen}\ 30° = 0{,}5$ $\quad$ $\text{sen}\ \beta = \text{sen}\ (1{,}5 \cdot 30) = \text{sen}\ 45° = 0{,}707$

$\frac{0{,}707}{0{,}5} = 1{,}414 \Rightarrow$ Mientras que la amplitud crece en un 50%, el valor del seno aumenta en un 41,4%.

b) $\text{sen}\ \alpha = \text{sen}\ 60° = 0{,}866$ $\quad$ $\text{sen}\ \beta = \text{sen}\ (1{,}5 \cdot 60) = \text{sen}\ 90° = 1$

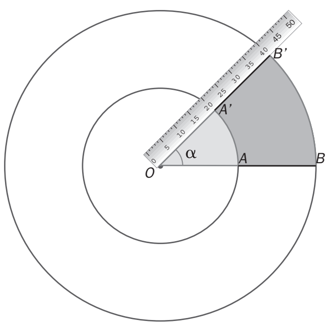
$\frac{1}{0{,}866} = 1{,}155 \Rightarrow$ El valor del seno ha aumentado en solo un 15,5%.

c) Al pasar de 30° a 45°, la amplitud ha aumentado en un 50%, y el seno, en un 41,4%. Al pasar de 60° a 90°, la amplitud ha aumentado en un 50%, pero el seno sólo lo ha hecho en un 15,5%. Las amplitudes no son, pues, proporcionales a los senos.

6.71 Colores circulares

La regla de la figura gira en el sentido contrario a las agujas del reloj y describe una vuelta completa en 2 minutos.

La longitud de los segmentos *OA* y *AB* es de 20 centímetros.



a) Calcula, en radianes, el ángulo α descrito en un segundo.

b) Halla, en centímetros cuadrados, las áreas de color gris y de color naranja que se han pintado cuando ha pasado un segundo.

c) Calcula la relación de las áreas pintadas cuando ha transcurrido un segundo. ¿Cuál es esa relación al cabo de 40 segundos?

a) En 120 segundos describe 2π radianes. En un segundo describe $\frac{2\pi}{120} = \frac{\pi}{60}$ radianes.

b) Área del sector *OBB*′ cuando ha pasado 1 segundo: $\frac{\pi \cdot OB^2}{120} = \frac{\pi \cdot 1600}{120} = \frac{40\pi}{3}$ cm^2.

Área del sector *OAA*′ cuando ha pasado 1 segundo: $\frac{\pi \cdot OA^2}{120} = \frac{\pi \cdot 400}{120} = \frac{10\pi}{3}$ cm^2.

Área de la zona gris: $\frac{10\pi}{3}$ cm^2 $\quad$ Área de la zona naranja: $\frac{(40 - 10)\pi}{3} = 10\pi$ cm^2

c) La relación de las áreas pintadas cuando han pasado 1 y 40 segundos es la misma:

$$\frac{\text{Zona Gris}}{\text{Zona Naranja}} = \frac{\frac{10\pi}{3}}{10\pi} = \frac{1}{3}$$

6.A1 **Expresa en grados la medida de estos ángulos.**

a) $\frac{3\pi}{5}$ **rad** **b)** $\frac{15\pi}{4}$ **rad** **c)** 9π **rad**

a) $\frac{360^\circ}{2\pi \text{rad}} = \frac{x}{\frac{3\pi}{5}\text{ rad}} \Rightarrow x = \frac{360 \cdot 3\pi}{10\pi} = 108^\circ$

b) $\frac{360^\circ}{2\pi \text{rad}} = \frac{x}{\frac{15\pi}{4}\text{ rad}} \Rightarrow x = \frac{360 \cdot 15\pi}{8\pi} = 675^\circ$

c) $\frac{360^\circ}{2\pi \text{rad}} = \frac{x}{9\pi \text{ rad}} \Rightarrow x = \frac{360 \cdot 9\pi}{2\pi} = 1620^\circ$

6.A2 **Pasa a radianes las medidas de los siguientes ángulos.**

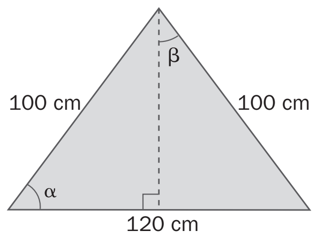
a) 36º **b) 100º** **c) 310º**

a) $\frac{2\pi \text{rad}}{360^\circ} = \frac{x}{36^\circ} \Rightarrow x = \frac{2\pi \cdot 36}{360} = \frac{\pi}{5}$ rad

b) $\frac{2\pi \text{rad}}{360^\circ} = \frac{x}{100^\circ} \Rightarrow x = \frac{2\pi \cdot 100}{360} = \frac{5\pi}{9}$ rad

c) $\frac{2\pi \text{rad}}{360^\circ} = \frac{x}{310^\circ} \Rightarrow x = \frac{2\pi \cdot 310}{360} = \frac{31\pi}{18}$ rad

6.A3 **Halla las razones trigonométricas de los ángulos α y β.**

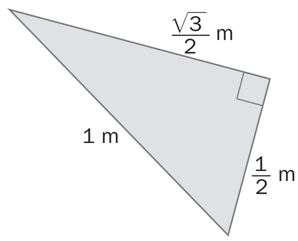


$h^2 = 100^2 - 60^2 = 6400 \Rightarrow h = 80$ cm

$\text{sen } \alpha = \frac{80}{100} = 0{,}8$ $\cos \alpha = \frac{60}{100} = 0{,}6$ $\text{tg } \alpha = \frac{80}{60} = 1{,}33$

$\text{sen } \beta = \frac{60}{100} = 0{,}6$ $\cos \beta = \frac{80}{100} = 0{,}8$ $\text{tg } \beta = \frac{60}{80} = 0{,}75$

6.A4 **Calcula la medida de los ángulos agudos del triángulo.**



$\text{sen } \alpha = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$ $\text{sen } \beta = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2} \Rightarrow \beta = 30^\circ$

6.A5 Halla las otras dos razones trigonométricas en cada caso.

a) Si $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{3}{10}$ y $90° \le \alpha \le 180°$

b) Si $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{24}$ y $0 \le \alpha \le \dfrac{\pi}{2}$

c) Si $\cos\alpha = \dfrac{1}{8}$ y $270° \le \alpha \le 360°$

d) Si $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{4}{3}$ y $\pi \le \alpha \le \dfrac{3\pi}{2}$

a) $\left(\dfrac{3}{10}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = 1 - \dfrac{9}{100} \Rightarrow \cos\alpha = -\sqrt{\dfrac{91}{100}} = -\dfrac{\sqrt{91}}{10}$; $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\frac{3}{10}}{-\frac{\sqrt{91}}{10}} = -\dfrac{3\sqrt{91}}{91}$

b) $1 + \left(\sqrt{24}\right)^2 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos^2\alpha = \dfrac{1}{25} \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{1}{5}$; $\operatorname{sen}\alpha = \sqrt{24}\cdot\dfrac{1}{5} = \dfrac{\sqrt{24}}{5} = \dfrac{2\sqrt{6}}{5}$

c) $\left(\dfrac{1}{8}\right)^2 + \operatorname{sen}^2\alpha = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}^2\alpha = 1 - \dfrac{1}{64} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = -\sqrt{\dfrac{63}{64}} = -\dfrac{\sqrt{63}}{8}$; $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{-\frac{\sqrt{63}}{8}}{\frac{1}{8}} = -\sqrt{63} = -3\sqrt{7}$

d) $1 + \left(\dfrac{4}{3}\right)^2 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos^2\alpha = \dfrac{9}{25} \Rightarrow \cos\alpha = -\dfrac{3}{5}$; $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{4}{3}\cdot\left(-\dfrac{3}{5}\right) = -\dfrac{4}{5}$

6.A6 Si el seno de un ángulo agudo α vale $\dfrac{1}{5}$, calcula:

a) $\operatorname{sen}(180° - \alpha)$ **b) $\cos(-\alpha)$** **c) $\cos(90° - \alpha)$** **d) $\operatorname{sen}(\alpha + 180°)$**

$$\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = 1 - \frac{1}{25} \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{\frac{24}{25}} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

a) $\operatorname{sen}(180° - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha = \dfrac{1}{5}$

c) $\cos(90° - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha = \dfrac{1}{5}$

b) $\cos(-\alpha) = \cos\alpha = \dfrac{2\sqrt{6}}{5}$

d) $\operatorname{sen}(\alpha + 180°) = -\operatorname{sen}\alpha = -\dfrac{1}{5}$

6.A7 Calcula los ángulos que cumplen cada una de las siguientes condiciones.

a) $\cos\alpha = -0{,}44$ **b) $\operatorname{tg}\beta = \sqrt{43}$** **c) $\operatorname{sen}\chi = \dfrac{8}{15}$** **d) $\operatorname{sen}\delta = -0{,}96$**

a) $\alpha = 116°\,6'\,14'' + 2k\pi$ con $k \in \mathbf{Z}$ y $\alpha = 243°\,53'\,46'' + 2k\pi$ con $k \in \mathbf{Z}$

b) $\beta = 81°\,19'\,45'' + 2k\pi$ con $k \in \mathbf{Z}$ y $\beta = 261°\,19'\,45'' + 2k\pi$ con $k \in \mathbf{Z}$

c) $\chi = 32°\,13'\,51'' + 2k\pi$ con $k \in \mathbf{Z}$ y $\chi = 147°\,46'\,8'' + 2k\pi$ con $k \in \mathbf{Z}$

d) $\delta = 253°\,44'\,23'' + 2k\pi$ con $k \in \mathbf{Z}$ y $\delta = 286°\,15'\,37'' + 2k\pi$ con $k \in \mathbf{Z}$

MURAL DE MATEMÁTICAS

MATETIEMPOS

El recorrido del oso

Un oso camina 10 kilómetros hacia el sur; luego gira al este y camina 8, gira hacia el norte y, andando otros 10 kilómetros llega al punto de partida. ¿Cómo es posible? ¿Cuál es la figura que muestra el recorrido del oso? ¿Cuánto miden sus ángulos?

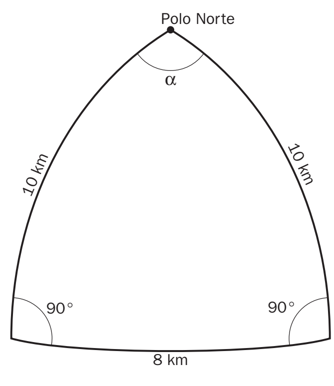
Para que el recorrido sea posible, el oso debe ser blanco y estar en el polo norte.

El oso recorre el perímetro de un triángulo isósceles curvo.

Dos de sus ángulos internos son de 90°, el otro es:

$$\alpha = \frac{8}{2\pi\cdot 6370}\cdot 360° = 0{,}072°$$

donde 6370 es el radio de la Tierra en kilómetros.



EJERCICIOS PROPUESTOS

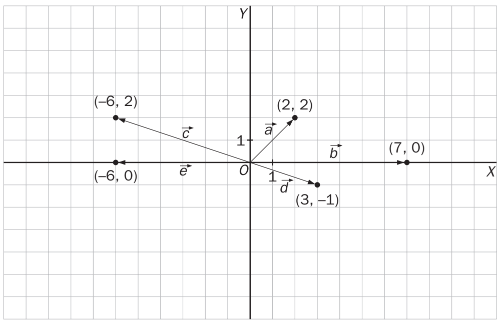
8.1 Las coordenadas de los vértices de un rectángulo son $A(2, 2)$; $B(2, 5)$; $C(6, 5)$, y $D(6, 2)$.
Halla las coordenadas y representa los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{DA}$. ¿Qué relación existe entre $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$? ¿Y entre $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{DA}$?

$\overrightarrow{AB} = (0, 3)$ $\quad$ $\overrightarrow{BC} = (4, 0)$ $\quad$ $\overrightarrow{CD} = (0, -3)$ $\quad$ $\overrightarrow{DA} = (-4, 0)$
$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$ $\quad$ $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{DA}$

8.2 Las coordenadas de un punto A son $(3, 1)$ y las del vector $\overrightarrow{AB}$ son $(3, 4)$. ¿Cuáles son las coordenadas del punto B? Determina otro punto C de modo que el vector $\overrightarrow{AC}$ tenga el mismo módulo y la misma dirección que el vector $\overrightarrow{AB}$, pero distinto sentido.

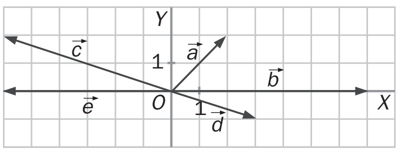
$B = (3 + 3, 4 + 1) = (6, 5)$ $\quad$ $\overrightarrow{AC} = (-3, -4)$ $\quad$ $C = (-3 + 3, -4 + 1) = (0, -3)$

8.3 Representa los vectores $\vec{a} = (2, 2)$; $\vec{b} = (7, 0)$; $\vec{c} = (-6, 2)$; $\vec{d} = (3, -1)$, y $\vec{e} = (-6, 0)$ con origen en el origen de coordenadas. ¿Qué coordenadas tienen los extremos de cada vector?



Las coordenadas de los extremos de cada vector coinciden con las coordenadas de los vectores.

8.4 Halla las coordenadas de los vectores de la figura.

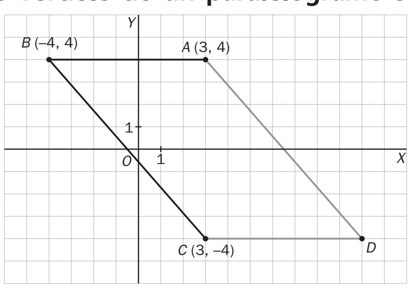


$\vec{a} = (2, 2)$
$\vec{b} = (7, 0)$
$\vec{c} = (-6, 2)$
$\vec{d} = (3, -1)$
$\vec{e} = (-6, 0)$

8.5 Dados los vectores $\vec{u} = (6, 5)$; $\vec{v} = (-3, 0)$ y $\vec{w} = (2, -4)$, calcula:
a) $2\vec{u}$
b) $3\vec{v} - \vec{w}$
c) $5(\vec{u} - \vec{v}) + \vec{w}$

a) $2\vec{u} = 2 \cdot (6, 5) = (12, 10)$
b) $3\vec{v} - \vec{w} = 3 \cdot (-3, 0) - (2, -4) = (-9, 0) - (2, -4) = (-11, 4)$
c) $5(\vec{u} - \vec{v}) + \vec{w} = 5 \cdot [(6, 5) - (-3, 0)] + (2, -4) = 5 \cdot (9, 5) + (2, -4) = (45, 25) + (2, -4) = (47, 21)$

8.6 Los vértices de un paralelogramo son $A(3, 4)$; $B(-4, 4)$; $C(3, -4)$, y D. ¿Cuáles son las coordenadas de D?



$D(10, -4)$

8.7 Dados los vectores $\vec{a} = (-7, 2)$; $\vec{b} = (10, -4)$; $\vec{c} = (14, -4)$, y $\vec{d} = (-19, 2)$, determina si son linealmente dependientes:

a) $\vec{a}$ y $\vec{b}$

b) $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{d}$

c) $\vec{a}$ y $\vec{c}$

d) $\vec{b}$, $\vec{c}$ y $\vec{d}$

a) $\vec{a} = \lambda\vec{b} \Rightarrow (-7, 2) = \lambda(10, -4)$ no tiene solución; por tanto, son linealmente independientes.

b) $\vec{a} = \alpha\vec{b} + \beta\vec{d} \Rightarrow (-7, 2) = \alpha(10, -4) + \beta(-19, 2) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -7 = 10\alpha - 19\beta \\ 2 = -4\alpha + 2\beta \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha = \dfrac{-3}{7} \\ \beta = \dfrac{1}{7} \end{array} \Rightarrow \vec{a}, \vec{b}$ y $\vec{d}$ son linealmente dependientes.

c) $(-2) \cdot \vec{a} = \vec{c} \Rightarrow$ linealmente dependientes.

d) $\vec{b} = \alpha\vec{c} + \beta\vec{d} \Rightarrow (10, -4) = \alpha(14, -4) + \beta(-19, 2) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 10 = 14\alpha - 19\beta \\ -4 = -4\alpha + 2\beta \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha = \dfrac{7}{6} \\ \beta = \dfrac{1}{3} \end{array} \Rightarrow \vec{a}, \vec{b}$ y $\vec{d}$ son linealmente dependientes.

8.8 Indica las coordenadas de los siguientes vectores y represéntalos gráficamente.

a) $\vec{a} = -7\vec{i} + 2\vec{j}$

b) $\vec{b} = 10\vec{i} - 4\vec{j}$

c) $\vec{c} = 14\vec{i} - 4\vec{j}$

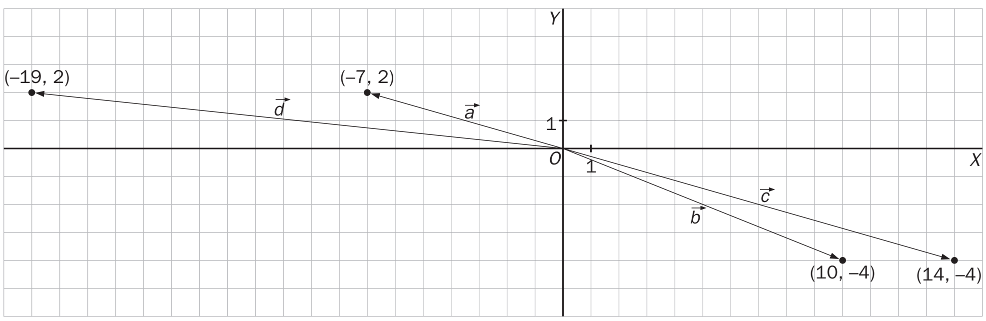
d) $\vec{d} = -19\vec{i} + 2\vec{j}$

a) $\vec{a} = -7\vec{i} + 2\vec{j} = -7(1, 0) + 2(0, 1) = (-7, 2)$

b) $\vec{b} = 10\vec{i} - 4\vec{j} = (10, -4)$

c) $\vec{c} = 14\vec{i} - 4\vec{j} = (14, -4)$

d) $\vec{d} = -19\vec{i} + 2\vec{j} = (-19, 2)$



8.9 Dados los vectores $\vec{u} = (1, 2)$; $\vec{v} = (3, -4)$; $\vec{w} = (2, -3)$ y $\vec{z} = (4, -6)$ realiza estas operaciones.

a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$

b) $\vec{w} \cdot \vec{z}$

c) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w}$

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (1, 2) \cdot (3, -4) = 3 - 8 = -5$

b) $\vec{w} \cdot \vec{z} = (2, -3) \cdot (4, -6) = 8 + 18 = 26$

c) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = [(1, 2) + (3, -4)] \cdot (2, -3) = (4, -2) \cdot (2, -3) = 8 + 6 = 14$

8.10 Los módulos de dos vectores son 6 y 10. Halla el producto escalar de ambos vectores si el ángulo que forman es de 60°.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v}) = 6 \cdot 10 \cdot \cos 60° = 60 \cdot \frac{1}{2} = 30$$

8.11 Calcula el módulo de estos vectores.

a) $\vec{a} = (3, -1)$

b) $\vec{b} = (-2, -7)$

c) $\vec{c} = (-4, 5)$

d) $\vec{d} = (6, 0)$

a) $|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$

b) $|\vec{b}| = \sqrt{(-2)^2 + (-7)^2} = \sqrt{53}$

c) $|\vec{c}| = \sqrt{(-4)^2 + 5^2} = \sqrt{41}$

c) $|\vec{d}| = \sqrt{6^2 + 0^2} = \sqrt{36} = 6$

8.12 Halla el módulo del vector de origen *A*(1, 1) y de extremo *B*(5, 4).

$$\overrightarrow{AB} = (5 - 1, 4 - 1) = (4, 3) \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$$

8.13 Dados los vectores $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ y $\vec{v} = \vec{i} + 5\vec{j}$, calcula:

a) $\vec{u}$

b) $\vec{v}$

c) Ángulo $(\vec{u}, \vec{v})$

a) $|\vec{u}| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$

b) $|\vec{v}| = \sqrt{1^2 + 5^2} = \sqrt{26}$

c) Ángulo $(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \dfrac{(2, 3) \cdot (1, 5)}{\sqrt{13}\sqrt{26}} = \dfrac{2 + 15}{13\sqrt{2}} = \dfrac{17}{13\sqrt{2}} = \dfrac{17\sqrt{2}}{26}$

8.14 ¿Qué ángulo forman dos vectores opuestos? ¿Qué ángulo forman dos vectores equipolentes? Razona tu respuesta con un dibujo.

Dos vectores opuestos forman un ángulo de 180°.

Dos vectores equipolentes forman un ángulo de 0°.

8.15 Dados los vectores $\vec{u} = (4, 3)$ y $\vec{v} = (12, 5)$, halla el ángulo que forman estas parejas.

a) $\vec{u}$ y $\vec{v}$ b) $-\vec{u}$ y $-\vec{v}$ c) $-\vec{u}$ y $\vec{v}$ d) $\vec{u}$ y $-\vec{v}$

a) $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \dfrac{(4, 3) \cdot (12, 5)}{\sqrt{4^2 + 3^2}\sqrt{12^2 + 5^2}} = \dfrac{48 + 15}{5 \cdot 13} = \dfrac{63}{65};$

ángulo $(\vec{u}, \vec{v}) = \text{arcos}\dfrac{63}{65} = 14° \ 15'$

b) $\cos(-\vec{u}, -\vec{v}) = \dfrac{(-4, -3) \cdot (-12, -5)}{\sqrt{(-4)^2 + (-3)^2}\sqrt{(-12)^2 + (-5)^2}} = \dfrac{48 + 15}{5 \cdot 13} = \dfrac{63}{65};$

ángulo $(-\vec{u}, -\vec{v}) = \text{arcos}\ \dfrac{63}{65} = 14° \ 15'$

c) $\cos(-\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{(-4, -3) \cdot (12, 5)}{\sqrt{(-4)^2 + (-3)^2}\sqrt{12^2 + 5^2}} = \dfrac{-48 - 15}{5 \cdot 13} = \dfrac{-63}{65};$

ángulo $(-\vec{u}, \vec{v}) = \text{arcos} = \dfrac{-63}{65} = 165° \ 45'$

d) $\cos(\vec{u}, -\vec{v}) = \dfrac{(4, 3) \cdot (-12, -5)}{\sqrt{4^2 + 3^2}\sqrt{(-12)^2 + (-5)^2}} = \dfrac{-48 - 15}{5 \cdot 13} = \dfrac{-63}{65};$

ángulo $(\vec{u}, -\vec{v}) = \text{arcos} -\dfrac{63}{54} = 165° \ 45'$

8.16 Los vértices de un triángulo son $A(1, 2)$; $B(6, 2)$, y $C(4, 6)$. Calcula las longitudes de sus lados.

$l_1 = d(A, B) = \sqrt{(6 - 1)^2 + (2 - 2)^2} = \sqrt{25 + 0} = 5$ u.l.

$l_2 = d(B, C) = \sqrt{(4 - 6)^2 + (6 - 2)^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ u.l.

$l_3 = d(C, A) = \sqrt{(1 - 4)^2 + (2 - 6)^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$ u.l.

8.17 Dado el punto $A(3, 2)$, halla las coordenadas de otro punto B sabiendo que se encuentra en el eje de ordenadas y que dista 5 unidades de A.

B será de la forma $(0, y)$.

$5 = d(A, B) = \sqrt{(3 - 0)^2 + (2 - y)^2} = \sqrt{9 + (2 - y)^2} \Rightarrow 25 = 9 + (2 - y)^2 \Rightarrow 25 = 9 + 4 - 4y + y^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow y^2 - 4y - 12 = 0 \Rightarrow y = \dfrac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot (-12)}}{2} = \dfrac{4 \pm 8}{2} = \left\langle \begin{matrix} 6 \\ -2 \end{matrix} \right.$

Hay dos soluciones: $B(0, 6)$ ó $B(0, -2)$.

8.18 Las coordenadas del punto medio del segmento AB son (3, 5). Halla las del punto B siendo $A(2, 9)$.

$$(3, 5) = \left(\frac{2 + a}{2}, \frac{9 + b}{2}\right) \Rightarrow \left.\begin{matrix} 6 = 2 + a \\ 10 + 9 + b \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} a = 4 \\ b = 1 \end{matrix} \Rightarrow B(4, 1)$$

8.19 Sean $A(2, 3)$ y $B(-8, 7)$ dos puntos del plano. Calcula las coordenadas del punto medio del segmento AB.

$$M = \left(\frac{2 - 8}{2}, \frac{3 + 7}{2}\right) = (-3, 5)$$

8.20 Halla la ecuación vectorial y las ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por $A(-2, 4)$ y tiene como vector director $\vec{v} = 3\vec{i} - \vec{j}$.

Ecuación vectorial: $(x, y) = (-2, 4) + t(3, -1)$

Ecuaciones paramétricas: $\left.\begin{array}{l} x = -2 + 3t \\ y = 4 - t \end{array}\right\}$

8.21 Determina todas las formas de la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(-2, 5)$ y lleva la dirección $\vec{v} = (4, 1)$.

Ecuación vectorial: $(x, y) = (-2, 5) + t(4, 1)$

Ecuaciones paramétricas: $\left.\begin{array}{l} x = -2 + 4t \\ y = 5 + t \end{array}\right\}$

Ecuación continua: $\dfrac{x + 2}{4} = \dfrac{y - 5}{1}$

$x + 2 = 4y - 20 \Rightarrow x - 4y + 22 = 0$; ecuación general

Ecuación punto-pendiente: $y - 5 = \dfrac{1}{4}(x + 2)$

$y - 5 = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{2} \Rightarrow y = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{11}{2}$; ecuación explícita

8.22 Halla la ecuación punto-pendiente y la ecuación explícita de la recta que pasa por el punto $A(2, 8)$ y tiene como vector director $\vec{v} = (-1, 9)$.

Ecuación punto-pendiente: $y - 8 = -9(x - 2)$

$y - 8 = -9x + 18 \Rightarrow y = -9x + 26$; ecuación explícita.

8.23 Indica un punto y un vector de estas rectas.

a) $(x, y) = (2, 4) + t(5, -3)$

b) $\dfrac{x - 3}{3} = \dfrac{y + 2}{2}$

c) $\left.\begin{array}{l} x = -1 + 9t \\ y = -8 - 6t \end{array}\right\}$

d) $2x - 3y + 8 = 0$

a) $P(2, 4)$ $\vec{v}(5, -3)$
b) $P(3, -2)$ $\vec{v}(3, 2)$
c) $P(-1, -8)$ $\vec{v}(9, -6)$
d) $P(-4, 0)$ $\vec{v}(3, 2)$

8.24 Halla todas las formas de la ecuación de la recta que pasa por el origen de coordenadas y tiene como pendiente $m = -7$.

Ecuación punto-pendiente: $y = -7x$
Ecuación explícita: $y = -7x$
Ecuación vectorial: $(x, y) = t(1, -7)$
Ecuaciones paramétricas: $\left.\begin{array}{l} x = t \\ y = -7t \end{array}\right\}$

Ecuación continua: $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{-7}$

Ecuación general: $7x + y = 0$

8.25 Halla la ecuación en forma continua de la recta que pasa por los puntos $P(-4, 0)$ y $Q(0, 2)$.

$PQ(4, 2)$; ecuación continua: $\dfrac{x + 4}{4} = \dfrac{y}{2}$

8.26 Halla todas las formas de la ecuación de la recta que pasa por los puntos *P*(3, 0) y *Q*(0, −3).

Ecuación segmentaria: $\frac{x}{3} + \frac{y}{-3} = 1$

$\overrightarrow{PQ}(-3, -3)$; ecuación continua: $\frac{x-3}{-3} = \frac{y}{-3}$

Ecuación vectorial: $(x, y) = (3, 0) + t(-3, -3)$

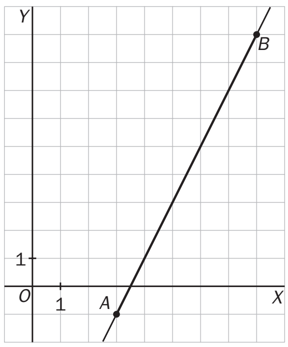
Ecuaciones paramétricas: $\left.\begin{array}{l} x = 3 - 3t \\ y = -3t \end{array}\right\}$

Ecuación general: $x - y - 3 = 0$

Ecuación punto-pendiente: $y = x - 3$

Ecuación explícita: $y = x - 3$

8.27 Representa gráficamente la recta que pasa por los puntos *A*(3, −1) y *B*(8, 9), y halla todas las formas de su ecuación.



$\overrightarrow{AB}(5, 10)$. Ecuación continua: $\frac{x-3}{5} = \frac{y+1}{10}$

Ecuación vectorial: $(x, y) = (3, -1) + t(5, 10)$

Ecuaciones paramétricas: $\left.\begin{array}{l} x = 3 + 5t \\ y = -1 + 10t \end{array}\right\}$ $\quad 10x - 30 = 5y + 5$

Ecuación general: $10x - 5y - 35 = 0$; $2x - y - 7 = 0$

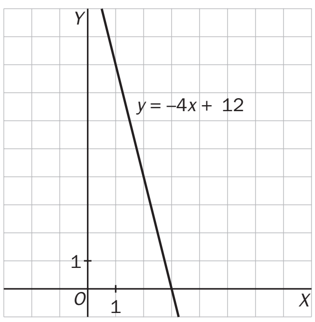
Ecuación punto-pendiente: $y + 1 = 2(x - 3)$

Ecuación explícita: $y = 2x - 7$

Puntos de corte con los ejes: (3,5; 0) (0, −7)

Ecuación segmentaria: $\frac{x}{3{,}5} + \frac{y}{-7} = 1$

8.28 Representa la recta de ecuación $y = -4x + 12$, y halla las restantes formas de su ecuación.



Ecuación explícita: $y = -4x + 12$

Ecuación vectorial: $(x, y) = (0, 12) + t(1, -4)$

Ecuaciones paramétricas: $\left.\begin{array}{l} x = t \\ y = 12 - 4t \end{array}\right\}$

Ecuación continua: $\frac{x}{1} = \frac{y-12}{-4}$

Ecuación general: $4x + y - 12 = 0$

Ecuación punto-pendiente: $y - 12 = -4x$

Puntos de corte con los ejes: (3, 0) (0, 12)

Ecuación segmentaria: $\frac{x}{3} + \frac{y}{12} = 1$

8.29 Dadas la recta r, determinada por los puntos *A*(2, 3) y *B*(4, 7), y la recta *s*, determinada por los puntos C(2, 7) y *D*(7, 8), razona si *r* y *s* son paralelas o secantes.

$\overrightarrow{AB}(2, 4)$. Ecuación continua: $\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{4} \Rightarrow 4x - 8 = 2y - 6 \Rightarrow$ ecuación general: $4x - 2y - 2 = 0$

$\overrightarrow{CD}$ (5, 1). Ecuación continua: $\frac{x-2}{5} = \frac{y-7}{1} \Rightarrow x - 2 = 5y - 35 \Rightarrow$ ecuación general: $x - 5y + 33 = 0$

$$\frac{4}{1} \neq \frac{-2}{-5} \Rightarrow r \text{ y } s \text{ son secantes.}$$

8.30 Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto *A*(1, 2) y es paralela a la recta de ecuación $5x + 3y + 7 = 0$.

Si son paralelas, sus pendientes coincidirán: $m = -\frac{5}{3}$; además conocemos un punto de la recta.

$$y - 2 = -\frac{5}{3}(x - 1)$$

8.31 Calcula el ángulo obtuso que forman los vectores $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{BD}$ del cuadrilátero anterior.

$A(4, 1)$, $B(1, 5)$, $C(9, 11)$, $D(4 + 8, 6 + 1) = (12, 7)$ $\overrightarrow{AC}(5, 10)$ $\overrightarrow{BD}(11, 2)$

$$\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}) = \frac{(5, 10) \cdot (11, 2)}{\sqrt{5^2 + 10^2}\sqrt{11^2 + 2^2}} = \frac{55 + 20}{125} = \frac{75}{125} = \frac{3}{5} \Rightarrow \text{arcos}\,\frac{3}{5} = 53°\ 7'\ 48''$$

Ángulo obtuso $= 180° - 53°\ 7'\ 48'' = 126°\ 52'\ 12''$

8.32 Halla las coordenadas del punto medio M del lado $\overrightarrow{BC}$ del cuadrilátero anterior, y calcula el ángulo agudo formado por los vectores $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AM}$.

$$M = \left(\frac{1 + 9}{2}, \frac{5 + 11}{2}\right) = (5, 8)$$ $\overrightarrow{AC}(5,10)$, $\overrightarrow{AM}(1, 7)$

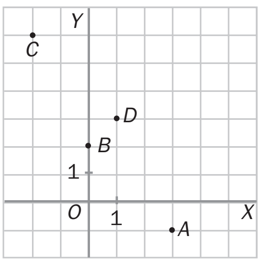
$$\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AM}) = \frac{(5, 10) \cdot (1, 7)}{\sqrt{5^2 + 10^2}\sqrt{1^2 + 7^2}} = \frac{5 + 70}{\sqrt{125}\sqrt{50}} = \frac{75}{25\sqrt{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10} \Rightarrow \text{Ángulo: } 18°\ 26'\ 6''$$

ACTIVIDADES

EJERCICIOS PARA ENTRENARSE

Vectores y operaciones

8.33 Calcula las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$. ¿Qué relación existe entre ellos?

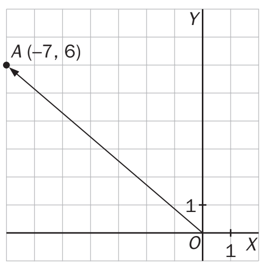


a) $\overrightarrow{AB} = (0, 2) - (3, -1) = (-3, 3)$

b) $\overrightarrow{CD} = (1, 3) - (-2, 6) = (3, -3)$

Los vectores son opuestos.

8.34 Representa el vector de posición del punto $A(-7, 6)$. ¿Cuáles son sus coordenadas cartesianas?



Las coordenadas de $\overrightarrow{OA}$ son las mismas que las de A, $(-7, 6)$.

8.35 Las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$ son (5, 3). Siendo $B(-1, 4)$, calcula las coordenadas del punto A.

$$(5, 3) = (-1 - x, 4 - y) \Rightarrow x = -1 - 5 = -6;\ y = 4 - 3 = 1 \Rightarrow A = (-6, 1)$$

8.36 Opera:

a) $(2, -1) - (4, 3)$
b) $6(-3, 1) + (10, -2)$
c) $2(-4, 0) - 3(-1, 2)$
d) $4(1, -1) + 2(3, 0)$
e) $(3, -1) - 5(1, -2)$
f) $(9, 6) - 2(4, 1)$

a) $(2, -1) - (4, 3) = (-2, -4)$
b) $6 \cdot (-3, 1) + (10, -2) = (-8, 4)$
c) $2(-4, 0) - 3(-1, 2) = (-5, -6)$
d) $4 \cdot (1, -1) + 2 \cdot (3, 0) = (10, -4)$
e) $(3, -1) - 5(1, -2) = (-2, 9)$
f) $(9, 6) - 2(4, 1) = (1, 4)$

8.37 Dados los vectores $\vec{u} = (5, -3)$; $\vec{v} = (-1, 4)$, y $\vec{w} = (2, 2)$, calcula:

a) $\vec{u} - (\vec{v} + \vec{w})$

b) $3\vec{u} - 2(\vec{w} - \vec{v})$

c) $\frac{1}{2}(\vec{v} - \vec{u})$

d) $5\vec{w} - 3\vec{v} + \vec{u}$

e) $2(\vec{w} + \vec{v}) - \vec{u}$

f) $\frac{3}{4}\vec{u} - 2\vec{v} + \vec{w}$

a) $\vec{u} - (\vec{v} + \vec{w}) = (5, -3) - [(-1, 4) + (2, 2)] = (5, -3) - (1, 6) = (4, -9)$

b) $3\vec{u} - 2(\vec{w} - \vec{v}) = 3 \cdot (5, -3) - 2 \cdot [(2, 2) - (-1, 4)] = (15, -9) - 2 \cdot (3, -2) = (9, -5)$

c) $\frac{1}{2}(\vec{v} - \vec{u}) = \frac{1}{2}[(-1, 4) - (5, -3)] = \left(-3, \frac{7}{2}\right)$

d) $5\vec{w} - 3\vec{v} + \vec{u} = 5 \cdot (2, 2) - 3 \cdot (-1, 4) + (5, -3) = (10, 10) - (-3, 12) + (5, -3) = (18, -5)$

e) $2(\vec{w} + \vec{v}) - \vec{u} = 2 \cdot [(2, 2) + (-1, 4)] - (5, -3) = 2 \cdot (1, 6) - (5, -3) = (-3, 15)$

f) $\frac{3}{4}\vec{u} - 2\vec{v} + \vec{w} = \frac{3}{4}(5, -3) - 2(-1, 4) + (2, 2) = \left(\frac{15}{4}, \frac{-9}{4}\right) - (-2, 8) + (2, 2) = \left(\frac{15}{4}, \frac{-9}{4}\right) + (4, -6) = \left(\frac{31}{4}, \frac{-33}{4}\right)$

8.38 Calcula el valor de x e y en las siguientes igualdades.

a) $(5, -9) = 3(x, y) - 2(x, 0)$

b) $(x, -4) = 2(y, 5) + (3, x)$

c) $(2y, 0) = (x, y) - 2(x, 5)$

d) $(3x, -y) = 2(1, -x) + (y, 9)$

a) $(5, -9) = (3x - 2x, 3y) \Rightarrow 5 = x, -9 = 3y$; $x = 5, y = -3$

b) $(x, -4) = (2y + 3, 10 + x) \Rightarrow \begin{cases} x = 2y + 3 \\ -4 = 10 + x \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = -14 \\ 2y = -17;\ y = -\frac{17}{2} \end{matrix}$

c) $(2y, 0) = (x - 2x, y - 10) \Rightarrow \begin{cases} 2y = -x \\ 0 = y - 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} y = 10 \\ x = -20 \end{matrix}$

d) $(3x, -y) = (2 + y, -2x + 9) \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2 + y \\ -y = -2x + 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = -7 \\ y = -23 \end{matrix}$

Combinación lineal de vectores

8.39 Considera el vector $\vec{z} = -4\vec{i} + 3\vec{j}$, siendo $\vec{i} = (1, 0)$ y $\vec{j} = (0, 1)$. ¿Es $\vec{z}$ combinación lineal de $\vec{i}$ y de $\vec{j}$? ¿Cuáles son sus coordenadas cartesianas?

$\vec{z} = -4\vec{i} + 3\vec{j}$, es combinación lineal de $\vec{i}$ y $\vec{j}$.
Coordenadas cartesianas $(-4, 3)$

8.40 Sabiendo que $\vec{u} = 2\vec{v} - 3\vec{w}$, expresa:

a) $\vec{v}$ como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{w}$.

b) $\vec{w}$ como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

a) $\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{3}{2}\vec{w}$

b) $\vec{w} = \frac{2}{3}\vec{v} - \frac{1}{3}\vec{u}$

8.41 Estudia si los vectores $\vec{u} = (2, -4)$; $\vec{v} = (3, 1)$, y $\vec{w} = (11, -15)$ son linealmente dependientes.

$(11, -15) = a(2, -4) + b(3, 1) \Rightarrow \begin{cases} 11 = 2a + 3b \\ -15 = -4a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 11 = 2a + 3b \\ 45 = 12a - 3b \end{cases}$

$56 = 14a \Rightarrow a = 4$

$b = -15 + 4 \cdot 4 = 1$
Son linealmente dependientes.

8.42 Calcula las coordenadas cartesianas de los vectores $\vec{u} = 2\vec{a} - \vec{b}$ y $\vec{v} = 6\vec{a} - 4\vec{b}$ sabiendo que:

$\vec{a} = -3\vec{i} + 6\vec{j}$ $\qquad$ $\vec{b} = 5\vec{i} + 2\vec{j}$

a) $\vec{u} = 2(-3\vec{i} + 6\vec{j}) - (5\vec{i} + 2\vec{j}) = -11\vec{i} + 10\vec{j}$. Sus coordenadas cartesianas son $(-11, 10)$.

b) $\vec{v} = 6(-3\vec{i} + 6\vec{j}) - 4(5\vec{i} + 2\vec{j}) = -38\vec{i} + 28\vec{j}$. Sus coordenadas cartesianas son $(-38, 28)$.

Producto escalar

8.43 Dados los vectores $\vec{u} = (-6, 8)$ y $\vec{v} = (1, 7)$, calcula:
a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$ b) $(-2\vec{u}) \cdot \vec{v}$ c) $|\vec{u}|$

a) $(-6, 8) \cdot (1, 7) = -6 + 56 = 50$
b) $(12, -16) \cdot (1, 7) = 12 - 112 = -100$
c) $\sqrt{(-6)^2 + 8^2} = 10$

8.44 Estudia si los vectores de las siguientes parejas son perpendiculares entre sí.
a) $\vec{u} = (6, 9)$ y $\vec{v} = (-3, 2)$
b) $\vec{u} = (2, 4)$ y $\vec{v} = (-8, -4)$
c) $\vec{u} = (-3, 6)$ y $\vec{v} = (10, 5)$
d) $\vec{u} = (-1, -2)$ y $\vec{v} = (4, 2)$

a) $(6, 9) \cdot (-3, 2) = -18 + 18 = 0$. Sí son perpendiculares.
b) $(2, 4) \cdot (-8, -4) = -16 - 16 = -32$. No son perpendiculares.
c) $(-3, 6) \cdot (10, 5) = -30 + 30 = 0$. Sí son perpendiculares.
d) $(-1, -2) \cdot (4, 2) = -4 - 4 = -8$. No son perpendiculares.

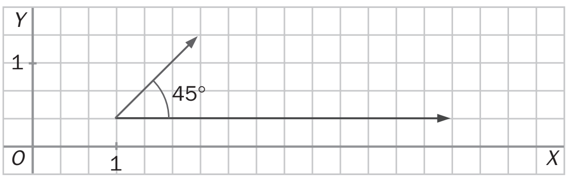
8.45 Halla el ángulo que forman los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en cada caso.
a) $\vec{u} = \left(2, \sqrt{3}\right)$ y $\vec{v} = \left(\sqrt{3}, 1\right)$
b) $\vec{u} = (-6, 10)$ y $\vec{v} = (3, -5)$
c) $\vec{u} = \left(2, \sqrt{2}\right)$ y $\vec{v} = \left(-2, \sqrt{2}\right)$

a) $\cos\alpha = \dfrac{\left(2, \sqrt{3}\right) \cdot \left(\sqrt{3}, 1\right)}{\sqrt{4 + 3} \cdot \sqrt{3 + 1}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} \Rightarrow \alpha = 10{,}89° = 10°\ 53'\ 36''$

b) $\cos\alpha = \dfrac{(-6, 10) \cdot (3, -5)}{\sqrt{36 + 100} \cdot \sqrt{9 + 25}} = \dfrac{-68}{\sqrt{4624}} = -1 \Rightarrow \alpha = 180°$

c) $\cos\alpha = \dfrac{\left(2, \sqrt{2}\right) \cdot \left(-2, \sqrt{2}\right)}{\sqrt{4 + 2} \cdot \sqrt{4 + 2}} = \dfrac{-2}{6} = -\dfrac{1}{3} \Rightarrow \alpha = 109{,}47° = 109°\ 28'\ 16''$

8.46 Halla el producto escalar de los vectores de la figura.



$|\vec{u}| = 4$
$|\vec{v}| = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$
$\vec{u} \cdot \vec{v} = 4\sqrt{2} \cos 45° = 4$

8.47 Calcula el ángulo que forman los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en cada uno de los siguientes casos.
a) $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 1$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \sqrt{3}$ b) $|\vec{u}| = 4$, $|\vec{v}| = 8$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 16\sqrt{2}$

a) $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2 \cdot 1} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = 30°$

b) $\cos\alpha = \dfrac{16\sqrt{2}}{4 \cdot 8} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 45°$

8.48 Siendo $\vec{u} = (4, x)$, halla el valor de x en cada una de las siguientes situaciones.
a) Si el módulo de $\vec{u}$ mide 20 unidades.
b) Si el producto escalar de $\vec{u}$ y $\vec{v} = (3, -5)$ es igual a 2.

a) $\sqrt{16 + x^2} = 20 \Rightarrow 16 + x^2 = 400 \Rightarrow x^2 = 384 \Rightarrow x = \sqrt{384} = 8\sqrt{6}$

b) $(4, x) \cdot (3, -5) = 2 \Rightarrow 12 - 5x = 2 \Rightarrow x = \dfrac{10}{5} = 2$

8.49 Calcula el valor de a para que los vectores $\vec{u} = (a, 3)$ y $\vec{v} = (-1, 5)$ sean perpendiculares.

$(a, 3) \cdot (-1, 5) = 0 \Rightarrow -a + 15 = 0 \Rightarrow a = 15$

8.50 Determina un vector cuyo módulo mida $\sqrt{10}$ unidades y que sea perpendicular a $\vec{v} = (6, -2)$.

$$\left.\begin{array}{l}(x, y) \cdot (6, -2) = 0 \\ \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{10}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}6x - 2y = 0 \\ x^2 + y^2 = 10\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}y = 3x \\ x^2 + (3x)^2 = 10 \rightarrow 10x^2 = 10 \rightarrow x = \pm 1;\ y = \pm 3\end{array}$$

Vectores: (1, 3) (−1, −3)

8.51 Calcula la distancia entre los puntos:
a) $A(4, -2)$ y $B(0, 9)$
b) $C(-1, 10)$ y $D(8, -5)$

a) $d(A, B) = \sqrt{(0 - 4)^2 + (9 + 2)^2} = \sqrt{137}$

b) $d(C, D) = \sqrt{(8 + 1)^2 + (-5 - 10)^2} = \sqrt{306} = 3\sqrt{34}$

8.52 Halla las coordenadas de los puntos medios de los lados del triángulo de vértices $A(2, 1)$; $B(2, 5)$ y $C(-2, 3)$.

$M_{AB} = \left(\frac{2 + 2}{2}, \frac{1 + 5}{2}\right) = (2, 3)$ $\quad M_{BC} = \left(\frac{2 - 2}{2}, \frac{5 + 3}{2}\right) = (0, 4)$ $\quad M_{CA} = \left(\frac{-2 + 2}{2}, \frac{3 + 1}{2}\right) = (0, 2)$

Ecuaciones de la recta

8.53 Determina un punto por el que pasan y un vector director de cada una de las siguientes rectas.

a) $\dfrac{x - 3}{-2} = \dfrac{y + 4}{5}$

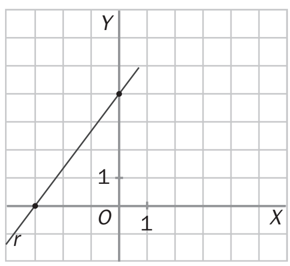
b) $4x - y = 0$

c) $\left.\begin{array}{l}x = 2 - t \\ y = 5 + 3t\end{array}\right\}$

d) $(x, y) = (4, 0) + t(2, -6)$

a) $A(3, -4)$; $\vec{v} = (-2, 5)$
b) $A(1, 4)$; $\vec{v} = (1, 4)$
c) $A(2, 5)$; $\vec{v} = (-1, 3)$
d) $A(4, 0)$; $\vec{v} = (2, -6)$

8.54 Halla todas las formas de la ecuación de la recta de la figura.



Ecuación segmentaria: $\dfrac{x}{-3} + \dfrac{y}{4} = 1$

Ecuación continua: $\dfrac{x + 3}{3} = \dfrac{y}{4}$

Ecuación vectorial: $(x, y) = (-3, 0) + t(3, 4)$

Ecuaciones paramétricas: $\left.\begin{array}{l}x = -3 + 3t \\ y = 4t\end{array}\right\}$

Ecuación general: $4x - 3y + 12 = 0$

Ecuación punto-pendiente: $y = \dfrac{4}{3}(x + 3)$

Ecuación explícita: $y = \dfrac{4}{3}x + 4$

$P(-3, 0)$ $\quad Q(0, 4)$ $\quad \overrightarrow{PQ}(3, 4)$

8.55 Halla la pendiente de la recta $3x + 2y - 6 = 0$.

$$m = -\frac{3}{2}$$

8.56 Escribe la ecuación segmentaria de la recta que pasa por los puntos $A(5, 0)$ y $B(0, 2)$.

$$\frac{x}{5} + \frac{y}{2} = 1$$

8.57 Expresa en forma continua la recta $y = 2x + 1$.

$$P(0, 1);\ \vec{v} = (1, 2) \Rightarrow \frac{x}{1} = \frac{y - 1}{2}$$

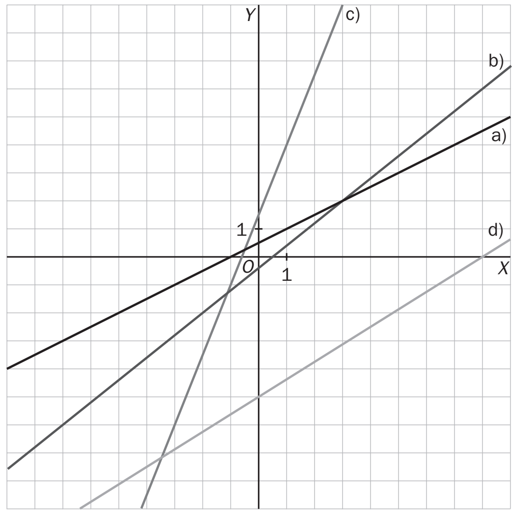
8.58 Halla la pendiente y un punto por el que pasa cada una de las siguientes rectas. Represéntalas gráficamente.

a) $\dfrac{x+1}{2} = y$

b) $\dfrac{x-3}{5} = \dfrac{y-2}{-4}$

c) $5x - 2y + 3 = 0$

d) $\dfrac{x}{8} - \dfrac{y}{5} = 1$



a) $A(-1, 0) \qquad \vec{v} = (2, 1) \qquad m = \dfrac{1}{2}$

b) $\dfrac{x-3}{5} = \dfrac{y-2}{-4} \Rightarrow A(3, 2);\ \vec{v} = (5, -4) \qquad m = \dfrac{-4}{5}$

c) $x = 1 \Rightarrow 5 \cdot 1 - 2y + 3 = 0 \Rightarrow y = 4$

$\Rightarrow A(1, 4)\ ;\ \vec{v} = (2, 5) \qquad m = \dfrac{5}{2}$

d) $A(0, -5);\ \vec{v} = (8, 5) \qquad m = \dfrac{5}{8}$

Posiciones relativas

8.59 Estudia la posición relativa de los siguientes pares de rectas y, si son secantes, halla su punto de corte.

a) r: $2x - 5y + 7 = 0$ $\qquad$ s: $x - 2y - 2 = 0$

b) r: $6x + 4y - 12 = 0$ $\qquad$ s: $3x + 2y - 6 = 0$

c) r: $x - 5y + 3 = 0$ $\qquad$ s: $3x - 15y + 8 = 0$

a) $\dfrac{2}{1} \neq \dfrac{-5}{-2} \Rightarrow$ Son secantes.

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{r}2x - 5y + 7 = 0\\ x - 2y - 2 = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r}2x - 5y + 7 = 0\\ -2x + 4y + 4 = 0\end{array}\right\}\\ \hline \qquad\qquad -y + 11 = 0 \Rightarrow y = 11\\ \qquad\qquad x = 2 \cdot 11 + 2 = 24\end{array}\right\} \Rightarrow \text{Punto de corte } (24, 11)$$

b) $\dfrac{6}{3} = \dfrac{4}{2} = \dfrac{-12}{-6} \Rightarrow$ Son coincidentes.

c) $\dfrac{1}{3} = \dfrac{-5}{-15} \neq \dfrac{3}{8} \Rightarrow$ Son paralelas.

8.60 Se consideran las rectas r: $y = x - 3$ y s, determinada por los puntos $A(7, 5)$ y $B(-4, 1)$. ¿Cuál es su posición relativa?

r: $x - y + 3 = 0$

s: $\dfrac{x-7}{-4-7} = \dfrac{y-5}{1-5} \Rightarrow -4x + 28 = -11y + 55 \Rightarrow 4x - 11y + 27 = 0$

$\dfrac{1}{4} \neq \dfrac{-1}{-11} \Rightarrow$ Son secantes.

8.61 Halla la ecuación punto-pendiente de la recta que pasa por el punto $A(1, 3)$ y tiene la misma pendiente que la recta $y = 4x + 9$.

$m = 4 \qquad y - 3 = 4 \cdot (x - 1)$

8.62 Halla la ecuación explícita de la recta que pasa por el punto $A(-2, 4)$ y es paralela a la que tiene por ecuación $7x - 14y + 3 = 0$.

$m = \dfrac{7}{14} = \dfrac{1}{2} \qquad y - 4 = \dfrac{1}{2} \cdot (x + 2) \ \Rightarrow\ y = \dfrac{1}{2}x + 5$

8.63 Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto de corte de *r*: $8x - 5y + 2 = 0$ y *s*: $2x + y - 4 = 0$, y por el punto $A(0, 3)$.

$$\left.\begin{array}{r} 8x - 5y + 2 = 0 \\ 2x + y - 4 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow y = 4 - 2x$$

$8x - 5 \cdot (4 - 2x) + 2 = 0 \Rightarrow 8x - 20 + 10x + 2 = 0 \Rightarrow 18x = 18 \Rightarrow x = 1; y = 4 - 2 \cdot 1 = 2 \Rightarrow A(1, 2)$

La recta es $\dfrac{x-1}{0-1} = \dfrac{y-2}{3-2} \Rightarrow \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y-2}{1}$.

8.64 Estudia si las rectas

***r*: $3x + y - 5 = 0$**

***s*: $2x - y = 0$**

***t*: $x + 4y - 9 = 0$**

se cortan en un mismo punto y, en caso afirmativo, calcula sus coordenadas.

Se halla primero el punto de corte de dos de ellas:

$$\left.\begin{array}{r} 3x + y - 5 = 0 \\ 2x - y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 2 \end{array}$$

El punto de corte de *r* y *s* es (1, 2).

Ahora se comprueba si ese punto pertenece a *t*: $1 + 4 \cdot 2 - 9 = 0$.

Por tanto, las tres rectas se cortan en el mismo punto: (1, 2).

CUESTIONES PARA ACLARARSE

8.65 Siendo $A(1, 4)$ y $B(0, 6)$, ¿el vector fijo $\overrightarrow{AB}$ es un representante del vector libre $\vec{u} = (-1, 2)$?

$\overrightarrow{AB} = (0, 6) - (1, 4) = (-1, 2)$

Sí lo es, porque tienen las mismas coordenadas.

8.66 ¿Son equipolentes dos vectores opuestos? Razona tu respuesta.

No, porque tienen distinto sentido.

8.67 Clasifica las siguientes operaciones según sea su resultado un número o un vector.

a) $k(\vec{u} \cdot \vec{v})$ b) $k(\vec{u} + \vec{v})$ c) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w})$ d) $k + (\vec{u} \cdot \vec{v})$

a) Número b) Vector c) Número d) Número

8.68 ¿Cuál es el producto escalar de dos vectores de igual módulo y dirección, pero que tienen sentido contrario?

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\alpha = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 180° = -|\vec{a}|^2$

8.69 Si el producto escalar de dos vectores de módulo 1 es igual a 1, ¿cómo son su dirección y su sentido?

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\alpha = 1 \cdot 1 \cdot \cos\alpha = 1 \Rightarrow \cos\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 0°$

Su dirección y su sentido son iguales

8.70 ¿Es posible que el producto escalar de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sea igual a 12 si $|\vec{u}| = 3$ y $|\vec{v}| = 4$? ¿Por qué?

$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha = 3 \cdot 4 \cdot \cos\alpha = 12$ si $\cos\alpha = 1$; es decir, si tienen la misma dirección y sentido.

8.71 a) Razona si es posible determinar la ecuación de una recta sabiendo que pasa por el punto $A(0, 6)$ y que su ordenada en el origen es 6.

b) ¿Y si la recta pasa por el punto *A* y por el origen de coordenadas?

a) No, porque que la ordenada en el origen sea 6 quiere decir que pasa por el punto de primera coordenada 0 y de segunda coordenada 6, que es el punto *A*, y, por tanto, solo se sabe un punto de la recta y, para que quede determinada, se necesita al menos otro.

b) En este caso, sí es posible determinarla, porque se conocen dos puntos por los que pasa.

8.72 Relaciona en tu cuaderno las rectas dadas por las siguientes ecuaciones con los elementos que les corresponden.

$\dfrac{x-5}{2} = \dfrac{y-2}{-4}$	$n = \dfrac{5}{8}$
$y + 1 = 3x$	$A(7, -2)$
$3x + 8y - 5 = 0$	$\vec{u} = (1, 5)$
$y = 5x + 4$	$m = 3$

8.73 ¿Cuál es la posición relativa de dos rectas

a) que tienen la misma dirección y un punto en común?

b) con distinta dirección?

c) que en su ecuación punto-pendiente tienen la misma pendiente y el punto distinto?

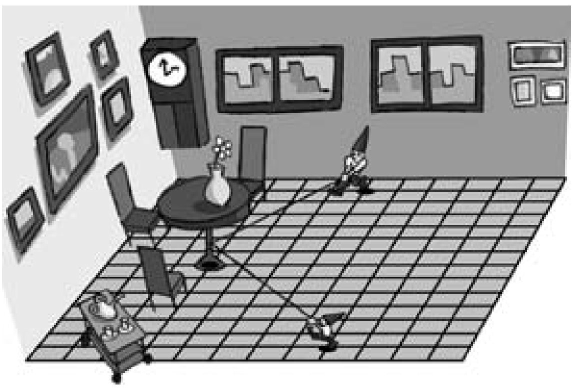
a) Coincidentes.

b) Secantes.

c) Paralelas

PROBLEMAS PARA APLICAR

8.74 Para arrastrar una mesa muy pesada de tablero circular y con una pata en el centro, se atan dos cuerdas y se tira de ellas como muestra la figura.



Si se utilizase una única cuerda para obtener el mismo resultado que con las dos anteriores, ¿qué fuerza debería aplicarse?

La fuerza que se ejerce sobre cada una de las cuerdas tiene el mismo módulo, dirección y sentido que los vectores

$\vec{a} = (3, 6)$ y $\vec{b} = (5, -6)$.

La cuerda se obtendría como resultado de sumar las otras dos.

$\vec{a} + \vec{b} = (3, 6) + (5, -6) = (8, 0) = (8, 0)$

8.75 Una maqueta de un barco de vela es empujada por la corriente del agua de un estanque que ejerce una fuerza $\vec{f}_a = (10, 8)$. A su vez, el viento sopla con una fuerza $\vec{f}_v = (-3, -1)$.

¿En qué dirección y sentido es la fuerza resultante? ¿Cuál es su módulo?

El barco se desplaza según el resultado de sumar a la fuerza de la corriente la del viento: $(10, 8) + (-3, -1) = (7, 7)$

El barco se desplaza en el mismo sentido que la fuerza de la corriente.

Su módulo es: $\sqrt{7^2 + 7^2} = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}$.

8.76 En un radar se observa el vuelo de dos aviones. Uno de ellos se encuentra en el punto de coordenadas (5, 3) y se desplaza siguiendo la dirección del vector $\vec{u} = (-4, 7)$. La trayectoria del segundo queda determinada por la recta de ecuación $7x + 4y + 83 = 0$.

Si continuaran su vuelo de forma indefinida, ¿chocarían en algún momento?

Trayectoria del primer avión: $\dfrac{x-5}{-4} = \dfrac{y-3}{7} \Rightarrow 7x + 4y - 47 = 0$

Trayectoria del segundo avión: $7x + 4y + 83 = 0$

La posición relativa de los dos es: $\dfrac{7}{7} = \dfrac{4}{4} \neq \dfrac{-47}{83}$

Las trayectorias son paralelas. Por tanto, no chocarían en ningún momento.

8.77 Para regar los árboles de un jardín se van a colocar unas tuberías que comuniquen unos con otros. Si dos de esos árboles están situados en puntos de coordenadas *A*(4, 6) y *B*(9, 8) y otro de ellos en el punto *C*(0, 6), ¿sería posible conseguir que una tubería recta pasase por los tres a la vez?

Recta que une los puntos *A* y *B*: $\dfrac{x-4}{9-4} = \dfrac{y-6}{8-6} \Rightarrow \dfrac{x-4}{5} = \dfrac{y-6}{2}$

Se comprueba si el punto *C* pertenece a esa recta: $\dfrac{0-4}{5} = \dfrac{6-6}{2} \Rightarrow \dfrac{0-4}{5} \neq \dfrac{6-6}{2}$

No se podría colocar una tubería recta que pasara por los tres árboles a la vez.

8.78 Un barco lanza un mensaje de socorro. Su posición viene dada por el punto *A*(1460, 765). Dos barcos situados en *B*(3525, 2490) y *C*(585, 3500) acuden en su ayuda. Si los dos navegan a la misma velocidad y en línea recta hacia *A*, ¿cuál llegará primero?

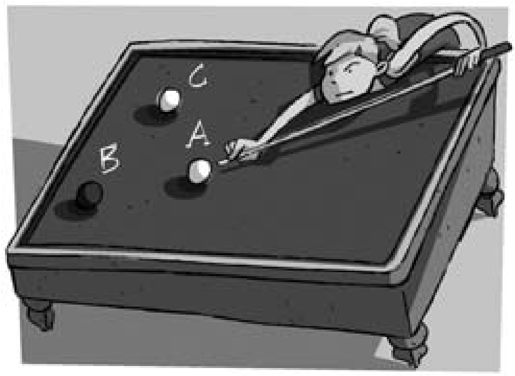
Llegará primero el que esté más cerca de *A*.

$$d(A, B) = \sqrt{(3525 - 1460)^2 + (2490 - 765)^2} = \sqrt{7\,239\,850} = 2690{,}70$$

$$d(A, C) = \sqrt{(585 - 1460)^2 + (3500 - 765)^2} = \sqrt{8\,245\,850} = 2871{,}56$$

Llegará antes el barco que está en la posición *B*.

8.79 Con un solo golpe sobre la bola *A*, esta debe golpear primero a la bola *B* y luego a la *C*. Considerando los lados de la mesa como ejes de coordenadas, las posiciones de las bolas son *A*(20, 28); *B*(5, 10), y *C*(12, 36). ¿Con qué ángulo respecto a la trayectoria seguida por *A* cuando golpea a *B* debe salir la bola para golpear a *C*?



Hay que calcular el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$.

$$\overrightarrow{BA} = A - B = (20, 28) - (5, 10) = (15, 18)$$

$$\overrightarrow{BC} = C - B = (12, 36) - (5, 10) = (7, 26)$$

$$\cos\alpha = \frac{(15, 18) \cdot (7, 26)}{\sqrt{15^2 + 18^2} \cdot \sqrt{7^2 + 26^2}} = 0{,}9082 \Rightarrow \alpha = 24{,}74°$$

8.80 Una cigüeña tiene su nido situado sobre una torre a 250 metros de altura. Ella está sobre el suelo a 100 metros de distancia de la torre.

a) Si subiera hasta el nido en línea recta, ¿cuál sería la ecuación de la trayectoria seguida? ¿Y cuál la pendiente de la misma?

b) ¿A qué distancia del nido se encuentra la cigüeña?

a) La posición del nido respecto a esos ejes es (0, 250), y la de la cigüeña sobre el suelo, (100, 0).

Ecuación de la trayectoria: $\dfrac{x}{100} = \dfrac{y - 250}{-250} \Rightarrow m = \dfrac{-250}{100} = -\dfrac{5}{2}$

b) Distancia entre el nido y la cigüeña: $\sqrt{100^2 + 250^2} = \sqrt{72\,500} = 50\sqrt{29}$ m

8.81 Un rayo de luz incide en un espejo con una trayectoria rectilínea determinada por los puntos *A*(3, 2) y *B*(5, 7), siendo este último el punto de contacto con el espejo.

Al reflejarse, la pendiente de la recta que describe su trayectoria es $-\dfrac{2}{5}$.

a) Escribe la ecuación de las rectas determinadas por el rayo incidente y el reflejado.

b) Halla un vector director de cada una de ellas y el ángulo que forman.

c) Si el ángulo de incidencia y el de reflexión son iguales, ¿cuánto vale cada uno de ellos en este caso?

a) Incidente: $\dfrac{x-3}{5-3} = \dfrac{y-2}{7-2} \Rightarrow \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-2}{5}$ Reflejada: $y - 7 = -\dfrac{2}{5} \cdot (x - 5)$

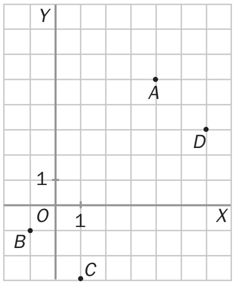
b) Vector director de la recta incidente: (2, 5) Vector director de la recta reflejada: (5, −2)

$$\cos\alpha = \frac{(2, 5) \cdot (5, -2)}{\sqrt{2^2 + 5^2} \cdot \sqrt{5^2 + (-2)^2}} = 0 \Rightarrow \alpha = 90°$$

c) Como forman un ángulo de 90° entre los dos, cada uno de ellos medirá 45°.

Vectores. Operaciones y producto escalar

8.82 Dados los puntos *A*, *B*, *C* y *D* de la figura, calcula los vectores $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{AD}$. ¿Cuáles de ellos son equipolentes?



$A = (4, 5)$; $B = (-1, -1)$; $C = (1, -3)$; $D = (6, 3)$

$\overrightarrow{BA} = (5, 6)$ $\quad \overrightarrow{CD} = (5, 6)$

$\overrightarrow{BC} = (2, -2)$ $\quad \overrightarrow{AD} = (2, -2)$

Son equipolentes $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{CD}$, y también $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{AD}$.

8.83 Calcula:

a) (5, 9) + 2(−4, 8) − (6, 0)

b) 3(−4, 7) − (2, 6) + 5(1, −3)

c) (7, 11) − [(4, 9) + (−3, 1)]

d) (−6, 8) + 3[(5, −2) + (4, 7)]

a) $(5, 9) + 2(-4, 8) - (6, 0) = (5, 9) + (-8, 16) - (6, 0) = (-9, 25)$

b) $3(-4, 7) - (2, 6) + 5(1, -3) = (-12, 21) - (2, 6) + (5, -15) = (-9, 0)$

c) $(7, 11) - [(4, 9) + (-3, 1)] = (7, 11) - (1, 10) = (6, 1)$

d) $(-6, 8) + 3[(5, -2) + (4, 7)] = (-6, 8) + 3 \cdot (9, 5) = (-6, 8) + (27, 15) = (21, 23)$

8.84 Dados los vectores $\vec{u} = (5, 8)$ y $\vec{v} = (-2, 6)$, halla:

a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$ b) $\vec{v} \cdot \vec{v}$ c) $|\vec{u}|$ d) $|\vec{v}|$

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (5, 8) \cdot (-2, 6) = -10 + 48 = 38$

b) $\vec{v} \cdot \vec{v} = (-2, 6) \cdot (-2, 6) = 4 + 36 = 40$

c) $|\vec{u}| = \sqrt{5^2 + 8^2} = \sqrt{89}$

d) $|\vec{v}| = \sqrt{(-2)^2 + 6^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

8.85 Calcula el ángulo que forman los vectores:

a) $\vec{u} = (-2, -4)$ y $\vec{v} = (2, -1)$ b) $\vec{a} = (3, 9)$ y $\vec{b} = (-1, -3)$

a) $\cos\alpha = \dfrac{(-2, -4) \cdot (2, -1)}{\sqrt{(-2)^2 + (-4)^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-1)^2}} = 0 \Rightarrow \alpha = 90°$

b) $\cos\alpha = \dfrac{(3, 9) \cdot (-1, -3)}{\sqrt{3^2 + 9^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2}} = \dfrac{-30}{\sqrt{90} \cdot \sqrt{10}} = \dfrac{-30}{30} = -1 \Rightarrow \alpha = 180°$

8.86 ¿Son perpendiculares los vectores $\vec{u} = (6, 15)$ y $\vec{v} = (5, -2)$?

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (6, 15) \cdot (5, -2) = 30 - 30 = 0$$

Son perpendiculares porque su producto escalar es cero.

8.87 Halla la distancia entre los puntos *A*(4, 9) y *B*(−2, 1).

$$d(A, B) = \sqrt{(-2 - 4)^2 + (1 - 9)^2} = \sqrt{36 + 64} = 10$$

8.88 Calcula las coordenadas del punto medio del segmento de extremos A(2, −5) y B (4, 1).

$$M = \left(\frac{2 + 4}{2}, \frac{-5 + 1}{2}\right) = (3, -2)$$

Rectas. Posiciones relativas

8.89 Obtén un punto, un vector director y la pendiente de la recta de ecuaciones paramétricas: .

$$\left.\begin{aligned} x &= -1 + 2t \\ y &= 5t \end{aligned}\right\}$$

$A(-1, 0)$; $\vec{v} = (2, 5)$; $m = \dfrac{5}{2}$

8.90 Escribe en todas las formas posibles la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(3, 1)$ y tiene la dirección del vector $\vec{u} = (5, -2)$.

Vectorial: $(x, y) = (3, 1) + t(5, -2)$

Paramétrica: $\left.\begin{array}{l} x = 3 + 5t \\ y = 1 - 2t \end{array}\right\}$

Continua: $\frac{x - 3}{5} = \frac{y - 1}{-2}$

General: $2x + 5y - 11 = 0$

Punto-pendiente: $y - 1 = \frac{-2}{5} \cdot (x - 3)$

Explícita: $y = \frac{-2}{5}x + \frac{11}{5}$

$P\left(0, \frac{11}{5}\right)$; $Q\left(\frac{11}{2}, 0\right)$

Ecuación segmentaria: $\frac{x}{\frac{11}{2}} + \frac{y}{\frac{11}{5}} = 1$

8.91 Calcula la ecuación general de la recta que pasa por los puntos $A(-3, 6)$ y $B(4, 1)$.

$$\frac{x + 3}{4 + 3} = \frac{y - 6}{1 - 6} \Rightarrow 5x + 7y - 27 = 0$$

8.92 Comprueba si el punto $B(4, -6)$ pertenece a alguna de estas rectas.

a) $y = 9 - 3x$

b) $5x + 3y - 2 = 0$

a) $-6 = 9 - 3 \cdot 4 \Rightarrow -6 = -3$. No pertenece.

b) $5 \cdot 4 + 3 \cdot (-6) - 2 = 0 \Rightarrow 0 = 0$. Sí pertenece.

8.93 ¿Son secantes las rectas r: $4x - 5y - 2 = 0$ y s: $y = 2x - 4$? En caso afirmativo, calcula su punto de corte.

Se escribe la segunda en forma general: $2x - y - 4 = 0$.

$$\frac{4}{2} \neq \frac{-5}{-1}. \text{ Por tanto, son secantes.}$$

$$\left.\begin{array}{r} 4x - 5y - 2 = 0 \\ y = 2x - 4 \end{array}\right\} \Rightarrow 4x - 5 \cdot (2x - 4) - 2 = 0 \Rightarrow 4x - 10x + 20 - 2 = 0 \Rightarrow -6x = -18 \Rightarrow x = 3;\ y = 2$$

Se cortan en el punto $(3, 2)$.

8.94 Estudia la posición relativa de los siguientes pares de rectas.

a) r: $4x - 6y + 10 = 0$
s: $2x - 3y + 4 = 0$

b) r: $2x + 3y + 6 = 0$
s: $6x + 9y + 18 = 0$

a) $\frac{4}{2} = \frac{-6}{-3} \neq \frac{10}{4}$. Son paralelas.

b) $\frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{6}{18}$. Son coincidentes.

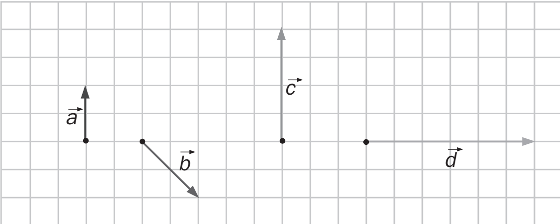
8.95 Halla la ecuación punto-pendiente de la recta que pasa por el punto $P(0, 2)$ y tiene la misma pendiente que $\frac{x - 1}{-1} = \frac{y + 2}{3}$.

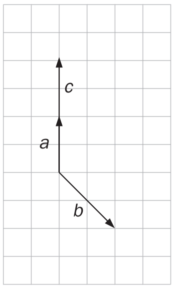
¿Cuál es la posición relativa de las dos rectas?

$$m = \frac{3}{-1} = -3 \qquad\qquad y - 2 = -3 \cdot (x - 0)$$

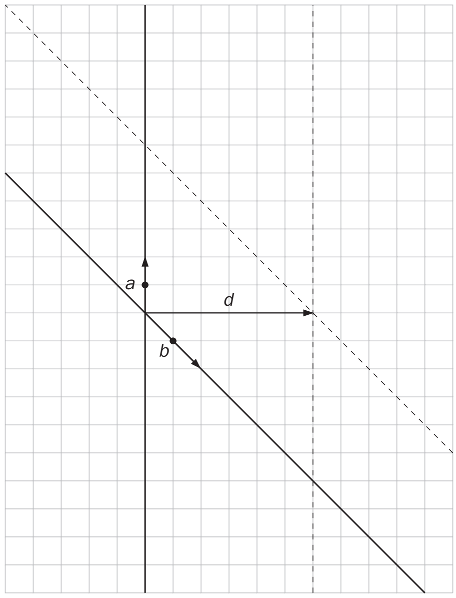
Las rectas son paralelas.

8.96 Expresa los vectores $\vec{c}$ y $\vec{d}$ como combinación lineal de $\vec{a}$ y $\vec{b}$.





Primero se sitúan los 3 vectores con origen en el mismo punto.
Se observa que el vector $\vec{c}$ es el doble de $\vec{a}$.
Por tanto, la combinación lineal es $\vec{c} = 2\vec{a} + 0\vec{b}$.
Se trazan las rectas que tienen la dirección de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.
Desde el extremo de $\vec{d}$ se traza una paralela al vector $\vec{a}$ hasta que corte la recta con la dirección de $\vec{b}$, y se observa que la longitud desde el origen hasta ese punto es $3\vec{b}$.



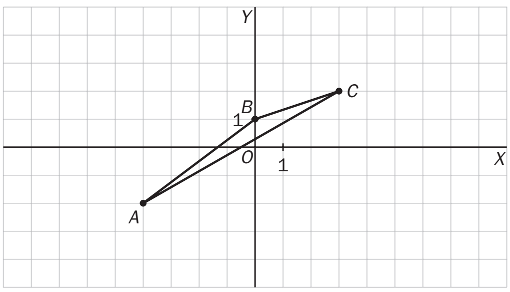
Desde el extremo de $\vec{d}$ se traza una paralela al vector $\vec{b}$ hasta que corte la recta con la dirección de $\vec{a}$, y se observa que la longitud desde el origen hasta ese punto es $3\vec{a}$. Por tanto, $\vec{d} = 3\vec{a} + 3\vec{b}$.

8.97 Calcula el valor de a para que los vectores $\vec{u} = (4, 3)$ y $\vec{v} = (a, 1)$ formen un ángulo de 45°.

$$\cos 45° = \frac{(4, 3) \cdot (a, 1)}{\sqrt{4^2 + 3^2} \cdot \sqrt{a^2 + 1^2}} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{4a + 3}{5\sqrt{a^2 + 1}} \Rightarrow 8a + 6 = 5\sqrt{2a^2 + 2} \Rightarrow 64a^2 + 96a + 36 = 50a^2 + 50$$

$$14a^2 + 96a - 14 = 0;\ 7a^2 + 48a - 7 = 0 \qquad a = \frac{-48 \pm \sqrt{48^2 - 4 \cdot 7 \cdot (-7)}}{14} = \frac{-48 \pm 50}{14} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{7} \\ a = -7 \end{cases}$$

8.98 Determina, mediante vectores, si es rectángulo el triángulo de vértices $A(-4, -2)$; $B(0, 1)$, y $C(3, 2)$.



Un dibujo ayuda a ver si existe algún ángulo recto.

Se observa que no, pero se comprueba analíticamente hallando primero los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{AC}$, y comprobando si son perpendiculares.

$\overrightarrow{AB} = (4, 3)$; $\overrightarrow{BC} = (3, 1)$; $\overrightarrow{AC} = (7, 4)$

Para que sean perpendiculares, su producto escalar ha de ser cero.

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 12 + 3 = 15$. No son perpendiculares.

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 28 + 12 = 40$. No son perpendiculares.

$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC} = 21 + 4 = 25$. No son perpendiculares.

Por tanto, el triángulo no es rectángulo.

8.99 Calcula la ecuación general de la recta que pasa por el punto $P(5, -4)$ y forma un ángulo de 30º con el eje de abscisas.

$$m = \operatorname{tg} 30º = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$y + 4 = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot (x - 5) \Rightarrow \sqrt{3}x - 3y - \left(12 + 5\sqrt{3}\right) = 0$$

8.100 Calcula la ecuación punto-pendiente de la recta que pasa por el punto en el que $6x + 9y - 12 = 0$ corta al eje de abscisas y es paralela a $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$.

El punto de corte con el eje de abscisas tiene la segunda coordenada igual a cero.

Entonces, si $y = 0$, $6x + 9 \cdot 0 - 12 = 0 \Rightarrow x = 2$.

La recta pedida pasa por el punto (2, 0).

La pendiente debe ser igual que la de $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1 \Rightarrow m = -\frac{3}{4}$. La recta es $y = -\frac{3}{4} \cdot (x - 2)$.

8.101 Los lados de un triángulo vienen dados por las rectas de ecuaciones $3x - y - 6 = 0$, $3x + y - 18 = 0$ e $y = 0$.

a) Halla sus vértices.

b) Clasifica el triángulo en función de sus lados.

c) Halla las ecuaciones de las rectas determinadas por sus medianas.

a) Para calcular sus vértices se resuelven los sistemas formados por las rectas dos a dos:

$$\left.\begin{array}{r} 3x - y - 6 = 0 \\ 3x + y - 18 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 4 \\ y = 6 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} 3x - y - 6 = 0 \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 2 \\ y = 0 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} y = 0 \\ 3x + y - 18 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 6 \\ y = 0 \end{array}\right\}$$

Los vértices son $A(4, 6)$, $B(2, 0)$ y $C(6, 0)$.

b) $d(A, B) = \sqrt{(2 - 4)^2 + (0 - 6)^2} = \sqrt{40}$

$d(A, C) = \sqrt{(6 - 4)^2 + (0 - 6)^2} = \sqrt{40}$

$d(C, B) = \sqrt{(2 - 6)^2 + (0 - 0)^2} = \sqrt{16} = 4$

Es un triángulo isósceles porque tiene dos lados iguales y uno desigual.

c) $M_{AB} = \left(\frac{4 + 2}{2}, \frac{6 + 0}{2}\right) = (3, 3) \qquad M_{BC} = \left(\frac{2 + 6}{2}, \frac{0 + 0}{2}\right) = (4, 0) \qquad M_{CA} = \left(\frac{6 + 4}{2}, \frac{0 + 6}{2}\right) = (5, 3)$

$$\frac{x - 3}{6 - 3} = \frac{y - 3}{0 - 3} \Rightarrow \frac{x - 3}{3} = \frac{y - 3}{-3} \Rightarrow x + y - 6 = 0$$

$$\frac{x - 2}{5 - 2} = \frac{y}{3} \Rightarrow \frac{x - 2}{3} = \frac{y}{3} \Rightarrow x - y - 2 = 0$$

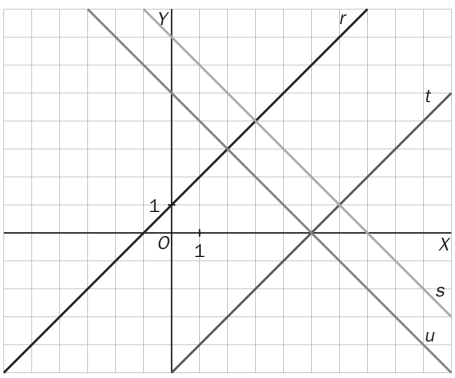
$$\frac{x - 4}{4 - 4} = \frac{y}{6 - 0} \Rightarrow 6x - 24 = 0 - x = 4$$

8.102 Las rectas r: $x - y + 1 = 0$, s: $x + y - 7 = 0$, t: $x - y - 5 = 0$ y u: $x + y - 5 = 0$ forman un cuadrilátero.

a) Calcula la medida de sus lados y de sus ángulos interiores.

b) ¿Qué tipo de cuadrilátero es?

a) Al dibujar las rectas se observa cuáles son los puntos de corte de cada dos de ellas que hay que obtener para calcular los vértices pedidos.



Hay que resolver los sistemas formados por las rectas r y s, obteniéndose el punto $A(3, 4)$; s y t, calculando el punto $B(6, 1)$; t y u, obteniendo el punto $C(5, 0)$, y r y u, con el punto $D(2, 3)$.

$d(A, B) = \sqrt{(6 - 3)^2 + (1 - 4)^2} = \sqrt{18}$

$d(B, C) = \sqrt{(5 - 6)^2 + (0 - 1)^2} = \sqrt{2}$

$d(C, D) = \sqrt{(2 - 5)^2 + (3 - 0)^2} = \sqrt{18}$

$d(A, D) = \sqrt{(2 - 3)^2 + (3 - 4)^2} = \sqrt{2}$

$\overrightarrow{AB} = B - A = (3, -3)$

$\overrightarrow{BC} = C - B = (-1, -1)$

$\overrightarrow{CD} = D - C = (-3, 3)$

$\overrightarrow{AD} = D - A = (-1, -1)$

Como en el dibujo parece un rectángulo, los ángulos interiores deben ser de 90°. Se calcula el producto escalar de los vectores para comprobar si es cero.

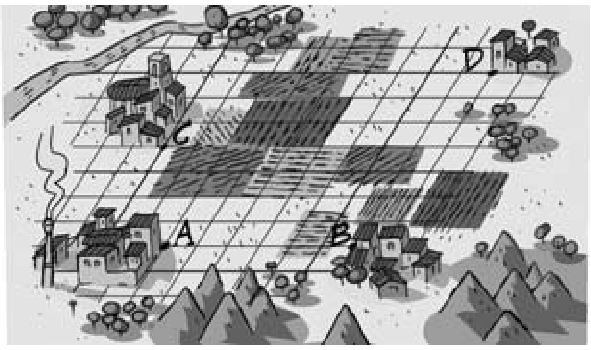
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \qquad \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \qquad \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{DA} = 0 \qquad \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

Por tanto, todos los ángulos interiores son de 90°.

b) Es un rectángulo porque sus ángulos interiores son rectos, y sus lados, iguales y paralelos dos a dos.

8.103 La piscina pública

En la figura se representa la situación de cuatro localidades vecinas, *A*, *B*, *C* y *D*. Cada lado de la cuadrícula representa 1 kilómetro.



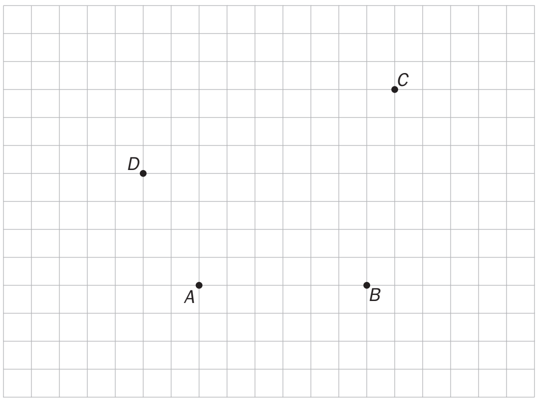
Los correspondientes municipios han decidido construir una piscina pública. Sin embargo, el Consistorio de *D* expone que no dispone de presupuesto para su construcción y se retira del proyecto. Los otros tres ayuntamientos deciden, finalmente, construir la instalación deportiva en un lugar que equidiste de sus tres localidades y sufragando los gastos de forma proporcional a su número de habitantes.

a) Elige una referencia cartesiana situando el origen de coordenadas en el punto *A* y de forma que la abscisa de *B* sea nula. ¿Qué coordenadas tienen los puntos de cada localidad en esa referencia?

b) Sitúa el punto donde debe ser construida la piscina indicando las coordenadas que lo determinan.

c) Calcula la distancia que separa el lugar de la piscina de cada una de las localidades *A*, *B* y *C*, y compárala con la distancia que la separa de *D*.

d) El Ayuntamiento de *C* rechaza este primer acuerdo aduciendo que, al ser su población más numerosa, la piscina debe quedar, como mucho, a 4 kilómetros de su localidad. Los Ayuntamientos de *A* y de *B* aceptan la propuesta siempre y cuando la piscina equidiste de los mismos. Estudia las posibilidades de situar la instalación de acuerdo con las nuevas condiciones.



a) $A(0, 0)$, $B(6, 0)$, $C(-2, 4)$, $D(7, 7)$

Mediatriz del segmento AB: $x = 3$

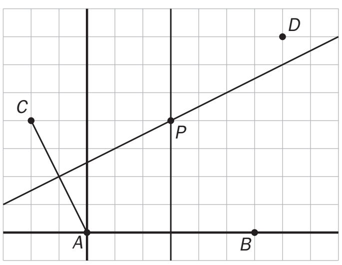
La mediatriz del segmento AC pasa por

$$\left(\frac{0-2}{2}, \frac{0+4}{2}\right) = (-1, 2) \text{ y es perpendicular a } (-2, 4).$$

$$\frac{x+1}{4} = \frac{y-2}{2} \Rightarrow 2y - 4 = x + 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

b) Punto que equidista de A, B y C:

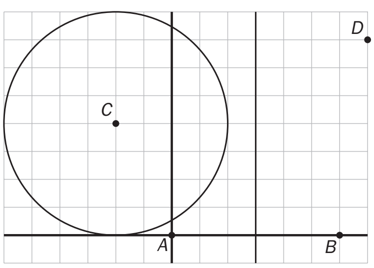
$$\begin{cases} x = 3 \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow P(3, 4)$$



c) $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PC} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ km

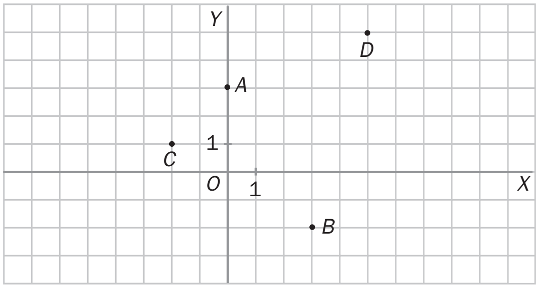
$\overrightarrow{PD} = \sqrt{(3-7)^2 + (4-7)^2} = 5$ km

La piscina dista lo mismo de D que de las otras tres localidades.



d) La instalación debería está situada en algún punto del círculo de centro C y radio 4, y en la mediatriz del segmento AB. Como se aprecia en el dibujo, no existe tal punto.

8.A1 Calcula las coordenadas y el módulo de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$.



$A(0,3)$ $B(8, -3)$ $C(-4, 6)$ $D(5, 5)$

$\overrightarrow{AB}(8, -6)$

$\overrightarrow{CD}(9, -1)$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{8^2 + (-6)^2} = 10$

$|\overrightarrow{CD}| = \sqrt{9^2 + (-1)^2} = \sqrt{82}$

8.A2 Calcula:
a) $3(6, 2) + (5, -4) - 6(2, 1)$ b) $5[(7, -2) + (-8, 1)]$ c) $(2, 3) - [(6, 1) - 4(-3, -2)]$

a) $3(6, 2) + (5, -4) - 6(2, 1) = (18, 6) + (5, -4) - (12, 6) = (11, -4)$
b) $5[(7, -2) + (-8, 1)] = 5(-1, -1) = (-5, -5)$
c) $(2, 3) - [(6, 1) - 4(-3, -2)] = (2, 3) - [(6, 1) + (12, 8)] = (2, 3) - (18, 9) = (-16, -6)$

8.A3 Estudia si son perpendiculares:
a) $\vec{u} = (-2, 8)$ y $\vec{v} = (4, 1)$ b) $\vec{u} = (-3, 7)$ y $\vec{v} = (2, -1)$

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (-2, 8) \cdot (4, 1) = -8 + 8 = 0$. Sí son perpendiculares.
b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (-3, 7) \cdot (2, -1) = -6 - 7 = -13$. No son perpendiculares.

8.A4 Calcula el ángulo que forman los vectores:
a) $\vec{u} = (-1, 6)$ y $\vec{v} = (3, 1)$ b) $\vec{u} = (0, -2)$ y $\vec{v} = (0, 2)$

a) $\cos\alpha = \dfrac{(3, 1) \cdot (-1, 6)}{\sqrt{3^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + 6^2}} = \dfrac{-3 + 6}{\sqrt{10}\sqrt{37}} = \dfrac{3}{\sqrt{370}} \Rightarrow \alpha = 56{,}79°$

b) $\cos\alpha = \dfrac{(0, 2) \cdot (0, -2)}{\sqrt{2^2} \cdot \sqrt{(-2)^2}} = \dfrac{-4}{4} = -1 \Rightarrow \alpha = 180°$

8.A5 Halla la distancia entre los puntos $A(5, -9)$ y $B(7, 2)$.

$$d(A, B) = \sqrt{(7 - 5)^2 + (2 + 9)^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$$

8.A6 Calcula las coordenadas del punto medio del segmento AB siendo $A(4, 0)$ y $B(-2, 6)$.

$$M = \left(\frac{4 - 2}{2}, \frac{0 + 6}{2}\right) = (1, 3)$$

8.A7 Escribe en todas las formas posibles la ecuación de la recta:
a) Que pasa por el punto $P(4, 1)$ y tiene la dirección del vector $\vec{u} = (-2, 5)$.
b) Que pasa por los puntos $A(9, 4)$ y $B(8, 1)$.

a) Vectorial: $(x, y) = (4, 1) + t(-2, 5)$

Paramétricas: $\left.\begin{array}{l} x = 4 - 2t \\ y = 1 + 5t \end{array}\right\}$

Continua: $\dfrac{x - 4}{-2} = \dfrac{y - 1}{5}$

General: $5x + 2y - 22 = 0$

Punto-pendiente: $y - 1 = -\dfrac{5}{2} \cdot (x - 4)$

Explícita: $y = -\dfrac{5}{2}x + 11$ $P(0, 11)$; $Q\left(\dfrac{22}{5}, 0\right)$

Ecuación segmentaria: $\dfrac{x}{\frac{22}{5}} + \dfrac{y}{11} = 1$

b) $\overrightarrow{AB} = (-1, -3)$ Vectorial: $(x, y) = (9, 4) + t(-1, -3)$

Paramétricas: $\left.\begin{array}{l} x = 9 - t \\ y = 4 - 3t \end{array}\right\}$

Continua: $\dfrac{x - 9}{-1} = \dfrac{y - 4}{-3}$

General: $3x - y - 23 = 0$

Punto-pendiente: $y - 4 = 3 \cdot (x - 9)$

Explícita: $y = 3x - 23$ $P(0, -23)$; $Q\left(\dfrac{23}{3}, 0\right)$

Ecuación segmentaria: $\dfrac{x}{\frac{23}{3}} + \dfrac{y}{-23} = 1$

8.A8 **Comprueba si la recta $6x + 4y = 0$ pasa por el punto $(3, -3)$.**

$6 \cdot 3 + 4 \cdot (-3) \neq 0 \Rightarrow 18 - 12 \neq 0 \Rightarrow$ No pasa por el punto.

8.A9 **Calcula la ecuación general de la recta que pasa por el origen de coordenadas y tiene el mismo vector que r: $\left.\begin{array}{l} x = -1 + t \\ y = 3 + 5t \end{array}\right\}$**

Vector (1, 5) $\quad y = 5x$

8.A10 **Estudia la posición relativa de las rectas:**

a) r: $3x - y + 6 = 0$
s: $3x - 4y + 2 = 0$

b) r: $4x + 6y + 12 = 0$
s: $2x + 3y + 9 = 0$

a) $\frac{3}{3} \neq \frac{-1}{-4}$. Son secantes.

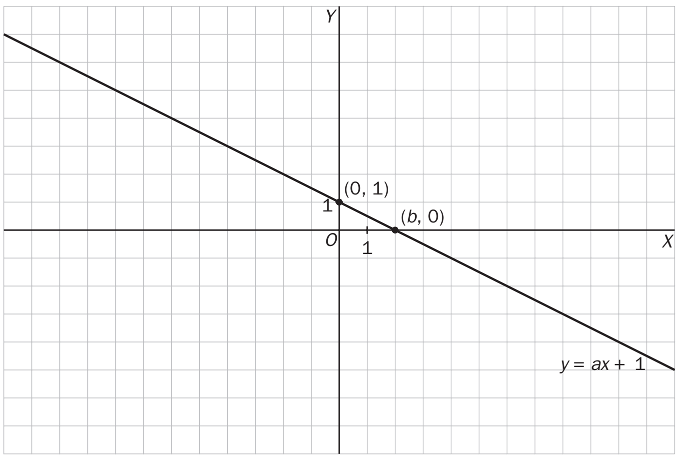
b) $\frac{4}{2} = \frac{6}{3} \neq \frac{12}{9}$. Son paralelas.

MURAL DE MATEMÁTICAS

MATETIEMPOS

El área mínima de un triángulo

Todas las rectas de ecuación $y = ax + 1$ forman triángulos con los ejes de coordenadas para diferentes valores de $a(a \neq 0)$. Calcula el valor de a para que el triángulo sea isósceles. ¿Qué valor debe tener para que el área del triángulo sea mínima?



El valor de a podrá ser positivo si la recta es creciente o negativo si es decreciente, y siempre la recta pasará por el punto (0, 1). Analicemos la recta decreciente (la recta creciente será simétrica al eje $x = 0$ y tendrá los mismos resultados), el área será:

$$A = \frac{b \times 1}{2} = \frac{b}{2}$$

El área del triángulo será mínima, cuando b se acerque a cero, luego el área tenderá a cero.

El del triángulo será isósceles cuando $b = 1$ y la recta pase por el punto (1, 0), entonces $a = -1$

También será isósceles si $b = -1$ y la recta pase por el punto $(-1\ 0)$, entonces $a = 1$

MATEMATICAS. 4ºESO-B. TEMA 6y7: Semejanza y Trigonometría

1.- Sabiendo que cosec α = 3, calcular las restantes razones trigonométricas.

2.- Calcula las razones de los siguientes ángulos: a) -150º b) 1740º

3.- Simplificar las fracciones:

a) $\dfrac{1+tg^2x}{1+cotg^2x}$ b) $\dfrac{\sec^2 a-\cos^2 a}{tg^2 a}$ c) $\dfrac{\mathrm{cosec}^2 a - sen^2 a}{\mathrm{cosec}^2 a\cdot(2-\cos^2 a)}$

4.- Calcular la longitud del lado y de la apotema de un octógono regular inscrito en una circunferencia de 49 centímetros de radio.

5.- Tres pueblos A, B y C están unidos por carreteras. La distancia de A a C es 6 km y la de B a C 9 km. El ángulo que forman estas carreteras es 120°. ¿Cuánto distan A y B?

6.- Expresa en grados los siguientes ángulos: a) 3 rad b) 22п/5rad c) 33п/10 rad.

7.- Expresa en radianes los siguientes ángulos: a) 316° b) 10° c) 127º

8.- Sabiendo que cos α = ¼ , y que 270º <α <360°. Calcular las restantes razones trigonométricas.

9.- Sabiendo que tg α = 2, y que 180º < α <270°. Calcular las restantes razones trigonométricas.

10.- Calcula las razones de los ángulos: a) 225° b) 330° c) 2.655° d) −840º

11.- Comprobar las identidades:

a) $tg\,\alpha + cotg\,\alpha = \sec\alpha\cdot \mathrm{cosec}\,\alpha$ b) $cotg^2 a = \cos^2 a + (cotg\,a\cdot\cos a)^2$

c) $\dfrac{1}{\sec^2 a} = sen^2 a\cdot\cos^2 a + \cos^4 a$ d) $cotg\,a\cdot\sec a = \mathrm{cosec}\,a$

12.- De un triángulo rectángulo ABC, se conocen a = 5 m y B = 41.7°. Resolver el triángulo.

13.- De un triángulo rectángulo ABC, se conocen a = 6 m y b = 4 m. Resolver el triángulo.

14.- Un árbol de 50 m de alto proyecta una sombra de 60 m de larga. Encontrar el ángulo de elevación del sol en ese momento.

15.- Un dirigible que está volando a 800 m de altura, distingue un pueblo con un ángulo de depresión de 12°. ¿A qué distancia del pueblo se halla?

16.- Hallar el radio de una circunferencia sabiendo que una cuerda de 24.6 m tiene como arco correspondiente uno de 70°.

17.- Calcular el área de una parcela triangular, sabiendo que dos de sus lados miden 80 m y 130 m, y forman entre ellos un ángulo de 70°.

18.- Calcula la altura de un árbol, sabiendo que desde un punto del terreno se observa su copa bajo un ángulo de 30° y si nos acercamos 10 m, bajo un ángulo de 60°.

19.- La longitud del lado de un octógono regular es 12 m. Hallar los radios de la circunferencia inscrita y circunscrita.

20.- De un triángulo rectángulo ABC, se conocen b = 3 m y c = 5 m. Resolver el triángulo.

SOLUCIONES

Ejercicio nº 1.

1er cuadrante

$\text{sen } \alpha = \frac{1}{3}$ $\qquad$ $\text{cosec } \alpha = 3$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \qquad \sec \alpha = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \qquad \text{cotg } \alpha = 2\sqrt{2}$$

2º cuadrante

$\text{sen } \alpha = \frac{1}{3}$ $\qquad$ $\text{cosec } \alpha = 3$

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = -\sqrt{\frac{8}{9}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \qquad \sec \alpha = -\frac{3\sqrt{2}}{4}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\frac{1}{3}}{-\frac{2\sqrt{2}}{3}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4} \qquad \text{cotg } \alpha = -2\sqrt{2}$$

Ejercicio nº 2.

1.- $sen\,(-150°) = -sen\,150° = -sen\,(180° - 30°) = -sen\,30° = -\frac{1}{2}$

$$\cos(-150°) = \cos 150° = \cos(180° - 30°) = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$tg\,(-150°) = -tg\,150° = -tg\,(180° - 30°) = -(-tg\,30°) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

2.-
$$\begin{array}{l|l} 1740° & 360° \\ \hline 300° & 4 \end{array}$$

$$sen\,1740° = sen\,300° = sen\,(360° - 60°) = -sen\,60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 1740° = \cos 300° = \cos(360° - 60°) = \cos 60° = \frac{1}{2}\ ;\ tg\,1740° = -\sqrt{3}$$

Ejercicio nº 3.-

1.- $\dfrac{1+tg^2x}{1+cotg^2x}$ $\qquad \dfrac{1+tg^2x}{1+cotg^2x}=\dfrac{\sec^2x}{cosec^2x}=\dfrac{\dfrac{1}{\cos^2x}}{\dfrac{1}{sen^2x}}=tg^2x$

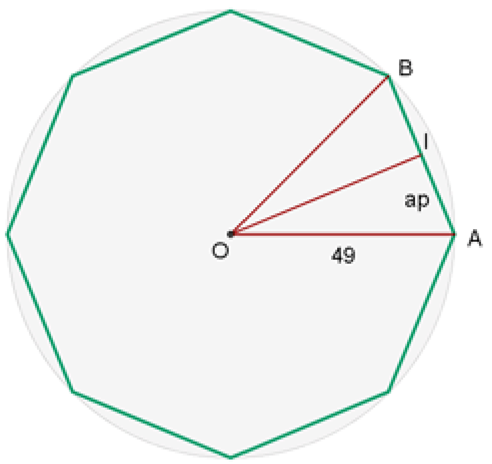
2.- $\dfrac{\sec^2 a-\cos^2 a}{tg^2 a}$ $\qquad \dfrac{\sec^2 a-\cos^2 a}{tg^2 a}=\dfrac{\dfrac{1}{\cos^2 a}-\cos^2 a}{tg^2 a}=\dfrac{1-\cos^4 a}{\cos^2 a\cdot tg^2 a}=$

$$=\frac{(1-\cos^2 a)(1+\cos^2 a)}{sen^2 a}=1+\cos^2 a$$

3.- $\dfrac{cosec^2 a-sen^2 a}{cosec^2 a\cdot(2-\cos^2 a)}$ $\qquad \dfrac{cosec^2 a-sen^2 a}{cosec^2 a\cdot(2-\cos^2 a)}=\dfrac{1}{2-\cos^2 a}-\dfrac{sen^4 a}{2-\cos^2 a}=$

$$=\frac{1-sen^4 a}{1+1-\cos^2 a}=\frac{1-sen^4 a}{1+sen^2 a}=\frac{(1+sen^2 a)(1-sen^2 a)}{1+sen^2 a}=\cos^2 a$$

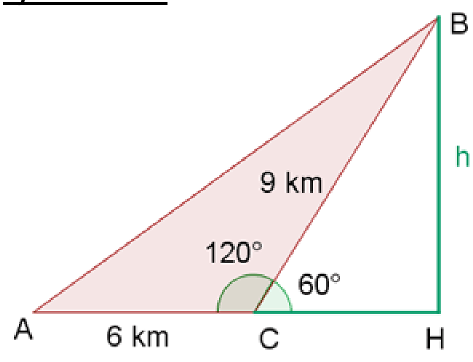
Ejercicio nº 4.-



$$O=\frac{360°}{8}=45° \qquad \frac{O}{2}=22°30'$$

$$\frac{l}{2}=49\cdot sen\,22°30'=18.75 \quad l=37.50\text{ cm} \qquad ap=49\cdot\cos 22°30'=45.27\text{ cm}$$

Ejercicio nº 5.-



$CH=9\cos 60°$ $\qquad BH=9sen\,60°$

$$AB=\sqrt{(6+9\cos 60°)^2+(9sen\,60°)^2}=13.077\text{ km}$$

Ejercicio nº 6.-

1.- $\frac{\pi}{3} = \frac{180^o}{\alpha}$ $\alpha = \frac{180^o \cdot 3}{\pi} = 171.887^o = 171^o\,53'14''$; $0.887^o \cdot 60 = 53.24'$ $0.24' \cdot 60 = 14''$

2.- $$\frac{2\pi}{5} rad = \frac{2 \cdot 180^o}{5} = 72^o$$

3.- $$\frac{3\pi}{10} rad = \frac{3 \cdot 180^o}{10} = 54^o$$

Ejercicio nº 7.-

1.- $$\frac{\pi}{\alpha} = \frac{180^o}{316^o} \qquad \alpha = \frac{316\pi}{180} = \frac{79\pi}{45} rad$$

2.- $$\frac{\pi}{\alpha} = \frac{180^o}{10^o} \qquad \alpha = \frac{10\pi}{180} = \frac{\pi}{18} rad$$

3.- $$\frac{\pi}{\alpha} = \frac{180^o}{127^o} \qquad \alpha = \frac{127\pi}{180} = 2.216\ rad$$

Ejercicio nº 8.-

$$\text{sen } \alpha = -\sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} = -\frac{\sqrt{15}}{4} \qquad \text{cosec } \alpha = -\frac{4\sqrt{15}}{15}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{4} \qquad \sec \alpha = 4 \ ; \quad \text{tg } \alpha = -\frac{\frac{\sqrt{15}}{4}}{\frac{1}{4}} = -\sqrt{15} \qquad \text{cotg } \alpha = -\frac{\sqrt{15}}{15}$$

Ejercicio nº 9.-

$$\sec \alpha = -\sqrt{1+4} = -\sqrt{5} \qquad \cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{sen } \alpha = 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) = -\frac{2\sqrt{5}}{5} \qquad \text{cosec } \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2} \ ; \quad \text{tg } \alpha = 2 \qquad \text{cotg } \alpha = \frac{1}{2}$$

Ejercicio nº 10.-

1.- $$\sin(225^\circ) = \sin(180^o + 45^o) = -\sin 45^o = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos(225^\circ) = \cos(180^o + 45^o) = -\cos 45^o = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan(225^\circ) = \tan(180^o + 45^o) = \tan 45^o = 1$$

2.- $sin(330°) = sin(360° - 30°) = -sin 30° = -\frac{1}{2}$

$cos(330°) = cos(360° - 30°) = cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$tan(330°) = tan(360° - 30°) = -tan 30° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

3.- $\begin{array}{l|l} 2655° & 360° \\ \hline 135° & 7 \end{array}$

$sen 2655° = sen 135° = sen(180° - 45°) = sen 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$cos\ 2655° = cos\ 135° = cos\ (180° - 45°) = -cos\ 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $tg 2655° = -1$

4.- $\begin{array}{l|l} -840° & 360° \\ \hline -120° & -2 \end{array}$

$sin(-840°) = sin\ (-120°) = -sin(180° - 60°) = -sin 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$cos\ (-840°) = cos\ (-120°) = cos\ (180° - 60°) = -cos\ 60° = -\frac{1}{2}$

$tan\ (-840°) = tan\ (-120°) = -tan\ (120°) = \sqrt{3}$

Ejercicio nº 11.-

1.- $tg\,\alpha + cotg\ \alpha = \frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha} + \frac{cos\,\alpha}{sen\,\alpha} = \frac{sen^2\alpha + cos^2\alpha}{cos\,\alpha \cdot sen\,\alpha} = = \frac{1}{cos\,\alpha \cdot sen\,\alpha} = sec\,\alpha \cdot cosec\,\alpha$

2.- $cos^2 a + (cotg\ a \cdot cos\, a)^2 = cos^2 a + cotg^2\ a \cdot cos^2 a =$

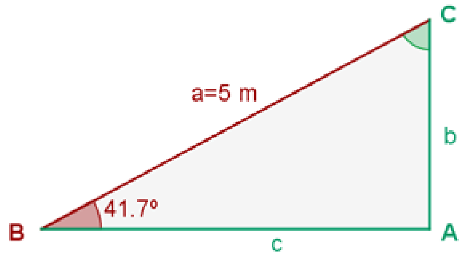
$cos^2 a(1 + cotg^2\ a) = cos^2 a \cdot cosec^2 a = \frac{cos^2 a}{sen^2 a} = cotg^2 a$

3.- $sen^2 a \cdot cos^2 a + cos^4 a = cos^2 a(sen^2 a + cos^2 a) = cos^2 a = \frac{1}{sec^2 a}$

4.- $cotg\,a \cdot sec\,a = \frac{cos\,a}{sen\,a} \cdot \frac{1}{cos\,a} = \frac{1}{sen\,a} = cosec\,a$

5.- $sec^2 a + cosec^2 a = \frac{1}{cos^2 a} + \frac{1}{sen^2 a} = \frac{sen^2 a + cos^2 a}{sen^2 a \cdot cos^2 a} = \frac{1}{sen^2 a \cdot cos^2 a}$

Ejercicio nº 12.-

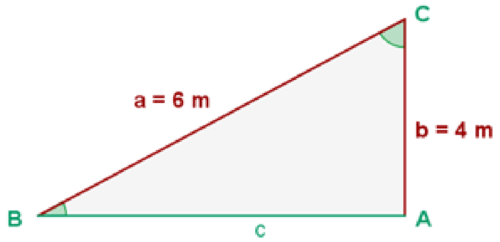


$$C = 90^\circ - 41.7^\circ = 48.3^\circ$$

$$b = a \cdot senB \qquad b = 5 \cdot sen 41.7^\circ = 3.326m$$

$$c = a \ \cos B \qquad c = 5 \ \cos 41.7^\circ = 3.733m$$

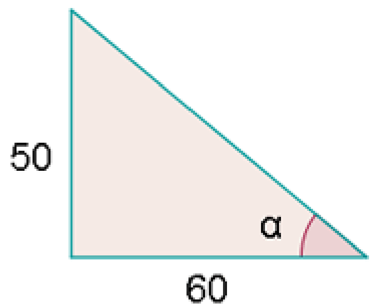
Ejercicio nº 13.-



$$C = \arccos \frac{4}{6} = 48.19^\circ$$

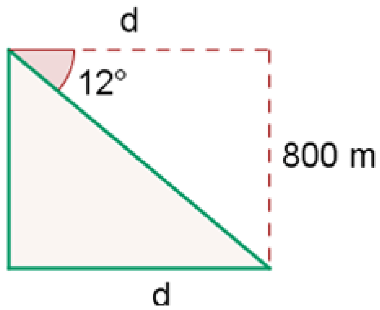
$$B = 90^\circ - 48.19^\circ = 41.81^\circ \qquad c = a \cdot senC \qquad c = 6 \cdot sen 48.19^\circ = 4.47m$$

Ejercicio nº 14.-



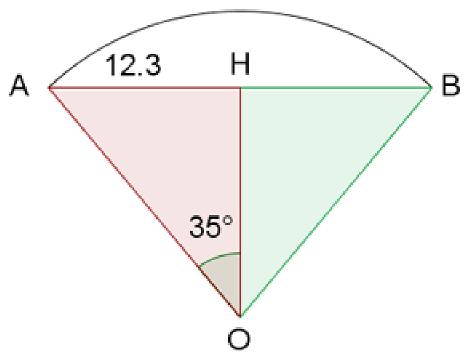
$$tg\,\alpha = \frac{50}{60} \qquad \alpha = 39^\circ 48' 43''$$

Ejercicio nº 15.-



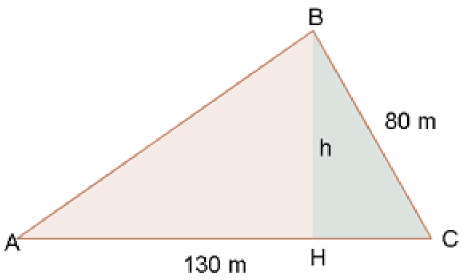
$$tg\,12^\circ = \frac{800}{d} \qquad d = 3763.70 \text{ m}$$

Ejercicio nº 16.-



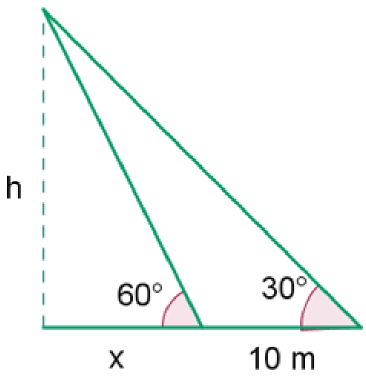
$$sen\,35^\circ = \frac{12.3}{OA} \qquad OA = \frac{12.3}{sen\,35^\circ} = 21.44 \ cm$$

Ejercicio nº 17.-



$$h = 80 \cdot sen\,70^\circ \qquad A = \frac{130 \cdot 80 \cdot sen\,70^\circ}{2} = 4886.40m^2$$

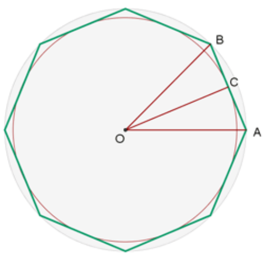
Ejercicio nº 18.-



$$tg\,30^\circ = \frac{h}{10+x} \qquad \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{h}{10+x} \qquad tg\,60^\circ = \frac{h}{x} \qquad \sqrt{3} = \frac{h}{x}$$

$$\begin{array}{rl} 10\sqrt{3} + \sqrt{3}x & = 3h \\ -\sqrt{3}x & = -h \\ \hline 10\sqrt{3} \qquad & = 2h \end{array} \qquad h = 5\sqrt{3}$$

Ejercicio nº 19.-

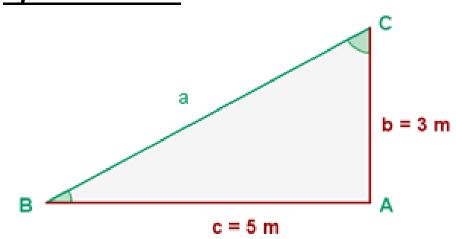


$$O = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ \qquad \frac{O}{2} = 22^\circ 30'$$

Radio de la circunferencia inscrita: $OC = \dfrac{AC}{tg\,22^\circ 30'}$ $\qquad OC = \dfrac{6}{0.4142} = 14.49$

Radio de la circunferencia circunscrita: $OA = \dfrac{AC}{sen\,22^\circ 30'}$ $\qquad OC = \dfrac{6}{0.3827} = 15.68$

Ejercicio nº 20.-

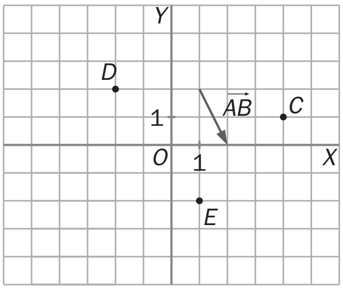


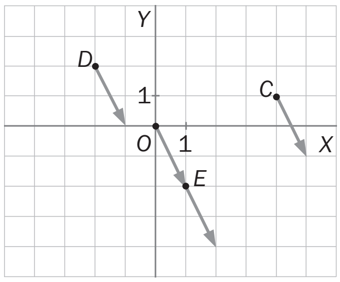
$$C = arc\,tg\,\frac{5}{3} = 59.04^\circ \qquad B = 90^\circ - 59.04^\circ = 30.96^\circ$$

$$a = \frac{c}{sen\,C} \qquad a = \frac{5}{sen\,59.04^\circ} = 5.831\,m$$

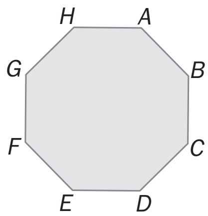
E J E R C I C I O S   P R O P U E S T O S

9.1 **Dibuja cuatro vectores equipolentes al vector $\overrightarrow{AB}$ de la figura que tengan sus orígenes en los puntos *O*, *C*, *D* y *E*.**





9.2 **En la figura siguiente, identifica todos los vectores que sean equipolentes entre sí.**



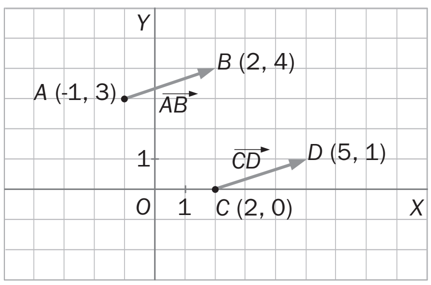
Son equipolentes: $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{FE}$, $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{GF}$, $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{HG}$, $\overrightarrow{DE}$ y $\overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{EF}$ y $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{FG}$ y $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{GH}$ y $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{HA}$ y $\overrightarrow{ED}$.

9.3 **Dados los puntos $A(-1, 3)$; $B(2, 4)$; $C(2, 0)$, y $D(5, 1)$:**

a) Representa los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$.

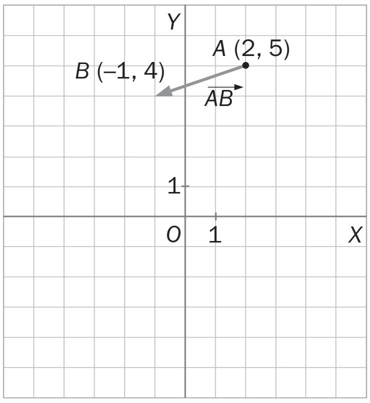
b) ¿Son equipolentes $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$?

a)



b) Sí que son equipolentes porque tienen igual longitud, dirección y sentido.

9.4 Representa el vector $\overrightarrow{AB}$ siendo $A(2, 5)$ y $B(-1, 4)$, y halla sus coordenadas y su módulo.



Coordenadas: $(-1, -4) - (2, 5) = (-3, -9)$

Módulo: $|\overrightarrow{AB}| = +\sqrt{(-3)^2 + (-9)^2} = \sqrt{90} = 9{,}49$ unidades

9.5 Calcula el módulo y el argumento de los vectores $\vec{u} = (2, -3)$, $\vec{v} = (-1, 1)$ y $\vec{w} = (-1, -2)$.

$|\vec{u}| = +\sqrt{2^2 + (-3)^2} = +\sqrt{13}$ unidades

Argumento de $\vec{u}$: $\text{tg } \alpha = \dfrac{-3}{2} = -1{,}5 \Rightarrow \alpha = 123° \ 69'$

$|\vec{v}| = +\sqrt{(-1)^2 + 1^2} = +\sqrt{2}$ unidades

Argumento de $\vec{v}$: $\text{tg } \alpha = \dfrac{1}{-1} = -1 \Rightarrow \alpha = 315°$

$|\vec{w}| = +\sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = +\sqrt{5}$ unidades

Argumento de $\vec{w}$: $\text{tg } \alpha = \dfrac{-2}{-1} = 2 \Rightarrow \alpha = 63° \ 26' \ 6''$

9.6 Dados $\vec{u} = (-1, 2)$ y $\vec{v} = (3, 1)$, calcula:

a) $\vec{u} + \vec{v}$

b) $-2\vec{u}$

c) $4\vec{v}$

d) $-2\vec{u} + 4\vec{v}$

a) $\vec{u} + \vec{v} = (-1, 2) + (3, 1) = (2, 3)$

b) $-2\vec{u} = -2 \cdot (-1, 2) = (-2, -4)$

c) $4\vec{v} = 4 \cdot (3, 1) = (12, 4)$

d) $-2\vec{u} + 4\vec{v} = (-2, -4) + (12, 4) = (10, 0)$

9.7 Halla el módulo y el argumento de los vectores $\vec{a} + \vec{b}$ y $\vec{a} - \vec{b}$, siendo $\vec{a} = (-1, 4)$ y $\vec{b} = (2, 0)$.

$\vec{a} + \vec{b} = (-1, 4) + (2, 0) = (1, 4)$

$|\vec{a} + \vec{b}| = +\sqrt{1^2 + 4^2} = +\sqrt{17}$ unidades. Argumento de $\vec{a} + \vec{b}$: $\text{tg } \alpha = \dfrac{4}{1} = 4 \Rightarrow \alpha = 75° \ 57' \ 50''$

$\vec{a} - \vec{b} = (-1, 4) - (2, 0) = (-3, 4)$

$|\vec{a} - \vec{b}| = +\sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$ unidades. Argumento de $\vec{a} - \vec{b}$: $\text{tg } \alpha = \dfrac{-4}{3} = -1{,}\widehat{3} \Rightarrow \alpha = -53° \ 7' \ 48''$

9.8 Los vértices de un cuadrilátero son $A(3, 7)$; $B(7, 2)$; $C(5, -4)$, y $D(-4, 5)$.

Calcula la medida de los lados.

Halla el punto medio de cada lado.

a) $\overrightarrow{AB} = (7, 2) - (3, 7) = (4, -5) \Rightarrow d(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4^2 + (-5)^2} = \sqrt{41}$ unidades

$\overrightarrow{BC} = (5, -4) - (7, 2) = (-2, -6) \Rightarrow d(B, C) = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-2)^2 + (-6)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$ unidades

$\overrightarrow{CD} = (5, -4) - (-4, 5) = (9, -9) \Rightarrow d(C, D) = |\overrightarrow{CD}| = \sqrt{9^2 + (-9)^2} = \sqrt{162} = 9\sqrt{2}$ unidades

$\overrightarrow{DA} = (-4, 5) - (3, 7) = (-7, -2) \Rightarrow d(D, A) = |\overrightarrow{DA}| = \sqrt{(-7)^2 + (-2)^2} = \sqrt{53}$ unidades

b) $M_{AB} = \left(\dfrac{7+3}{2}, \dfrac{2+7}{2}\right) = \left(5, \dfrac{9}{2}\right)$

$N_{BC} = \left(\dfrac{5+7}{2}, \dfrac{-4+2}{2}\right) = (6, -1)$

$P_{CD} = \left(\dfrac{5-4}{2}, \dfrac{-4+5}{2}\right) = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$

$Q_{DA} = \left(\dfrac{-4+3}{2}, \dfrac{5+7}{2}\right) = \left(\dfrac{-1}{2}, 6\right)$

9.9 Determina los puntos medios de cada lado en el triángulo de vértices $A(2, 0)$; $B(3, 3)$ y $C(1, 2)$, y calcula la distancia de cada punto medio al vértice opuesto del triángulo.

$M_{AB} = \left(\dfrac{2+3}{2}, \dfrac{0+3}{2}\right) = \left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$

$N_{BC} = \left(\dfrac{3+1}{2}, \dfrac{3+2}{2}\right) = \left(2, \dfrac{5}{2}\right)$

$P_{CA} = \left(\dfrac{1+2}{2}, \dfrac{2+0}{2}\right) = \left(\dfrac{3}{2}, 1\right)$

$\overrightarrow{M_{AB}C} = (1, 2) - \left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{3}{2}\right) = \left(\dfrac{-3}{2}, \dfrac{1}{2}\right) \Rightarrow d(M_{AB}, C) = |\overrightarrow{M_{AB}C}| = \sqrt{\left(\dfrac{-3}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{10}{4}} = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$ unidades

$\overrightarrow{N_{BC}A} = (2, 0) - \left(2, \dfrac{5}{2}\right) = \left(0, \dfrac{-5}{2}\right) \Rightarrow d(N_{BC}, A) = |\overrightarrow{N_{BC}A}| = \sqrt{0^2 + \left(\dfrac{-5}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{25}{4}} = \dfrac{5}{2}$ unidades

$\overrightarrow{P_{CA}C} = (1, 2) - \left(\dfrac{3}{2}, 1\right) = \left(\dfrac{-1}{2}, 1\right) \Rightarrow d(P_{CA}, C) = |\overrightarrow{P_{CA}C}| = \sqrt{\left(\dfrac{-1}{2}\right)^2 + 1^1} = \sqrt{\dfrac{5}{4}} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ unidades

9.10 Calcula las ecuaciones vectorial y paramétricas de las rectas:

a) Paralela a $\vec{u} = (-1, -2)$ y que pasa por $A(3, 0)$.

b) Paralela a $\vec{u} = (2, -5)$ y que pasa por $A(-2, 4)$.

a) La recta pasa por el punto $A(3, 0)$ y lleva la dirección del vector $\vec{u} = (-1, -2)$. Si $P(x, y)$ es un punto cualquiera de la recta, al sustituir en la expresión $\vec{p} = \vec{a} + t\vec{u}$, resulta la ecuación vectorial buscada:

$$(x, y) = (3, 0) + t(-1, -2)$$

Operando e igualando, obtenemos las ecuaciones paramétricas:

$$(x, y) = (3, 0) + (-t, -2t) = (3 - t, -2t) \Rightarrow \begin{matrix} x = 3 - t \\ y = -2t \end{matrix} \quad \text{con } t \in \mathbf{R}$$

b) La recta pasa por el punto $A(-2, 4)$ y lleva la dirección del vector $\vec{u} = (2, -5)$. Si $P(x, y)$ es un punto cualquiera de la recta, al sustituir en la expresión $\vec{p} = \vec{a} + t\vec{u}$, resulta la ecuación vectorial buscada:

$$(x, y) = (-2, 4) + t(2, -5)$$

Operando e igualando, obtenemos las ecuaciones paramétricas:

$$(x, y) = (-2, 4) + (2t, -5t) = (-2 + 2t,\ 4 - 5t) \Rightarrow \begin{array}{l} x = -2 + 2t \\ y = 4 - 5t \end{array} \quad \text{con } t \in \mathbf{R}$$

9.11 **Halla dos puntos y un vector director de la recta de ecuaciones paramétricas son:** $\begin{array}{l} \boldsymbol{x = -3t} \\ \boldsymbol{y = 2 + t} \end{array}$

Puntos:

- Para $t = 0 \Rightarrow A(0, 2)$
- Para $t = 1 \Rightarrow B(-1, 3)$

Vector director: $\vec{u} = (-3, 1)$

9.12 **Halla la ecuación de las siguientes rectas en forma paramétrica, continua y general.**

a) Recta que pasa por el punto $A(-1, 2)$ y tiene la dirección del vector $\vec{u} = (-3, 7)$.

b) Recta que pasa por $A(3, -3)$ y tiene por vector director $\vec{u} = (-1, 1)$.

a) Si $P(x, y)$ es un punto cualquiera de la recta, al sustituir en la expresión $\vec{p} = \vec{a} + t\vec{u}$, resulta la ecuación vectorial buscada:

$$(x, y) = (-1, 2) + t(-3, 7)$$

Operando e igualando, obtenemos las ecuaciones paramétricas:

$$(x, y) = (-1, 2) + (-3t, 7t) = (-1 - 3t,\ 2 + 7t) \Rightarrow \begin{array}{l} x = -1 - 3t \\ y = 2 + 7t \end{array} \quad \text{con } t \in \mathbf{R}$$

Despejando t en cada ecuación e igualando, se llega a la ecuación continua:

$$\left.\begin{array}{l} t = \dfrac{-1 - x}{3} \\ t = \dfrac{y - 2}{7} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{-1 - x}{3} = \frac{y - 2}{7}$$

Por último, operando en la ecuación continua se obtiene la ecuación general:

$$-7 - 7x = 3y - 6 \Rightarrow 7x + 3y + 1 = 0$$

b) Si $P(x, y)$ es un punto cualquiera de la recta, al sustituir en la expresión $\vec{p} = \vec{a} + t\vec{u}$, resulta la ecuación vectorial buscada:

$$(x, y) = (3, -3) + t(-1, 1)$$

Operando e igualando, obtenemos las ecuaciones paramétricas:

$$(x, y) = (3, -3) + (-t, t) = (3 - t,\ -3 + t) \Rightarrow \begin{array}{l} x = 3 - t \\ y = -3 + t \end{array} \quad \text{con } t \in \mathbf{R}$$

Despejando t en cada ecuación e igualando, se llega a la ecuación continua:

$$\left.\begin{array}{l} t = -x + 3 \\ t = y + 3 \end{array}\right\} \Rightarrow -x + 3 = y + 3$$

Por último, despejando en la ecuación continua se obtiene la ecuación general:

$$x + y = 0$$

9.13 Calcula las ecuaciones paramétricas, continua y general de la recta que pasa por los puntos $A(-2, 0)$ y $B(3, 1)$.

Primero se determina un vector director, $\vec{u}$, a partir de las coordenadas de A y de B.

$$\vec{u} = (3, 1) - (-2, 0) = (5, 1)$$

Si $P(x, y)$ es un punto cualquiera de la recta, al sustituir en la expresión $\vec{p} = \vec{a} + t\vec{u}$, resulta la ecuación vectorial buscada:

$$(x, y) = (3, 1) + t(5, 1)$$

Operando e igualando, obtenemos las ecuaciones paramétricas:

$$(x, y) = (3, 1) + (5t, t) = (3 + 5t, 1 + t) \Rightarrow \begin{array}{l} x = 3 + 5t \\ y = 1 + t \end{array} \text{ con } t \in \mathbf{R}$$

Despejando t en cada ecuación e igualando, se llega a la ecuación continua:

$$\left.\begin{array}{l} t = \dfrac{x - 3}{5} \\ t = y - 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x - 3}{5} = y - 1$$

Por último, despejando en la ecuación continua se obtiene la ecuación general:

$$x - 3 = 5y - 5 \Rightarrow x - 5y + 2 = 0$$

9.14 Determina, en sus formas paramétricas, continua y general, la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(2, -1)$ y $B(2, 1)$.

Primero se determina un vector director, $\vec{u}$, a partir de las coordenadas de A y de B.

$$\vec{u} = (2, 1) - (2, -1) = (0, 2)$$

Si $P(x, y)$ es un punto cualquiera de la recta, al sustituir en la expresión $\vec{p} = \vec{a} + t\vec{u}$, resulta la ecuación vectorial buscada:

$$(x, y) = (2, 1) + t(0, 2)$$

Operando e igualando, obtenemos las ecuaciones paramétricas:

$$(x, y) = (2, 1) + (0, 2t) = (2, 1 + 2t) \Rightarrow \begin{array}{l} x = 2 \\ y = 1 + 2t \end{array} \text{ con } t \in \mathbf{R}$$

Como $x = 2$, la recta es paralela al eje OY. La ecuación continua no se puede hallar y la general es $x - 2 = 0$.

9.15 Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(-4, 2)$ y tiene pendiente $m = 3$.

A partir de la ecuación punto-pendiente de la recta, $y - 2 = 3 \cdot (x + 4)$, se obtiene la ecuación explícita: $y = 3x + 14$.

9.16 Estudia la posición relativa de las rectas:

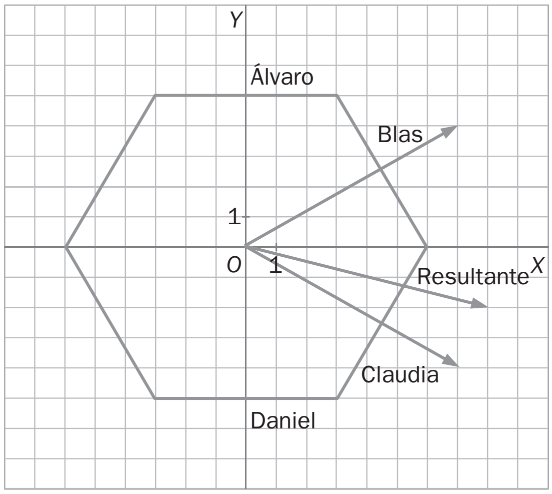
a) $r \equiv 3x + 2y - 7 = 0 \quad s \equiv 2x - y = 0$
b) $r' \equiv x - 2y - 3 = 0 \quad s' \equiv 3x - 6y + 4 = 0$

a) Se comparan las ecuaciones generales de las dos rectas: $\dfrac{2}{2} \neq \dfrac{-1}{2} \Rightarrow$ las rectas son secantes.

b) Se comparan las ecuaciones generales de las dos rectas: $\dfrac{1}{3} = \dfrac{-2}{-6} \neq \dfrac{-3}{4} \Rightarrow$ las rectas son paralelas.

9.17 Ahora, los cuatro se colocan alrededor de una mesa con forma de hexágono regular, ocupando los cuatro lados consecutivos. ¿Dónde acabará la caja?

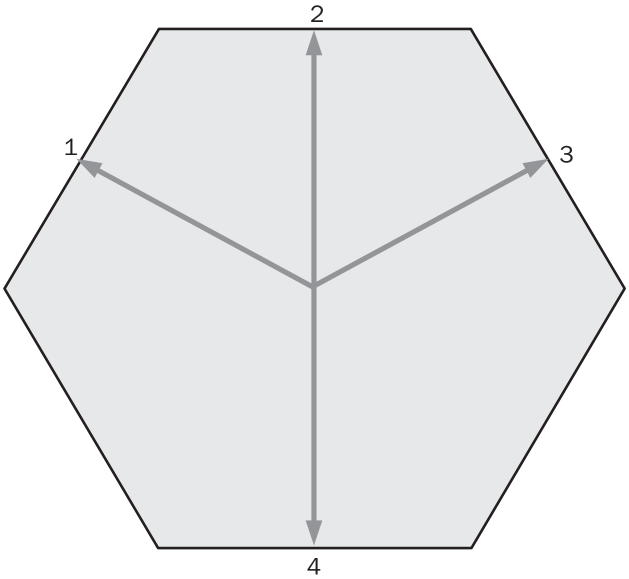
La figura ilustra la situación.



Las fuerzas de Álvaro y Daniel se compensan. Como Blas tira con menos fuerza, la caja acabará en el lado de Claudia.

9.18 En la misma mesa hexagonal se colocan cuatro personas con la misma fuerza, tres en lados consecutivos y otro que deja uno libre a cada lado. ¿Hacia dónde irá la caja?

La figura ilustra la situación.



Las fuerzas de la segunda y de la cuarta persona se compensan.

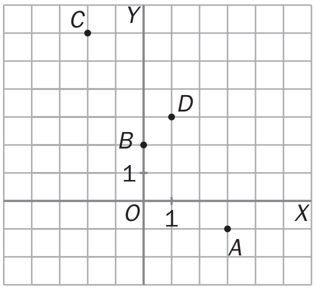
La resultante es la suma de los vectores correspondientes a las otras dos, que coincide con el vector que va hacia la segunda.

Por tanto, la caja irá hacia la segunda persona.

EJERCICIOS PARA ENTRETENERSE

Vectores en el plano

9.19 Calcula las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$. ¿Qué relación existe entre ellos?

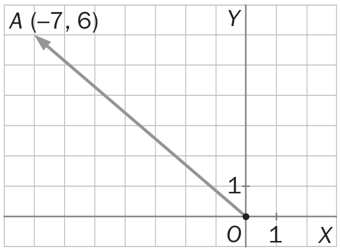


$\overrightarrow{AB} = (0, 2) - (3, -1) = (-3, 3)$

$\overrightarrow{CD} = (1, 3) - (-2, 6) = (3, -3)$

Por tanto, son vectores opuestos.

9.20 Representa el vector de posición del punto $A(-7, 6)$. ¿Cuáles son sus coordenadas cartesianas?



Las coordenadas de $\overrightarrow{OA}$ son las mismas que las de $A(-7, 6)$.

9.21 Las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$ son (5, 3). Siendo $B(-1, 4)$, calcula las coordenadas del punto A.

Sea $A(a_1, a_2)$. Entonces:

$\overrightarrow{AB} = (5, 3) = (-1, 4) - (a_1, a_2) \Rightarrow (a_1, a_2) = (-1, 4) - (5, 3) = (-6, 1)$

Por tanto, $A(-6, 1)$

9.22 Calcula el módulo y el argumento de los vectores:

a) $\vec{u} = (4, 4)$ b) $\vec{v} = \left(-1, \sqrt{3}\right)$ c) $\vec{w} = (-2, 2)$

a) $|\vec{u}| = +\sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ unidades

Argumento de $\vec{u}$: $\text{tg}\ \alpha = \dfrac{4}{4} = 1 \Rightarrow \alpha = 45°$

b) $|\vec{v}| = +\sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = +\sqrt{4} = 2$

Argumento de $\vec{v}$: $\text{tg}\ \alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3} \Rightarrow \alpha = -60°$

c) $|\vec{w}| = +\sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ unidades

Argumento de $\vec{w}$: $\text{tg}\ \alpha = \dfrac{2}{-2} = -1 \Rightarrow \alpha = -45°$

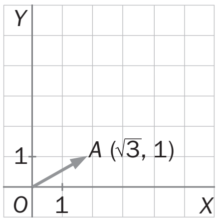
9.23 Para cada caso, dibuja un vector:

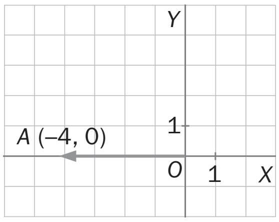
a) De módulo 2 y argumento 30°

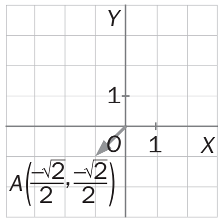
b) De módulo 4 y argumento 180°

c) De módulo 1 y argumento 225°

a) $\vec{u} = (\sqrt{3}, 1)$ b) $\vec{v} = (-4, 0)$ c) $\vec{w} = \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$







9.24 Calcula las coordenadas de un vector cuyo módulo sea igual a 1 y que tenga la misma dirección que $\vec{u} = (5, 12)$.

El módulo del vector $\vec{v}$ buscado es 1.

Operaciones con vectores

9.25 Opera:

a) (2, −1) − (4, 3)

b) 6(−3, 1) + (10, −2)

c) 2(−4, 0) − 3(−1, 2)

d) 4(1, −1) + 2(3, 0)

e) (3, −1) − 5(1, −2)

f) (9, 6) − 2(4, 1)

a) $(2, -1) - (4, 3) = (-2, -4)$

b) $6(-3, 1) + (10, -2) = (-8, -4)$

c) $2(-4, 0) - 3(-1, 2) = (-5, -6)$

d) $4(1, -1) + 2(3, 0) = (10, -4)$

e) $(3, -1) - 5(1, -2) = (-2, 8)$

f) $(9, 6) - 2 \cdot (4, 1) = (1, 4)$

9.26 Dados los vectores $\vec{u} = (5, -3)$; $\vec{v} = (-1, 4)$, y $\vec{w} = (2, 2)$, calcula:

a) $\vec{u} - (\vec{v} + \vec{w})$

b) $3\vec{u} - 2(\vec{w} - \vec{v})$

c) $\frac{1}{2}(\vec{v} - \vec{u})$

d) $5\vec{w} - 3\vec{v} + \vec{u}$

e) $2(\vec{w} + \vec{v}) - \vec{u}$

f) $\frac{3}{4}\vec{u} - 2\vec{v} + \vec{w}$

a) $\vec{u} - (\vec{v} + \vec{w}) = (5, -3) - [(-1, 4) + (2, 2)] = (5, -3) - (1, 6) = (4, -9)$

b) $3\vec{u} - 2(\vec{w} - \vec{v}) = 3 \cdot (5, -3) - 2 \cdot [(2, 2) - (-1, 4)] = (15, -9) - 2 \cdot (3, 6) = (9, -21)$

c) $\frac{1}{2}(\vec{v} - \vec{u}) = \frac{1}{2} \cdot [(-1, 4) - (5, -3)] = \left(-3, \frac{7}{2}\right)$

d) $5\vec{w} - 3\vec{v} + \vec{u} = 5 \cdot (2, 2) - 3 \cdot (-1, 4) + (5, -3) = (10, 10) - (-3, 12) + (5, -3) = (18, -5)$

e) $2(\vec{w} + \vec{v}) - \vec{u} = 2 \cdot [(2, 2) + (-1, 4)] - (5, -3) = 2 \cdot (1, 6) - (5, -3) = (-3, 15)$

f) $\frac{3}{4}\vec{u} - 2\vec{v} + \vec{w} = \frac{3}{4} \cdot (5, -3) - 2 \cdot (-1, 4) + (2, 2) = \left(\frac{15}{4}, \frac{-9}{4}\right) - (-2, 8) + (2, 2) = \left(\frac{15}{4}, \frac{-9}{4}\right) - (4, -6) =$

$= \left(\frac{-1}{4}, \frac{15}{4}\right)$

9.27 **Calcula el valor de *x* e *y* en estas igualdades:**

a) $(5, -9) = 3(x, y) - 2(x, 0)$

b) $(x, -4) = 2(y, 5) + (3, x)$

c) $(2y, 0) = (x, y) - 2(x, 5)$

d) $(3x, -y) = 2(1, -x) + (y, 9)$

a) $(5, -9) = 3(x, y) - 2(x, 0) \Rightarrow \begin{cases} 5 = 3x - 2x \\ -9 = 3y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -3 \end{cases}$

b) $(x, -4) = 2(y, 5) + (3, x) \Rightarrow \begin{cases} x = 2y + 3 \\ -4 = 10 + x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{-17}{2} \\ x = -14 \end{cases}$

c) $(2y, 0) = (x, y) - 2(x, 5) \Rightarrow \begin{cases} 2y = x - 2x \\ 0 = y - 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -20 \\ y = 10 \end{cases}$

d) $(3x, -y) = 2(1, -x) + (y, 9) \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2 + y \\ -y = -2x + 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -7 \\ y = -23 \end{cases}$

9.28 **Dibuja los vectores $\vec{u}(2, 5)$ y $\vec{v}(4, -1)$ y, a partir de ellos, calcula gráficamente:**

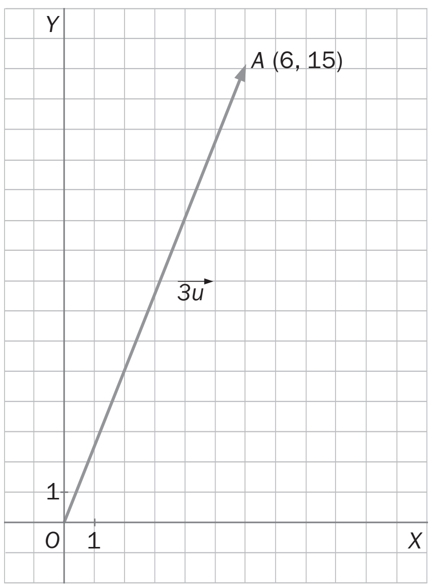
a) $3\vec{u}$

b) $-2\vec{v}$

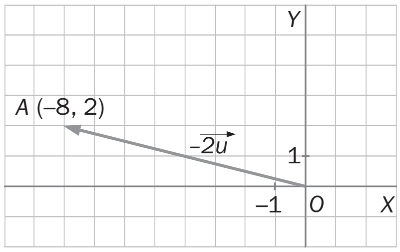
c) $\vec{u} - \vec{v}$

d) $3\vec{u} + \vec{v}$

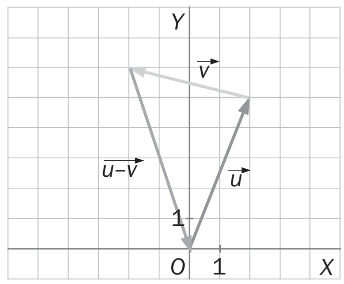
a)



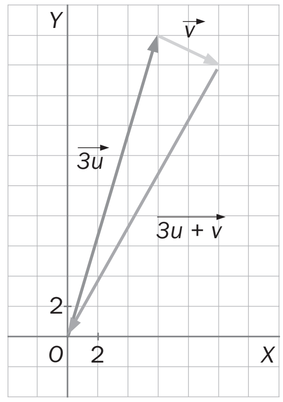
b)



c)



d)



Distancia entre dos puntos. Punto medio

9.29 Calcula la distancia entre los puntos:

a) $A(3, 1)$ y $B(2, 6)$

b) $A(-2, 9)$ y $B(-1, 7)$

c) $A(-4, -2)$ y $B(-1, -5)$

d) $A(0, 7)$ y $B(-4, 0)$

a) $d(A, B) = \sqrt{(2-3)^2 + (6-1)^2} = \sqrt{1 + 25} = \sqrt{26}$ unidades

b) $d(A, B) = \sqrt{(-1+2)^2 + (7-9)^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$ unidades

c) $d(A, B) = \sqrt{(-1+4)^2 + (-5+2)^2} = \sqrt{9 + 9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ unidades

d) $d(A, B) = \sqrt{(-4-0)^2 + (0-7)^2} = \sqrt{16 + 49} = \sqrt{65}$ unidades

9.30 Clasifica, en función de las longitudes de sus lados, el triángulo de vértices *ABC*.

a) $A(1, 1)$; $B(4, 6)$, y $C(7, 1)$

b) $A(-8, 0)$; $B(-1, -5)$, y $C(-1, 3)$

a) $d(A, B) = \sqrt{(6-1)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34}$ unidades

$d(A, C) = \sqrt{(7-1)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{36 + 0} = 6$ unidades

$d(B, C) = \sqrt{(4-1)^2 + (6-1)^2} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}$ unidades

Es un triángulo isósceles porque $d(A, B) = d(A, C) \neq d(B, C)$.

b) $d(A, B) = \sqrt{(-1+8)^2 + (-5-0)^2} = \sqrt{49 + 25} = \sqrt{74}$ unidades

$d(A, C) = \sqrt{(-1+8)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{49 + 9} = \sqrt{58}$ unidades

$d(B, C) = \sqrt{(-1+1)^2 + (3+5)^2} = \sqrt{0 + 64} = 8$ unidades

Es un triángulo escaleno porque $d(A, B) \neq d(A, C) \neq d(B, C)$.

9.31 Calcula las longitudes de las tres medianas del triángulo de vértices $A(-2, 2)$; $B(2, -1)$, y $C(2, 4)$.

$$M_{AB} = \frac{1}{2} \cdot [(-2, 2) + (2, -1)] = \left(0, \frac{1}{2}\right) \Rightarrow d(C, M_{AB}) = \sqrt{(0-2)^2 + \left(\frac{1}{2} - 4\right)^2} = \sqrt{4 + \frac{49}{4}} = \sqrt{\frac{65}{4}} = \frac{\sqrt{65}}{2} \text{ unidades}$$

$$N_{AC} = \frac{1}{2} \cdot [(2, 4) + (-2, 2)] = (0, 3) \Rightarrow d(B, N_{AC}) = \sqrt{(0+2)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \text{ unidades}$$

$$P_{BC} = \frac{1}{2} \cdot [(2, -1) + (2, 4)] = \left(2, \frac{3}{2}\right) \Rightarrow d(A, P_{BC}) = \sqrt{(2+2)^2 + \left(\frac{3}{2} - 2\right)^2} = \sqrt{16 + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{65}{4}} = \frac{\sqrt{65}}{2} \text{ unidades}$$

Ecuaciones de la recta

9.32 Determina un punto por el que pase y un vector director de cada una de las rectas.

a) $\dfrac{x-3}{-2} = \dfrac{y+4}{5}$ **b)** $4x - y = 0$ **c)** $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 5 + 3t \end{cases}$ **d)** $(x, y) = (4, 0) + t(2, -6)$

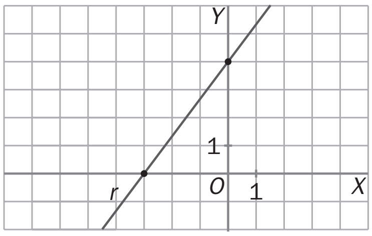
a) $A(3, -4)$ $\vec{v} = (-2, 5)$

b) $A(1, 4)$ $\vec{v} = (1, 4)$

c) $A(2, 5)$ $\vec{v} = (-1, 3)$

d) $A(4, 0)$ $\vec{v} = (2, -6)$

9.33 Halla todas las formas de la ecuación de la recta de la figura.



Un vector director es $\overrightarrow{AB} = (-3, -4)$.

Ecuación vectorial: $(x, y) = (0, 4) + t(-3, -4)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{matrix} x = -3t \\ y = 4 - 4t \end{matrix}$

Ecuación continua: $\dfrac{x}{-3} = \dfrac{y - 4}{-4}$

Ecuación general: $4x - 3y + 12 = 0$

Ecuación explícita: $y = \dfrac{4}{3}x + 3$

Ecuación punto-pendiente: $y = 4 - \dfrac{4}{3}x$

9.34 Halla la pendiente y la ordenada en el origen de la recta $3x + 2y - 6 = 0$.

Se despeja la incógnita y:

$y = \dfrac{-3}{2}x + 3$

Luego $m = \dfrac{-3}{2}$

9.35 Escribe la ecuación general de la recta que pasa por los puntos $A(5, 0)$ y $B(0, 2)$.

Primero se determina un vector director, $\vec{u}$, a partir de las coordenadas de A y de B.

$$\vec{u} = (0, 2) - (5, 0) = (-5, 2)$$

La ecuación continua de la recta es:

$$\frac{x - 5}{-5} = \frac{y}{2}$$

Se despeja en la ecuación continua y se obtiene la ecuación general:

$$-2x + 10 = 5y \Rightarrow 2x + 5y + 10 = 0$$

9.36 Calcula la ecuación de la recta en la forma más conveniente para cada uno de los siguientes casos.

a) Recta r que pasa por el punto $(0, -3)$ y tiene pendiente 4.

b) Recta s que tiene la dirección del vector $(5, 2)$ y pasa por el punto $(6, 0)$.

a) La ecuación punto-pendiente: $y + 3 = 4x$.

b) La ecuación continua: $\dfrac{x - 6}{5} = \dfrac{y}{2}$.

9.37 Escribe la ecuación general de la recta que pasa por el punto $A(-2, -1)$ y su vector director es equipolente al de la recta $(x, y) = (1, 3) + t(4, 7)$.

Un vector director de la recta es $(4, 7)$. La ecuación continua de la recta es $\dfrac{x + 2}{4} = \dfrac{y + 1}{7}$.

9.38 Expresa en forma continua y paramétrica la ecuación de la recta $y = 2x + 1$.

Un punto de la recta es $A(0, 1)$, y un vector director es $\vec{u} = (1, 2)$.

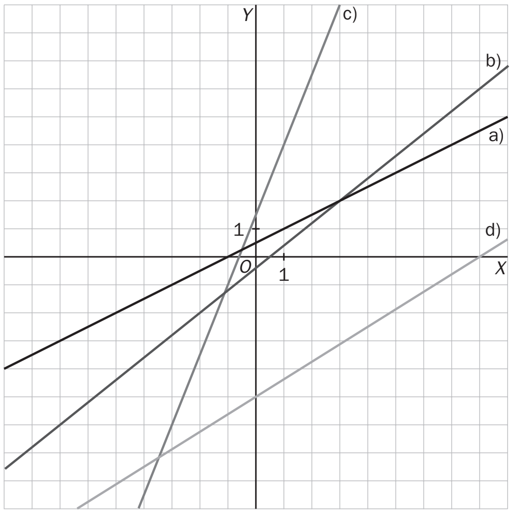
La ecuación continua de la recta es $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y - 1}{2}$.

La ecuación paramétrica de la recta es $\begin{matrix} x = t \\ y = 1 + 2t \end{matrix} \quad t \in \mathbf{R}$

9.39 Halla la pendiente y un punto por el que pasa cada una de las siguientes rectas. Represéntalas gráficamente.

a) $\dfrac{x + 1}{2} = y$ **c)** $5x - 2y + 3 = 0$

b) $\dfrac{x - 3}{5} = \dfrac{y - 2}{-4}$ **d)** $\dfrac{x}{8} - \dfrac{y}{5} = 1$



a) $A(-1, 0)$ $\quad \vec{v} = (2, 1)$ $\quad m = \dfrac{1}{2}$

b) $A(3, 2)$ $\quad \vec{v} = (5, -4)$ $\quad m = \dfrac{-4}{5}$

c) $x = 1 \Rightarrow 5 \cdot 1 - 2y + 3 = 0 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow A(1, 4)$

$\vec{v} = (2, 5)$ $\quad m = \dfrac{5}{2}$

d) $A(0, -5)$ $\quad \vec{v} = (8, 5)$ $\quad m = \dfrac{5}{8}$

9.40 Halla la ecuación punto-pendiente de la recta que pasa por el punto $A(1, 3)$ y tiene la misma pendiente que la recta $y = 4x + 9$.

La pendiente de la recta es 4, y pasa por el punto $A(1, 3)$.

La ecuación punto-pendiente es $y - 3 = 4(x - 1)$.

9.41 Estudia la posición relativa de los siguientes pares de rectas y, en caso de ser secantes, halla su punto de corte.

a) $r \equiv 2x - 5y + 7 = 0 \quad s \equiv x - 2y - 2 = 0$ **c)** $r \equiv x - 5y + 3 = 0 \quad s \equiv 3x - 15y + 8 = 0$

b) $r \equiv 6x + 4y - 12 = 0 \quad s \equiv 3x + 2y - 6 = 0$ **d)** $r \equiv x + y - 5 = 0 \quad s \equiv 3x - 2y = 0$

a) $\dfrac{2}{1} \neq \dfrac{-5}{-2} \Rightarrow$ Son secantes.

$$\left.\begin{aligned} 2x - 5y + 7 = 0 \\ x - 2y - 2 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{array}{r} 2x - 5y + 7 = 0 \\ -2x + 4y + 4 = 0 \\ \hline -y + 11 = 0 \end{array} \Rightarrow y = 11$$

$$x = 2 \cdot 11 + 2 = 24$$

$\Rightarrow$ Punto de corte $(24, 11)$

b) $\dfrac{6}{3} = \dfrac{4}{2} = \dfrac{-12}{-6} \Rightarrow$ Son coincidentes.

c) $\dfrac{1}{3} = \dfrac{-5}{-15} \neq \dfrac{3}{8} \Rightarrow$ Son paralelas.

d) $\dfrac{1}{3} \neq \dfrac{1}{-2} \cdot \dfrac{1}{3} \neq \dfrac{1}{-2} \Rightarrow$ Son secantes.

$$\left.\begin{aligned} x + y - 5 = 0 \\ 3x - 2y = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{array}{r} 2x + 2y - 10 = 0 \\ 3x - 2y \qquad = 0 \\ \hline 5x - 10 = 0 \end{array} \Rightarrow x = 2$$

$$y = 5 - 2 = 3$$

$\Rightarrow$ Punto de corte $(2, 3)$

9.42 Halla el punto de corte de las rectas r y s, y, a partir del resultado obtenido, indica la posición relativa de ambas rectas.

a) $r \equiv 2x - 3y + 2 = 0$
$s \equiv x - y + 1 = 0$

b) $r \equiv y = x - 3$
$s \equiv 2x - 2y - 6 = 0$

a) $\left.\begin{array}{r} 2x - 3y + 2 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x = y - 1 \Rightarrow 2(y - 1) - 3y + 2 = 0 \Rightarrow 2y - 2 - 3y + 2 = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = -1$

El punto de corte es $(-1, 0)$. Son rectas secantes.

b) $\left.\begin{array}{r} y = x - 3 \\ 2x - 2y - 6 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x - 2(x - 3) - 6 = 0 \Rightarrow 2x - 2x + 6 = 0 \Rightarrow 0 = 0$

Las rectas tienen todos sus puntos comunes. Son rectas coincidentes.

9.43 Determina la posición relativa de las rectas $r \equiv y = x - 3$ y s, determinada por los puntos $A(7, 5)$ y $B(-4, 1)$.

La recta s pasa por el punto $A(7, 5)$, y un vector director es $\vec{u} = (-4, 1) - (7, 5) = (-11, -4)$. La ecuación en forma continua de la recta s es: $\frac{x - 7}{-11} = \frac{y - 5}{-4}$. Se opera y despeja: $4x - 11y + 27 = 0$.

La ecuación s es: $-x + y + 3 = 0$.

Como $\frac{-1}{4} \neq \frac{1}{-11}$, son rectas secantes.

9.44 Estudia la posición relativa de las rectas r y s sabiendo que r pasa por el punto $(3, -6)$ y tiene por vector director $\vec{u}(-2, -4)$, y s pasa por el punto $(6, 0)$ y su pendiente es 2.

La ecuación continua de la recta r es: $\frac{x - 3}{-2} = \frac{y + 6}{-4}$. Se opera y se despeja: $2x - y - 12 = 0$.

La ecuación punto-pendiente de la recta s es: $y = 2 \cdot (x - 6)$. Se opera y se despeja: $2x - y - 6 = 0$.

Como $\frac{2}{2} = \frac{-1}{-1} \neq \frac{-12}{-6}$, las rectas son paralelas.

9.45 Halla la ecuación explícita de la recta que pasa por el punto $A(-2, 4)$ y es paralela a la que tiene por ecuación $7x - 14y + 3 = 0$.

Despejando en la recta $7x - 14y + 3 = 0$ se obtiene $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{14}$. La pendiente de esta recta es $\frac{1}{2}$.

Como la recta buscada es paralela a la recta $7x - 14y + 3 = 0$, tendrá pendiente $\frac{1}{2}$. Por tanto, la ecuación punto-pendiente de la nueva recta es $y - 4 = \frac{1}{2}(x + 2)$.

9.46 Halla la ecuación de la recta que pasa por $A(3, 1)$ y por el punto medio del segmento CD, siendo $C(-2, -4)$ y $D(-1, 6)$.

El punto medio del segmento CD es $M_{CD} = \frac{1}{2} \cdot [(-2 - 1), (-4 + 6)] = \left(\frac{-3}{2}, 1\right)$.

Un vector director de la recta que pasa por A y por M_{CD} es $\vec{u} = \left(\frac{-3}{2}, 1\right) - (3, 1) = \left(\frac{-9}{2}, 0\right)$. Como vector de la recta buscada, tomamos uno proporcional a $\left(\frac{-9}{2}, 0\right)$. Tomamos como vector director $(9, 0)$.

Por tanto, la recta buscada es una recta con vector director $\vec{u} = (9, 0)$ y que pasa por el punto $A(3, 1)$.

La ecuación paramétrica de la recta es $\begin{array}{l} x = 3 + 9t \\ y = 1 \end{array}$

9.47 Dada la recta r: $4x + y - 1 = 0$, escribe la ecuación de otra recta s:

a) Paralela a r. **b) Secante con r.**

a) Por ser paralela a la recta r, su vector director será proporcional al vector director de r. Un vector director de la recta r es $\vec{u} = (-1, 4)$. Por tanto, la recta que pasa por un punto cualquiera, por ejemplo, (0, 0), y tiene vector director $\vec{u}$ es paralela a la recta r: $4x + y = 0$.

b) La recta r pasa por el punto $A(0, 1)$. Por tanto, cualquier recta que pase por este punto es secante a r. Por ejemplo, la recta $x + y - 1 = 0$.

9.48 Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto de corte de r: $8x - 5y + 2 = 0$ y s: $2x + y - 4 = 0$, y por el punto $A(0, 3)$.

$$\left.\begin{array}{r} 8x - 5y + 2 = 0 \\ 2x + y - 4 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 8x - 5y + 2 = 0 \\ 8x + 4y - 16 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow y = 2 \Rightarrow x = 1.$$ El punto de corte es $B(1, 2)$.

Buscamos la ecuación de la recta que pasa por $A(0, 3)$ y $B(1, 2)$.

Primero se determina un vector director, $\vec{u}$, a partir de las coordenadas de A y de B.

$$\vec{u} = (1, 2) - (0, 3) = (1, -1)$$

La ecuación continua de la recta es $\frac{x}{1} = \frac{y - 3}{-1}$. Operando se obtiene la ecuación general: $x + y - 3 = 0$.

9.49 Estudia si las rectas

r: $3x + y - 5 = 0$

s: $2x - y = 0$

t: $x + 4y - 9 = 0$

se cortan en un mismo punto y, en caso afirmativo, calcula sus coordenadas.

Se halla primero el punto de corte de dos de ellas:

$$\left.\begin{array}{r} 3x + y - 5 = 0 \\ 2x - y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 2 \end{array}$$

El punto de corte de r y s es (1, 2).

Ahora se comprueba si ese punto pertenece a t: $1 + 4 \cdot 2 - 9 = 0$.

Por tanto, las tres rectas se cortan en el mismo punto: (1, 2).

CUESTIONES PARA ACLARARSE

9.50 Siendo $A(1, 4)$ y $B(0, 6)$, ¿será el vector fijo $\overrightarrow{AB}$ es un representante del vector libre $\vec{u} = (-1, 2)$?

$\overrightarrow{AB} = (0, 6) - (1, 4) = (-1, 2)$. Sí lo es, porque tienen las mismas coordenadas.

9.51 ¿Son equipolentes dos vectores opuestos? Razona tu respuesta.

No, porque tienen distinto sentido.

9.52 La dirección de una recta es la del vector $\vec{u} = (4, 2)$. ¿Puede ser $\vec{v}(-2, -1)$ un vector director de esa recta?

Sí, porque son vectores proporcionales.

9.53 a) Razona si se puede determinar la ecuación de una recta sabiendo que pasa por el punto $A(0, 6)$ y que su ordenada en el origen es 6.

b) ¿Y la de una recta que pasa por el punto A y por el origen de coordenadas?

a) No, porque la ordenada en el origen sea 6 quiere decir que pasa por el punto de primera coordenada 0 y de segunda coordenada 6, que es el punto A, y, por tanto, solo se sabe un punto de la recta, y para que quede determinada se necesita, al menos, otro punto.

b) En este caso sí es posible determinarla porque se conocen dos puntos por los que pasa.

9.54 La recta r pasa por $(5, -1)$ y tiene la dirección del vector $\vec{u} = (6, 2)$. La ecuación de la recta s es $\frac{x-5}{3} = \frac{y+1}{-4}$. ¿Cuál es la posición relativa de r y s?

La ecuación continua de la recta r es $\frac{x-5}{6} = \frac{y+1}{2}$. Operando se obtiene la ecuación general $2x - 6y - 16 = 0$.

Operando en la ecuación continua de la recta s se obtiene la ecuación general de la recta s $4x + 3y - 17 = 0$.

Como $\frac{2}{4} \neq \frac{-6}{3}$, las rectas son secantes.

9.55 Explica cuál puede ser la posición relativa de dos rectas que tienen la misma pendiente.

Si tienen la misma pendiente, pueden ser paralelas (si no tienen ningún punto común) o coincidentes (si tienen todos los puntos comunes).

9.56 Sin realizar cálculos, indica cuáles de los siguientes vectores tienen su argumento comprendido entre 90° y 180°.

a) $\vec{u} = (3, -4)$ **b) $\vec{v} = (-1, 9)$** **c) $\vec{w} = (-2, -2)$**

Para que su argumento esté comprendido entre 90° y 180°, la primera coordenada del vector ha de ser negativa, y la segunda, positiva, ya que su representación gráfica debe quedar en el segundo cuadrante.

El único vector es el del apartado b.

9.57 Relaciona en tu cuaderno las rectas dadas por las siguientes ecuaciones con los elementos que les corresponden.

$\frac{x-5}{2} = \frac{y-2}{-4}$	$n = \frac{5}{8}$
$y + 1 = 3x$	$A(7, -2)$
$3x + 8y - 5 = 0$	$\vec{u} = (1, 5)$
$y = 5x + 4$	$m = 3$

$\frac{x-5}{2} = \frac{y-2}{-4}$ con $A(7, -2)$, $y + 1 = 3x$ con $m = 3$, $3x + 8y - 5 = 0$ con $n = \frac{5}{8}$ e $y = 5x + 4$ con $\vec{u} = (1, 5)$

9.58 ¿Cuál es la posición relativa de dos rectas

a) que tienen la misma dirección y un punto común?

b) con distinta dirección?

c) que en su ecuación punto-pendiente tienen la misma pendiente y el punto distinto?

a) Tienen todos sus puntos comunes. Son coincidentes.

b) Secantes.

c) Si no tienen un punto común y su dirección es la misma, son paralelas.

9.59 Si M es el punto medio del segmento de extremos A y B, ¿cuáles de los siguientes pares de vectores son equipolentes?

a) $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{MB}$ **c) $\overrightarrow{AM}$ y $\overrightarrow{BM}$**

b) $\overrightarrow{AM}$ y $\overrightarrow{MB}$ **d) $\overrightarrow{BM}$ y $\overrightarrow{MA}$**

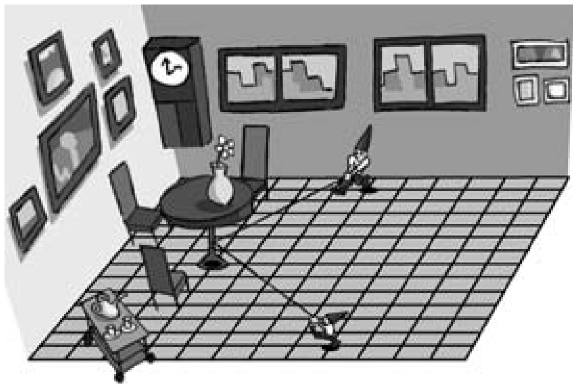
a) No son equipolentes porque no tienen el mismo módulo.

b) Sí son equipolentes: tienen igual dirección, sentido y módulo.

c) No son equipolentes porque tienen distinto sentido.

d) Sí son equipolentes: tienen igual módulo, dirección y sentido.

9.60 Para arrastrar una mesa muy pesada de tablero circular y con una pata en el centro, se atan dos cuerdas y se tira de ellas como muestra la figura.



Si se utilizase una única cuerda para obtener el mismo resultado que con las dos anteriores, ¿qué fuerza debería aplicarse?

La fuerza que se ejerce sobre cada una de las cuerdas tiene el mismo módulo, dirección y sentido que los vectores $\vec{a} = (3, 6)$ y $\vec{b} = (5, -6)$.

La cuerda se obtendría como resultado de sumar las otras dos.
$\vec{a} + \vec{b} = (3, 6) + (5, -6) = (8, 0)$.

9.61 Una maqueta de un barco de vela es empujada por la corriente del agua de un estanque que ejerce una fuerza $f_a = (10, 8)(N)$. A su vez, el viento sopla con una fuerza $f_v = (-3, -1)(N)$.

¿De qué dirección y sentido es la fuerza resultante? ¿Cuál es su módulo?

El barco se desplaza según el resultado de sumar a la fuerza de la corriente la del viento:

$(10, 8) + (-3, -1) = (7, 7)$

El barco se desplaza en el mismo sentido que la fuerza de la corriente.

Su módulo es: $\sqrt{7^2 + 7^2} = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}$.

9.62 En un radar se observa el vuelo de dos aviones. Uno de ellos se encuentra en el punto de coordenadas (5, 3) y se desplaza siguiendo la dirección del vector $\vec{u} = (-4, 7)$. La trayectoria del segundo queda determinada por la recta de ecuación $7x + 4y + 83 = 0$.

Si continuaran su vuelo de forma indefinida, ¿chocarían en algún momento?

Trayectoria del primer avión: $\dfrac{x - 5}{-4} = \dfrac{y - 3}{7} \Rightarrow 7x + 4y - 47 = 0$

Trayectoria del segundo avión: $7x + 4y + 83 = 0$

La posición relativa de los dos es: $\dfrac{7}{7} = \dfrac{4}{4} \neq \dfrac{-47}{83}$.

Las trayectorias son paralelas. Por tanto, no chocarían en ningún momento.

9.63 Una cigüeña tiene su nido situado sobre una torre a 50 metros de altura. Ella está sobre el suelo a 100 metros de distancia de la torre.

a) Si subiera hasta el nido en línea recta, ¿cuál sería la ecuación de la trayectoria seguida? ¿Y cuál la pendiente de la misma?

b) ¿A qué distancia del nido se encuentra la cigüeña?

a) La posición del nido respecto a esos ejes es (0, 50), y la de la cigüeña sobre el suelo, (100, 0).

Ecuación de la trayectoria: $\dfrac{x}{100} = \dfrac{y - 50}{-50} \Rightarrow m = \dfrac{-50}{100} = -\dfrac{1}{2}$

b) Distancia entre el nido y la cigüeña: $\sqrt{100^2 + 50^2} = \sqrt{12\,500} = 50\sqrt{5}$ metros

9.64 Al dibujar una mesa de billar a escala, los vértices de la misma han quedado situados en los puntos de coordenadas $O(0, 0)$; $A(0, 6)$, y $C(12, 0)$.

a) Halla las coordenadas del cuarto vértice, B.

b) Si una bola se sitúa en la mitad del lado AB y se pretende que llegue a la mitad del lado BC, ¿qué distancia recorrerá?

c) ¿Cuál es la ecuación de la trayectoria?

a) Como la mesa es rectangular, al situar los puntos en el plano se observa que $C(12, 6)$.

b) El punto medio del lado AB es $M_{AB} = \frac{1}{2} \cdot [(12, 0) + (0, 6)] = (6, 3)$.

El punto medio del lado BC es $N_{BC} = \frac{1}{2} \cdot [(12, 6) + (0, 6)] = (6, 6)$.

$d(M_{AB}, N_{BC}) = \sqrt{(6 - 6)^2 + (6 - 3)^2} = 3$ unidades recorrerá.

c) El vector director es $\vec{v} = \overrightarrow{M_{AB}N_{BC}} = (6, 6) - (6, 3) = (0, 3)$. Como es un vector horizontal, la ecuación de la trayectoria es la recta horizontal $y = 3$.

9.65 Para regar los árboles de un jardín se van a colocar unas tuberías que comuniquen unos con otros.

Si dos de esos árboles están situados en puntos de coordenadas $A(4, 6)$ y $B(9, 8)$ y otro de ellos en el punto $C(0, 6)$, ¿sería posible conseguir que una tubería recta pase por los tres a la vez?

Recta que une los puntos A y B: $\frac{x - 4}{9 - 4} = \frac{y - 6}{8 - 6} \Rightarrow \frac{x - 4}{5} = \frac{y - 6}{2}$.

Se comprueba si el punto C pertenece a esa recta: $\frac{0 - 4}{5} = \frac{6 - 6}{2} \Rightarrow \frac{0 - 4}{5} \neq \frac{6 - 6}{2}$.

No se podría colocar una tubería recta que pasara por los tres árboles a la vez.

9.66 Un barco lanza un mensaje de socorro. Su posición viene dada por el punto $A(1460, 765)$. Dos barcos situados en $B(3525, 2490)$ y $C(585, 3500)$ acuden en su ayuda.

Si los dos navegan a la misma velocidad y en línea recta hacia A, ¿cuál llegará primero?

Llegará primero el que esté más cerca de A.

$d(A, B) = \sqrt{(3525 - 1460)^2 + (2490 - 765)^2} = \sqrt{7\,239\,850} = 2690{,}70$ unidades

$d(A, C) = \sqrt{(585 - 1460)^2 + (3500 - 756)^2} = \sqrt{8\,245\,850} = 2871{,}56$ unidades

Llegará antes el barco que está en la posición B.

9.67 Para hacer un túnel, se ha iniciado la excavación desde dos puntos distintos.

Dibujada sobre un papel cuadriculado, una de las máquinas parte del punto $A(130, 245)$ y sigue la trayectoria determinada por el vector $(2, -6)$. La otra ha partido del punto $B(-70, 1445)$ y ha continuado siguiendo la dirección de una recta de pendiente -3.

¿Han seguido las dos máquinas la misma dirección? ¿Se juntarán en algún punto intermedio? Determina las coordenadas del punto.

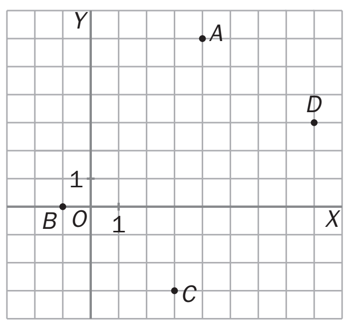
La trayectoria de la primera máquina: $\frac{x - 130}{2} = \frac{y - 245}{-6} \Rightarrow 3x + y - 635 = 0$

La trayectoria de la segunda máquina: $y - 1445 = -3 \cdot (x + 70) \Rightarrow 3x + y - 1235 = 0$

La dirección es la misma puesto que las dos tienen la misma pendiente, -3. No se juntarán puesto que son paralelas.

REFUERZO

Vectores en el plano. Operaciones y aplicaciones



9.68 Dados los puntos A, B, C y D de la figura, calcula los vectores $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{AD}$.

¿Cuáles de ellos son equipolentes?

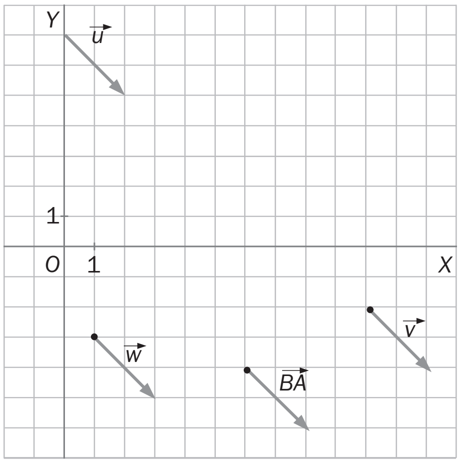
$A = (4, 5)$; $B = (-1, -1)$; $C = (1, -3)$; $D = (6, 3)$

$\overrightarrow{BA} = (5, 6)$ $\overrightarrow{BC} = (2, -2)$ $\overrightarrow{CD} = (5, 6)$ $\overrightarrow{AD} = (2, -2)$

Son equipolentes $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{CD}$, y también $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{AD}$.

9.69 Dibuja el vector $\overrightarrow{BA}$, con $A(6, -4)$. Dibuja después tres vectores equipolentes a él que tengan su origen en los puntos $C(0, 7)$; $D(1, -3)$, y $E(8, -2)$.

¿Cuáles son las coordenadas de estos nuevos vectores?



AMPLIACIÓN

9.70 Halla el módulo y el argumento de:

a) $\vec{u} = (-9, 6)$ **b) $\vec{v} = (-2, 8)$** **c) $\vec{w} = (-7, -1)$**

a) $|\vec{u}| = +\sqrt{(-9)^2 + 6^2} = +\sqrt{117}$ unidades

Argumento de $\vec{u}$: $\text{tg}\ \alpha = \dfrac{6}{-9} = -1{,}5 \Rightarrow \alpha = 146°\ 18'\ 36''$

b) $|\vec{v}| = +\sqrt{2^2 + 8^2} = +\sqrt{68} = 2\sqrt{17}$ unidades

Argumento de $\vec{v}$: $\text{tg}\ \alpha = \dfrac{8}{-2} = -4 \Rightarrow \alpha = 104°\ 2'\ 11''$

c) $|\vec{w}| = +\sqrt{(-7)^2 + (-1)^2} = +\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ unidades

Argumento de $\vec{w}$: $\text{tg}\ \alpha = \dfrac{-1}{-7} = \dfrac{1}{7} \Rightarrow \alpha = 188°\ 7'\ 48''$

9.71 Halla la distancia entre los puntos $A(4, 9)$ y $B(-2, 1)$.

$d(A, B) = \sqrt{(-2 - 4)^2 + (1 - 9)^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$ unidades

9.72 Calcula las coordenadas del punto medio del segmento de extremos $A(2, -5)$ y $B(4, 1)$.

$M_{AB} = \dfrac{1}{2} \cdot [(2, -5) + (4, 1)] = (3, -2)$

9.73 Calcula:

a) $(5, 9) + 2(-4, 8) - (6, 0)$

b) $3(-4, 7) - (2, 6) + 5(1, -3)$

c) $(7, 11) - [(4, 9) + (-3, 1)]$

d) $(-6, 8) + 3[(5, -2) + (4, 7)]$

a) $(5, 9) + 2(-4, 8) - (6, 0) = (5, 9) + (-8, 16) - (6, 0) = (-9, 25)$

b) $3(-4, 7) - (2, 6) + 5(1, -3) = (-12, 21) - (2, 6) + (5, -15) = (-9, 0)$

c) $(7, 11) - [(4, 9) + (-3, 1)] = (7, 11) - (1, 10) = (6, 1)$

d) $(-6, 8) + 3[(5, -2) + (4, 7)] = (-6, 8) + 3 \cdot (9, 5) = (-6, 8) + (27, 15) = (21, 23)$

9.74 Calcula $5\vec{v} - \frac{1}{2}\vec{w} + \vec{u}$, siendo $\vec{u}(8, 3)$; $\vec{v}(-1, -2)$, y $\vec{w}(0, 4)$.

$5\vec{v} - \frac{1}{2}\vec{w} + \vec{u} = 5(-1, -2) - \frac{1}{2}(0, 4) + (8, 3) = (3, -9)$

Recta. Posiciones relativas

9.75 Obtén un punto, un vector director y la pendiente de la recta de ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 5t \end{cases}$.

$A(-1, 0)$; $\vec{v} = (2, 5)$; $m = \frac{5}{2}$

9.76 Escribe, en todas las formas posibles, la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(3, 1)$ y tiene la dirección del vector $\vec{u} = (5, 2)$.

Vectorial: $(x, y) = (3, 1) + t(5, 2)$

Paramétrica: $\begin{cases} x = 3 + 5t \\ y = 1 + 2t \end{cases}$

Continua: $\frac{x - 3}{5} = \frac{y - 1}{2}$

General: $2x - 5y - 1 = 0$

Punto-pendiente: $y - 1 = \frac{2}{5} \cdot (x - 3)$

Explícita: $y = \frac{2}{5}x - \frac{1}{5}$

9.77 Calcula la ecuación general de la recta que pasa por los puntos $A(-3, 6)$ y $B(4, 1)$.

La ecuación continua de la recta es $\frac{x + 3}{4 + 3} = \frac{y - 6}{1 - 6}$. Operando y despejando, se obtiene la ecuación general de la recta $5x + 7y - 27 = 0$.

9.78 Comprueba si el punto $B(4, -6)$ pertenece a alguna de estas rectas.

a) $y = 9 - 3x$

b) $5x + 3y - 2 = 0$

a) $-6 = 9 - 3 \cdot 4 \Rightarrow -6 = -3$. No pertenece.

b) $5 \cdot 4 + 3 \cdot (-6) - 2 = 0 \Rightarrow 0 = 0$. Sí pertenece.

9.79 ¿Son secantes las rectas r: $4x - 5y - 2 = 0$ y s: $y = 2x - 4$? En caso afirmativo, calcula su punto de corte.

Se escribe la recta s en forma general: $2x - y - 4 = 0$.

$\frac{4}{2} \neq \frac{-5}{2}$. Por tanto, son secantes.

$\left.\begin{aligned} 4x - 5y - 2 &= 0 \\ y &= 2x - 4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 4x - 5 \cdot (2x - 4) - 2 = 0 \Rightarrow 4x - 10x + 18 = 0 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow y = 2$

Se cortan en el punto $(3, 2)$.

9.80 Estudia la posición relativa de los siguientes pares de rectas.

a) r: $4x - 6y + 10 = 0$
s: $2x - 3y + 4 = 0$

b) r: $2x + 3y + 6 = 0$
s: $6x + 9y + 18 = 0$

a) $\frac{4}{2} = \frac{-6}{-3} \neq \frac{10}{4} \Rightarrow$ Son paralelas.

b) $\frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{6}{18} \Rightarrow$ Son coincidentes.

9.81 Halla la ecuación punto-pendiente de la recta que pasa por el punto $P(0, 2)$ y tiene la misma pendiente que $\frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{3}$.

¿Cuál es la posición relativa de las dos rectas?

La pendiente de la recta es $m = \frac{3}{-1} = -3$. Por tanto, la ecuación de la recta buscada es $y - 2 = -3x$.

Como las rectas tienen igual dirección y carecen de puntos comunes, son paralelas.

AMPLIACIÓN

9.82 Halla x en el vector $\vec{u} = (x, 8)$ sabiendo que su módulo es 10.

$10 = \sqrt{x^2 + 8} \Rightarrow x^2 = 100 - 64 \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = \pm 6$

Entonces, $\vec{u} = (6, 8)$ o $\vec{u} = (-6, 8)$

9.83 Determina, mediante vectores, si el triángulo de vértices $A(-4, -2)$; $B(0, 1)$, y $C(3, 2)$ es rectángulo.

Primero se calculan los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{AC}$ de los lados y sus argumentos:

$\overrightarrow{AB} = (4, 3)$ $\quad\quad$ $\overrightarrow{BC} = (3, 1)$ $\quad\quad$ $\overrightarrow{AC} = (7, 4)$

Calculamos los argumentos de los vectores:

Argumento de $\overrightarrow{AB}$: $\text{tg}\ \alpha = \frac{3}{4} = 0{,}75 \Rightarrow \alpha = 36°\ 52'\ 12''$

Argumento de $\overrightarrow{BC}$: $\text{tg}\ \alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow \alpha = 18°\ 26'\ 6''$

Argumento de $\overrightarrow{AC}$: $\text{tg}\ \alpha = \frac{4}{7} \Rightarrow \alpha = 29°\ 44'\ 42''$

El ángulo en el vértice A es la diferencia entre el argumento del vector $\overrightarrow{AB}$ y el de $\overrightarrow{AC}$:

$\widehat{A} = 36°\ 52'\ 12'' - 29°\ 44'\ 42'' = 7°\ 7'\ 30''$

El ángulo en el vértice B es el suplementario de la diferencia entre el argumento del vector AB y el del vector BC:

$\widehat{B} = 180° - 36°\ 52'\ 12'' - 18°\ 26'\ 6'' = 124°\ 41'\ 42''$

Para hallar el ángulo en el vértice C, solo hay que restar a 180° los otros dos ángulos:

$\widehat{C} = 180° - 7°\ 7'\ 30'' - 124°\ 41'\ 42'' = 48°\ 10'\ 48''$

Como no hay ningún ángulo recto, el triángulo no es rectángulo.

9.84 Calcula la ecuación general de la recta que pasa por el punto $P(5, -4)$ y forma un ángulo de 30° con el eje de abscisas.

La pendiente es $m = \text{tg}\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Por tanto, la ecuación punto-pendiente es $y + 4 = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - 5)$.

Operando se obtiene la ecuación general $\sqrt{3}x - 3y - (12 + 5\sqrt{3}) = 0$.

9.85 Calcula la ecuación punto-pendiente de la recta que pasa por el punto en el que $6x + 9y - 12 = 0$ corta al eje de abscisas y es paralela a $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$.

Para calcular el punto de corte con el eje de abscisas se tiene que $y = 0$. Entonces, si $y = 0$, $6x - 12 = 0 \Rightarrow x = 2$.
La recta pedida pasa por el punto (2, 0).

La pendiente debe ser igual que la de $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} \Rightarrow m = \frac{-3}{4}$. La recta es $y = \frac{-3}{4} \cdot (x - 2)$.

9.86 Los lados de un triángulo vienen dados por las rectas de ecuaciones $3x - y - 6 = 0$, $y = 0$ y $3x + y - 18 = 0$.

a) Halla sus vértices.

b) Clasifica el triángulo en función de sus lados.

c) Halla las ecuaciones de las rectas determinadas por sus medianas.

a) Para calcular sus vértices se resuelven los sistemas formados por las rectas dos a dos:

$$\left.\begin{array}{r} 3x - y - 6 = 0 \\ 3x + y - 18 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 4 \\ y = 6 \end{array} \qquad \left.\begin{array}{r} 3x - y - 6 = 0 \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 2 \\ y = 0 \end{array} \qquad \left.\begin{array}{r} y = 0 \\ 3x + y - 18 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 6 \\ y = 0 \end{array}$$

Los vértices son $A(4, 6)$, $B(2, 0)$ y $C(6, 0)$.

b) $d(A, B) = \sqrt{(2 - 4)^2 + (0 - 6)^2} = \sqrt{40}$ $\qquad d(A, C) = \sqrt{(6 - 4)^2 + (0 - 6)^2} = \sqrt{40}$

$d(C, B) = \sqrt{(2 - 6)^2 + (0 - 0)^2} = \sqrt{16} = 4$

Es un triángulo isósceles porque tiene dos lados iguales y uno desigual.

c) $M_{AB} = \left(\dfrac{4 + 2}{2}, \dfrac{6 + 0}{2}\right) = (3, 3)$ $\qquad M_{BC} = \left(\dfrac{2 + 6}{2}, \dfrac{0 + 0}{2}\right) = (4, 0)$

$M_{CA} = \left(\dfrac{6 + 4}{2}, \dfrac{0 + 6}{2}\right) = (5, 3)$

$\dfrac{x - 3}{6 - 3} = \dfrac{y - 3}{0 - 3} \Rightarrow \dfrac{x - 3}{3} = \dfrac{y - 3}{-3} \Rightarrow x + y - 6 = 0$ $\qquad \dfrac{x - 4}{4 - 4} = \dfrac{y}{6 - 0} \Rightarrow 6x - 24 = 0 \Rightarrow x = 4$

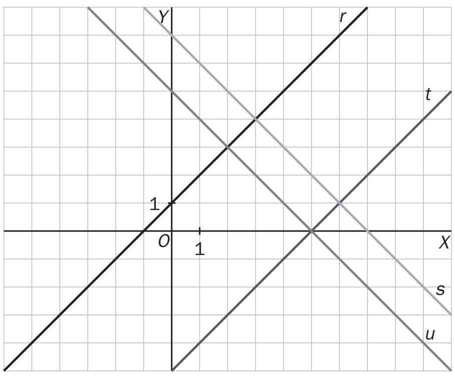
$\dfrac{x - 2}{5 - 2} = \dfrac{y}{3} \Rightarrow \dfrac{x - 2}{3} = \dfrac{y}{3} \Rightarrow x - y - 2 = 0$

9.87 Sabiendo que las rectas r: $x - y + 1 = 0$, s: $x + y - 7 = 0$, t: $x - y - 5 = 0$ y u: $x + y - 5 = 0$ forman un cuadrilátero.

a) Calcula la medida de sus lados.

b) Comprueba si las diagonales se cortan en su punto medio.

a) Al dibujar las rectas se observa cuáles son los puntos de corte de cada dos de ellas que hay que obtener para calcular los vértices pedidos.



Hay que resolver los sistemas formados por las rectas r y s, obteniéndose el punto $A(3, 4)$; s y t, calculando el punto $B(6, 1)$; t y u, obteniendo el punto $C(5, 0)$, y r y u, con el punto $D(2, 3)$.

$d(A, B) = \sqrt{(6 - 3)^2 + (1 - 4)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

$d(B, C) = \sqrt{(5 - 6)^2 + (0 - 1)^2} = \sqrt{2}$

$d(C, D) = \sqrt{(2 - 5)^2 + (3 - 0)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

$d(A, D) = \sqrt{(2 - 3)^2 + (3 - 4)^2} = \sqrt{2}$

b) Ecuación de la diagonal AC: $\dfrac{x - 3}{5 - 3} = \dfrac{y - 4}{0 - 4} \Rightarrow 2x + y - 10 = 0$

Ecuación de la diagonal BD: $\dfrac{x - 6}{2 - 6} = \dfrac{y - 1}{3 - 1} \Rightarrow x + 2y - 8 = 0$

Punto de corte de las dos diagonales: $\left.\begin{array}{r} 2x + y - 10 = 0 \\ x + 2y - 8 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x + 2 \cdot (10 - 2x) - 8 = 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow x = 4$

Las diagonales se cortan en el punto $P(6, -2)$.

El punto medio de la diagonal $\overrightarrow{AC}$ es $M_{AC} = \dfrac{1}{2} \cdot [(3, 4) + (5, 0)] = (4, 2)$.

El punto medio de la diagonal $\overrightarrow{BD}$ es $N_{BD} = \dfrac{1}{2} \cdot [(6, 1) + (2, 3)] = (4, 2)$.

Por tanto, las diagonales se cortan en su punto medio.

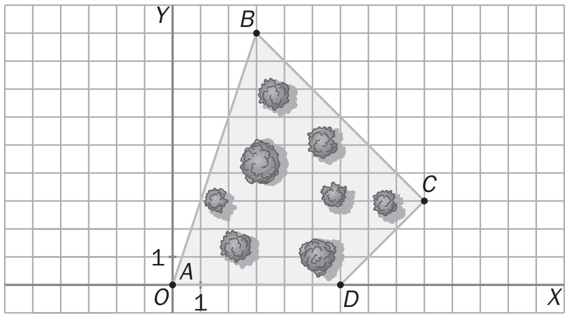
9.88 **Se quieren plantar una serie de árboles en los límites de una finca. Para ello se ha realizado un esquema y se ha adoptado un sistema de referencia, tal y como aparece en la figura.**

Los vértices de la finca son los puntos:

***A*(0, 0), *B*(3, 9), *C*(9, 3), *D*(6, 0)**

- **En los vértices se colocarán cuatro pinos.**
- **Entre los vértices *A* y *B* deben plantarse dos abetos.**
- **Entre los vértices *B* y *C* deben plantarse dos nogales.**
- **Entre los vértices *C* y *D* y entre los *D* y *A* se instalarán dos y cinco setos, respectivamente.**

Con la ayuda de la referencia que se ha tomado, indica las posiciones exactas de los abetos, nogales y setos que se quieren plantar.



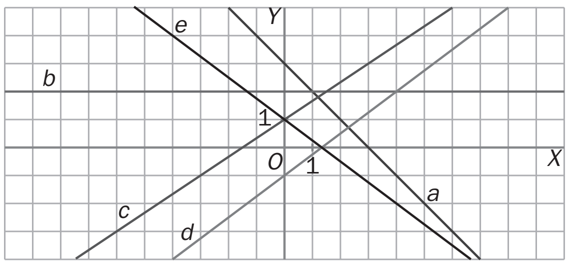
- Abetos: $\overrightarrow{AB} = (3, 9) \Rightarrow \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = (1, 3)$. Se debe colocar un abeto en el punto (0, 0) + (1, 3) = (1, 3), y otro en el punto (1, 3) + (1, 3) = (2, 6).
- Nogales: $\overrightarrow{BC} = (6, 6) \Rightarrow \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = (2, -2)$. Se debe colocar un nogal en el punto (3, 9) + (2, −2) = (5, 7) y otro en el punto (5, 7) + (2, −2) = (7, 5).
- Setos:
  – $\overrightarrow{CD} = (-3, -3) \Rightarrow \frac{1}{3}\overrightarrow{CD} = (-1, -1)$. Se debe colocar un seto en el punto (9, 3) + (−1, −1) = (8, 2) y otro en el punto (8, 2) + (−1, −1) = (7, 1).
  – $\overrightarrow{DA} = (6, 0) \Rightarrow \frac{1}{6}\overrightarrow{DA} = (1, 0)$. Se deben colocar cinco setos en los puntos (1, 0), (2, 0), (3,0), (4, 0) y (5, 0).

9.89 **Puzzle desordenado**

En el siguiente gráfico aparecen cinco rectas. La tabla indica las características de estas cinco rectas, pero las casillas están desordenadas.

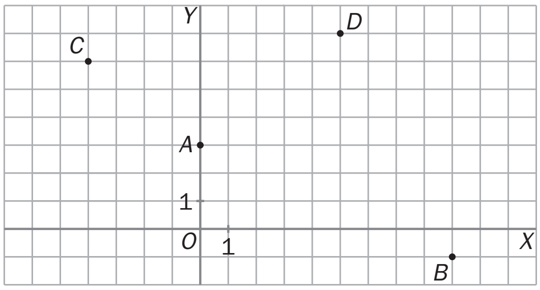
Reordena el puzzle de forma que cada recta se corresponda con sus características.

Recta	**Ecuación**	**Pendiente**	**Ordenada en el origen**
a	$y = 2$	**0**	**3**
b	$y = \frac{2}{3}x + 1$	**−1**	**1**
c	$y = \frac{3}{4}x - 1$	$\frac{2}{3}$	**−1**
d	$y = \frac{-3}{4}x + 1$	$\frac{-3}{4}$	**1**
e	$y = -x + 3$	$\frac{3}{4}$	**2**



Recta	Ecuación	Pendiente	Ordenada en el origen
a	$y = 2$	0	2
b	$y = \frac{2}{3}x + 1$	$\frac{2}{3}$	1
c	$y = \frac{3}{4}x - 1$	$\frac{3}{4}$	−1
d	$y = \frac{-3}{4}x + 1$	$\frac{-3}{4}$	1
e	$y = -x + 3$	−1	3

9.A1 **Calcula las coordenadas y el módulo de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$.**



a) $\overrightarrow{AB} = (9, -4) - (0, 3) = (9, -7)$. $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{9^2 + (-7)^2} = \sqrt{81 + 49} = \sqrt{130}$

b) $\overrightarrow{CD} = (5, 7) - (-4, 6) = (9, 1)$. $|\overrightarrow{CD}| = \sqrt{9^2 + 1^2} = \sqrt{81 + 1} = \sqrt{82}$

9.A2 **Calcula:**

a) $3(6, 2) + (5, -4) - 6(2, 1)$

b) $5[(7, -2) + (-8, 1)]$

c) $(2, 3) - [(6, 1) - 4(-3, -2)]$

a) $3(6, 2) + (5, -4) - 6(2, 1) = (18, 6) + (5, -4) - (12, 6) = (11, -4)$

b) $5[(7, -2) + (-8, 1)] = 5 \cdot (-1, -1) = (-5, -5)$

c) $(2, 3) - [(6, 1) - 4(-3, -2)] = (2, 3) - [(6, 1) - (-12, -8)] = (2, 3) - (18, 9) = (-16, -6)$

9.A3 **Obtén el módulo y el argumento de los vectores:**

a) $\vec{u} = (7, 2)$

b) $\vec{v} = (0, 4)$

c) $\vec{w} = (-9, -6)$

d) $\vec{x} = (-8, 0)$

a) $|\vec{u}| = \sqrt{7^2 + 2^2} = \sqrt{53}$

Argumento de $\vec{u}$: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{7} = 0{,}75 \Rightarrow \alpha = 15° \, 56' \, 43''$

b) $|\vec{v}| = \sqrt{0^2 + 4^2} = 4$

Argumento de $\vec{v}$: $\alpha = 90°$

c) $|\vec{w}| = \sqrt{(-9)^2 + (-6)^2} = \sqrt{81 + 36} = \sqrt{117}$

Argumento de $\vec{w}$: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{-6}{-9} = \frac{2}{3} \Rightarrow \alpha = 213° \, 41' \, 25''$

d) $|\vec{x}| = \sqrt{(-8)^2 + 0^2} = 8$

Argumento de $\vec{x}$: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{0}{-8} = 0 \Rightarrow \alpha = 180°$

9.A4 **Halla la distancia entre los puntos $A(5, -9)$ y $B(7, 2)$.**

$d(A, B) = \sqrt{(7 - 5)^2 + (2 + 9)^2} = \sqrt{4 + 121} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$

9.A5 **Calcula las coordenadas del punto medio del segmento AB siendo $A(4, 0)$ y $B(-2, 6)$.**

El punto medio del segmento AB es $M_{AB} = \frac{1}{2} \cdot [(-2, 6) + (4, 0)] = (1, 3)$.

9.A6 Escribe todas las formas posibles de la ecuación de la recta:

a) Que pasa por el punto $P(4, 1)$ y tiene la dirección del vector $\vec{u} = (-2, 5)$.

b) Que pasa por los puntos $A(9, 4)$ y $B(8, 1)$.

a) Vectorial: $(x, y) = (4, 1) + t(-2, 5)$

Paramétricas: $\begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = 1 + 5t \end{cases}$

Continua: $\dfrac{x - 4}{-2} = \dfrac{y - 1}{5}$

General: $5x + 2y - 22 = 0$

Punto-pendiente: $y - 1 = \dfrac{-5}{2} \cdot (x - 4)$

Explícita: $y = \dfrac{-5}{2}x + 11$

b) Vector dirección $\overrightarrow{AB} = (-1, -3)$

Vectorial: $(x, y) = (9, 4) + t(-1, -3)$

Paramétricas: $\begin{cases} x = 9 - t \\ y = 4 - 3t \end{cases}$

Continua: $\dfrac{x - 9}{-1} = \dfrac{y - 4}{-3}$

General: $3x - y - 23 = 0$

Punto-pendiente: $y - 4 = 3 \cdot (x - 9)$

Explícita: $y = 3x - 23$

9.A7 Comprueba si la recta $6x + 4y = 0$ pasa por el punto $(3, -3)$.

$6 \cdot 3 + 4 \cdot (-3) \neq 0 \Rightarrow 18 - 12 \neq 0 \Rightarrow$ No pasa por el punto.

9.A8 Calcula la ecuación general de la recta que pasa por el origen de coordenadas y tiene el mismo vector que r: $\begin{matrix} x = -1 + t \\ y = 3 + 5t \end{matrix}$

Un vector director de la recta es $\vec{u}(1, 5)$. La ecuación general de la recta es $y = 5x$.

9.A9 Estudia la posición relativa de las rectas:

a) $r \equiv 3x - y + 6 = 0$
$s \equiv 3x - 4y + 2 = 0$

b) $r \equiv 4x + 6y + 12 = 0$
$s \equiv 2x + 3y + 9 = 0$

a) Como $\dfrac{3}{3} \neq \dfrac{-1}{-4}$, las rectas son secantes.

b) Como $\dfrac{4}{2} = \dfrac{6}{3} \neq \dfrac{12}{9}$, las rectas son paralelas.

MATETIEMPOS

Sumas y más sumas

Fíjate en las siguientes sumas.

$$1 + \frac{1}{1} = 2$$

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2 \cdot 1} = 2{,}5$$

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 2{,}67$$

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1}{3 \cdot 2 \cdot 1} + \frac{1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 2{,}71$$

Calcula las tres sumas que continúan la serie.

¿Cuál crees que es el resultado si se suman infinitos términos?

Los siguientes términos serán:

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1}{3 \cdot 2 \cdot 1} + \frac{1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} + \frac{1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 2{,}71$$

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1}{3 \cdot 2 \cdot 1} + \frac{1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} + \frac{1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 2{,}71$$

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1}{3 \cdot 2 \cdot 1} + \frac{1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} + \frac{1}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 2{,}7$$

Construiremos la siguiente tabla:

Término	1	2	3	4	5	6	….	n
Σ	1	2	2.5	2.666			…	e

Es la definición del número e.

MATEMATICAS. 4ºESO-B. TEMA 8: Vectores

1.- Calcula el valor de k sabiendo que el módulo del vector $\vec{v} = (k, 3)$ es 5.

2.- Si $\vec{v} = (3, 4)$, hallar un vector unitario de su misma dirección y sentido.

3.- Halla las coordenadas del baricentro del triángulo de vértices A(1, 2), B(−3, 4) y C(−1, 3).

4.- Hallar las coordenadas de C, sabiendo que B(2, −2) es el punto medio de AC, A(−3, 1).

5.- Averiguar si están alineados los puntos: A(−2, −3), B(1, 0) y C(6, 5).

6.- Calcula D para que el cuadrilátero A(−1, −2), B(4, −1), C(5, 2) y D sea un paralelogramo.

7.- Las coordenadas de los extremos del segmento AB son A(2, −1) y B(8, −4). Hallar las coordenadas del punto C que divide a AB en dos partes tales que AC es la mitad de CB.

8.- Si el segmento AB de extremos A(1, 3), B(7, 5), se divide en cuatro partes iguales, ¿cuáles son las coordenadas de los puntos de división?

9.- Hallar el simétrico del punto A(4, −2) respecto de M(2, 6).

10.- Hallar el simétrico del punto A(3, −2) respecto de M(−2, 5).

11.- Del triángulo ABC se sabe A(2, 1), B(1, 0) y el baricentro G(2/3, 0), calcula C.

12.- Dados A(3, 2) y B(5, 4) halla un punto C, alineado con A y B, tal que CA/CB = 3/2

13.- Hallar un vector unitario de la misma dirección que el vector $\vec{v} = (8, -6)$.

14.- Una recta pasa por el punto A(−1, 3) y tiene como vector director $\vec{v} = (2, 5)$. Da su ecuación vectorial, paramétricas y continua.

15.- Escribir la ecuación punto pendiente de:
- a) Una recta que pasa por el punto A(−1, 3) y tiene un vector director $\vec{v} = (2, 5)$.
- b) Una recta que pasa por los puntos A(−2, −3) y B(4, 2).
- c) Una recta que pasa por A(−2, −3) y tiene una inclinación de 45°.

16.- Escribir la ecuación general de la recta que:
- a) Pasa por A (1, 5) y tiene como vector director $\vec{v} = (-2, 1)$.
- b) Pasa por A (1, 5) y tiene como pendiente m = −2.

17.- Hallar la ecuación explícita de la recta que pasa por A (1, 5) y tiene como pendiente m = −2.

18.- Hallar la ecuación de la recta que pasa por A(1, 3) y B(2, −5).

19.- Escribe de todas las formas posibles la ecuación de la recta que pasa por A(1, 2) y B(−2, 5).

20.- Hallar la pendiente y la ordenada en el origen de la recta $3x + 2y - 7 = 0$.

21.- Estudiar la posición relativa de las rectas de ecuaciones:

1) $2x + 3y - 4 = 0$ 2) $x - 2y + 1 = 0$ 3) $3x - 2y - 9 = 0$
4) $x + 6y - 8 = 0$ 5) $2x - 4y - 6 = 0$ 6) $2x + 3y + 9 = 0$

22.- ¿Son secantes las rectas $r \equiv x + y - 2 = 0$ y $s \equiv x - 2y + 4 = 0$? En caso afirmativo calcular el punto de corte.

23.- Clasificar el triángulo determinado por los puntos:
- a) A(6, 0), B(3, 0) y C(6, 3)
- b) A(4, −3), B(3, 0) y C(0, 1)

24.- De un paralelogramo ABCD conocemos A(1, 3), B(5, 1), C(−2, 0). Halla las coordenadas de D.

25.- Se tiene el cuadrilátero ABCD cuyos vértices son A(3, 0), B(1, 4), C(−3, 2) y D(−1, −2). Comprueba que es un paralelogramo y determina su centro.

26.- De un paralelogramo se conoce un vértice, A(8, 0), y el punto de corte de las dos diagonales, Q(6, 2). También sabemos que otro vértice se encuentra en el origen de coordenadas. Calcular:
- a) Los otros vértices
- b) Las ecuaciones y longitud de las diagonales.

27.- Hallar la ecuación de la recta que pasa por A(1, 5), y es paralela a la recta $2x + y + 2 = 0$

28.- Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (2, −3) y es paralela a la recta que une los puntos (4, 1) y (−2, 2).

29.- La recta $3x + ny - 7 = 0$ pasa por el punto A(3, 2) y es paralela a la recta $mx + 2y - 13 = 0$. Calcula m y n.

30.- Dado el triángulo ABC, de coordenadas A(0, 0), B(4, 0) y C(4, 4); calcula la ecuación de la mediana que pasa por el vértice B.

31.- Los puntos A(−1, 3) y B(3, −3) son vértices de un triángulo isósceles que tiene su vértice C en la recta $2x - 4y + 3 = 0$. Si AC y BC son los lados iguales, calcula las coordenadas del vértice C.

SOLUCIONES

Ejercicio nº 1.

$5 = \sqrt{k^2 + 9} \qquad 25 = k^2 + 9 \qquad k = \pm 4$

Ejercicio nº 2.

$\left|\vec{v}\right| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \qquad \vec{w} = \frac{1}{5}(3, 4) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$

Ejercicio nº 3.-

$G\left(\frac{1-3-1}{3}, \frac{2+4+6}{3}\right) = G(-1, 4)$

Ejercicio nº 4.-

$2 = \frac{-3 + x_C}{2} \qquad 4 = -3 + x_C \qquad x_C = 7$

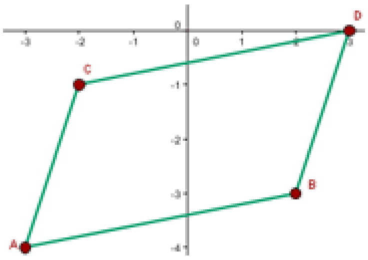
$C(7, -5)$

$-2 = \frac{1 + y_C}{2} \qquad -4 = 1 + y_C \qquad y_C = -5$

Ejercicio nº 5.-

$\frac{1+2}{6-1} = \frac{0+3}{5-0} \qquad \frac{3}{5} = \frac{3}{5} \qquad$ *Sí*

Ejercicio nº 6.-



$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$(4+1, -1+2) = (5 - x_D, 2 - y_D)$

$5 = 5 - x_D \qquad x_D = 0$

$D(0, 1)$

$1 = 2 - y_D \qquad y_D = 1$

Ejercicio nº 7.-

$\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$

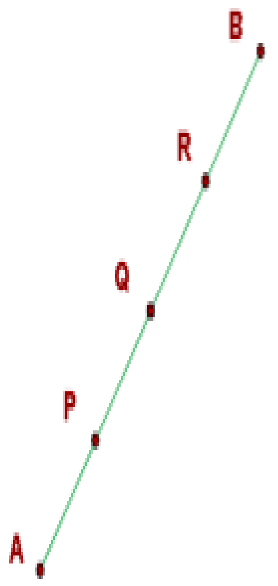
$(x-2, y+1) = \frac{1}{2}(8-x, -4-y)$

$x - 2 = \frac{1}{2}(8-x) \qquad x = 4$

$C(4, -2)$

$y + 1 = \frac{1}{2}(-4-y) \qquad y = -2$

Ejercicio nº 8.-



Q es el punto medio del segmento AB

$$Q\left(\frac{1+7}{2}, \frac{3+5}{2}\right) = Q(4,\ 4)$$

P es el punto medio del segmento AQ

$$P\left(\frac{1+4}{2}, \frac{3+4}{2}\right) = P\left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)$$

R es el punto medio del segmento QB

$$R\left(\frac{4+7}{2}, \frac{4+5}{2}\right) = R\left(\frac{11}{2}, \frac{9}{2}\right)$$

Ejercicio nº 9.-

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MA'} \qquad (2-4,\ 6+2) = (x-2,\ y-6)$$

$$x - 2 = -2 \qquad x = 0$$

$$A'(0,\ 14)$$

$$y - 6 = 8 \qquad y = 14$$

Ejercicio nº 10.-

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MA'} \qquad (-2-3,\ 5+2) = (x+2,\ y-5)$$

$$x + 2 = -5 \qquad x = -7$$

$$A'(-7,\ 12)$$

$$y - 5 = 7 \qquad y = 12$$

Ejercicio nº 11.-

$$\frac{2}{3} = \frac{2+1+x}{3} \qquad x = -1$$

$$C(-1,\ -1)$$

$$0 = \frac{1+0+y}{3} \qquad y = -1$$

Ejercicio nº 12.-

$$\frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}} = \frac{3}{2} \qquad \overrightarrow{CA} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CB} \qquad (3-x,\ 2-y) = \frac{3}{2}(5-x,\ 4-y)$$

$$3 - x = \frac{3}{2}(5-x) \qquad x = 9$$

$$C(9,\ 8)$$

$$2 - y = \frac{3}{2}(4-y) \qquad y = 8$$

Ejercicio nº 13.-

$$|\vec{v}| = \sqrt{64+36} = 10 \qquad \vec{u} = \frac{1}{10}(8,\ -6) = \left(\frac{4}{5},\ -\frac{3}{5}\right)$$

Ejercicio nº 14.-

Ecuación vectorial. $(x, y) = (-1, 3) + k \cdot (2, 5)$

Ecuaciones paramétricas. $\begin{cases} x = -1 + 2k \\ y = 3 + 5k \end{cases}$

Ecuación continua. $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-3}{5}$

Ejercicio nº 15.-

a) $y - 3 = \dfrac{5}{2}(x+1)$ b) $m = \dfrac{2+3}{4+2} = \dfrac{5}{6}$; $y + 3 = \dfrac{5}{6}(x+2)$ c) $tg\ 45^\circ = 1$; $y + 3 = x + 2$

Ejercicio nº 16.-

a) $\dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y-5}{1}$ $\quad x - 1 = -2y + 10 \quad x + 2y - 11 = 0$

b) $y - 5 = -2(x-1) \quad y - 5 = -2x + 2 \quad 2x + y - 7 = 0$

Ejercicio nº 17.-

$$y - 5 = -2(x-1) \qquad y - 5 = -2x + 2 \qquad y = -2x + 7$$

Ejercicio nº 18.-

$$\frac{x-1}{2-1} - \frac{y-3}{-5-3} \qquad -8x + 8 - y - 3 \qquad 8x + y - 11 = 0$$

Ejercicio nº 19.-

Ecuación que pasa por dos puntos $\dfrac{x-1}{-2-1} = \dfrac{y-2}{5-2}$

Ecuación vectorial $(x, y) = (1, 2) + k \cdot (-3, 3)$

Ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x = 1 \quad 3k \\ y = 2 + 3k \end{cases}$ Ecuación continua $\dfrac{x-1}{-3} = \dfrac{y-2}{3}$

Ecuación general $x + y - 3 = 0$ Ecuación explícita $y = -x + 3$

Ecuación punto-pendiente $y - 2 = -1 \cdot (x - 1)$

Ejercicio nº 20.-

$$3x+2y-7=0 \qquad y=-\frac{3}{2}x+\frac{7}{2} \qquad m=-\frac{3}{2} \qquad b=\frac{7}{2}$$

Ejercicio nº 21.-

Las rectas 1 y 4 son coincidentes, porque todos sus coeficientes son proporcionales: $\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=\frac{-4}{-8}$

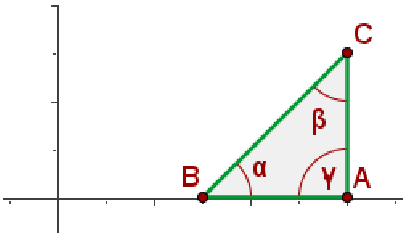
Las rectas 2 y 5 y las 1 y 6 son paralelas respectivamente, ya que existe proporcionalidad entre los coeficientes de x y de y, pero no en el término independiente.

$$\frac{1}{2}=\frac{-2}{-4}\neq\frac{1}{-6} \qquad \frac{2}{2}=\frac{3}{3}\neq\frac{-4}{9}$$

Ejercicio nº 22.-

$$\frac{1}{1}\neq\frac{1}{-2} \qquad Sí \qquad \begin{cases} x+y-2=0 \\ x-2y+4=0 \end{cases} \qquad r\cap s=P(0,2)$$

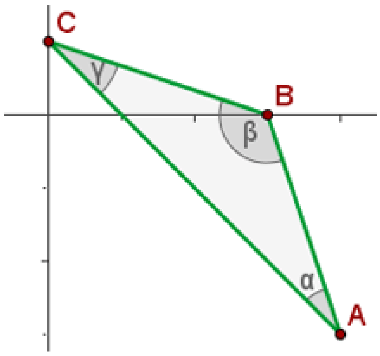
Ejercicio nº 23.-



a) $d(\overline{AB})=\sqrt{(3-6)^2+(0+0)^2}=3$

$$d(\overline{BC})=\sqrt{(6-3)^2+(3-0)^2}=3\sqrt{2} \qquad d(\overline{AC})=\sqrt{(6-6)^2+(3-0)^2}=3$$

$d(\overline{AB})=d(\overline{BC})\neq d(\overline{AC})$ *Isósceles* ; $\left[d(\overline{BC})\right]^2-\left[d(\overline{AB})\right]^2+\left[d(\overline{AC})\right]^2$ *Rectángulo*



b) $d(\overline{AB})=\sqrt{(3-4)^2+(0-3)^2}=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$

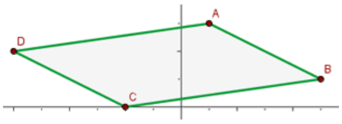
$$d(\overline{BC})=\sqrt{(0-3)^2+(1-0)^2}=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$$

$$d(\overline{AC})=\sqrt{(0-4)^2+(1-3)^2}=\sqrt{16+16}=4\sqrt{2}$$

$d(\overline{AB})=d(\overline{BC})\neq d(\overline{AC})$ *Isósceles*

$\left[d(\overline{AC})\right]^2>\left[d(\overline{AB})\right]^2+\left[d(\overline{BC})\right]^2$ *Obtusángulo*

Ejercicio nº 24.-



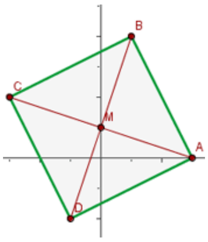
$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ $\qquad (x_D - 1, y_D - 3) = (-2 - 5, 0 - 1)$

$x_D - 1 = -7$

$D = (-6, 2)$

$y_D - 3 = -1$

Ejercicio nº 25.-



$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ $\quad \overrightarrow{AB} = (1 - 3, 4 - 0) = (-2, 4)$ $\quad \overrightarrow{DC} = (-3 - (-1), 2 - (-2)) = (-2, 4)$

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ $\quad (-1 - 3,\ -2 - 0) = (-3 - 1,\ 2 - 4)$ $\quad (-4,\ -2) = (-4,\ -2)$

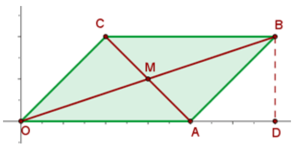
Es un paralelogramo Las diagonales se cortan en el punto medio

$M\left(\frac{3-3}{2}, \frac{0+2}{2}\right)$ $\qquad M = (0, 1)$ $\qquad \text{Área} = d(A, B) \cdot d(C, r_{AB})$

$d(A, B) = \sqrt{4 + 16} = 2\sqrt{5}$ $\qquad \frac{x - 3}{1 - 3} = \frac{y - 0}{4 - 0}$ $\qquad r_{AB} \equiv 2x + y - 6 = 0$

$d(C, r_{AB}) = \frac{|2 \cdot (-3) + 2 - 6|}{\sqrt{5}} = \frac{10}{\sqrt{5}}$ $\qquad A = 2 \cdot \sqrt{5} \cdot \frac{10}{\sqrt{5}} = 20\ \ u^2$

Ejercicio nº 26.-



M es el punto medio de $\overline{OB}$ $\qquad (6, 2) = \left(\frac{0 + x_B}{2}, \frac{0 + y_B}{2}\right)$ $\qquad 6 = \frac{0 + x_B}{2}$ $\quad 2 = \frac{0 + y_B}{2}$ $\qquad B(12, 4)$

$(6, 2) - \left(\frac{8 + x_C}{2}, \frac{0 - y_C}{2}\right)$ $\qquad 6 = \frac{8 + x_C}{2}$ $\quad 2 = \frac{0 + y_C}{2}$ $\qquad C(4, 4)$

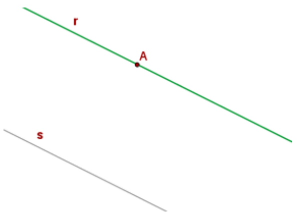
M es el punto medio de $\overline{AC}$

Ecuación de AC $\qquad \frac{x - 8}{4 - 8} = \frac{y - 0}{4 - 0}$ $\qquad x + y - 8 = 0$

Ecuación de OB $\qquad \frac{x - 12}{12 - 0} = \frac{y - 4}{4 - 0}$ $\qquad x - 3y = 0$

$AC = \sqrt{(4 - 8)^2 + (4 - 0)^2} = 4\sqrt{2}$ $\qquad OB = \sqrt{(12 - 0)^2 + (4 - 0)^2} = 4\sqrt{10}$

Ejercicio nº 27.-



$m_r = m_s = \frac{-2}{1}$ $y - 5 = -2 \cdot (x - 1)$ $2x + y - 7 = 0$

Ejercicio nº 28.-

$r \parallel s$ $m_r = m_s = \frac{2-1}{-2-4} = -\frac{1}{6}$ $m_r = -\frac{1}{6}$ $A(2, -3)$

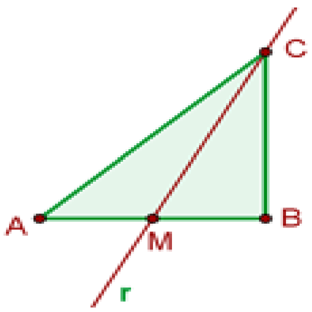
$y + 3 = -\frac{1}{6}(x - 2)$ $x + 6y + 16 = 0$

Ejercicio nº 29.-

$A \in r$ $3 \cdot 3 + n \cdot 2 - 7 = 0$ $n = -1$

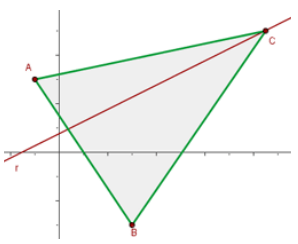
$r \parallel s$ $\frac{3}{m} = \frac{-1}{2}$ $m = -6$

Ejercicio nº 30.-



$M_{AB}\left(\frac{0+4}{2}, \frac{0+0}{2}\right)$ $M_{AB}(2, 0)$ $B(4, 0)$ $\frac{x-2}{4-2} = \frac{y-0}{4-0}$ $2x - y - 4 = 0$

Ejercicio nº 31.-



$C \in r$ $2x_c - 4y_c + 3 = 0$

$d(\overline{AC}) = d(\overline{BC})$ $\sqrt{(x_c + 1)^2 + (y_c - 3)^2} = \sqrt{(x_c - 3)^2 + (y_c + 3)^2}$

$2x_c - 3y_c - 2 = 0$ $\begin{cases} 2x_c - 4y_c + 3 = 0 \\ 2x_c - 3y_c - 2 = 0 \end{cases}$ $C\left(\frac{17}{2}, 5\right)$

MATEMATICAS. 4ºESO-B. TEMA 9: Funciones

1.- Calcular el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x)=2x^5-6x^3+8x^2-5$ b) $f(x)=\dfrac{2x^2-3}{5}$ c) $f(x)=\dfrac{2x^2-3}{x+2}$ d) $f(x)=\dfrac{2x^2-3}{x^2-1}$

e) $f(x)=\dfrac{2x^2-3}{x^2+1}$ f) $f(x)=\dfrac{2x^2-3}{x^2+2x+1}$ g) $f(x)=\dfrac{2x^2-3}{x^3+3x^2+3x+1}$ h) $f(x)=\sqrt{x-2}$

i) $f(x)=\sqrt{-x+2}$ j) $f(x)=\sqrt{x^2-6x+8}$ k) $f(x)=\sqrt{-x^2+6x-8}$ l) $f(x)=\sqrt{x^2+4x+4}$

m) $f(x)=\sqrt{x^2+x+4}$ n) $f(x)=\sqrt{-x^2-4x-4}$ ñ) $f(x)=\sqrt{x^3-4x^2+3x}$ o) $f(x)=\dfrac{x-5}{\sqrt{x-2}}$

p) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-2}}{x-5}$ q) $f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{3x+2}{x+1}}$ r) $f(x)=e^{2x-3}$ s) $f(x)=e^{\frac{2x-3}{x}}$ t) $f(x)=\ln(x-2)$

u) $f(x)=\ln\dfrac{x}{x^2+1}$ v) $f(x)=\sqrt{1-\cos x}$ w) $f(x)=\dfrac{2x^2-3}{(x^2-9)(x^2-4)}$ x) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+4}}{\sqrt{x^2-5x+6}}$

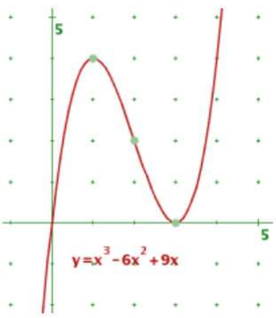
2.- Hallar las funciones inversas de:

a) $f(x)=2x+1$ b) $f(x)=\dfrac{2x-3}{4}$ c) $f(x)=\dfrac{x+3}{x-2}$ d) $f(x)=x^2$ e) $f(x)=\sqrt[3]{x-1}$

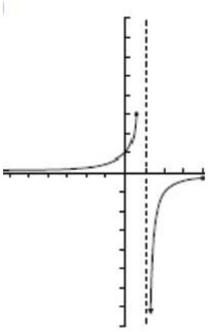
3.- Dadas las funciones: $f(x)=\dfrac{x+2}{2x+1}$ $g(x)=\sqrt{x}$, Calcular:

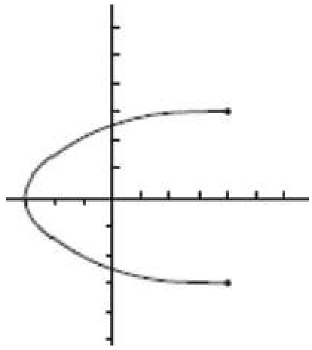
a) $g\circ f$ b) $f\circ g$ c) f^{-1} d) g^{-1} e) Probar que: $f^{-1}\circ f=i$

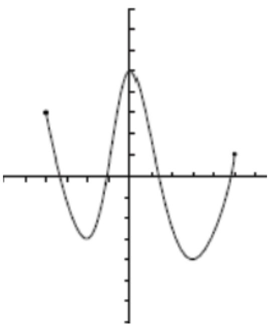
4.- Realiza un estudio global de las siguientes funciones:

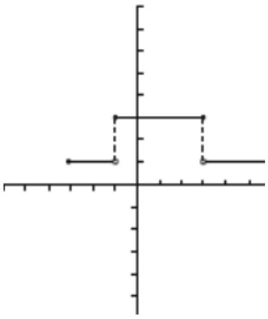


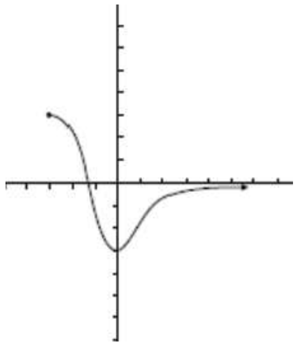
a)


b)


c)


d)


e)


f)

SOLUCIONES

Ejercicio nº 1.

a) $D = \mathbb{R}$ b) $D = \mathbb{R}$ c) $x + 2 = 0;$ $D = \mathbb{R} - \{-2\}$ d) $x^2 - 1 = 0;$ $x = \pm 1;$ D = R - {±1}

e) $x^2 + 1 = 0;$ $D = \mathbb{R}$ f) $x^2 + 2x + 1 = 0$ $(x+1)^2 = 0$ $D = \mathbb{R} - \{-1\}$

g) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$ $(x+1)^3 = 0$ $D = \mathbb{R} - \{-1\}$

h) $x - 2 \geq 0$ $D = [2, \infty)$ i) $-x + 2 \geq 0$ $D = (-\infty, 2]$

j) $x^2 - 6x + 8 \geq 0$ $D = (-\infty, 2] \cup [4, \infty)$ k) $-x^2 + 6x - 8 \geq 0$ $D = [2, 4]$

l) $(x+2)^2 \geq 0$ $D = \mathbb{R}$ m) $x^2 + x + 4 \geq 0$ $D = \mathbb{R}$

n) $-(x+2)^2 \geq 0$ $D = -2$

ñ) $x(x^2 - 4x + 3) \geq 0$ $x(x-1)(x-3) \geq 0$ $D = [0,1] \cup [3, \infty)$

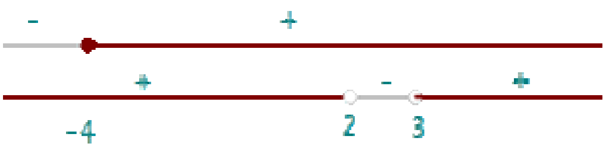
o) $x - 2 > 0$ $D = (2, \infty)$ p) $\begin{cases} x - 5 \neq 0 & D = \mathbb{R} - \{5\} \\ x - 2 \geq 0 & D - [2, \infty) \end{cases}$ $D = [2,5) \cup (5, \infty)$

q) $D = \mathbb{R} - \{-1\}$ r) $D = \mathbb{R}$ s) $D = \mathbb{R} - \{0\}$ t) $x - 2 > 0$ $D = (2, \infty)$

u) $\frac{x}{x^2 + 1} > 0$ $x > 0$ $D = (0, \infty)$ v) $1 - \cos x \geq 0$ $\cos x \leq 1$ $D = \mathbb{R}$

w) $(x^2 - 9)(x^2 - 4) = 0;$ $D = \mathbb{R} - \{-3, -2, 2, 3\}$

x) $\begin{cases} x + 4 \geq 0 & [-4, \infty) \\ x^2 - 5x + 6 > 0 & (-\infty, 2) \cup (3, \infty) \end{cases}$ $D = [-4, 2) \cup (3, \infty)$



Ejercicio nº 2.

a) $y = 2x + 1$ $x = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}$ $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

b) $y = \frac{2x - 3}{4}$ $4y = 2x - 3$; $x = \frac{4y + 3}{2}$ $f^{-1}(x) = \frac{4x + 3}{2}$

c) $y = \dfrac{x+3}{x-2}$ $\quad y(x-2) = x+3$; $yx - 2y = x+3$ $\quad x(y-1) = 2y+3$

$x = \dfrac{2y+3}{y-1}$ $\quad f^{-1}(x) = \dfrac{2x+3}{x-1}$

d) $f(x) = x^2$ $\quad y = x^2$ $\quad x = \pm\sqrt{y}$; $f^{-1}(x) = \pm\sqrt{x}$ $\quad$ No es una función

e) $y = \sqrt[3]{x-1}$ $\quad y^3 = x-1$; $x = y^3+1$ $\quad f^{-1}(x) = x^3+1$

Ejercicio nº 3.-

a) $g \circ f = g[f(x)] = g\left(\dfrac{x+2}{2x+1}\right) = \sqrt{\dfrac{x+2}{2x+1}}$

b) $f \circ g = f[g(x)] = f\left(\sqrt{x}\right) = \dfrac{\sqrt{x}+2}{2\sqrt{x}+1}$

c) $y = \dfrac{x+2}{2x+1}$ $\quad y(2x+1) = x+2$

$2xy + y = x+2$ $\quad 2xy - x = -y+2$

$x(2y-1) = -y+2$ $\quad x = \dfrac{-y+2}{2y-1}$ $\quad \mathbf{f^{-1}(x)} = \dfrac{-x+2}{2x-1}$

d) $f(x) = \sqrt{x}$ $\quad y = \sqrt{x}$; $y^2 = x$ $\quad \mathbf{g^{-1}(x)} = x^2$

e) $$f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}[f(x)] = f^{-1}\left(\dfrac{x+2}{2x+1}\right) = \dfrac{2-\left(\dfrac{x+2}{2x+1}\right)}{2\left(\dfrac{x+2}{2x+1}\right)-1} = \dfrac{\dfrac{4x+2-x-2}{2x+1}}{\dfrac{2x+4-2x-1}{2x+1}} = \dfrac{3x}{3} = x = i(x)$$

Ejercicio nº 4.-

a)
DOMINIO: $\mathbb{R}$
IMAGEN: $\mathbb{R}$
CRECIMIENTO: $(-\infty,1)\cup(3,\infty)$
DECRECIMIENTO: $(1,3)$
SIMETRÍA: NO
ACOTACIÓN: NO
MAXIMOS: en $x=1$ (relativo)
MINIMOS: en $x=3$ (relativo)
CONTINUIDAD: en $\mathbb{R}$

b)
DOMINIO: $(-\infty,1/2)\cup(1,\infty)$
IMAGEN: $\mathbb{R}-\{0\}$
CRECIMIENTO: $(-\infty,\frac{1}{2})\cup(1,\infty)$
DECRECIMIENTO: NO
SIMETRÍA: NO
ACOTACIÓN: NO
MAXIMOS: No tiene
MÍNIMOS: No tiene
CONTINUIDAD: $\mathbb{R}-\{1\}$
Discontinuidad inevitable en $x=1$

c) No es función

d)
DOMINIO: $[-4,5]$
IMAGEN: $[-4,5]$
CRECIMIENTO: $(-2,0)\cup(3,5)$
DECRECIMIENTO: $(-4,-2)\cup(0,3)$
SIMETRÍA: NO
ACOTACIÓN: por $K=5$ y $L=-4$
MAXIMOS: en $x=0$ (abs), $x=-4$ y 5
MÍNIMOS: en $x=-2$ y $x=3$ (abs)
CONTINUIDAD: en $[-4,5]$

e)
DOMINIO: $[-3,6]$
IMAGEN: $\{1,3\}$
CRECIMIENTO:
DECRECIMIENTO:
SIMETRÍA: NO
ACOTACIÓN: por $K=3$ y $L=1$
MAXIMOS:
MÍNIMOS:
CONTINUIDAD: Discontinuidades inevitables en $x=1$ y $x=3$

f)
DOMINIO: $[-3,\infty)$
IMAGEN: $[-3,3]$
CRECIMIENTO: $(0,\infty)$
DECRECIMIENTO: $(-3,0)$
SIMETRÍA: NO
ACOTACIÓN: Sup: $K=3$; inf: $L=-3$
MAXIMOS: en $x=-3$ (abs)
MÍNIMOS: en $x=0$ (abs)
CONTINUIDAD: es continua

6 Funciones

1. Se considera la función que asigna a cada número real el doble de su cuadrado aumentado en 3 unidades.

a) Escribe su expresión algebraica.

b) ¿Cuál es la imagen de 2?

c) ¿Qué número o números tienen como imagen 5?

d) ¿Cuál es el dominio de la función? ¿Cuál es su recorrido?

e) ¿En qué puntos corta la función al eje OX?

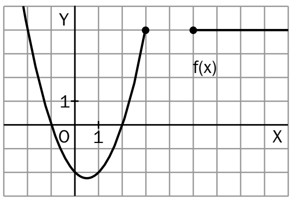
f) ¿En qué punto corta la función al eje OY?

2. A la vista de la gráfica de la función f, establece:

a) f(3) y f(9).

b) El dominio de f.

c) Los puntos donde f corta los ejes coordenados.



3. Represente la siguiente función definida a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si} \quad x \leqslant -2 \\ x^2 & \text{si} \quad -2 < x < 1 \\ 2 - x & \text{si} \quad x \geqslant 1 \end{cases}$$

4. Dadas las funciones $f(x) = 2x^2 + 5$ y $g(x) = \dfrac{1}{x} - 3$, calcula:

a) $f(3) + g(3)$

b) $\dfrac{f(5)}{g(5)}$

c) $f(x) - g(x)$

5. Halla el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x - 4}}$

b) $f(x) = \sqrt{x + 1}$

6. Considera las funciones $f(x) = \sqrt{x - 1}$ y $g(x) = x^2$.

a) Calcula $f(g(x))$

b) Calcula $g(f(x))$

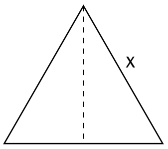
c) ¿Es $f(g(x)) = g(f(x))$?

7. Halla la función recíproca de $f(x) = \sqrt{x + 1}$.

8. Considera un triángulo equilátero de lado x.

a) Expresa su altura en función del valor del lado (puedes usar el teorema de Pitágoras, pero recuerda que solo es válido para triángulos rectángulos).

b) Halla el valor de la altura cuando el lado mide 6 cm.



9. Una empresa de alquiler de coches tiene la siguiente tarifa: 30 euros por la formalización del alquiler del vehículo y 0,09 euros por kilómetro recorrido.

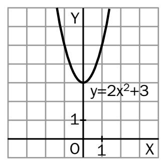
a) Calcula la expresión algebraica de la función que indica el dinero a pagar según los kilómetros recorridos.

b) ¿Cuánto tendrá que pagar una persona que recorrió 120 kilómetros con un coche alquilado?

c) Dibuja la gráfica de la función.

SOLUCIONES

1. a) $f(x) = 2x^2 + 3$.



b) $f(2) = 11$

c) $f(x) = 2x^2 + 3 = 5 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm 1$

d) $D(f) = \mathbb{R}$

A partir de la gráfica de la función se observa que para cualquier valor de x el correspondiente valor de y es siempre mayor o igual que 3; por tanto, $f(D) = [3, +\infty)$.

e) Como $2x^2 + 3 = 0$ no tiene solución real, la función no corta el eje OX.

f) $y = f(0) = 3 \Rightarrow$ f corta el eje OY en el punto (0, 3).

2. La función dibujada es:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 2 & \text{si} \quad x \leqslant 3 \\ 4 & \text{si} \quad x \geqslant 5 \end{cases}$$

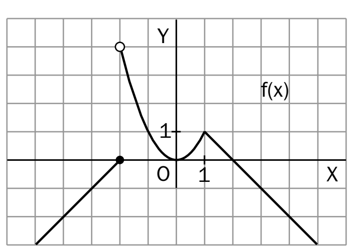
aunque no es necesario que los alumnos conozcan su expresión algebraica.

a) $f(3) = 4$; $f(9) = 4$

b) $D(f) = (-\infty, 3]$ y $[5, +\infty)$

c) f corta el eje OX en los puntos $(-1, 0)$ y $(2, 0)$; f corta el eje OY en $(0, -2)$.

3.



4. a) $f(3) + g(3) = 18 + 5 + \dfrac{1}{3} - 3 = \dfrac{61}{3}$

b) $\dfrac{f(5)}{g(5)} = \dfrac{50 + 5}{\dfrac{1}{5} - 3} = \dfrac{275}{-14} = -\dfrac{275}{14}$

c) $f(x) - g(x) = 2x^2 + 5 - \left(\dfrac{1}{x} - 3\right) =$
$= 2x^2 + 8 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{2x^3 + 8x - 1}{x}$

5. a) La expresión de f tiene sentido si $x - 4 > 0$ $\Leftrightarrow$ $x > 4$; por lo tanto, $D(f) = (4, +\infty)$.

b) La expresión de f tiene sentido si $x + 1 \geqslant 0$ $\Leftrightarrow$ $x \geqslant -1$; por lo tanto, $D(f) = [-1, +\infty)$.

6. a) $f(g(x)) = f(x^2) = \sqrt{x^2 - 1}$

b) $g(f(x)) = g(\sqrt{x - 1}) = (\sqrt{x - 1})^2 = -1$

c) A partir de los apartados anteriores se concluye que no.

7. Intercambiando variables:

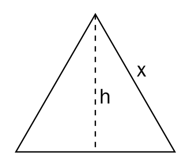
$x = \sqrt{y + 1} \Rightarrow x^2 = y + 1 \Rightarrow y = x^2 - 1$

$f^{-1}(x) = x^2 - 1$ es la función recíproca.

8. a) Aplicando el teorema de Pitágoras:

$$x^2 = h^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = \sqrt{x^2 - \frac{x^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}x}{2}$$

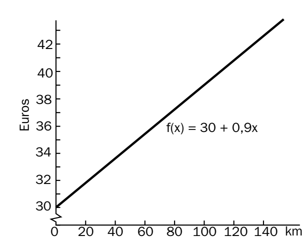


b) $h = \dfrac{\sqrt{3} \cdot 6}{2} = 3\sqrt{3}$ cm

9. a) $f(x) = 30 + 0{,}09x$, donde x representa los kilómetros recorridos.

b) $f(120) = 40{,}8$ euros.

c)



6 Funciones

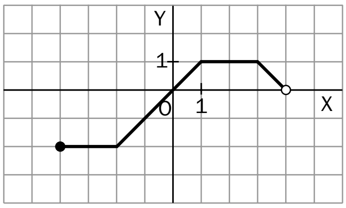
1. Halla el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{1}{|x^2 - 1|}$ b) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-2}{x+2}}$

2. Considera la función $f(x) = \sqrt{1 + \dfrac{1}{x}}$.

a) Calcula su función recíproca.
b) ¿Coincide el dominio de f con el de su recíproca?

3. Escribe la expresión algebraica de la función definida a trozos, representada por la siguiente gráfica:



4. Dadas las funciones $f(x) = \sqrt{x-1}$ y $g(x) = x^2$, resuelve la ecuación $f(g(x)) = g(f(x))$.

5. Un grupo de alumnos que prepara su viaje de fin de curso encarga a una empresa la fabricación de camisetas con el logotipo de su centro. Esta les cobra 18 euros por el diseño y 1,20 euros por unidad fabricada.

a) ¿Cuánto les costaría encargar 225 camisetas?
b) Escribe la función que da el precio total a pagar según el número de camisetas pedidas.
c) Si los alumnos disponen de 540 euros, ¿cuál es el número máximo de camisetas que pueden encargar?
d) Los alumnos han encargado 300 camisetas para venderlas a 3 euros. Solo han conseguido vender 242 unidades. ¿Cuánto dinero han ganado o perdido en la operación?

6. Con una cuerda de 36 centímetros se quiere construir un rectángulo, sin que sobre ni falte cuerda.

a) ¿Qué área tendrá el rectángulo si la base mide 10 centímetros?
b) Escribe la función que da el área del rectángulo según la medida de la base del mismo.
c) ¿Cuál es el dominio de la función anterior?
d) Represéntala gráficamente.

7. Una empresa A de alquiler de coches cobra 30 euros por el contrato y 0,09 euros por kilómetro recorrido. Otra empresa B no cobra por formalizar el contrato pero su precio es de 0,15 euros por kilómetro recorrido.

a) Si una persona desea alquilar un coche para recorrer 150 kilómetros, ¿qué empresa le resulta más rentable?
b) Escribe las expresiones que representan las tarifas de las empresas A y B en función de los kilómetros recorridos.
c) ¿A partir de qué número de kilómetros es más rentable alquilar el coche en la empresa A?

8. Un vendedor comercial tiene un sueldo fijo de 600 euros al mes más una comisión del 15 % sobre las ventas que realice.

a) ¿Qué sueldo cobró un mes que vendió productos por importe de 4 808 euros?
b) Indica cuál es su sueldo en función de sus ventas mensuales.
c) ¿Cuál fue el importe de las ventas un mes en el que cobró 1 502,53 euros?

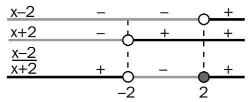
9. Expresa el área de un triángulo isósceles, cuyo lado desigual mide 8 cm, en función de la medida de los otros dos lados.

SOLUCIONES

1. a) $|x^2 - 1| \neq 0 \iff x^2 - 1 \neq 0 \iff x \neq \pm 1$

$D(1) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

b) $\dfrac{x - 2}{x + 2} \geqslant 0$



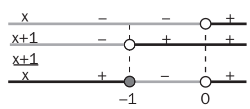
$D(f) = \mathbb{R} - [-2, 2)$

---

2. a) Intercambiando variables, $x = \sqrt{1 + \dfrac{1}{y}} \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = 1 + \dfrac{1}{y} \Rightarrow y = f^{-1}(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

b) $1 + \dfrac{1}{x} \geqslant 0 \iff \dfrac{x + 1}{x} \geqslant 0$



$D(f) = (-\infty, -1] \cup (0, +\infty)$

$x^2 - 1 \neq 0 \iff x \neq \pm 1$

$D(f^{-1}) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

Solución: $D(f) \neq D(f^{-1})$

---

3. $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } -4 \leqslant x \leqslant -2 \\ x & \text{si } -2 < x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } 1 < x \leqslant 3 \\ 4 - x & \text{si } 3 < x < 4 \end{cases}$

---

4. $f(g(x)) = f(x^2) = \sqrt{x^2 - 1}$

$g(f(x)) = g(\sqrt{x - 1}) = (\sqrt{x - 1})^2 = x - 1$

$\sqrt{x^2 - 1} = x - 1 \Rightarrow x^2 - 1 = (x - 1)^2 \Rightarrow x = 1$

---

5. a) $18 + 1{,}2 \cdot 225 = 288$ euros.

b) $f(x) = 18 + 1{,}2x$ euros, siendo x el número de camisetas pedidas.

c) $f(x) \leqslant 540 \iff 18 + 1{,}2x \leqslant 540 \Rightarrow x \leqslant 435$

Pueden encargar como máximo 435 camisetas.

d) Han invertido $f(300) = 378$ euros, y con las ventas han obtenido $3 \cdot 242$ euros $= 726$ euros; por tanto, han ganado 348 euros.

---

6. a) La altura debe medir 8 cm; por tanto, el área será $A = 10 \times 8 \text{ cm}^2 = 80 \text{ cm}^2$.

b) Sea x la medida de la base en cm. La altura es:

$\dfrac{36 - 2x}{2} \text{ cm} = 18 - x \text{ cm}$

$A(x) = x(18 - x) \text{ cm}^2 = 18x - x^2 \text{ cm}^2$

c) No se considera cero como posible valor del área, pues no sería un rectángulo propiamente dicho. Así pues:

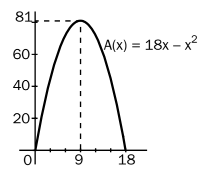
$A(x) > 0 \text{ y } x > 0 \iff$

$\iff 18x - x^2 = x(18 - x) > 0,\ x > 0 \iff$

$\iff 18 - x > 0,\ x > 0 \iff 0 < x < 18$

Solución: $D(A) = (0, 18)$

d)



---

7. a) En la empresa A le costaría: $30 + 0{,}09 \cdot 150 = 43{,}5$ euros y en la empresa B: $0{,}15 \cdot 150 = 22{,}5$ euros; por tanto, es más rentable la empresa B.

b) Siendo x el número de kilómetros recorridos, $A(x) = 30 + 0{,}09x$ y $B(x) = 0{,}15x$.

c) Se trata de saber para qué valores de x, $A(x) < B(x)$.

$30 + 0{,}09x < 0{,}15x \Rightarrow x > 500$

Solución: Superados los 500 km resulta más rentable la empresa A.

---

8. a) Ese mes cobró los 600 euros fijos más la comisión correspondiente a los 4 808 euros:

$600 + \dfrac{15 \cdot 4\,808}{100} \text{ euros} = 1\,321{,}2 \text{ euros}$

b) $f(x) = 600 + \dfrac{15x}{100}$, siendo x el importe de las ventas mensuales.

c) $f(x) = 1\,502{,}53 = 600 + \dfrac{15x}{100} \Rightarrow x = 6\,016{,}87$

El importe de las ventas fue de 6 016,87 euros.

---

9. Aplicando el teorema de Pitágoras:

$h^2 = x^2 - 4^2 \Rightarrow h = \sqrt{x^2 - 16}$

Por tanto:

$A(x) = \dfrac{8\sqrt{x^2 - 16}}{2} \text{ cm}^2 = 4\sqrt{x^2 - 16} \text{ cm}^2$