1.71. Escribe el símbolo < o > entre los números siguientes.

a) 6 y – 5

b) 7 y 18

c) –9 y 0

d) 3 y 0

e) –12 y –4

f) –6 y 15

a) $6 > -5$

b) $7 < 18$

c) $-9 < 0$

d) $3 > 0$

e) $-12 < -4$

f) $-6 < 15$

1.72. Halla el opuesto y el valor absoluto de los números.

a) 14 **b) –32** **c) 22** **d) –15**

a) $op(14) = -14$ $|14| = 14$

b) $op(-32) = 32$ $|-32| = 32$

c) $op(22) = 22$ $|22| = 22$

d) $op(-15) = 15$ $|-15| = 15$

1.73. Calcula:

a) $|op(-13)|$

b) $op[op(-5)]$

c) $|op(4)| + op(-2)$

d) $-op|-8|$

e) $|op|7||$

f) $op(-6) + |-9|$

a) $|op(-13)| = 13$

b) $op[op(-5)] = -5$

c) $|op(4)| + op(-2) = 4 + 2 = 6$

d) $-op|-8| = 8$

e) $|op|7|| = 7$

f) $op(-6) + |-9| = 6 + 9 = 15$

1.74. Escribe todos los números enteros que están entre:

a) –8 y su opuesto

b) op(10) y $|-4|$

c) –7 y su valor absoluto

d) 9 y el valor absoluto de su opuesto

a) –7, –6, –5, –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

b) –9, –8, –7, –6, –5, –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3

c) –7, –6, –5, –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6

d) El valor absoluto del opuesto de 9 es 9. No hay ningún número entre 9 y él mismo.

1.75. Copia en tu cuaderno y escribe un número o uno de los símbolos "<" o ">" en los espacios en blanco.

a) – 7 < □ < –5

b) –2 □ –1 □ 0

c) 3 □ 6 < 9

d) –1 □ □ < 1

a) $-7 < -6 < -5$

b) $-2 \leq -1 \leq 0$

c) $3 \leq 6 < 9$

d) $-1 \leq 0 < 1$

Operaciones con números enteros

1.76. Haz las siguientes sumas y restas con números enteros.

a) 2 + 5 – 8

a) 2 + 5 – 8 = –1

b) 18 – 5 + 9 – 3

b) 18 – 5 + 9 – 3 = 19

c) –4 – 7 – 6 + 1

c) –4 – 7 – 6 + 1 = –16

d) 3 + 5 – 4 – 2

d) 3 + 5 – 4 – 2 = 2

e) –15 – 3 – 2

e) –15 – 3 – 2 = –20

f) –6 + 8 + 2 – 1

f) –6 + 8 + 2 – 1 = 3

g) 7 + 6 + 3 – 12

g) 7 + 6 + 3 – 12 = 4

h) 9 – 1 – 8

h) 9 – 1 – 8 = 0

1.77. Halla el resultado de las siguientes multiplicaciones y divisiones.

a) 7 · (–2) · 5

a) 7 · (–2) · 5 = –70

b) –4 · 8 · 3

b) –4 · 8 · 3 = –96

c) –2 · (–6) · (–5)

c) –2 · (–6) · (–5) = –120

d) –81 : 3 : (–9)

d) –81 : 3 : (–9) = 3

e) 12 · (–3) : (–6)

e) 12 · (–3) : (–6) = 6

f) 50 : (–2) : (–5)

f) 50 : (–2) : (–5) = 5

1.78. a) Qué número hay que sumar a 7 para obtener –4? ¿Y a –2 para que dé 12?

b) ¿Qué número hay que restar a 0 para que dé 3? ¿Y a 3 para obtener –9?

a) –11, 14

b) –3, 12

1.79. a) ¿Por qué número hay que multiplicar –9 para que dé 63? ¿Y para obtener –36?

b) ¿Qué número dividido entre 5 da –2?

c) ¿Por qué número hay que dividir 24 para obtener –8?

a) –7, 4

b) –10

c) –3

1.84. Halla el resultado de las operaciones siguientes resolviendo primero los paréntesis.

a) $5 \cdot (-3 + 6 \cdot 2) - 24 : (-3)$

b) $8 \cdot (-2 - 1) + 27 : (-5 - 4)$

c) $-(7 + 2 \cdot 4) - 45 : (-9 + 6)$

d) $9 \cdot 2 - [6 - 4 \cdot (-3)]$

e) $(7 - 3) \cdot (4 + 2) - 8 \cdot 3$

a) $5 \cdot (-3 + 6 \cdot 2) - 24 : (-3) = 5 \cdot 9 + 8 = 45 + 8 = 53$

b) $8 \cdot (-2 - 1) + 27 : (-5 - 4) = 8 \cdot (-3) + 27 : (-9) = -24 - 3 = -27$

c) $-(7 + 2 \cdot 4) - 45 : (-9 + 6) = -15 - 45 : (-3) = -15 + 15 = 0$

d) $9 \cdot 2 - [6 - 4 \cdot (-3)] = 18 - (6 + 12) = 18 - 18 = 0$

e) $(7 - 3) \cdot (4 + 2) - 8 \cdot 3 = 4 \cdot 6 - 24 = 24 - 24 = 0$

1.85. Realiza las siguientes operaciones combinadas con y sin paréntesis.

a) $9 : (-2 - 1) - [5 \cdot (3 - 1) - 7 \cdot 4]$

b) $-3 \cdot [9 + 6 : (-2)] + 5 \cdot 9$

c) $(-2 \cdot 6 + 9) : 3 + 7 \cdot (-4 + 2)$

d) $12 : (-4) \cdot 6 - 13 \cdot 8 : (-4)$

e) $(5 + 18 : (-2) + 3) - [15 : (8 - 5) + 6]$

a) $9 : (-2 - 1) - [5 \cdot (3 - 1) - 7 \cdot 4] = 9 : (-3) - (10 - 28) = -3 + 18 = 15$

b) $-3 \cdot [9 + 6 : (-2)] + 5 \cdot 9 = -3 \cdot (9 - 4) + 45 = -15 + 45 = 30$

c) $(-2 \cdot 6 + 9) : 3 + 7 \cdot (-4 + 2) = -3 - 14 = -17$

d) $12 : (-4) \cdot 6 - 13 \cdot 8 : (-4) = -18 + 26 = 8$

e) $(5 + 18 : (-2) + 3) - [15 : (8 - 5) + 6] = -1 - 11 = -12$

1.86. Calcula:

a) $27 : [9 + 4 \cdot (-3)] - 8 \cdot (6 - 15 : 5)$

b) $5 \cdot [3 - 2 \cdot (6 + 5) + 4 \cdot 7] - 16 : (-2)$

c) $7 + 12 : (-4) + 15 \cdot (-1 + 5) : 10$

d) $8 \cdot (7 + 3) : (-1 - 4) + 36 : 9$

e) $(15 + 6) : (-7) + 18 : (-5 - 4) - 3 \cdot 2$

f) $12 + 3 \cdot (-6) - 4 : (-2) \cdot (-9) + 7 \cdot 4$

a) $27 : [9 + 4 \cdot (-3)] - 8 \cdot (6 - 15 : 5) = 27 : (-3) - 8 \cdot 3 = -9 - 24 = -33$

b) $5 \cdot [3 - 2 \cdot (6 + 5) + 4 \cdot 7] - 16 : (-2) = 5 \cdot (3 - 2 \cdot 11 + 28) = 5 \cdot (3 - 22 + 28) = 5 \cdot 9 = 45$

c) $7 + 12 : (-4) + 15 \cdot (-1 + 5) : 10 = 7 - 3 + 60 : 10 = 7 - 3 + 6 = 10$

d) $8 \cdot (7 + 3) : (-1 - 4) + 36 : 9 = 8 \cdot 10 : (-5) + 4 = 80 : (-5) + 4 = -16 + 4 = -12$

e) $(15 + 6) : (-7) + 18 : (-5 - 4) - 3 \cdot 2 = 21 : (-7) + 18 : (-9) - 6 = -3 - 2 - 6 = -11$

f) $12 + 3 \cdot (-6) - 4 : (-2) \cdot (-9) + 7 \cdot 4 = 12 - 18 + 2 \cdot (-9) + 28 = 12 - 18 - 18 + 28 = 4$

PROBLEMAS

1.87. La civilización griega comprende tres períodos: Arcaico, que duró de 776 a 500 a. C.; Clásico, de 500 a 323 a. C., y Helenístico, de 323 a 146 a. C. Expresa con números enteros cada una de las fechas anteriores y calcula después cuánto duró la civilización griega.

Arcaico: de –776 a –500

Clásico: de –500 a –323

Helenístico: de –323 a –146

Duración: –146 – (–776) = 630 años

1.88. Juan participó en el juego de subir a la cucaña de las fiestas de su pueblo.

El palo tiene una altura de 6 metros. Subió 3 metros, pero se resbaló y bajó 2; continuó 1 metro, descansó y luego trepó 3 más; volvió a resbalar y cayó 2 metros; y, por fin, en el último tramo, consiguió llegar arriba y coger el premio.

a) ¿Cuántos metros subió en el último tramo?

b) Halla el número de metros totales que recorrió en la cucaña.

c) ¿Cuántos metros más de los que mide el palo recorrió Juan?

a) El número de metros que subió y bajó antes de recorrer el último tramo fue:

+3 + (–2) + 1 + 3 + (–2) = 3 m

En el último tramo subió: 6 – 3 = 3 m.

b) En total recorrió: |+3| + |–2| + |+1| + |+3| + |–2| = 11 m.

c) 11 – 6 = 5 m más de los que tiene el palo ha recorrido.

1.89. Un buceador profesional descendió 40 metros en una primera inmersión. Subió a la superficie para recoger su cámara de fotos y descendió de nuevo 50 metros para hacer unas fotos y luego bajó 20 metros más. Al ascender de nuevo, subió primero 45 metros, y después, el resto.

a) ¿Cuántos metros le quedaban por subir al final?

b) Escribe con números enteros cada uno de los movimientos de descenso y ascenso del buceador.

c) Calcula los metros totales que bajó y subió.

a) Había descendido: 50 + 20 = 70 metros.

Le quedan por subir: 70 – 45 = 25 metros.

Primera inmersión: –40

b) Sube para recoger la cámara de fotos: +40.

Desciende de nuevo: –50.

Y por último desciende otra vez: –20.

Sube: +45.

Termina el ascenso: +25.

c) En total bajó: –40 + (–50) + (–20) = –110.

En total subió: +40 + (+45) + (25) = +110.

1.90. En una cuenta de ahorros aparecen los siguientes registros.

Expresa cada cantidad con el entero correspondiente.

Si la cantidad que había antes de estos movimientos era de 3800 euros, ¿cuánto habrá después de ellos?

a) Debe: –37

Haber: +250

Haber: +1364

Debe: –167

b) Después de estos movimientos habría: 3800 + (–37) + 250 + 1364 + (–67) = 5210 €.

1.91. En el transporte de agua con un camión cisterna de 150 litros hasta un poblado africano, se han perdido 54 litros por una grieta muy pequeña que no se había detectado.

a) Suponiendo que la cantidad de agua perdida hubiera sido la misma en cada kilómetro y sabiendo que el camión recorrió 9 kilómetros, ¿cuántos litros por kilómetro se habrían perdido? Utiliza números enteros para expresar cada una de las cantidades.

b) Si cada persona recibía 2 litros de agua, ¿cuántas personas se quedarían sin agua?

a) –54 : 9 = –6 Se perdieron 6 litros por kilómetro.

b) 54 : 2 = 27 Se quedarían sin agua 27 personas.

1.92. La temperatura de un lugar descendió entre las 22 h y las 4 h del día siguiente 2 ºC cada hora.

a) Utilizando los números enteros, calcula cuántos grados bajó la temperatura en ese tiempo.

b) Si a las 22 h había 3 ºC, ¿qué temperatura había a las 4 h?

a) En total han pasado: 24 – 22 + 4 – 0 = 6 horas.

La temperatura en ese tiempo descendió: 2 · 6 = 12 grados.

b) 3 + (–12) = –9

Había 9 ºC bajo cero a las 4 h.

1.93. En un huerto hay plantadas 210 plantas de tomate a lo largo y 100 plantas a lo ancho. Se quiere dividir el huerto en parcelas cuadradas de forma que haya el máximo número de tomateras en cada parcela.

a) ¿Cuántas tomateras habrá en cada parcela?

b) ¿Cuántas parcelas se conseguirán?

a) m.c.d.(210, 100) = 10

Se harán parcelas cuadradas con 10 tomateras en cada lado. Por tanto, habrá 100 tomateras en cada parcela.

b) Como hay 210 · 100 = 21 000 tomateras y en cada parcela habrá 100, se conseguirán en total 21 000 : 100 = 210 parcelas.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.1 Halla el valor de *x* para que las siguientes fracciones sean equivalentes.

a) $\frac{15}{3} = \frac{x}{4}$ **b)** $\frac{2}{x} = \frac{8}{20}$

a) $15 \cdot 4 = 3 \cdot x \Rightarrow x = \frac{60}{3} = 20$ b) $2 \cdot 20 = x \cdot 8 \Rightarrow x = \frac{40}{8} = 5$

1.2 Expresa estas fracciones con el mismo denominador.

a) $\frac{3}{5}$, $\frac{11}{15}$ y $\frac{13}{20}$ **b)** $\frac{7}{9}$, $\frac{3}{12}$ y $\frac{6}{18}$

a) $\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 12}{5 \cdot 12} = \frac{36}{60}$ $\frac{11}{15} = \frac{11 \cdot 4}{15 \cdot 4} = \frac{44}{66}$ $\frac{13}{20} = \frac{13 \cdot 3}{20 \cdot 3} = \frac{39}{60}$

b) $\frac{7}{9} = \frac{7 \cdot 4}{9 \cdot 4} = \frac{28}{36}$ $\frac{3}{12} = \frac{3 \cdot 3}{12 \cdot 3} = \frac{9}{36}$ $\frac{6}{18} = \frac{6 \cdot 2}{18 \cdot 2} = \frac{12}{36}$

1.3 Amplifica cada una de estas fracciones: $\frac{7}{2}$, $\frac{9}{5}$, $\frac{1}{25}$ y $\frac{11}{50}$, a otra fracción equivalente que tenga por denominador una potencia de 10.

$\frac{7}{2} = \frac{7 \cdot 5}{2 \cdot 5} = \frac{35}{10}$ $\frac{9}{5} = \frac{9 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{18}{10}$ $\frac{1}{25} = \frac{1 \cdot 4}{25 \cdot 4} = \frac{4}{100}$ $\frac{11}{50} = \frac{11 \cdot 2}{50 \cdot 2} = \frac{22}{100}$

1.4 Una clase tiene 42 alumnos. ¿Se puede afirmar que $\frac{3}{6}$ son chicos y $\frac{4}{7}$ chicas? Razona la respuesta.

$\frac{3}{6}$ de 42 es $3 \cdot \frac{42}{6} = 21$ $\frac{4}{7}$ de 42 es $4 \cdot \frac{42}{7} = 24$

No podemos hacer tal afirmación, ya que de ese modo habría $21 + 24 = 45$ alumnos y alumnas en la clase, lo cual no es cierto.

1.5 Realiza y simplifica estas operaciones.

a) $\frac{3}{4} - \frac{5}{12} + \frac{7}{8}$ **b)** $\frac{7}{3} - \frac{2}{10} + \frac{3}{5}$ **c)** $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} : \frac{2}{3}$ **d)** $\frac{2}{3} : \frac{4}{5} \cdot \frac{9}{2}$

a) $\frac{3}{4} - \frac{5}{12} + \frac{7}{8} = \frac{18}{24} - \frac{10}{24} + \frac{21}{24} = \frac{29}{24}$

b) $\frac{7}{3} - \frac{2}{10} + \frac{3}{5} = \frac{70}{30} - \frac{6}{30} + \frac{18}{30} = \frac{82}{30} = \frac{41}{15}$

c) $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} : \frac{2}{3} = \frac{6}{20} : \frac{2}{3} = \frac{6}{20} \cdot \frac{3}{2} = \frac{18}{40} = \frac{9}{20}$

d) $\frac{2}{3} : \frac{4}{5} \cdot \frac{9}{2} = \frac{10}{12} \cdot \frac{9}{2} = \frac{90}{24} = \frac{15}{4}$

1.6 Efectúa estas operaciones.

a) $1 - \frac{5}{3} + \frac{2}{7}$ **b)** $-\frac{2}{5} + \frac{4}{3} - 3$ **c)** $8 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{-3}{4}$ **d)** $\frac{3}{2} : \frac{7}{6} \cdot 9$

a) $1 - \frac{5}{3} + \frac{2}{7} = \frac{21}{21} - \frac{35}{21} + \frac{6}{21} = -\frac{8}{21}$

b) $-\frac{2}{5} + \frac{4}{3} - 3 = -\frac{6}{15} + \frac{20}{15} - \frac{45}{15} = -\frac{31}{15}$

c) $8 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{-3}{4} = -\frac{8 \cdot 5 \cdot 3}{6 \cdot 4} = -\frac{120}{24} = -5$

d) $\frac{3}{2} : \frac{7}{6} \cdot 9 = \frac{18}{14} \cdot 9 = \frac{162}{14} = \frac{81}{7}$

1.7 **Calcula y simplifica el resultado.**

a) $\frac{3}{2} + \frac{1}{5} : \frac{4}{15}$ **b)** $-\frac{1}{3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{4}$

a) $\frac{3}{2} + \frac{1}{5} : \frac{4}{15} = \frac{3}{2} + \frac{15}{20} = \frac{30}{20} + \frac{15}{20} = \frac{45}{20} = \frac{9}{4}$

b) $-\frac{1}{3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{4} = -\frac{1}{3} - \frac{18}{12} = -\frac{4}{12} - \frac{18}{12} = -\frac{22}{12} = -\frac{11}{6}$

1.8 **Realiza las siguientes operaciones.**

a) $\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{7}{2} + \frac{5}{6} \cdot \left(1 - \frac{7}{2}\right)$

b) $\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{2}{6} - \frac{5}{2}\right) : 3$

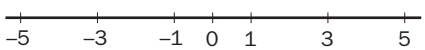
c) $3 - \frac{1}{2} \cdot 4 : \left(\frac{3}{5} - 1\right) + 1$

a) $\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{7}{2} + \frac{5}{6} \cdot \left(1 - \frac{7}{2}\right) = \frac{21}{56} + \frac{5}{6} \cdot \frac{-5}{2} = \frac{21}{56} - \frac{25}{12} = \frac{21 \cdot 3}{168} - \frac{25 \cdot 14}{168} = -\frac{287}{168}$

b) $\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{2}{6} - \frac{5}{2}\right) : 3 = \frac{5}{12} \cdot \frac{-13}{6} : 3 = \frac{-65}{72} : 3 = \frac{-65}{72} \cdot \frac{1}{3} = -\frac{65}{216}$

c) $3 - \frac{1}{2} \cdot 4 : \left(\frac{3}{5} - 1\right) + 1 = 3 - 2 : \frac{-2}{5} + 1 = 3 + 5 + 1 = 9$

1.9 **Dibuja los puntos de abscisa 1 y −1; 3 y −3; 5 y −5. ¿Cómo son estos pares de puntos respecto del origen?**

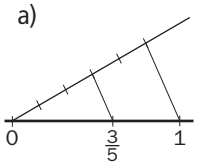


Son puntos simétricos respecto al origen.

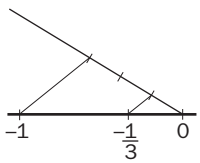
1.10 **Utiliza el método de Tales para representar en una recta estos números racionales.**

a) $\frac{3}{5}$ **b)** $-\frac{1}{3}$ **c)** $\frac{12}{5}$ **d)** $\frac{9}{7}$

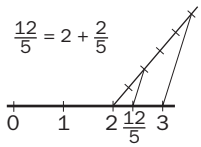
a)



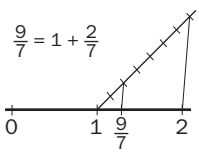
b)



c)

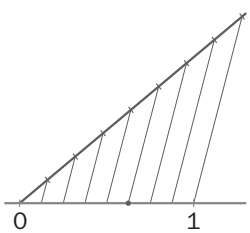


d)

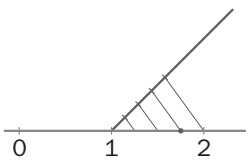


1.11 **Calcula los valores de las abscisas de los puntos de cada figura.**

a)



b)



a) $\frac{5}{8}$

b) $1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$

1 Números reales

1.12 **Escribe cada número fraccionario en forma decimal. Indica qué tipo de decimal es cada uno y, si existen, la parte entera, el anteperíodo y el período.**

a) $\frac{12}{9}$ **b)** $\frac{7}{15}$ **c)** $\frac{17}{6}$ **d)** $\frac{5}{7}$

a) $1,\widehat{3}$. La parte entera es 1, no hay anteperíodo, y el período es 3.

b) $0,4\widehat{6}$. La parte entera es 0, el anteperíodo es 4 y el período es 6.

c) $2,8\widehat{3}$. La parte entera es 2, el anteperíodo es 8 y el período es 3.

d) $0,\overline{714285}$. La parte entera es 0, no hay anteperíodo y el período es 714285.

1.13 **Sin hacer la división, explica qué tipo de expresión decimal corresponde a cada fracción.**

a) $\frac{126}{12}$ **b)** $\frac{59}{22}$ **c)** $\frac{29}{27}$ **d)** $\frac{177}{45}$

a) $\frac{126}{12} = \frac{21}{2}$ Decimal exacto

b) $22 = 2 \cdot 11$ Periódico mixto

c) $27 = 3^3$ Periódico puro

d) $\frac{177}{45} = \frac{59}{15}$; $15 = 3 \cdot 5$ Periódico mixto

1.14 **Escribe en forma fraccionaria los números.**

a) 3,5 **c) −3,55...** **e) 5,255...** **g) 1,11...**

b) 0,66... **d) 2,1515...** **f) 0,7575...** **h) 6,2525...**

a) $\frac{35}{10} = \frac{7}{2}$

b) $\frac{6 - 0}{9} = \frac{2}{3}$

c) $-\frac{35 - 3}{9} = -\frac{32}{9}$

d) $\frac{215 - 2}{99} = \frac{213}{99} = \frac{71}{33}$

e) $\frac{525 - 52}{90} = \frac{473}{90}$

f) $\frac{75 - 0}{99} = \frac{25}{33}$

g) $\frac{11 - 1}{9} = \frac{10}{9}$

h) $\frac{625 - 6}{99} = \frac{619}{99}$

1.15 **Clasifica los siguientes números en racionales o irracionales.**

a) $\frac{3}{5}$ **c)** $\sqrt{7}$ **e) 632**

b) 0,75 **d) −4** **f) 0,14 144 1114...**

a) Racional

b) Racional

c) Irracional

d) Racional

e) Racional

f) Irracional

1.16 **Escribe tres números irracionales que estén dados por raíces y tres que no lo estén.**

Respuesta abierta. Por ejemplo:

Tres números irracionales dados por raíces: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{4}$

Tres números irracionales que no vienen dados por una raíz: π, 0,12 112 1112…, 2,01 002 0003 00004…

PROBLEMAS PARA APLICAR

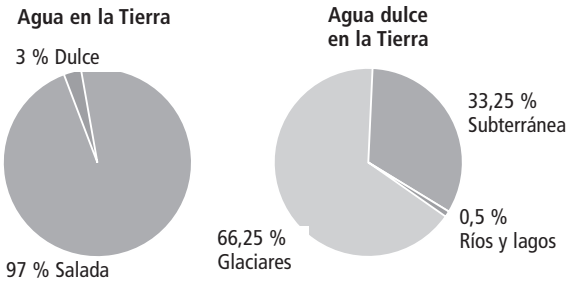
1.65 **Los resultados finales de junio de una clase de 3.º de ESO son los siguientes:**

$\frac{1}{3}$	**Aprueban todo**
$\frac{1}{6}$	**Suspenden 1**
$\frac{1}{15}$	**Suspenden 2**
$\frac{1}{5}$	**Suspenden 3**
$\frac{1}{10}$	**Suspenden 4**
$\frac{2}{15}$	**Suspenden más de 4**

Si el grupo es de 30 alumnos, ¿cuántos alumnos hay en cada nivel de suspensos?

- Aprueban todo: $\frac{1}{3}$ de $30 = \frac{30}{3} = 10$ alumnos.
- Suspenden 1: $\frac{1}{6}$ de $30 = \frac{30}{6} = 5$ alumnos.
- Suspenden 2: $\frac{1}{15}$ de $30 = \frac{30}{15} = 2$ alumnos.
- Suspenden 3: $\frac{1}{5}$ de $30 = \frac{30}{3} = 6$ alumnos.
- Suspenden 4: $\frac{1}{10}$ de $30 = \frac{30}{10} = 3$ alumnos.
- Suspenden más de 4: $\frac{2}{15}$ de $30 = \frac{60}{15} = 4$ alumnos.

1.66 **El agua es un elemento escaso en nuestro planeta, sobre todo que utilizamos en las necesidades diarias.**



De cada 100 litros de agua, ¿qué parte se encuentra en los ríos y lagos?

Si tenemos 100 litros de agua, solo 3 de ellos son de agua dulce, y a esos 3 litros tenemos que aplicarles un 0,5 %. De modo que:

$$100 \cdot \frac{3}{100} \cdot \frac{0{,}5}{100} = \frac{3}{200} = 0{,}015 \text{ L}$$

De 100 litros de agua, solo 0,015 litros son potables.

1.67 **De todas mis vacaciones de verano, $\frac{2}{3}$ las paso en mi pueblo. Una vez allí, $\frac{1}{5}$ del tiempo estoy en la piscina.**

a) ¿Qué fracción de mis vacaciones estoy en la piscina?

b) Si tengo 90 días de vacaciones, ¿cuántos días paso en la piscina?

a) La fracción de tiempo que paso en la piscina es: $\frac{1}{5}$ de $\frac{2}{3} = \frac{2}{15}$

b) El número de días que estoy en la piscina es: $\frac{2}{15}$ de $90 = \frac{180}{15} = 12$ días

1.68 **El equipo de baloncesto del instituto juega la final del campeonato. Luis hizo $\frac{1}{8}$ de los puntos, Sonia los $\frac{2}{8}$ y Laura los $\frac{3}{8}$. Los restantes jugadores hicieron 16 puntos. Calcula el número de puntos conseguidos por Luis, Sonia y Laura.**

$\frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \frac{3}{8} = \frac{6}{8} \Rightarrow$ los restantes jugadores obtuvieron $\frac{2}{8}$ de los puntos del equipo, que son 16 puntos $\Rightarrow (16 : 2) \cdot 8 = 64$ puntos obtuvo todo el equipo.

Luis consiguió $\frac{1}{8}$ de $64 = 8$ puntos, Sonia $\frac{2}{8}$ de $64 = 16$ puntos y Laura $\frac{3}{8}$ de $64 = 24$ puntos.

1.69 **Juan trabaja el fin de semana como canguro, y de los 90 euros que le pagan decide dar $\frac{1}{5}$ a su padre y $\frac{3}{10}$ a su madre.**

¿Qué fracción del total puede invertir en un regalo para su hermano menor, si necesita quedarse con 12 euros para comprar un compás?

$\frac{1}{5} + \frac{3}{10} = \frac{1}{2}$ da a sus padres.

$\frac{1}{2}$ de $90 € = 45 € \Rightarrow 90 - 45 = 45 €$ le restan.

Ahora le restamos el dinero para el compás: $45 - 12 = 33 €$ le quedan para el regalo.

Como inicialmente tenía 90 €, la fracción respecto al dinero inicial es $\frac{33}{90} = \frac{11}{30}$.

1.70 **En un concurso organizado por el ayuntamiento sobre hábitos saludables y de higiene, nuestra clase recibe el primer premio. Decidimos invertir el premio en material para el uso del aula, de la siguiente forma:**

$\frac{1}{4}$ del premio en un escáner.

$\frac{3}{5}$ del premio en una minicadena.

$\frac{1}{3}$ del premio en un DVD.

Como nos excedimos en la compra, el centro nos hizo un bono regalo valorado en los 154 euros que nos faltaban. ¿A cuánto ascendió el premio?

$\frac{1}{4} + \frac{3}{5} + \frac{1}{3} = \frac{71}{60}$ se gastó en el escáner, en la minicadena y en el DVD. Ya que nos excedimos en $\frac{11}{60}$ del premio, que son 154 €, obtenemos que: $(154 : 11) \cdot 60 = 840 €$ es el valor total del premio.

MATEMATICAS. 3ºESO-AP TEMA 2: Números decimales

1º. Escribe con cifras los siguientes números:

a) Treinta y siete unidades y cincuenta y tres milésimas.
b) Dos mil dos unidades y doce centésimas.
c) Un millón ciento cuatro mil treinta y cinco unidades y cincuenta centésimas.

2º. Escribe con palabras los siguientes números decimales:

a) 303'97
b) 1.057'372
c) 3.000.003'003

3º. Observa el número 12.345,6789. Indica qué cifra corresponde a las:

a) Unidades de millar
b) Centenas
c) Décimas
d) Milésimas

4º. ¿Qué número tiene por expresión polinómica $3 \cdot 100 + 5 + 2 \cdot 0{,}1 + 7 \cdot 001$?

5º. Ordena de menor a mayor ("<") los siguientes números decimales:

a) 5'32, 5'032, 5'4, -3'2, 7'12, -7'123, 7'112, 0'2, 0'1

b) 2'235, 2'523, 2'352, 3'352, 2'23, 2'3, -3'45, -3'6, -4'3

6º. Ordena de mayor a menor (">") los siguientes números decimales:

a) 0'24, 81'5, -3'43, 0'5, 0'25, -1'72, 3'45, 3'456, 2'89

b) -1'345, 1'453, -3'415, 1'543, -1'435, 1'5, -1'6, 1'534, -1'345

7º. Las estaturas en metros de 5 alumnos de la clase de 2.º A de un IES son: 1'57, 1'494, 1'496, 1'575 y 1'58. Ordénalos de más alto a más bajo.

8º. Escribe tres números decimales ordenados entre:

a) 2'34 y 2'35
b) –0'275 y –0'274

9º. Escribe y clasifica el número decimal correspondiente a estas fracciones:

a) $\frac{23}{10}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{7}{6}$ d) $\frac{32}{9}$ e) $\frac{9}{100}$ f) $\frac{3}{4}$

10º. Encuentra la fracción decimal correspondiente a los siguientes números decimales exactos:

a) 0'3 b) 0'03 e) 3'003 d) 7'2 e) 32'45 f) –0'0345

11º. Rellena la tabla siguiente teniendo en cuenta el producto por potencias de 10.

	·100	·0'1	·0'001	:100	:0'1	:0'001
72'28						
104'2345						
0'035						

12º. Juan recibe 10 € de paga. Tenía de la semanas pasadas 23'57 €. Gasta 5'75 € en la cena del sábado. Cobra 7'50 € por cortar el césped al vecino y compra dos discos en las rebajas a 1'29 € cada uno. ¿Qué dinero le queda?

13º. Realiza las sumas y restas de números decimales.

a) 32'35 – 0'89 =
b) 81'002 – 45'09 =
c) 4'53 + 0'089 + 3'4 =
d) 4 – 2'95 =
a) 78'089 + 0'067 + 2'765 + 1'89 =

14º. Realiza las multiplicaciones y divisiones de números decimales.

a) 24'5 · 100 = c) 34'25 · 1000 = e) 0'045 · 0'001 = g) 794'2 · 0'01 =

b) 235'45 : 100 = d) 493 : 1000 = f) 30 : 10 = h) 1'84 : 0'01 =

15º. Realiza las multiplicaciones y divisiones de números decimales.

a) 24'5 · 5,65 = b) 34'25 · 87'67 = c) 23'545 : 0'5 = d) 7'943 : 0'14 =

16º. Realiza las siguientes operaciones combinadas:

a) 4'56 + 3 · (7'92 +5'65) = b) 2'1 · (0'5 +1'2 · 3 + 1'8: 3) + 1'7 = c) 3'2 : 100 – 0'1082 =

17º. Laura ha hecho hoy 43'5 kg de pasta y la quiere empaquetar en cajas de 0'250 kg. ¿Cuántas cajas necesita Laura?

18º. En una fábrica de refrescos se preparan 4138'2 litros de refresco de naranja y se envasan en botes de 0'33 l. ¿Cuántos botes se necesitan?

19º. María ha ido al banco a cambiar 45'50 € por dólares. Por cada euro le han dado 0'96 dólares. ¿Cuántos dólares tiene en total?

20º. Completa la tabla dando la aproximación del número 23'6195 utilizando los métodos indicados.

	A las milésimas	A las centésimas	A las décimas	A las unidades
Por truncamiento				
Por redondeo				

21º. Calcula y da el resultado redondeado a las décimas.

a) 254'05 + 107'3
b) 5.409'39 - 1.075'44
c) 12'5 · 157'15
d) 2.002 : 4'27

22º. Estima el resultado de los productos y cocientes siguientes tomando los elementos redondeados a las unidades:

a) 56 · 204'5 = b) 7'25 · 45'975 = c) 376'14 : 185'2375 = d) 16'4 : 25'65=

23º. Calcula <u>mentalmente</u> las raíces exactas de:

a) $\sqrt{64}$ b) $\sqrt{0'25}$ c) $\sqrt{1'44}$ d) $\sqrt{2'25}$ e) $\sqrt{0'0009}$

24º. Usando el algoritmo de la raíz cuadrada, calcula la raíz con un decimal y el resto de las siguientes:

a) $\sqrt{234}$ b) $\sqrt{592}$ c) $\sqrt{3502}$ d) $\sqrt{4096}$ e) $\sqrt{792'3}$

SOLUCIONES

1º. Escribe con cifras los siguientes números:

a) Treinta y siete unidades y cincuenta y tres milésimas. 37’053
b) Dos mil dos unidades y doce centésimas. 2.002’12
c) Un millón ciento cuatro mil treinta y cinco unidades y cincuenta centésimas. 1.104.035’50

2º. Escribe con palabras los siguientes números decimales:

a) 303’97 Trescientas tres unidades y noventa y siete centésimas
b) 1.057’372 Mil cincuenta y siete unidades y trescientas setenta y dos milésimas
c) 3.000.003’003 Tres millones, tres unidades con tres milésimas

3º. Observa el número 12.345,6789. Indica qué cifra corresponde a las:

a) Unidades de millar 2
b) Centenas 3
c) Décimas 6
d) Milésimas 8

4º. ¿Qué número tiene por expresión polinómica $3 \cdot 100 + 5 + 2 \cdot 0{,}1 + 7 \cdot 001$? 305’27

5º. Ordena de menor a mayor (“<”) los siguientes números decimales:

a) 5’32, 5’032, 5’4, -3’2, 7’12, -7’123, 7’112, 0’2, 0’1

-7’123 < -3’2 < 0’1 < 0’2 < 5’032 < 5’32 < 5’4

b) 2’235, 2’523, 2’352, 3’352, 2’23, 2’3, -3’45, -3’6, -4’3
-4’3 < -3’6 < -3’45 < 2’23 < 2’235 < 2’3 < 2’352 < 2’523 < 3’352

6º. Ordena de mayor a menor (“>”) los siguientes números decimales:

a) 0’24, 81’5, -3’43, 0’5, 0’25, -1’72, 3’45, 3’456, 2’89

81’5 > 3’456 > 3’45 > 3’456 > 2’89 > 0’5 > 0’25 > 0’24 > -1’72 > -3’43

b) -1’345, 1’453, -3’415, 1’543, -1’435, 1’5, -1’6, 1’534, -1’345

1’543 > 1’534 > 1’5 > 1’453 > -1’345 > -1’435 > -1’6 > -3’415

7º. Las estaturas en metros de 5 alumnos de la clase de 2.º A de un IES son: 1’57, 1’494, 1’496, 1’575 y 1’58. Ordénalos de más alto a más bajo.
1’58 > 1’575 > 1’57 > 1’496 > 1’494

8º. Escribe tres números decimales ordenados entre:

a) 2’34 y 2’35 2’341 < 2’342 < 2’343
b) –0’275 y –0’274 -0’2744 < -0’2743 < -0’2742

9º. Escribe y clasifica el número decimal correspondiente a estas fracciones:

a) $\frac{23}{10}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{7}{6}$ d) $\frac{32}{9}$ e) $\frac{9}{100}$ f) $\frac{3}{4}$

a) 2’3 b) 0’666… c) 1’1666… d) 3’555… e) 0’09 f) 0’75

Decimal exacto Periódico puro Periódico mixto Periódico puro e) y f) Decimales Exactos

10º. Encuentra la fracción decimal correspondiente a los siguientes números decimales exactos:

a) 0’3 b) 0’03 e) 3’003 d) 7’2 e) 32’45 f) –0’0345

a) 3/10 b) 3/100 e) 3003/1000 d) 72/10 e) 3245/100 f) -345/10000

11º. Rellena la tabla siguiente teniendo en cuenta el producto por potencias de 10.

	·100	·0’1	·0’001	:100	:0’1	:0’001
72’28	7228	722’8	0’07228	0’7228	722’8	72280
104’2345	10423’45	10’42345	0’1042345	1’042345	1042’345	104234'5
0’035	3’5	0’0035	0’000035	0’00035	0’35	35

12º. Juan recibe 10 € de paga. Tenía de la semanas pasadas 23'57 €. Gasta 5'75 € en la cena del sábado. Cobra 7'50 € por cortar el césped al vecino y compra dos discos en las rebajas a 1'29 € cada uno. ¿Qué dinero le queda?
23'57 + 10 - 5'75 + 7'50 – 2 · 1'29 = 32'74 €

13º. Realiza las sumas y restas de números decimales.

a) 32'35 – 0'89 = 31'46
b) 81'002 – 45'09 = 35'912
c) 4'53 + 0'089 + 3'4 = 8'019
d) 4 – 2'95 = 1'05
b) 78'089 + 0'067 + 2'765 + 1'89 = 82'811

14º. Realiza las multiplicaciones y divisiones de números decimales.

a) 24'5 · 100 = 2450 c) 34'25 · 1000 = 34250 e) 0'045 · 0'001 = 0'000045 g) 794'2 · 0'01 = 7'942
b) 235'45 : 100 = 2'3545 d) 493 : 1000 = 0'493 f) 30 : 10 = 3 h) 1'84 : 0'01 = 184

15º. Realiza las multiplicaciones y divisiones de números decimales.

a) 24'5 · 5,65 = 138'425
b) 34'25 · 87'67 = 3002'6975
c) 23'545 : 0'5 = 47'09
d) 7'943 : 0'14 = 56'7357…

16º. Realiza las siguientes operaciones combinadas:

a) 4'56 + 3 · (7'92 +5'65) = 4'56 + 3 · 13'57 = 4'56 + 40'71 = 45'27
b) 2'1 · (0'5 +1'2 · 3 + 1'8: 3) + 1'7 = 2'1·(0'5 + 3'6 + 0'6)+1'7 = 2'1·4'7 + 1'7=9'87 + 1'7=11'57
c) 3'2 : 100 – 0'1082 = 0'032 – 0'1082 = -0'0762

17º. Laura ha hecho hoy 43'5 kg de pasta y la quiere empaquetar en cajas de 0'250 kg. ¿Cuántas cajas necesita Laura?
43'5 : 0'250 = 174 cajas

18º. En una fábrica de refrescos se preparan 4138'2 litros de refresco de naranja y se envasan en botes de 0'33 l. ¿Cuántos botes se necesitan?
4138'2 : 0'33 = 12.540 botes

19º. María ha ido al banco a cambiar 45'50 € por dólares. Por cada euro le han dado 0'96 dólares. ¿Cuántos dólares tiene en total?
45'5 · 0'96 = 43'68 dólares

20º. Completa la tabla dando la aproximación del número 23'6195 utilizando los métodos indicados.

	A las milésimas	A las centésimas	A las décimas	A las unidades
Por truncamiento	23'619	23'61	23'6	23
Por redondeo	23'62	23'62	23'6	24

21º. Calcula y da el resultado redondeado a las décimas.

a) 254'05 + 107'3 = 361'35 aprox 361'4
b) 5.409'39 - 1.075'44 = 4333'95 aprox 4334
c) 12'5 · 157'15 = 1964'375 aprox 1964'4
d) 2.002 : 4'27 = 468'852… aprox 468'9

22º. Estima el resultado de los productos y cocientes siguientes tomando los elementos redondeados a las unidades:

a) 56 · 204'5 aprox 56 · 205 = 1140 b) 7'25 · 45'975 aprox 7 · 46 = 322
c) 376'14 : 185'2375 aprox 376 · 185 = 69560 d) 16'4 : 25'65 aprox 16 · 26 = 416

23º. Calcula <u>mentalmente</u> las raíces exactas de:

a) $\sqrt{64}$ = 8 b) $\sqrt{0'25}$ = 0'5 c) $\sqrt{1'44}$ = 1'2 d) $\sqrt{2'25}$ = 1'5 e) $\sqrt{0'0009}$ = 0'03

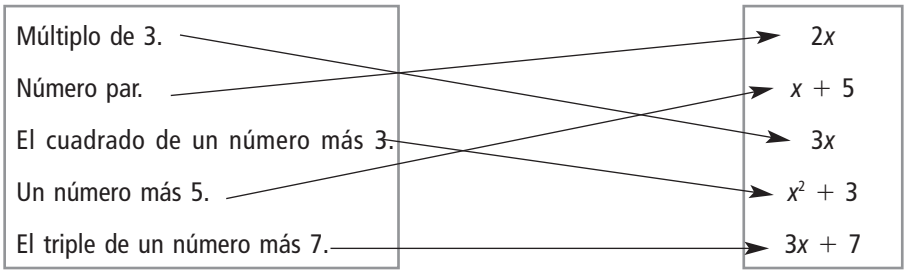
24º. Usando el algoritmo de la raíz cuadrada, calcula la raíz con un decimal y el resto de las siguientes:

a) $\sqrt{234}$ b) $\sqrt{592}$ c) $\sqrt{3502}$ d) $\sqrt{4096}$ e) $\sqrt{792'3}$

a) 15, resto 9 b) 24, resto 16 c) 59, resto 21 d) 64, resto 0 e) 28, resto 8'3

EJERCICIOS PROPUESTOS

4.1 Relaciona cada enunciado con su expresión algebraica.



4.2 Escribe las expresiones algebraicas correspondientes.

a) Tres números consecutivos.

a) x, $(x + 1)$, $(x + 2)$

b) Tres números pares consecutivos.

b) $2x$, $2(x + 1)$, $2(x + 2)$

4.3 Expresa en forma algebraica el área y el volumen de un cubo cuya arista mide x centímetros.

Área: x^2

Volumen: x^3

4.4 El largo y el ancho de esta piscina son datos desconocidos, pero sabemos que el largo es el doble que el ancho.

Escribe las expresiones algebraicas que nos dan el perímetro y el área de la piscina.

Si el ancho es x, el largo es $2x$.

Perímetro: $x + 2x + x + 2x = 6x$; Área: $x \cdot 2x = 2x^2$

4.5 Averigua, para estos valores de x, el valor numérico de la expresión: $x^2 - 7x + 10$.

a) $x = 2$

a) $2^2 - 7 \cdot 2 + 10 = 0$

b) $x = 1$

b) $1^2 - 7 \cdot 1 + 10 = 4$

c) $x = 3$

c) $3^2 - 7 \cdot 3 + 10 = -2$

d) $x = 5$

d) $5^2 - 7 \cdot 5 + 10 = 0$

4.6 Obtener el valor numérico puede ayudar a comprobar si una igualdad es falsa; basta sustituir la x por números sencillos cualesquiera. Comprueba si son falsas estas igualdades.

a) $x \cdot x \cdot x = 3x$

a) Si $x = 2$; $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8 \neq 3 \cdot 2 = 6$

b) $x^2 \cdot x^4 = x^6$

b) Cierta, por las propiedades de las potencias

c) $(x^2)^3 = x^5$

c) Si $x = 2$; $(2^2)^3 = 64 \neq 2^5 = 32$

d) $x^2 + x^3 = x^5$

d) Si $x = 1$; $1^2 + 1^3 = 2 \neq 1^5 = 1$

4.7 El valor numérico de las siguientes expresiones es 0 para algunos números. Indica cuáles son.

a) $x^2 - 64$

a) $x = 8$ y $x = -8$

b) $x^3 - 1\,000$

b) $x = 10$

c) $x^2 + 25$

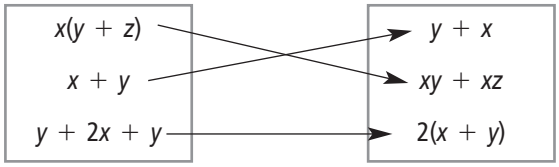
c) La expresión nunca es 0.

d) $x^3 + 64$

d) $x = -4$

4 POLINOMIOS

4.8 Relaciona cada expresión algebraica con una equivalente.



4.9 Indica cuáles de las siguientes expresiones algebraicas son monomios.

a) $3{,}7x^2$ **b)** $\frac{1}{3}x^3$ **c)** $6\left(\frac{x}{3}\right)^3$ **d)** $\frac{x+y+z}{11}$

Son todas monomios menos la del apartado d.

4.10 Escribe el coeficiente, la parte literal y el grado de cada monomio.

a) $7x^2y$ **b)** $6xy^4z^2$ **c)** $-23x^5y^4$ **d)** $-9x^2yz^3$

a) Coeficiente: 7. Parte literal: x^2y. Grado: 3.

b) Coeficiente: 6. Parte literal: xy^4z^2. Grado: 7.

c) Coeficiente: -23. Parte literal: x^5y^4. Grado: 9.

d) Coeficiente: -9. Parte literal: x^2yz^3. Grado: 6.

4.11 Escribe un monomio semejante a cada uno de estos monomios.

a) $7xyz$ **b)** $-11x^4y^2$ **c)** $3x^4y^5$ **d)** $13x^7y^3$

Respuesta abierta, por ejemplo:

a) $-xyz$ b) $2x^4y^2$ c) $-3x^4y^5$ d) $26x^7y^3$

4.12 Un alumno define el grado de un monomio como el número de factores que forman su parte literal.

a) ¿Coincide esta definición con la dada?

b) Aplica las dos definiciones al monomio $3x^2y^4$.

a) Sí.

b) Con la primera definición, el grado es $2 + 4 = 6$.

Con la segunda definición hemos de tener en cuenta que $x^2y^4 = x \cdot x \cdot y \cdot y \cdot y \cdot y$, hay 6 factores, el grado es 6.

4.13 Halla el monomio que permite calcular el área de los rectángulos cuya base es el doble que la altura.

Altura: x. Base: $2x$. Área: $2x^2$

4.14 ¿Cuáles de estas expresiones algebraicas son polinomios?

a) $\frac{5}{2a+b}$ **b)** $\frac{2+x}{2}$ **c)** $\frac{1}{3}x + 1 - \frac{2}{4}x^2$ **d)** $2^x + 1$

Son polinomios b y c.

4.15 Indica el grado de estos polinomios.

a) $x^5 - 7x + 1$ **b)** $1 - x^3$ **c)** $1 + x + x^2$ **d)** $x^7 - x^{11} - 11$

a) Tiene grado 5. b) Tiene grado 3. c) Tiene grado 2. d) Tiene grado 11.

4 POLINOMIOS

4.16 **Indica el grado de los siguientes polinomios.**

a) $3xy^2 + 2x^2y + 5x^2y^2$

a) Tiene grado 4.

b) $2zt + 3t^3 + 2z^5$

b) Tiene grado 5

4.17 **Determina el valor numérico de cada polinomio para $x = 10$.**

a) $x^3 + x + 1$
b) $-x^4 - x^2$
c) $2x^4 - x^2 - 1$
d) $x^6 - x^3$

a) $10^3 + 10 + 1 = 111$
b) $-10^4 - 10^2 = -10\,100$
c) $2 \cdot 10^4 - 10^2 - 1 = 19\,799$
d) $10^6 - 10^3 = 999\,000$

4.18 **Calcula el valor numérico del polinomio $P(x) = x^3 - 6 + 11x - 6$ para los valores $x = 1$, $x = 2$ y $x = 3$.**

$P(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 11 \cdot 1 - 6 = 0$
$P(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 11 \cdot 2 - 6 = 0$
$P(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 11 \cdot 3 - 6 = 0$

4.19 **Reduce términos en estas expresiones.**

a) $8x - 7y - 5x$
b) $x^3 - 6z^3 - 4z^3 + 2x^3$
c) $12xy^2 - xy^2 - 4yx^2$
d) $2xy + 3x + x^4 - 3x$

a) $3x - 7y$
b) $3x^3 - 10z^3$
c) $11xy^2 - 4yx^2$
d) $2xy + x^4$

4.20 **La suma de dos monomios es $10x^5$. Indica qué monomios pueden ser.**

a) $7x^2$ y $3x^3$
b) $7x^5$ y $3x^5$
c) $6x^4$ y $4x$
d) $9x^5$ y $9x^5$

Los del apartado b.

4.21 **Con los siguientes polinomios.**

$P(x) = 3x^4 - 7x^3 + 2x^2 - 11$
$Q(x) = 4x^4 + 5x^3 - 8x^2 + 12$
$R(x) = 3x^5 - 7x^4 + 6x - 5$

Realiza estas operaciones.

a) $P(x) + Q(x)$
b) $P(x) - R(x)$
c) $P(x) + Q(x)$
d) $R(x) - Q(x)$
e) $P(x) + Q(x) - R(x)$
f) $P(x) - Q(x) + R(x)$

a) $7x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 1$
b) $-3x^5 + 10x^4 - 7x^3 + 2x^2 - 6x - 6$
c) $3x^5 - 3x^4 + 5x^3 - 8x^2 + 6x + 7$
d) $3x^5 - 11x^4 - 5x^3 + 8x^2 + 6x - 17$
e) $-3x^5 - 2x^3 - 6x^2 - 6x + 6$
f) $3x^5 - 8x^4 - 12x^3 + 10x^2 + 6x - 28$

4.22 **Realiza estos productos de monomios.**

a) $(2y) \cdot (3z)$
b) $(3xy^2) \cdot (-5x^2yz)$
c) $(-5ab^2c) \cdot (4a^3c) \cdot (b^2c)$
d) $(12xy) \cdot (6x^2) \cdot (x^2y^3)$

a) $6yz$
b) $-15x^3y^3z$
c) $-20a^4b^4c^3$
d) $72x^5y^4$

4.23 **Multiplica el monomio por el polinomio.**

a) $x^2 \cdot (3x^2 - 5x + 1)$
b) $5zt \cdot (2z^2t - 3zt^3)$
c) $ab \cdot (2ab^2 + 3c - ab)$
d) $2xy^2 \cdot (5x + 2y - 3xy)$

a) $3x^4 - 5x^3 + x^2$
b) $10z^3t^2 - 15z^2t^4$
c) $2a^2b^3 + 3abc - a^2b^2$
d) $10x^2y^2 + 4xy^3 - 6x^2y^3$

4 POLINOMIOS

4.24 **Calcula estos productos de binomios.**

a) $(x^2 + 11) \cdot (x^2 - 11)$
b) $(x^3 + y^3) \cdot (7x + 2)$
c) $(2x - 3y) \cdot (x - y)$
d) $(3tz - 2t^2) \cdot (tz - z^2)$

a) $x^4 - 121$
b) $7x^4 + 2x^3 + 7xy^3 + 2y^3$
c) $2x^2 - 5xy + 3y^2$
d) $3t^2z^2 - 3tz^3 - 2t^3z + 2t^2z^2$

4.25 **Saca factor común en estas expresiones.**

a) $x^3 - 7x^4 + 2x^2y$
b) $-4z^2x - 2zx^4 - 12zx$
c) $3t^5 + 21t^3x^4 + 15t^2x$
d) $6x^4y - 24x^7y + 12x^3y^2$

a) $x^2(x + 7x^2 + 2y)$
b) $2xz(-2z - x^3 - 6)$
c) $3t^2(t^3 + 7tx^4 + 5x)$
d) $6x^3y(x - 4x^4 + 3y)$

4.26 **Realiza estos productos.**

a) $(2x^2 + x + 1) \cdot (x - 3)$
b) $(3x^3 - x^2 + 3) \cdot (2x + 1)$

a) $2x^3 + x^2 + x - 6x^2 - 3x - 3 = 2x^3 - 5x^2 - 2x - 3$
b) $6x^4 - 2x^3 + 6x + 3x^3 - x^2 + 3 = 6x^4 + x^3 - x^2 + 6x + 3$

4.27 **Efectúa estos productos de polinomios.**

a) $(x^5 - 6x^3 - 3x^2 + 2x - 1) \cdot (x^3 - 3x + 1)$
b) $(x^4 - 7x^3 + x^2 - 1) \cdot (x^3 + 4x^2 - 6x + 2)$

a) $x^8 - 6x^6 - 3x^4 + 2x^4 - x^2 - 3x^6 + 18x^4 + 9x^3 - 6x^2 + 3x + x^5 - 6x^3 - 3x^2 + 2x - 1 =$
$= x^8 - 9x^6 + x^5 + 17x^4 - 7x^2 + 5x - 1$
b) $x^7 + 4x^6 - 6x^5 + 2x^4 - 7x^6 - 28x^5 + 42x^4 - 14x^3 + x^5 + 4x^4 - 6x^3 + 2x^2 - x^3 - 4x^2 + 6x - 2 =$
$= x^7 - 3x^6 - 33x^5 + 48x^4 - 21x^3 - 2x^2 + 6x - 2$

4.28 **Desarrolla estas potencias.**

a) $(2x + y + 1)^2$
b) $(2ab - 1 + a)^2$
c) $(2a + 1)^3$
d) $(1 - 3t)^3$

a) $(2x + y + 1) \cdot (2x + y + 1) = 4x^2 + 2xy + 2x + 2xy + y^2 + y + 2x + y + 1 = 4x^2 + y^2 + 4xy + 4x + 2y + 1$
b) $(2ab - 1 + a) \cdot (2ab - 1 + a) = 4a^2b^2 - 2ab + 2a^2b - 2ab + 1 - a + 2a^2b - a + a^2 = 4a^2b^2 + 4a^2b + a^2 - 4ab - 2a + 1$
c) $(2a + 1)^2(2a + 1) = (4a^2 + 4a + 1) \cdot (2a + 1) = 8a^3 + 4a^2 + 8a^2 + 4a + 2a + 1 = 8a^3 + 12a^2 + 6a + 1$
d) $(1 - 3t)^2(1 - 3t) = (1 - 6t + 9t^2) \cdot (1 - 3t) = 1 - 3t - 6t + 9t^2 + 9t^2 - 27t^3 = -27t^3 + 18t^2 - 9t + 1$

4.29 **Comprueba la veracidad de estas igualdades. Si alguna es falsa, escribe el resultado verdadero.**

a) $(2x^3 + 3x)^2 = 4x^6 + 9x^2 + 12x^4$
b) $(2x^3 - 5x)^2 = 4x^6 - 25x^2 + 20x^4$
c) $(5x + 3)(5x - 3) = 25x^2 + 9$
d) $(3x^2 - 4y)^2 = 9x^2 - 16y^2$

a) Cierta.
b) Falsa. $(2x^3 - 5x)^2 = 4x^6 + 25x^2 - 20x^4$
c) Falsa. $(5x + 3)(5x - 3) = 25x^2 - 9$
d) Falsa. $(3x^2 - 4y)^2 = 9x^4 + 16y^2 - 24x^2y$

4.30 **Desarrolla las siguientes expresiones utilizando las igualdades notables.**

a) $(a + 3b)^2$
b) $(a - 3b)^2$
c) $(3a + b)^2$
d) $(a + 3b) \cdot (a - 3b)$

a) $a^2 + 9b^2 + 6ab$
b) $a^2 + 9b^2 - 6ab$
c) $9a^2 + b^2 + 6ab$
d) $a^2 - 9b^2$

4.31 **A partir de esta igualdad $a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$, resuelve estas operaciones.**

a) $11^2 - 10^2$ **b) $75^2 - 25^2$** **c) $999^2 - 1$** **d) $650^2 - 150^2$**

a) $11^2 - 10^2 = (11 + 10) \cdot (11 - 10) = 21$
b) $75^2 - 25^2 = (75 + 25) \cdot (75 - 25) = 5\,000$
c) $999^2 - 1 = (999 + 1) \cdot (999 - 1) = 998\,000$
d) $650^2 - 150^2 = (650 + 150) \cdot (650 - 150) = 400\,000$

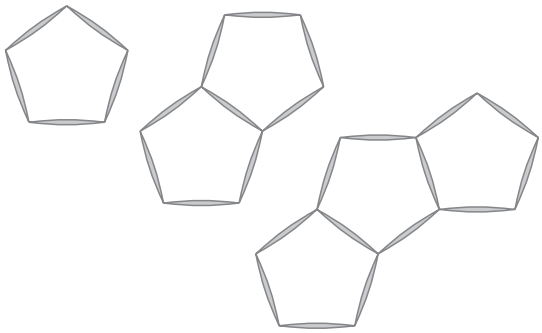
4.32 **Expresa como una potencia estos polinomios.**

a) $9x^2 + y^2 + 6xy$
b) $25y^2 + 100 + 100y$
c) $x^2 + 49 - 14x$
d) $x^4 + 12x^2 + 36$

a) $(3x + y)^2$
b) $(5y + 10)^2$
c) $(x - 7)^2$
d) $(x^2 + 6)^2$

AUTOEVALUACIÓN

11.A1 Construimos con palillos las siguientes figuras.



¿Cuántos palillos se necesitan para formar una figura con *n* pentágonos?

$a_1 = 5$; $a_2 = 9$; $a_3 = 13$; ...; $a_n = 5 + (n - 1) \cdot 4 = 4n + 1$

11.A2 Calcula los cinco primeros términos de las siguientes sucesiones.

a) $a_n = 3n^3 - 4n + 2$

b) $b_n = 4 - n^2$

c) $a_1 = 5$; $a_n = -3a_{n-1} + 8$

a) 1, 18, 71, 178, 357

b) 3, 0, −5, −12, −21

c) 3, −7, 29, −79, 245

11.A3 En una progresión aritmética, el segundo término es 9 y el cuarto es 15. Calcula la suma de los 20 primeros términos.

$$\begin{cases} a_2 = a_1 + d = 9 \\ a_4 = a_1 + 3d = 15 \end{cases} \Rightarrow 2d = 4 \Rightarrow d = 2 \Rightarrow a_1 = 7$$

$$a_{20} = a_1 + 19d = 7 + 19 \cdot 2 = 45;\ S_{20} = \frac{(7 + 45) \cdot 20}{2} = 520$$

11.A4 En una progresión geométrica el segundo término es 12 y el quinto 324. Calcula la suma de los 8 primeros términos.

$$\begin{cases} a_2 = a_1 r = 12 \\ a_5 = a_1 r^4 = 324 \end{cases} \Rightarrow r^3(a_1 r) = 324 \Rightarrow 12r^3 = 324 \Rightarrow r^3 = 27 \Rightarrow r = 3 \Rightarrow a_1 = 4$$

$$a_8 = a_1 r^7 = 4 \cdot 3^7 = 8\,748;\ S_8 = \frac{8\,748 \cdot 3 - 4}{2} = 13\,120$$

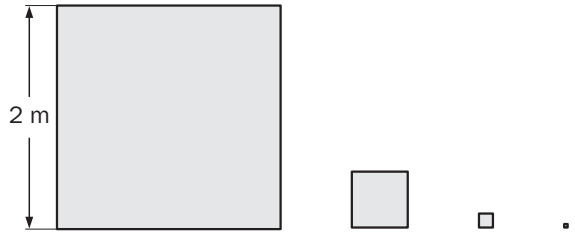
11.A5 Los ángulos de cierto triángulo rectángulo están en progresión aritmética. Halla la medida de los ángulos.

Ya que el triángulo es rectángulo, uno de sus ángulos es de 90° y los ángulos serían: $90 - 2d$, $90 - d$, 90.

Suma $\equiv 90 - 2d + 90 - d + 90 = 180 \Rightarrow 270 - 3d = 180 \Rightarrow d = 30$

Los ángulos son: 30°, 60°, 90°.

11.A6 **Halla la suma de las áreas de los cuatro cuadrados de la figura, sabiendo que el lado de cada uno es cuatro veces mayor que el del siguiente cuadrado.**



Las áreas de los cuadrados forman una progresión geométrica de razón $r = \frac{1}{16}$ y $a_1 = 4$.

$a_4 = a_1 r^3 = 4 \cdot \left(\frac{1}{16}\right)^3 = \frac{4}{16^3} = \frac{1}{4^5}$

La suma de las áreas de los cuatro cuadrados es la suma de los cuatro primeros términos de la progresión geométrica:

$$S_4 = \frac{\frac{1}{4^5} \cdot \frac{1}{16} - 4}{\frac{1}{16} - 1} = 4{,}27 \text{ cm}^2$$

11.A7 **La suma de los dos primeros términos de cierta progresión geométrica es igual a −1 y la suma de sus dos términos siguientes es igual a −4.**
Calcula la suma de los primeros 6 términos de esta progresión.

$$\begin{cases} a_1 + a_1 r = -1 \\ a_1 r^2 + a_1 r^3 = -4a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1(1 + r) = -1 \\ a_1(r^2 + r^3) = -4 \end{cases} \Rightarrow \frac{-1}{1 + r} = \frac{-4}{r^2 + r^3} \Rightarrow r^3 + r^2 - 4r - 4 = 0 \Rightarrow r = -2 \text{ y } r = 2$$

($r = -1$ no da una solución coherente).

$r = -2 \Rightarrow a_1 = 1 \Rightarrow a_6 = a_1 r^5 = (-2)^5 = -2^5 \Rightarrow S_6 = \frac{a_6 r - a_1}{r - 1} = \frac{2^6 - 1}{-3} = \frac{1 - 2^6}{3} = -21$

$r = 2 \Rightarrow a_1 = \frac{-1}{3} \Rightarrow a_6 = a_1 r^5 = \left(\frac{-1}{3}\right) \cdot 2^5 \Rightarrow S_6 = \frac{a_6 r - a_1}{r - 1} = \frac{1 - 2^6}{3} = -21$

Para ambos valores de r sale la misma solución.

11.A8 **La suma de las edades de cuatro hermanos es igual a 38 años y la diferencia entre el pequeño y el tercero es de 3 años. Averigua la edad de cada hermano sabiendo que las edades están en progresión aritmética.**

$a_3 - a_1 = 3 \Leftrightarrow a_1 + 2d - a_1 = 3 \Leftrightarrow 2d = 3 \Rightarrow d = 1{,}5$

$S_4 = 38 \Leftrightarrow a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d + a_1 + 3d = 4a_1 + 6d = 4a_1 + 9 = 38 \Rightarrow 4a_1 = 29 \Rightarrow a_1 = 7{,}25$

Las edades de los cuatro hermanos son de 7,25, 8,75, 10,25 y 11,75 años.

11.A9 **Calcula el número de términos de la siguiente sucesión: 7, 14, 28, 56, ..., 896.**

La sucesión es una progresión geométrica, ya que: $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \ldots = 2 = r$.

$an = a_1 r^{n-1} \Leftrightarrow 896 = 7 \cdot 2^{n-1} \Leftrightarrow 128 = 2^{n-1} \Leftrightarrow 2^7 = 2^{n-1} \Rightarrow n - 1 = 7 \Rightarrow n = 8$.

La sucesión tiene 8 términos.

11.A10 **Halla el término general de una progresión aritmética cuyo tercer término es 13 y el quinto es 21.**

$$\begin{cases} a_3 = a_1 + 2d = 13 \\ a_5 = a_1 + 4d = 21 \end{cases} \Rightarrow 2d = 8 \Rightarrow d = 4 \Rightarrow a_1 = 5$$

El término general buscado es: $a_n = 5 + (n - 1) \cdot 4 = 4n + 1$.

11.A11 **Halla el término general de una progresión geométrica que verifica que $a_2 = 15$ y $a_4 = 135$.**

$$\begin{cases} a_2 = a_1 r = 15 \\ a_4 = a_1 r^3 = 135 \end{cases} \Rightarrow a_1 r \cdot (r^2) \Leftrightarrow 135 \Rightarrow 15r^2 = 135 \Rightarrow r^2 = 9 \Rightarrow r = 3 \text{ y } r = -3$$

Si $r = -3 \Rightarrow a_1 = -5 \Rightarrow a_n = -5 \cdot (-3)^{n-1}$

Si $r = 3 \quad \Rightarrow a_1 = 5 \quad \Rightarrow a_n = 5 \cdot 3^{n-1}$

7 ECUACIONES. SISTEMAS DE ECUACIONES

EJERCICIOS PROPUESTOS

7.1 Escribe estos enunciados en forma de ecuación.

a) La suma de dos números consecutivos es 21.

b) La suma de tres números pares consecutivos es 30.

c) Un número más su quinta parte es 12.

a) $x + (x + 1) = 21$

b) $2x + (2x + 2) + (2x + 4) = 30$

c) $x + \frac{x}{5} = 12$

7.2 En una academia de idiomas el número de alumnos que estudian francés es la mitad de los que estudian inglés. Calcula el número de alumnos de cada grupo si en total son 240.

Sea x el número de alumnos de francés. $2x + x = 240 \Rightarrow x = 80$

Hay 80 alumnos que estudian francés y 160 que estudian inglés.

7.3 Resuelve la siguiente ecuación: $5x + 4 = 19 + 2x$

$5x + 4 = 19 + 2x$

$5x + 4 - 2x = 19 + 2x - 2x \Rightarrow 3x + 4 = 19$

$3x + 4 - 4 = 19 - 4 \Rightarrow 3x = 15$

$\frac{3x}{3} = \frac{15}{3} \Rightarrow x = 5$

7.4 Resuelve esta ecuación: $18x - 50 = 14x - 4x + 6$

$18x - 50 = 14x - 4x + 6 \Rightarrow 18x - 50 - 10x + 50 = 10x + 6 - 10x + 50 \Rightarrow 8x = 56 \Rightarrow x = 7$

7.5 Resuelve la ecuación: $6x - 4 = 60 - 2x$

$6x - 4 = 60 - 2x \Rightarrow 6x - 4 + 2x + 4 = 60 - 2x + 2x + 4 \Rightarrow 8x = 64 \Rightarrow x = 8$

7.6 Las edades de tres alumnos son números pares consecutivos.

Si la suma de sus edades es 42, ¿cuántos años tiene cada uno?

La ecuación es $2x + (2x + 2) + (2x + 4) = 42$.

$2x + (2x + 2) + (2x + 4) = 42 \Rightarrow 6x + 6 = 42 \Rightarrow x = 6$

Tienen 12, 14 y 16 años respectivamente.

7.7 María ha dibujado un rectángulo cuyo largo es tres veces el ancho.

Si el perímetro del rectángulo mide 80 centímetros, ¿cuánto mide el área?

Si x es el ancho, $3x$ es el largo. Entonces, el perímetro es $x + 3x + x + 3x$.

$x + 3x + x + 3x = 80 \Rightarrow 8x = 80 \Rightarrow x = 10$ cm

$A = 10 \cdot 30 = 300$ cm^2

7.8 Resuelve estas ecuaciones con paréntesis.

a) $2(x + 1) - 3(x - 2) = x + 6$ **b) $x + 20 = 5(x - 20)$**

a) $2(x + 1) - 3(x - 2) = x + 6 \Rightarrow 2x + 2 - 3x + 6 = x + 6 \Rightarrow -x + 8 = x + 6 \Rightarrow 2 = 2x \Rightarrow x = 1$

b) $x + 20 = 5(x - 20) \Rightarrow x + 20 = 5x - 100 \Rightarrow 120 = 4x \Rightarrow x = 30$

7 ECUACIONES. SISTEMAS DE ECUACIONES

7.9 **Resuelve las siguientes ecuaciones con denominadores.**

a) $\frac{x}{3} - \frac{x}{4} + \frac{x}{5} = 34$ **b)** $\frac{x}{2} + \frac{3x}{4} - \frac{5x}{6} = 15$

a) $\frac{x}{3} - \frac{x}{4} + \frac{x}{5} = 34 \Rightarrow 20x - 15x + 12x = 60 \cdot 34 \Rightarrow 17x = 2\,040 \Rightarrow x = 120$

b) $\frac{x}{2} + \frac{3x}{4} - \frac{5x}{6} = 15 \Rightarrow 6x + 3 \cdot 3x - 2 \cdot 5x = 12 \cdot 15 \Rightarrow 5x = 180 \Rightarrow x = 36$

7.10 **Resuelve las siguientes ecuaciones.**

a) $2(x + 2) - 5(2x - 3) = 3$ **b)** $8(x + 3) + 4(x - 2) = 9x - 7$

a) $2(x + 2) - 5(2x - 3) = 3 \Rightarrow 2x + 4 - 10x + 15 = 3 \Rightarrow -8x = -16 \Rightarrow x = 2$

b) $8(x + 3) + 4(x - 2) = 9x - 7 \Rightarrow 8x + 24 + 4x - 8 = 9x - 7 \Rightarrow 3x = -23 \Rightarrow x = -\frac{23}{3}$

7.11 **Resuelve estas ecuaciones.**

a) $4x + \frac{6x}{7} = \frac{3x + 2}{2} + 46$ **b)** $x - \frac{4x}{5} + 39 = x + \frac{x}{2}$

a) $4x + \frac{6x}{7} = \frac{3x + 2}{2} + 46 \Rightarrow 14 \cdot 4x + 2 \cdot 6x = 7(3x + 2) + 14 \cdot 46 \Rightarrow 47x = 658 \Rightarrow x = 14$

b) $x - \frac{4x}{5} + 39 = x + \frac{x}{2} \Rightarrow 10x - 2 \cdot 4x + 10 \cdot 39 = 10x + 5x \Rightarrow 390 = 13x \Rightarrow x = 30$

7.12 **Decide cuál de estas ecuaciones es de segundo grado.**

a) $x^2 = 9x - 18$ **b)** $3x^2 + 3x - 28 = 1 + 3x^2$ **c)** $2 - 5x^2 - x^3 = 3x^2 - 2x^3 + x^3$

La ecuación de 2.º grado es la a. En la ecuación b, al operar desaparecen los términos de grado 2, y la ecuación c es de grado 3.

7.13 **¿Qué ecuación tiene por soluciones 3 y 4?**

a) $x^2 + 7x - 12 = 0$ **b)** $x^2 - 12x + 7 = 0$ **c)** $x^2 - 7x + 12 = 0$ **d)** $x^2 + 12x - 7 = 0$

La ecuación c. $3^2 - 7 \cdot 3 + 12 = 0$; $4^2 - 7 \cdot 4 + 12 = 0$

7.14 **Escribe la ecuación de segundo grado que tenga estas soluciones.**

a) 2 y 1 **b) −4 y 5** **c) 3 y −3** **d) −1 y −7**

a) $x^2 - (2 + 1)x + 2 \cdot 1 = 0 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$

b) $x^2 - (-4 + 5)x + (-4) \cdot 5 = 0 \Rightarrow x^2 - x - 20 = 0$

c) $x^2 - [3 + (-3)]x + 3 \cdot (-3) = 0 \Rightarrow x^2 - 9 = 0$

d) $x^2 - [-1 + (-7)]x + (-1) \cdot (-7) = 0 \Rightarrow x^2 + 8x + 7 = 0$

7.15 **Escribe una ecuación de segundo grado que tenga por raíces -2 y $\frac{1}{3}$.**

$x^2 - \left(-2 + \frac{1}{3}\right)x + (-2) \cdot \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{5}{3}x - \frac{2}{3} = 0 \Rightarrow 3x^2 + 5x - 2 = 0$

7.16 **Resuelve las siguientes ecuaciones.**

a) $3x^2 - 12x = 0$ **b)** $x^2 + 25x = 0$ **c)** $-2x^2 - 6x = 0$ **d)** $-8x^2 + 24x = 0$

a) $3x^2 - 12x = 0 \Rightarrow x(3x - 12) = 0$. Soluciones: $x = 0$ y $x = 4$

b) $x^2 + 25x = 0 \Rightarrow x(x + 25) = 0$. Soluciones: $x = 0$ y $x = -25$

c) $-2x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x(-2x - 6) = 0$. Soluciones: $x = 0$ y $x = -3$

d) $-8x^2 + 24x = 0 \Rightarrow x(-8x + 24) = 0$. Soluciones: $x = 0$ y $x = 3$

7.17 **Resuelve estas ecuaciones.**

a) $5x^2 - 20 = 0$ **b)** $-4x^2 + 100 = 0$

a) $5x^2 - 20 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2, x = -2$

b) $-4x^2 + 100 = 0 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = 5, x = -5$

7.18 **Resuelve estas otras ecuaciones.**

a) $3x^2 = 0$ **b)** $-7x^2 = 0$

a) $3x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

b) $-7x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

7.19 **Resuelve las ecuaciones.**

a) $3x^2 - 5x = x$ **c)** $2x^2 - x - 3 - 1 = x - 4$

b) $3x^2 = 75x$ **d)** $x^2 - x = 3x^2 - x$

a) $3x^2 - 5x = x \Rightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x(3x - 6) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2$

b) $3x^2 = 75x \Rightarrow x(3x - 75) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 25$

c) $2x^2 - x - 3 - 1 = x - 4 \Rightarrow x(2x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 1$

d) $x^2 - x = 3x^2 - x \Rightarrow 2x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

7.20 **Resuelve estas ecuaciones.**

a) $x^2 - 3x + 2 = 0$ **b)** $2x^2 - 5x + 2 = 0$

a) $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \dfrac{3 \pm \sqrt{1}}{2}$; $x = 2, x = 1$

b) $x = \dfrac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}{2 \cdot 2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{9}}{4}$; $x = 2, x = \dfrac{1}{2}$

7.21 **Resuelve las siguientes ecuaciones.**

a) $x^2 - 7x + 10 = 0$ **b)** $x^2 - 11x + 30 = 0$

a) $x = \dfrac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10}}{2 \cdot 1} = \dfrac{7 \pm \sqrt{9}}{2}$; $x = 5, x = 2$

b) $x = \dfrac{11 \pm \sqrt{(-11)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 30}}{2 \cdot 1} = \dfrac{11 \pm \sqrt{1}}{2}$; $x = 6, x = 5$

7.22 **Sin resolverlas, averigua el número de soluciones de estas ecuaciones.**

a) $2x^2 + x + 2 = 0$ **c)** $3x^2 - 5x - 8 = 0$

b) $x^2 - 6x + 9 = 0$ **d)** $-3x^2 - 4x + 5 = 0$

Vemos el signo del discriminante.

a) $1^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 < 0$. No tiene soluciones reales.

b) $(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 0$. Tiene una única solución.

c) $(-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-8) > 0$. Dos soluciones reales.

d) $(-4)^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 5 > 0$. Dos soluciones reales.

7.23 **Plantea el sistema de ecuaciones lineales para este enunciado: "Una clase tiene 36 alumnos y el número de chicas es el triple que el de chicos". Trata de obtener la solución construyendo una tabla de valores.**

Sea x el número de chicas e y el número de chicos.

$$\begin{cases} x + y = 36 \\ x = 3y \end{cases}$$

y	0	1	2	...	9
$x = 3y$	0	3	6	...	27
$x + y$	0	4	8	...	36

En la clase hay 9 chicos y 27 chicas.

7.24 **Comprueba si los valores $x = 2$ e $y = 7$ son soluciones de los siguientes sistemas.**

a) $\begin{cases} 4x - y = 1 \\ x + 2y = 15 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 4 \cdot 2 - 7 = 1 \\ 2 + 2 \cdot 7 = 16 \neq 15 \end{cases}$

$x = 2$ e $y = 7$ no son solución del sistema.

b) $\begin{cases} -3x + y = 1 \\ 5x - y = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -3 \cdot 2 + 7 = 1 \\ 5 \cdot 2 - 7 = 3 \end{cases}$

$x = 2$ e $y = 7$ sí son solución del sistema.

7.25 **Resuelve estos sistemas, sumando o restando ecuaciones.**

a) $\begin{cases} x + y = 50 \\ x - y = 10 \end{cases}$

a) Sumando:

$$\begin{array}{r} x + y = 50 \\ x - y = 10 \\ \hline 2x \quad = 60 \end{array} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x = 20 \quad y = 20$

b) $\begin{cases} 2x - 3y = 12 \\ 3x - 3y = 15 \end{cases}$

b) Restando:

$$\begin{array}{r} 2x - 3y = 12 \\ 3x - 3y = 15 \\ \hline -x \quad = -3 \end{array} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x = 3 \quad y = -2$

7.26 **Resuelve los siguientes sistemas, sumando o restando ecuaciones.**

a) $\begin{cases} x + 2y = 100 \\ x - 2y = 60 \end{cases}$

a) Sumando:

$$\begin{array}{r} x + 2y = 100 \\ x - 2y = 60 \\ \hline 2x \quad = 160 \end{array}$$

$\Rightarrow x = 80 \quad y = 10$

b) $\begin{cases} 2x - y = 12 \\ 3x - y = 22 \end{cases}$

b) Restando:

$$\begin{array}{r} 2x - y = 12 \\ 3x - y = 22 \\ \hline -x \quad = -10 \end{array} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x = 10 \quad y = 8$

7.27 **Utiliza la regla de la suma de ecuaciones para resolver los siguientes sistemas.**

a) $\begin{cases} x + y = 20 \\ x - y = 10 \end{cases}$

a)
$$\begin{array}{r} x + y = 20 \\ x - y = 10 \\ \hline 2x \quad = 30 \end{array}$$

$\Rightarrow x = 15 \quad y = 5$

b) $\begin{cases} x + y = 2 \\ -x - y = 0 \end{cases}$

b)
$$\begin{array}{r} x + y = 2 \\ -x - y = 0 \\ \hline 0 = 2 \end{array}$$

No tiene solución.

7.28 **La suma de dos números es 120 años y su diferencia 60. ¿Cuáles son? Utiliza la regla de la suma de ecuaciones para resolver el problema.**

Sean los números x e y.

$$\begin{cases} x + y = 120 \\ x - y = 60 \end{cases}$$

$2x = 180 \Rightarrow x = 90, y = 30$

Los números son 30 y 90.

7.29 **Resuelve por sustitución estos sistemas.**

a) $\begin{cases} x + y = 6 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x + y = 6 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 6 \\ x = 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y + y = 6 \\ x = 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y = 6 \\ x = 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + y = 20 \\ x + 2y = 19 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + y = 20 \\ x + 2y = 19 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 20 - 2x \\ x + 2(20 - 2x) = 19 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 20 - 2x \\ x + 40 - 4x = 19 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 20 - 2x \\ -3x = -21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 20 - 2 \cdot 7 = 6 \\ x = 7 \end{cases}$

7.30 Resuelve los siguientes sistemas por sustitución.

a) $\begin{cases} x - y = 3 \\ 3x + 2y = 44 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 5x + 2y = 46 \\ x - y = -2 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x - y = 3 \\ 3x + 2y = 44 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 + y \\ 3(3 + y) + 2y = 44 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 + y \\ 9 + 3y + 2y = 44 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 + y \\ 5y = 35 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 + 7 = 10 \\ y = 7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5x + 2y = 46 \\ x - y = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5(y - 2) + 2y = 46 \\ x = y - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7y = 56 \\ x = y - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 8 \\ x = 6 \end{cases}$

7.31 Plantea para este enunciado un sistema de ecuaciones y resuélvelo por sustitución: "En un corral hay conejos y patos. El número de animales es 30 y el de patas 100". ¿Cuántos conejos y patos hay en el corral?

Sea x el número de conejos e y el de patos

$$\begin{cases} x + y = 30 \\ 4x + 2y = 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 30 - y \\ 4(30 - y) + 2y = 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 30 - y \\ -2y = -20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 30 - 10 = 20 \\ y = 10 \end{cases}$$

Hay 20 conejos y 10 patos.

7.32 La base de un rectángulo es 12 centímetros mayor que la altura y su perímetro es 64 centímetros. Halla sus dimensiones. Para ello, plantea un sistema y resuélvelo por sustitución.

Sea x la longitud de la base e y la de la altura.

$$\begin{cases} x = 12 + y \\ 2x + 2y = 64 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 12 + y \\ 2(12 + y) + 2y = 64 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 12 + y \\ 4y = 40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 12 + 10 = 22 \\ y = 10 \end{cases}$$

La base del rectángulo mide 22 centímetros, y la altura, 10.

7.33 Resuelve por reducción estos sistemas.

a) $\begin{cases} 4x - 5y = 2 \\ 5x + 3y = 21 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x - 5y = 8 \\ 27x + 8y = 25 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 4x - 5y = 2 \xrightarrow{\times 3} 12x - 15y = 6 \\ 5x + 3y = 21 \xrightarrow{\times 5} 25x + 15y = 105 \end{cases}$

$37x = 111 \Rightarrow x = 3$

$\begin{cases} 4x - 5y = 2 \xrightarrow{\times 5} 20x - 25y = 10 \\ 5x + 3y = 21 \xrightarrow{\times 4} 20x + 12y = 84 \end{cases}$

$-37y = -74 \Rightarrow y = 2$

b) $\begin{cases} x - 5y = 8 \xrightarrow{\times 8} 8x - 40y = 64 \\ 27x + 8y = 25 \xrightarrow{\times 5} 135x + 40y = 125 \end{cases}$

$143x = 189 \Rightarrow x = \frac{189}{143}$

$\begin{cases} x - 5y = 8 \xrightarrow{\times 27} 27x - 135y = 216 \\ 27x + 8y = 25 \longrightarrow 27x + 8y = 25 \end{cases}$

$143y = -191 \Rightarrow x = \frac{-191}{143}$

7.34 Resuelve por el método de reducción los siguientes sistemas.

a) $\begin{cases} 6x + 5y = 16 \\ 5x - 12y = -19 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 22x + 15y = 9 \\ 18x + 28y = 71 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 6x + 5y = 16 \xrightarrow{\times 12} 72x + 60y = 192 \\ 5x - 12y = -19 \xrightarrow{\times 5} 25x - 60y = -95 \end{cases}$

$97x = 97 \Rightarrow x = 1$

$\begin{cases} 6x + 5y = 16 \xrightarrow{\times 5} 30x + 25y = 80 \\ 5x - 12y = -19 \xrightarrow{\times(-6)} -30x + 72y = 114 \end{cases}$

$97y = 194 \Rightarrow y = 2$

b) $\begin{cases} 22x + 15y = 9 \xrightarrow{\times 9} 198x + 135y = 81 \\ 18x + 25y = 71 \xrightarrow{\times 11} 198x + 275y = 781 \end{cases}$

$-140y = -700 \Rightarrow y = 5$

$\begin{cases} 22x + 15y = 9 \xrightarrow{\times 5} 110x + 75y = 45 \\ 18x + 25y = 71 \xrightarrow{\times 13} 54x + 75y = 213 \end{cases}$

$56x = -168 \Rightarrow x = -3$

7.35 Resuelve los sistemas por reducción.

a) $\begin{cases} 3x + 5y = 16 \\ 2x + 6y = 16 \end{cases}$ $\times 2$

a) $\begin{cases} 3x - 5y = 16 \xrightarrow{\times 2} 6x + 10y = 32 \\ 2x + 6y = 16 \xrightarrow{\times 3} \underline{6x + 18y = +48} \end{cases}$

$-8y = -16 \Rightarrow y = 2$

$\begin{cases} 3x + 5y = 16 \xrightarrow{\times 6} 18x + 30y = 96 \\ 2x + 6y = 16 \xrightarrow{\times 5} \underline{10x + 30y = 80} \end{cases}$

$8x = 16 \Rightarrow x = 2$

b) $\begin{cases} 3x + 7y = -23 \\ 5x + 4y = -23 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x + 7y = -23 \xrightarrow{\times 5} 15x + 35y = -115 \\ 5x + 4y = -23 \xrightarrow{\times 3} \underline{15x + 12y = -69} \end{cases}$

$23y = -46 \Rightarrow y = -2$

$\begin{cases} 3x + 7y = -23 \xrightarrow{\times 4} 12x + 28y = -92 \\ 5x + 4y = -23 \xrightarrow{\times 7} \underline{35x + 28y = -161} \end{cases}$

$-23x = 69 \Rightarrow x = -3$

7.36 Halla dos números naturales tales que su suma aumentada en 22 sea igual a dos veces el mayor, y que la diferencia de los dos números menos 1 sea igual al menor.

Sean x e y los números.

$$\begin{cases} x + y + 22 = 2x \\ x - y - 1 = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + y = -22 \\ x - 2y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x + 2y = -44 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$$

$-y = -21 \qquad -x = -43$

Los números son 43 y 21.

7.37 Resuelve gráficamente los siguientes sistemas de ecuaciones.

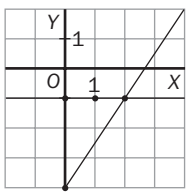
a) $\begin{cases} 3x - 2y - 8 = 0 \\ y + 1 = 0 \end{cases}$

a) Se despeja y en las ecuaciones:

$y = \dfrac{3x - 8}{2}$; $y = -1$

x	$y = \dfrac{3x - 8}{2}$
0	-4
2	-1

x	$y = -1$
0	-1
2	-1



Solución: $x = 2$, $y = -1$

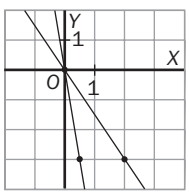
b) $\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ 6x + y = 0 \end{cases}$

b) Se despeja y en las ecuaciones:

$y = -\dfrac{3}{2}x$; $y = -6x$

x	$y = -\dfrac{3}{2}x$
0	0
2	-3

x	$y = -6x$
0	0
$\dfrac{1}{2}$	-3



Solución: $x = 0$, $y = 0$

7.38 **Resuelve gráficamente los siguientes sistemas de ecuaciones.**

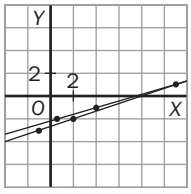
a) $\begin{cases} 2x - 3y - 8 = x \\ 4x - 12y - 30 = 2y \end{cases}$

a) Se despeja y en las ecuaciones:

$y = \dfrac{x - 8}{3}$; $y = \dfrac{4x - 30}{14}$

x	$y = \dfrac{x - 8}{3}$
2	-2
-1	-3

x	$y = \dfrac{4x - 30}{14}$
4	-1
$\dfrac{1}{2}$	-2



Solución: $x = 11$, $y = 1$

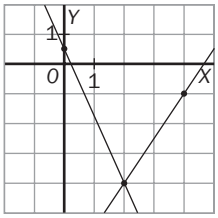
b) $\begin{cases} -3x + 5y + 14 = 3y \\ 7x + 4y - 2 = -2x \end{cases}$

a) Se despeja y en las ecuaciones:

$y = \dfrac{3x - 14}{2}$; $y = \dfrac{-9x + 2}{4}$

x	$y = \dfrac{3x - 14}{2}$
4	-1
2	-4

x	$y = \dfrac{9x + 2}{4}$
0	$\dfrac{1}{2}$
-2	5



Solución: $x = 2$, $y = -4$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

7.39 **Un motorista sale del punto *F* hacia el punto *K* a una velocidad media de 80 km/h, y al mismo tiempo sale otro motorista de *K* hacia *F* a una velocidad media de 100 km/h. Si la distancia entre esos puntos es de 360 kilómetros, ¿cuánto tardarán en encontrarse? ¿Cuántos kilómetros ha recorrido cada uno?**

La suma de las distancias que recorre cada uno es 360; $d_1 + d_2 = 360$.

La distancia que recorre el motorista que va de *F* a *K* es $80t$, y la que recorre el motorista es $100t$.

Se cumple entonces que $80t + 100t = 360$, despejamos t y obtenemos $t = 2$.

Tardan en encontrarse 2 horas.

El primer motorista recorre $80 \cdot 2 = 160$ km, y el segundo, $100 \cdot 2 = 200$ km.

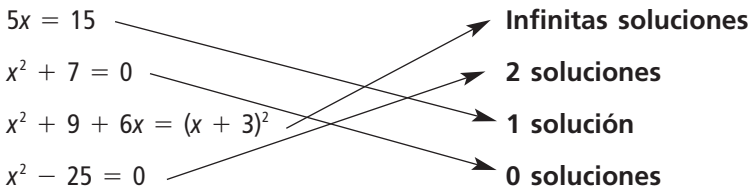
7.40 **Un ciclista sale del punto *A* a una velocidad media de 30 km/h, y trata de alcanzar a un amigo que ha salido una hora antes del mismo punto y cuya velocidad media es de 20 km/h. ¿Cuánto tiempo tardará en alcanzarle?**

La distancia que recorren los ciclistas es la misma. Sea t el tiempo que tarda el segundo en recorrer esa distancia, entonces $30t = 20 \cdot (t + 1)$. Despejamos t y obtenemos que el tiempo que el segundo ciclista tardará en alcanzar al primero es $t = 2$ horas.

EJERCICIOS PARA ENTRENARSE

Ecuaciones de primer grado

7.41 Relaciona cada ecuación con su número de soluciones.



7.42 En una familia, la madre gana el triple que el padre y entre los dos ingresan mensualmente 4 800 euros.

a) Escribe la ecuación que corresponde a esa situación.

b) ¿Cuánto gana cada uno?

a) $x + 3x = 4\,800$

b) $4x = 4\,800 \Rightarrow x = 1\,200$; $3x = 3\,600$, El padre gana 1 200 euros, y la madre, 3 600.

7.43 En la ecuación $8x - 6 = -5x + 20$, realiza las transformaciones que se indican.

1. Suma $5x$ a los dos miembros.

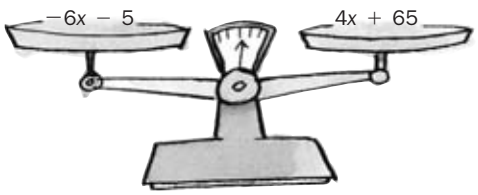
2. Suma 6 a los dos miembros.

3. Divide por 13 los dos miembros.

¿Cuál es la solución?

1. $13x - 6 = 20$; 2. $13x = 26$; 3. $x = 2$. La solución es $x = 2$.

7.44 ¿Para qué valor de x la balanza está equilibrada?



$-6x - 5 = 4x + 65 \Rightarrow -70 = 10x \Rightarrow x = -7$

7.45 En una clase de 28 alumnos de 3.º de ESO hay doble número de alumnos americanos que africanos y doble número de alumnos europeos que americanos.

a) Elige una incógnita y plantea una ecuación que refleje el enunciado.

b) ¿Cuántos alumnos hay de cada continente?

a) Sea x el número de alumnos africanos. Entonces la ecuación es $x + 2x + 4x = 28$.

b) Resolvemos: $7x = 28 \Rightarrow x = 4$. Hay 4 alumnos africanos, 8 americanos y 16 europeos.

7.46 **Resuelve las siguientes ecuaciones.**

a) $\frac{x}{5} - \frac{x}{9} = \frac{x}{3} - 11$

b) $3(x - 4) + 2(3x - 1) = 7x - 18$

c) $-4(2x - 1) + \frac{3x + 1}{2} = -5x - 3$

d) $4(x - 3) + \frac{x}{2} = -(x - 4) + 1$

e) $3(2x - 5) + 8x - 6 = \frac{x}{2} - (5x + 3)$

f) $\frac{x - 4}{5} - 4(-2x + 1) - \frac{(-4x + 2)}{10} = 2(x - 3) + \frac{5x + 6}{2}$

a) $\frac{x}{5} - \frac{x}{9} = \frac{x}{3} - 11 \Rightarrow 9x - 5x = 15x - 495 \Rightarrow 495 = 11x \Rightarrow x = 45$

b) $3(x - 4) + 2(3x - 1) = 7x - 18 \Rightarrow 3x - 12 + 6x - 2 = 7x - 18 \Rightarrow 2x = -4 \Rightarrow x = -2$

c) $-4(2x - 1) + \frac{3x + 1}{2} = -5x - 3 \Rightarrow -8x + 4 + \frac{3x + 1}{2} = -5x - 3 \Rightarrow -3x = -15 \Rightarrow x = 5$

d) $4(x - 3) + \frac{x}{2} = -(x - 4) + 1 \Rightarrow 8x - 24 + x = -2x + 8 + 2 \Rightarrow 11x = 34 \Rightarrow x = \frac{34}{11}$

e) $3(2x - 5) + 8x - 6 = \frac{x}{2} - (5x + 3) \Rightarrow 28x - 42 = x - 10x - 6 \Rightarrow 37x = 36 \Rightarrow x = \frac{36}{37}$

f) $\frac{x - 4}{5} - 4(-2x + 1) - \frac{(-4x + 2)}{10} = 2(x - 3) + \frac{5x + 6}{2} \Rightarrow 2x - 8 - 40(-2x + 1) - (-4x + 2) =$
$= 20(x - 3) + 25x + 30 \Rightarrow 86x - 50 = 45x - 30 \Rightarrow 41x = 20 \Rightarrow x = \frac{20}{41}$

Ecuaciones de segundo grado

7.47 **Escribe en cada caso la ecuación de segundo grado que tenga estas soluciones.**

a) −3 y 4 **b) 5 y −5** **c) 0 y 3** **d) −1 y −3**

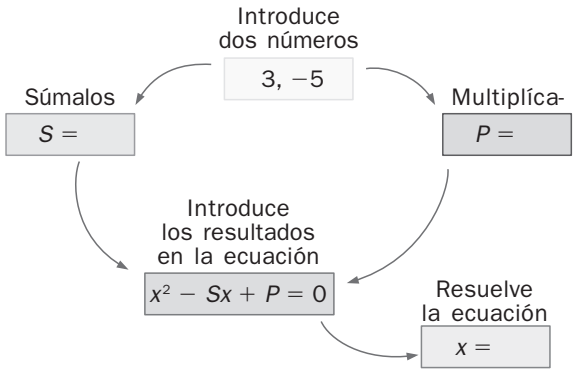
a) $x^2 - (-3 + 4)x + (-3) \cdot 4 = x^2 - x - 12 = 0$

b) $x^2 - (5 - 5)x + 5 \cdot (-5) = x^2 - 25 = 0$

c) $x^2 - (0 + 3)x + 0 \cdot 3 = x^2 - 3x = 0$

d) $x^2 - (-1 - 3)x + (-1)(-3) = x^2 + 4x + 3 = 0$

7.48 **Copia y completa el gráfico.**



$S = -2, P = -15$

$x^2 + 2x - 15 = 0$

$x = 3, x = -5$

7 ECUACIONES. SISTEMAS DE ECUACIONES

7.49 **Resuelve las ecuaciones incompletas de segundo grado.**

a) $5x^2 - 20x = 0$ **b)** $2x^2 - 32 = 0$ **c)** $17x^2 = 0$

a) $5x^2 - 20x = 0 \Rightarrow x \cdot (5x - 20) = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = 4$

b) $2x^2 - 32 = 0 \Rightarrow x^2 = \dfrac{32}{2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{16} \Rightarrow x = 4,\ x = -4$

c) $17x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

7.50 **Resuelve estas ecuaciones utilizando la fórmula explicada en el texto.**

a) $x^2 - 11x - 12 = 0$ **b)** $x^2 + 9x + 18 = 0$

a) $x = \dfrac{11 \pm \sqrt{121 + 48}}{2} = \dfrac{11 \pm 13}{2} = \begin{cases} 12 \\ -1 \end{cases}$

b) $x = \dfrac{-9 \pm \sqrt{81 - 72}}{2} = \dfrac{-9 \pm 3}{2} = \begin{cases} -3 \\ -6 \end{cases}$

7.51 **Soluciona las ecuaciones sin utilizar la fórmula.**

a) $(x + 3) \cdot (x - 6) = 0$ **b)** $(3x - 1) \cdot (2x + 5) = 0$

a) $x = -3,\ x = 6$ b) $x = \dfrac{1}{3},\ x = -\dfrac{5}{2}$

7.52 **Relaciona cada ecuación con su número de soluciones.**

$3x^2 + x + 2 = 0$	**2 soluciones**
$x^2 - 5x + 1 = 0$	**1 solución**
$4x^2 + 4x + 1 = 0$	**0 soluciones**

Vemos el signo de los discriminantes.

$3x^2 + x + 2 = 0 \rightarrow 1^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 < 0 \rightarrow$ 0 soluciones

$x^2 - 5x + 1 = 0 \rightarrow (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 > 0 \rightarrow$ 2 soluciones

$4x^2 + 4x + 1 = 0 \rightarrow 4^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 0 \rightarrow$ 1 solución

7.53 **Desarrolla las ecuaciones hasta conseguir escribirlas en la forma $ax^2 + bx + c = 0$, y, luego, resuélvelas.**

a) $6x^2 - 1 + \dfrac{2x \cdot (-x + 3)}{3} = \dfrac{5x^2 - 2}{6} - 4x^2 + 2 + \dfrac{47}{6}$

b) $\dfrac{3(x^2 - 11)}{5} - \dfrac{2(x^2 - 60)}{7} = 36$

a) $6x^2 - 1 + \dfrac{2x(-x - 3)}{3} = \dfrac{5x^2 - 2}{6} - 4x^2 + 2 + \dfrac{47}{6} \Rightarrow 36x^2 - 6 + 4x(-x + 3) = 5x^2 - 2 - 24x^2 + 12 + 47 \Rightarrow$

$\Rightarrow 51x^2 + 12x - 63 = 0$

$x = \dfrac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 51 \cdot (-63)}}{2 \cdot 51} = \dfrac{-12 \pm 114}{102} = \begin{cases} -\dfrac{21}{17} \\ 1 \end{cases}$

b) $\dfrac{3(x^2 - 11)}{5} - \dfrac{2(x^2 - 60)}{7} = 36 \Rightarrow 21(x^2 - 11) - 10(x^2 - 60) = 1\,260 \Rightarrow 11x^2 = 891 \Rightarrow x^2 = 81 \Rightarrow x = \pm 9$

7.54 **La suma de los catetos de un triángulo rectángulo es 14 centímetros y la hipotenusa mide 10 centímetros. Aplica el teorema de Pitágoras, utilizando una sola incógnita, y halla el valor de los catetos.**

Como la suma de los catetos es 14, tenemos que estos valen x y $14 - x$.

Entonces, por el teorema de Pitágoras: $10^2 = x^2 + (14 - x)^2 \Rightarrow x^2 - 14x + 48 = 0$

$$x = \frac{14 \pm \sqrt{14^2 - 4 \cdot 1 \cdot 48}}{2 \cdot 1} = \frac{14 \pm 2}{2} = \begin{cases} 8 \\ 6 \end{cases}$$

Los catetos miden 8 y 6 centímetros.

Sistemas de ecuaciones

7.55 **Dos números se diferencian en 7 y el triple de uno menos el doble del otro se diferencian en 26.**

a) Escribe el sistema que corresponda al enunciado.

b) Resuelve el sistema obtenido por tanteo.

a) $\begin{cases} x - y = 7 \\ 3x - 2y = 26 \end{cases}$

b)

x	7	8	9	...	12
$x - 7 = y$	0	1	2	...	5
$3x - 2y$	21	22	23	...	26

La solución es: $x = 12$ e $y = 5$.

7.56 **Indica, sin resolverlos, si estos sistemas son compatibles o incompatibles.**

a) $\begin{cases} x + y = 7 \\ x + y = 10 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 2y - x = -1 \end{cases}$

a) Incompatible, porque tendríamos $7 = 10$.

b) Compatible.

7.57 **Comprueba si los valores $x = -2$ e $y = 7$ son solución del sistema.**

a) $\begin{cases} 5x + y = 3 \\ -3x + 2y = 20 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x - y = -9 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 5 \cdot (-2) + 7 = -3 \neq 3 \\ -3 \cdot (-2) + 2 \cdot 7 = 20 \end{cases}$. No son solución.

b) $\begin{cases} -2 - 7 = -9 \\ 2 \cdot (-2) + 7 + 3 \end{cases}$. Sí son solución.

7.58 **Plantea un sistema que tenga como solución $x = -3$ e $y = 5$.**

Respuesta abierta, por ejemplo: $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = -8 \end{cases}$

7.59 **Resuelve estos sistemas por el método de sustitución.**

a) $\begin{cases} x = -4y + 2 \\ 3x + 5y = -1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} -2x + 3y = 1 \\ 2x - 7y = -3 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x = -4y + 2 \\ 3x + 5y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -4y + 2 \\ 3(-4y + 2) + 5y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -4y + 2 \\ -7y = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -4 \cdot 1 + 2 = -2 \\ y = 1 \end{cases}$

Solución: $x = -2$, $y = 1$

b) $\begin{cases} -2x + 3y = 1 \\ 2x - 7y = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1 - 3y}{-2} \\ 2 \cdot \dfrac{1 - 3y}{-2} - 7y = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1 - 3y}{-2} \\ -4y = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1 - 3 \cdot 1}{-2} = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

Solución: $x = 1$, $y = 1$

7.60 **Resuelve los sistemas utilizando el método de reducción.**

a) $\begin{cases} 3x - 4y = 7 \\ 5x + 2y = 1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 5x + 4y = -1 \\ 3x - 6y = 5 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 3x - 4y = 7 \\ 5x + 2y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 4y = 7 \\ 2 \cdot (5x + 2y = 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 4y = 7 \\ 10x + 4y = 2 \end{cases}$

$13x = 9 \Rightarrow x = \frac{9}{13}$

$\begin{cases} 3x - 4y = 7 \\ 5x + 2y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5 \cdot (3x - 4y = 7) \\ -3 \cdot (5x + 2y = 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 15x - 20y = 35 \\ -15x - 6y = -3 \end{cases}$

$-26y = 32 \Rightarrow y = -\frac{32}{26} = -\frac{16}{13}$

b) $\begin{cases} 5x + 4y = -1 \\ 3x - 6y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 \cdot (5x + 4y = -1) \\ 2 \cdot (3x - 6y = 5) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 15x + 12y = -3 \\ 6x - 12y = 10 \end{cases}$

$21x = 7 \Rightarrow x = \frac{7}{21} = \frac{1}{3}$

$\begin{cases} 5x + 4y = -1 \\ 3x - 6y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 \cdot (5x + 4y = -1) \\ -5 \cdot (3x - 6y = 5) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 15x + 12y = -3 \\ -15x + 30y = -25 \end{cases}$

$42y = -28 \Rightarrow y = -\frac{28}{42} = -\frac{2}{3}$

7.61 **Resuelve gráficamente los siguientes sistemas.**

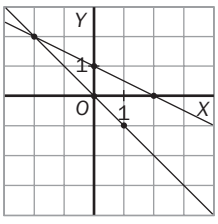
a) $\begin{cases} x + 2y = 2 \\ x + y = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 4x - y = -10 \\ 5x + y = 1 \end{cases}$

a) Se despeja y en las ecuaciones:

$y = \frac{-x + 2}{2}$; $y = -x$

x	$y = \frac{-x + 2}{2}$
0	1
2	0

x	$y = -x$
0	0
1	-1



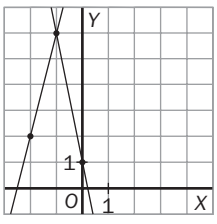
Solución: $x = -2$, $y = 2$

b) Se despeja y en las ecuaciones:

$y = 4x + 10$; $y = -5x + 1$

x	$y = 4x + 10$
-2	2
-1	6

x	$y = -5x + 1$
0	1
1	-4



Solución: $x = -1$, $y = 6$

7.62 **Elimina los paréntesis y los denominadores de las ecuaciones y resuelve los sistemas.**

a) $\begin{cases} -2(x+1)+3(2y-4)=16 \\ \frac{x}{3}-\frac{y}{2}=-3 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \frac{x}{5}-\frac{2y}{3}=6 \\ \frac{-x}{10}+\frac{5y}{6}=-6 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x-y=1 \\ \frac{2}{5}x+\frac{3}{4}y=5 \end{cases}$

a) $\begin{cases} -2(x+1)+3(2y-4)=16 \\ \frac{x}{3}-\frac{y}{2}=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x-2+6y-12=16 \\ 2x-3y=-18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=4 \end{cases}$

Solución: $x=-3$, $y=4$

b) $\begin{cases} \frac{x}{5}-\frac{2y}{3}=6 \\ \frac{-x}{10}+\frac{5y}{6}=-6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x-10y=90 \\ -3x+25y=-180 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=10 \\ y=-6 \end{cases}$

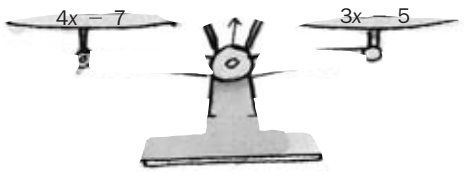
Solución: $x=10$, $y=-6$

c) $\begin{cases} x-y=1 \\ \frac{2}{5}x+\frac{3}{4}y=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y=1 \\ 8x+15y=100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=4 \end{cases}$

Solución: $x=5$, $y=4$

CUESTIONES PARA ACLARARSE

7.63 Observa la balanza.



Encuentra un valor de la incógnita tal que la balanza:

a) Se incline a la derecha. **b) Se incline a la izquierda.** **c) Consiga el equilibrio.**

a) $x = 1, 4 \cdot 1 - 7 = -3 < -2 = 3 \cdot 1 - 5$

b) $x = 3, 4 \cdot 3 - 7 = 5 > 4 = 3 \cdot 3 - 5$

c) $x = 2, 4 \cdot 2 - 7 = 1 = 1 = 3 \cdot 2 - 5$

7.64 ¿Qué es resolver una ecuación? Resuelve la ecuación $(x + 1) \cdot (x - 4) = 0$.

Es encontrar un valor para la incógnita de modo que se cumpla la igualdad.

$(x + 1) \cdot (x - 4) = 0$. Para que el producto sea 0, alguno de los dos factores debe ser 0, de modo que $x = -1$ ó $x = 4$.

7.65 ¿A qué ecuación corresponden las soluciones $x = -2$ y $x = 3$?

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$ **c) $x^2 + 5x + 6 = 0$**

b) $x^2 + x - 6 = 0$ **d) $x^2 - x - 6 = 0$**

a) $(-2)^2 - 5 \cdot (-2) + 6 = 20 \neq 0; 3^2 - 5 \cdot 3 + 6 = 0$

b) $(-2)^2 + (-2) - 6 = -4 \neq 0; 3^2 + 3 - 6 = 6 \neq 0$

c) $(-2)^2 + 5 \cdot (-2) + 6 = 0; 3^2 + 5 \cdot 3 + 6 = 30 \neq 0$

d) $(-2)^2 - (-2) - 6 = 0; 3^2 - 3 - 6 = 0$

Corresponde a la ecuación d.

7.66 ¿Cuál de los tres coeficientes de una ecuación de segundo grado nunca puede ser 0? Justifica tu respuesta.

No puede ser 0 el coeficiente que va con x^2, porque si fuese 0 tendríamos una ecuación del tipo $0x^2 + bx + c = 0 \Rightarrow bx + c = 0$, que no es una ecuación de segundo grado.

7.67 ¿Qué valor debe tener c para que la solución de la ecuación $9x^2 - 30x + c = 0$ sea única?

Para que tenga solución única, el discriminante tiene que ser 0, $b^2 - 4ac = 0$, que en nuestro caso es $900 - 36c = 0 \Rightarrow c = 25$.

7.68 ¿Dos ecuaciones de segundo grado pueden tener las mismas soluciones?

Sí, $(x - 1)(x + 1) = 0$ tiene las mismas soluciones que $2(x - 1)(x + 1) = 0$.

7.69 ¿Dos ecuaciones de segundo grado pueden tener una solución común y la otra distinta? Justifica la respuesta.

Sí, las ecuaciones $(x - 1)(x + 1) = 0$ y $x \cdot (x + 1) = 0$ tienen en común la solución $x = -1$, y sin embargo la otra solución es diferente.

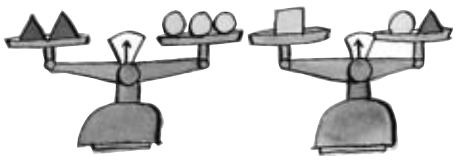
7.70 **Sin resolverlos, indica cuántas soluciones tiene cada uno de estos sistemas.**

a) $\begin{cases} 3x - 2y = -5 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x - 2y = -5 \\ -6x + 4y = 10 \end{cases}$

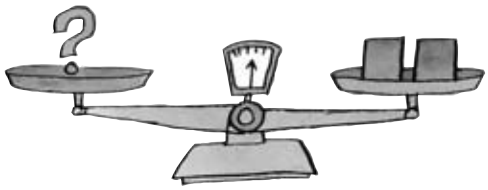
a) No tiene ninguna solución porque tenemos la igualdad $-5 = 1$, que es falsa.

b) Tiene infinitas soluciones porque la segunda ecuación es la primera multiplicada por -2.

7.71 **Si tenemos equilibradas estas dos balanzas:**



¿cuántas bolas equilibran esta tercera balanza?



1 cuadrado = 1 bola + 1 triángulo

2 cuadrados = 2 bolas + 2 triángulos

2 triángulos = 3 bolas

2 cuadrados = 5 bolas

Equilibran esta balanza 5 bolas.

7.72 **La ecuación $x^2 + x + c = 0$, ¿para qué valores de c tiene una solución? ¿Y dos soluciones? ¿Y ninguna solución?**

Depende del valor del discriminante.

$1 - 4c = 0 \Rightarrow c = \frac{1}{4}$. Tiene una solución.

$1 - 4c > 0 \Rightarrow c < \frac{1}{4}$. Tiene dos soluciones.

$1 - 4c < 0 \Rightarrow c > \frac{1}{4}$. No tiene ninguna solución.

PROBLEMAS PARA APLICAR

7.73 **Mario gasta un viernes por la tarde en el cine $\frac{1}{2}$ del dinero que llevaba, y un $\frac{1}{3}$ de lo que le queda en un bocata a la salida del cine. Vuelve a casa con 4 euros. ¿Cuánto dinero llevaba al salir de casa?**

Si x es el dinero que llevaba al salir de casa, tenemos que: $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}\frac{1}{2}x + 4 = x \Rightarrow 3x + x + 24 = 6x \Rightarrow 24 = 2x \Rightarrow x = 12$

Mario salió de casa con 12 euros.

7.74 **En una clase de 3.º de ESO, la cuarta parte repiten curso. El director cambió a tres repetidores del grupo por otros tres de otro grupo que no habían repetido. Ahora solo repiten curso $\frac{1}{7}$ del total. ¿Cuántos alumnos hay en la clase?**

Sea x el número de alumnos de la clase.

Entonces $\frac{x}{4}$ es el número de repetidores antes.

$\frac{x}{4} - 3 = \frac{1}{7}x \Rightarrow \frac{7x - 84}{28} = \frac{4x}{28} \Rightarrow 3x = 84 = x = 28$

En clase hay 28 alumnos.

7.75 **Me faltan 4,10 euros para comprar mi pizza favorita. Si tuviera el triple de lo que tengo compraría 2 pizzas. ¿Cuánto cuesta la pizza y cuánto dinero llevo?**

Sea x el precio de la pizza, entonces $x - 4{,}1$ es el dinero que llevo.

$3(x - 4{,}1) = 2x \Rightarrow 3x - 12{,}3 = 2x \Rightarrow x = 12{,}3$

La pizza vale 12,30 €. Llevo 8,20 €.

7.76 **En una fiesta a la que acuden 42 personas, hay tres hombres más que mujeres y tantos niños como hombres y mujeres juntos. Halla el número de hombres, mujeres y niños.**

Sea x el número de mujeres, entonces $x + 3$ es el número de hombres y $2x + 3$ es el número de niños.

$x + x + 3 + 2x + 3 = 42 \Rightarrow 4x + 6 = 42 \Rightarrow 4x = 36 \Rightarrow x = 9$

Hay 9 mujeres, 12 hombres y 21 niños.

7.77 **Javier tiene 5 años más que su hermano Miguel y su madre tiene 42 años. Dentro de tres años la edad de la madre será el triple que la suma de las edades de los hijos. ¿Cuál es la edad actual de cada uno?**

Si x es la edad actual de Miguel, la edad actual de Javier es $x + 5$.

$42 + 3 = 3(x + 3 + x + 5 + 3) \Rightarrow 45 = 3(2x + 11) \Rightarrow 12 = 6x \Rightarrow x = 2$

Miguel tiene 2 años, y Javier, 7.

7.78 **En el Concurso Literario Anual, la asociación de padres y madres de alumnos de un instituto premia con libros, por un valor de 196 euros, a los alumnos que hayan presentado las tres mejores redacciones. Deciden repartir el premio proporcionalmente a sus puntuaciones: 10; 9,5 y 8,5. ¿Cuánto dinero le corresponde a cada alumno premiado?**

Si x es la constante de proporcionalidad:

$10x + 9{,}5x + 8{,}5x = 196 \Rightarrow 28x = 196 \Rightarrow x = 7$

A quien obtuvo un 10 le corresponden 70 €, quien obtuvo 9,5 recibirá 66,50 € y la persona de puntuación 8,5 será premiada con 59,50 €.

7.79 **La diferencia entre el denominador y el numerador de una fracción es 18. Se sabe que si se suma 8 unidades a cada uno de los términos, la fracción resultante es equivalente a $\frac{3}{5}$. Halla la fracción.**

$$\frac{x}{y} \Rightarrow \begin{cases} y - x = 18 \\ \dfrac{x+8}{y+8} = \dfrac{3}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 18 \\ \dfrac{x+8}{x+26} = \dfrac{3}{5} \end{cases} \Rightarrow 5x + 40 = 3x + 78 \Rightarrow 2x = 38 \Rightarrow x = 19 \Rightarrow y = 37 \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{19}{37}$$

La fracción es $\frac{19}{37}$.

7.80 **Los coeficientes de una ecuación de segundo grado son 1, 2 y 5. Averigua cuál es el coeficiente de *x* si se sabe que la ecuación tiene dos soluciones distintas.**

a	*b*	*c*	$b^2 - 4ac$
2	5	1	$25 - 8 = 17$
5	2	1	$4 - 20 = -16$
1	2	5	$4 - 20 = -16$
1	5	2	$25 - 8 = 17$
2	1	5	$1 - 40 = -39$
5	1	2	$1 - 40 = -39$

Si $b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow$ dos soluciones distintas, entonces la solución es $2x^2 + 5x + 1 = 0$ ó $x^2 + 5x + 2 = 0$.

7.81 **La resolución de una ecuación de segundo grado se ha emborronado y hay partes que no se aprecian.**

$$x = \frac{-9 + \sqrt{\ldots}}{4} = \begin{cases} \ldots \\ -5 \end{cases}$$

¿Puedes averiguar de qué ecuación se trataba?

$$\left.\begin{matrix} b = 9 \\ a = 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{-9 - 11}{4} = -5 \Rightarrow b^2 - 4ac = 121 \Rightarrow 81 - 8c = 121 \Rightarrow -8c = 40 \Rightarrow c = -5$$

La ecuación buscada es: $2x^2 + 9x - 5 = 0$.

7.82 **Marta y Álex quedan todas las tardes en la biblioteca. Entre ambos recorren 6 kilómetros. Álex camina a una velocidad de 7 kilómetros por hora y Marta a 5 kilómetros por hora. Ambos salen de sus casas y llegan a la biblioteca al mismo tiempo.**

a) ¿Cuánto tardan en llegar a la biblioteca?

b) ¿Cuál es la distancia de cada casa a la biblioteca?

$$v = \frac{e}{t}$$

$$t_A = t_B$$

$$\frac{e_A}{v_A} = \frac{e_B}{v_B} \Rightarrow \frac{x}{7} = \frac{6 - x}{5} \Rightarrow 5x = 42 - 7x \Rightarrow 12x = 42 \Rightarrow x = 3{,}5$$

a) $t_A = \frac{3{,}5}{7} = 0{,}5 = 30$, tardan 30 minutos en encontrarse.

b) La distancia de la biblioteca a casa de Alex es 3,5 km, y a casa de Marta, $6 - 3{,}5 = 2{,}5$ km.

7.83 **Durante el recreo, en la cafetería de mi instituto, compro todas las mañanas un bocadillo y un refresco. El bocadillo cuesta el triple que el refresco, y en total me cobran 1,80 euros. ¿Cuál es el precio del bocadillo?, ¿y el del refresco?**

Sea x el precio del refresco, el del bocadillo es entonces $3x$. $3x + x = 1{,}8 \Rightarrow 4x = 1{,}8 \Rightarrow x = 0{,}45$

El precio del bocadillo es 1,35 €, y el del refresco, 0,45 €.

7.84 **En un mercadillo solidario se venden dos tipos de figuras de artesanía. Unas a 1,50 euros y otras a 2,50 euros. Se vendieron 82 figuras y se obtuvieron 154 euros. ¿Cuántas unidades se vendieron de cada tipo?**

Sean x el número de figuras vendidas de 1,50 €, e y, el número de figuras vendidas de 2,50 €.

$\begin{cases} x + y = 82 \\ 1{,}5x + 2{,}5y = 154 \end{cases} \Rightarrow y = 82 - x \Rightarrow 1{,}5x + 2{,}5(82 - x) = 154 \Rightarrow 1{,}5x + 205 - 2{,}5x = 154 \Rightarrow -x = -51 \Rightarrow x = 51 \Rightarrow y = 31$

Se vendieron 51 unidades de figuras de 1,50 € y 31 unidades de 2,50 €.

7.85 **Una caja de material de geometría contiene objetos triangulares y rectangulares. En total hay 20 objetos y se pueden contar hasta 68 vértices. ¿Cuántos objetos hay de cada clase?**

Sea x el número de objetos triangulares, e y, el número de objetos rectangulares.

$\begin{cases} x + y = 20 \\ 3x + 4y = 68 \end{cases} \Rightarrow 3(20 - y) + 4y = 68 \Rightarrow y = 8 \Rightarrow x = 12$

Hay 12 objetos triangulares y 8 objetos rectangulares.

7.86 **Dos números suman 46 y la diferencia de sus cuadrados es 92. ¿Qué números son?**

$\begin{cases} x + y = 46 \\ x^2 - y^2 = 92 \end{cases} \Rightarrow y = 46 - x \Rightarrow x^2 - (46 - x)^2 = 92 \Rightarrow x^2 - (2\,116 + x^2 - 92x) = 92 \Rightarrow 92x = 2\,208 \Rightarrow x = 24 \Rightarrow y = 22$

Los números son 22 y 24.

7.87 **La superficie de una habitación rectangular mide 11,25 metros cuadrados, y el perímetro, 14 metros. ¿Cuáles son las dimensiones de la habitación?**

$\begin{cases} x \cdot y = 11{,}25 \\ 2x + 2y = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \cdot y = 11{,}25 \\ x + y + 7 \end{cases} \Rightarrow y = 7 - x \Rightarrow x \cdot (7 - x) = 11{,}25 \Rightarrow 7x - x^2 = 11{,}25 \Rightarrow x^2 - 7x + 11{,}25 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 45}}{2} = \frac{7 \pm 2}{2} \Rightarrow x_1 = 4{,}5,\ x_2 = 2{,}5$$

Largo = 4,5 m.

Ancho = 2,5 m

7.88 **El perímetro de un triángulo isósceles es 13 centímetros y la altura sobre el lado desigual mide 4 centímetros. ¿Cuánto miden los lados del triángulo?**

Sea x la medida de los dos lados iguales, y $2y$, la medida del lado desigual.

$$\begin{cases} 2x + 2y = 13 \\ x^2 = 4^2 + y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 13 \\ x^2 = 16 + y^2 \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{13 - 2y}{2}\right)^2 = 16 + y^2 \Rightarrow \frac{169 + 4y^2 - 52y}{4} = 16 + y^2 \Rightarrow -52y = -105 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{-105}{-52} \cong 2{,}02 \Rightarrow x \cong 4{,}48$$

Los lados iguales miden 4,48 centímetros, y el lado desigual, 4,04.

7.89 **Dos números suman 90. Si divido el mayor entre el menor, el resto es 6 y el cociente es 3. ¿Cuáles son los números?**

Sean x e y los números, por la prueba de la división, siendo y el menor de ellos, tenemos que $x = 3y + 6$.

$\begin{cases} x + y = 90 \\ x = 3y + 6 \end{cases} \Rightarrow 90 - y = 3y + 6 \Rightarrow 84 = 4y \Rightarrow y + 21 \Rightarrow x = 90 - 21 = 69$

Los números son 21 y 69.

REFUERZO

Ecuaciones de primer grado

7.90 Averigua si los valores 0, −2, 1, 5, 3 y −3 son soluciones de la ecuación.

$x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = 0$.

$0^3 - 3 \cdot 0^2 - 13 \cdot 0 + 15 = 0 \Rightarrow 15 = 0 \Rightarrow 0$. No es solución.

$(-2)^3 - 3(-2)^2 - 13(-2) + 15 = 0 \Rightarrow 21 = 0 \Rightarrow -2$. No es solución.

$1^3 - 3(1)^2 - 13(1) + 15 = 0 \Rightarrow 0 = 0 \Rightarrow 1$. Es solución.

$5^3 - 3 \cdot 5^2 - 13 \cdot 5 + 15 = 0 \Rightarrow 0 = 0 \Rightarrow 5$. Es solución.

$3^3 - 3 \cdot 3^2 - 13 \cdot 3 + 15 = 0 \Rightarrow -24 = 0 \Rightarrow 3$. No es solución.

$(-3)^3 - 3(-3)^2 - 13(3) + 15 = 0 \Rightarrow 0 = 0 \Rightarrow -3$. Es solución.

7.91 Escribe con una sola incógnita las ecuaciones correspondientes.

a) Un número, más su doble, más su mitad, suman 21.

b) Los cuadrados de dos números consecutivos se diferencian en 15.

c) La mitad más la cuarta parte de un número suman 13 unidades más que el tercio más la quinta parte del mismo número.

a) $x + 2x + \frac{x}{2} = 21$

b) $(x + 1)^2 - x^2 = 15$

c) $\frac{x}{2} + \frac{x}{4} = \frac{x}{3} + \frac{x}{5} + 13$

7.92 Resuelve las ecuaciones.

a) $\frac{x}{2} + \frac{x}{16} = \frac{x}{8} + \frac{x}{4} + 6$

b) $5(-x + 2) = 13 - 4(3x - 1)$

a) $\frac{8x + x}{16} = \frac{2x + 4x + 96}{16} \Rightarrow 9x = 6x + 96 \Rightarrow 3x = 96 \Rightarrow x = 32$

b) $-5x + 10 = 13 - 12x + 4 \Rightarrow 7x = 7 \Rightarrow x = 1$

Ecuaciones de segundo grado

7.93 Resuelve las ecuaciones.

a) $12x(2x - 3) = 0$

b) $x^2 - 3x - 10 = 0$

c) $7x^2 + 5 = 4x^2 + 12$

d) $8x^2 - 10x - 3 = 0$

a) $\begin{cases} 12x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \end{cases}$ $x = 0$ y $x = \frac{3}{2}$

b) $x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 40}}{2} = \frac{3 \pm 7}{2} \Rightarrow x = 5, x = -2$

c) $3x^2 = 17 \Rightarrow x^2 = \frac{17}{3} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{17}{3}}$

d) $x = \frac{10 \pm \sqrt{100 + 96}}{16} = \frac{10 \pm 14}{16} \Rightarrow x = \frac{3}{2}, x = \frac{-1}{4}$

7.94 **Completa la ecuación $5x^2 - 6x + c = 0$ asegurándote de que tenga dos soluciones distintas. ¿Cuántas soluciones existen?**

$b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow 36 - 4 \cdot 5 \cdot c > 0 \Rightarrow 36 - 20c > 0 \Rightarrow 36 > 20c \Rightarrow \frac{36}{20} > c \Rightarrow \frac{18}{10} > c \Rightarrow \frac{9}{5} > c \Rightarrow \infty$ soluciones

Para cualquier valor de c tal que $c < \frac{9}{5}$, la ecuación tiene 2 soluciones. Por lo tanto, existen ∞ soluciones.

Sistemas de ecuaciones

7.95 **Halla el valor de a y b, para que se cumpla que los dos sistemas sean equivalentes.**

$$\begin{cases} -4x + y = -3 \\ 7x + 2y = -5 \end{cases} \qquad \begin{cases} 20x + ay = 15 \\ bx - 12y = c \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4x + y = -3 \\ 7x + 2y = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-4x + y = -3) \cdot (-5) \\ (7x + 2y = -5) \cdot (-6) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 20x - 5y = 15 \\ -42x - 12y = 30 \end{cases} \Rightarrow a = -5,\ b = -42,\ c = 30$$

7.96 **Resuelve estos sistemas por el método de sustitución.**

a) $\begin{cases} x + y = 2 \\ -2x + y = -1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} -x + 3y = 13 \\ 5x + y = 2 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x + y = 2 \\ -2x + y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - y \\ -2(2 - y) + y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - y \\ 3y - 4 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - y = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

$x = 1,\ y = 1$

b) $\begin{cases} -x + 3y = 13 \\ 5x + y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3y - 13 \\ 5(3y - 13) + y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3y - 13 \\ 16y = 67 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3\left(\frac{67}{16}\right) - 13 = -\frac{7}{16} \\ y = \frac{67}{16} \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{7}{16},\ y = \frac{67}{16}$

7.97 **Resuelve por el método de reducción los sistemas.**

a) $\begin{cases} 6x - y = 19 \\ -4x + 3y = -15 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x - 7y = -11 \\ 2x + 6y = -2 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 6x - y = 19 \\ -4x + 3y = -16 \end{cases} \xrightarrow{\times 4} \begin{cases} 24x - 4y = 76 \\ -24x + 18y = -90 \end{cases}$

$14y = -14 \Rightarrow y = -1$

$\begin{cases} 6x - y = 19 \\ -4x + 3y = -15 \end{cases} \xrightarrow{\times 3} \begin{cases} 18x - 3y = 57 \\ -4x + 3y = -15 \end{cases}$

$14x = 42 \Rightarrow x = 3$

b) $\begin{cases} x - 7y = -11 \\ 2x + 6y = -2 \end{cases} \xrightarrow{\times(-2)} \begin{cases} -2x + 14y = 22 \\ 2x + 6y = -2 \end{cases}$

$20y = 20 \Rightarrow y = 1$

$\begin{cases} x - 7y = -11 \xrightarrow{\times 6} \\ 2x + 6y = -2 \xrightarrow{\times 7} \end{cases} \begin{cases} 6x - 42y = -66 \\ 14x + 42y = -14 \end{cases}$

$20x = -80 \Rightarrow x = -4$

7.98 **Halla el valor de m y n, si $x = 2$ e $y = 1$ es solución del sistema.**

$$\begin{cases} 3x + my = 2 \\ nx + 5y = 9 \end{cases}$$

Sustituimos en las ecuaciones del sistema las soluciones:

$$\begin{cases} 3x + my = 2 \\ nx + 5y = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6 + m = 2 \\ 2n + 5 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 2 - 6 = -4 \\ 2n = 4 \Rightarrow n = 2 \end{cases}$$

7.99 **Con las siguientes ecuaciones plantea un sistema que tenga por solución (−2, 1).**

$4x - y = -9$ $\quad 3x - 5y = 2$ $\quad 5x - y = 7$ $\quad x + 6y = 4$

Las ecuaciones que forman un sistema con esa solución son: $\begin{cases} 4x - y = -9 \\ x + 6y = 4 \end{cases}$

AMPLIACIÓN

7.100 **Halla el valor de c en la ecuación de segundo grado $x^2 - x + c = 0$, para que una de sus soluciones sea $x = 3$.**

La suma de raíces es 1, $3 + x_2 = 1$; $x_2 = -2$

El producto de raíces es c. Como las soluciones son 3 y $-2 \Rightarrow c = -6$

7.101 **Un grupo de 15 amigos contratan una excursión por 1 380 euros. Como algunos de ellos no tienen dinero, cada uno de los restantes pone 23 euros más de lo que le corresponde. ¿Cuántos son los amigos que no tienen dinero?**

Sea x el número de amigos que tienen dinero. Entonces, los amigos que no tienen dinero son $15 - x$.

Lo que paga cada uno de los que tienen dinero es $\frac{1\,380}{x}$, que es lo mismo que lo que tendrían que pagar si pagasen todos y 23 euros más; $\frac{1\,380}{15} + 23$.

Resolvemos la ecuación $1\,380 \cdot 15 = 1\,380x + 23 \cdot 15x \Rightarrow 1\,380 = 115x \Rightarrow x = 12$.

Los amigos que no tienen dinero son 3.

7.102 **En un triángulo rectángulo, el lado mayor mide 3 centímetros más que el mediano y 54 más que el pequeño. ¿Cuánto miden sus lados?**

El triángulo es rectángulo y el lado mayor es la hipotenusa:

$(x + 3)^2 = x^2 + (x - 51)^2 \Rightarrow x^2 + 9 + 6x = x^2 + x^2 + 2\,601 - 102x \Rightarrow x^2 - 108x + 2\,592 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{108 \pm \sqrt{11\,664 - 10\,368}}{2} = \frac{108 \pm 36}{2} \Rightarrow x_1 = 72, x_2 = 36 \rightarrow$ No es válida porque al restar 51 quedaría un lado de longitud negativa. Los catetos miden 21 y 72 cm, y la hipotenusa, 75 cm.

7.103 **Cuando aparecieron los CD le regalé la mitad de mis discos de vinilo más la mitad de un disco a mi hermano Miguel y la mitad de los restantes más la mitad de un disco a mi amigo Luis. Tan solo me he quedado con uno de ellos: mi primer disco de los *Beatles*.**

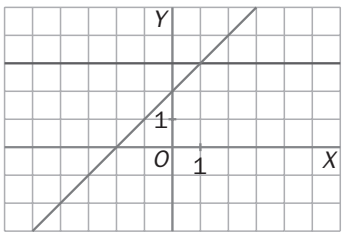
Por cierto, no tuve que romper ningún disco. ¿Cuántos discos tenía en un principio?

Sea x el número de discos de vinilo que tenía.

$$\frac{x}{2} + \frac{1}{2} + \frac{x - \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right)}{2} + \frac{1}{2} + 1 = x \Rightarrow \frac{x}{2} + 2 + \frac{x - 1}{4} = x \Rightarrow 2x + 8 + x - 1 = 4x \Rightarrow x = 7$$

Tenía 7 discos en un principio.

7.104 **La figura corresponde a la resolución gráfica de un sistema de ecuaciones lineales.**



a) ¿Cuál es la solución?

a) Solución: $x = 1$, $y = 3$

b) Escribe las dos ecuaciones del sistema.

b) $y = x + 2$, $y = 3$

7.105 **La suma de las dos cifras de un número es 11, y si se invierte el orden de sus cifras, el número aumenta en 9 unidades. Halla el número.**

Sea x la cifra de las decenas.

Sea y la cifra de las unidades.

$$\left.\begin{matrix} x + y = 11 \\ -9x + 9y = 9 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x + y = 11 \\ -x + y = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2y = 12 \Rightarrow y = 6 \Rightarrow x = 5$$

El número buscado es el 56.

7.106 **Las ecuaciones del tipo $a \cdot x^4 + b \cdot x^2 + c = 0$ se llaman bicuadradas. Si realizamos el cambio de variable: $x^2 = z$ y $x^4 = z^2$, transformamos la ecuación bicuadrada en una ecuación de segundo grado en la variable z. Una vez aplicada la fórmula para obtener z, deshacemos el cambio. Resuelve las siguientes ecuaciones bicuadradas.**

a) $x^4 - 25x^2 + 144 = 0$ **b) $x^4 - 26x^2 + 25 = 0$**

a) Se realiza el cambio de variable: $x^4 - 25x^2 + 144 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = z \\ x^4 = z^2 \end{cases}$

Se resuelve la ecuación de segundo grado:

$$z^2 - 25z + 144 = 0 \qquad z = \frac{25 \pm \sqrt{625 - 576}}{2} = \frac{25 \pm 7}{2} \Rightarrow z_1 = 16,\ z_2 = 9$$

Las soluciones son: $x_1 = 4$, $x_2 = -4$, $x_3 = 3$, $x_4 = -3$

b) Se realiza el cambio de variable: $x^4 - 26x^2 + 25 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = z \\ x^4 = z^2 \end{cases}$

Se resuelve la ecuación de segundo grado:

$$z^2 - 26z + 25 = 0 \qquad z = \frac{26 \pm \sqrt{676 - 100}}{2} = \frac{26 \pm 24}{2} \Rightarrow z_1 = 25,\ z_2 = 1$$

Las soluciones son: $x_1 = 5$, $x_2 = -5$, $x_3 = 1$, $x_4 = -1$

PARA INTERPRETAR Y RESOLVER

7.107 Consumo de gasoil

Un tanque de gasoil está lleno en sus tres cuartas partes.
Transcurren cinco semanas en las que se gastan las cantidades indicadas en la tabla.

Semana	Gasto
1.ª semana	**Se gastan 150 litros**
2.ª semana	**Se gasta la sexta parte de lo que había en el depósito al comenzar la semana**
3.ª semana	**Se gastan 250 litros**
4.ª semana	**Se gasta un tercio de lo que había en el depósito al comenzar la semana**
5.ª semana	**Se gastan 300 litros**

Al acabar el período de cinco semanas, el depósito cuenta con 200 litros.
a) Calcula cuántos litros había en el depósito antes de comenzar el período descrito.
b) Calcula cuántos litros se han gastado en las cinco semanas.
c) Calcula la capacidad del depósito.

a) Al comenzar la quinta semana había: $200 + 300 = 500$ litros

Al comenzar la cuarta semana había x litros.

$$x - \frac{1}{3}x = 500 \Rightarrow \frac{2}{3}x = 500 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \cdot 500 = 750 \text{ litros}$$

Entonces:

Al comenzar la tercera semana había $750 + 250 = 1\,000$ litros

Al comenzar la segunda semana había x litros.

$$x - \frac{1}{6}x = 1\,000 \Rightarrow \frac{5}{6}x = 1\,000 \Rightarrow x = \frac{6\,000}{5} = 1\,200 \text{ litros}$$

Entonces:

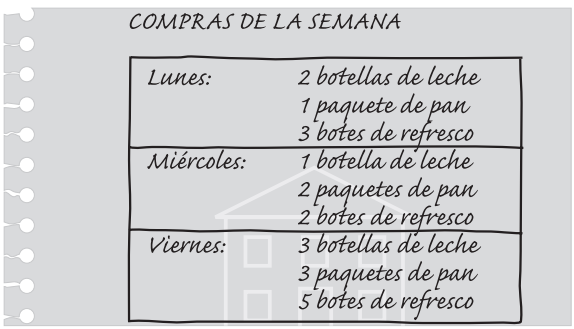
Al comenzar el período había: $1\,200 + 150 = 1\,350$ litros

b) Se han gastado $1\,350 - 200 = 1\,150$ litros.

c) Capacidad del depósito: $\frac{4}{3} \cdot 1\,350 = 1\,800$ litros

7.108 Las compras de la semana

En la puerta del frigorífico, Alejandro tiene pegado con un imán la siguiente nota.



a) El lunes de una determinada semana, Alejandro pagó 5,65 euros, y el miércoles de esa misma semana, 6,20. ¿Cuánto pagó el viernes, sabiendo que los precios no habían variado en toda la semana?

b) Con los datos del apartado anterior y sabiendo que cada botella de leche costaba 90 céntimos, calcula el precio de cada paquete de pan y de cada bote de refresco.

a) $3L + 3P + 5R = (2L + 1P + 3R) + (1L + 2P + 2R) = 5{,}65 + 6{,}20 = 11{,}85$

El viernes pagó 11 euros y 85 céntimos.

b) $\begin{cases} 1{,}8 + P + 3R = 5{,}65 \\ 0{,}9 + 2P + 2R = 6{,}20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P + 3R = 3{,}85 \\ 2P + 2R = 5{,}30 \end{cases} \Rightarrow P = 2{,}05 \quad R = 0{,}60$

Paquete de pan: 2 euros y 5 céntimos Bote de refresco: 60 céntimos

AUTOEVALUACIÓN

7.A1 Averigua cuál de las siguientes ecuaciones es una identidad.

a) $9x = 27$

b) $8x(2x - 3) = 16x^2 - 24x$

c) $x^2 - 36 = 0$

d) $\frac{x}{7} = 3$

La b, porque si operamos vemos que hay lo mismo a los dos lados de la igualdad.

7.A2 Resuelve estas ecuaciones.

a) $\frac{x}{9} - \frac{x}{3} = \frac{x+1}{7} - 10$

b) $-8(2x - 1) - 4 = -7x - 23$

a) $\frac{x}{9} - \frac{x}{3} = \frac{x+1}{7} - 10 \Rightarrow 7x - 21x = 9(x + 1) - 630 \Rightarrow -23x = -621 \Rightarrow x = 27$

b) $-8(2x - 1) - 4 = -7x - 23 \Rightarrow -16x + 8 - 4 = -7x - 23 \Rightarrow 27 = 9x \Rightarrow x = 3$

7.A3 Escribe la ecuación de segundo grado que tiene por soluciones $x = \frac{2}{3}$ y $x = -4$.

$$\left(x - \frac{2}{3}\right)(x + 4) = x^2 + \frac{10}{3}x - \frac{8}{3} = 0 \Rightarrow 3x^2 + 10x - 8 = 0$$

7.A4 Resuelve estas ecuaciones incompletas de segundo grado.

a) $3x^2 - 24 = 0$ **b)** $6x^2 = 3x$ **c)** $\frac{x^2}{3} - 5x = 0$

a) $3x^2 - 24 = 0 \Rightarrow x^2 = 8 \Rightarrow x = \pm\sqrt{8}$

b) $6x^2 = 3x \Rightarrow x \cdot (6x - 3) = 0 \Rightarrow x = 0$ ó $x = \frac{1}{2}$

c) $\frac{x^2}{3} - 5x = 0 \Rightarrow x \cdot (x - 15) = 0 \Rightarrow x = 0$ ó $x = 15$

7.A5 Resuelve, usando la fórmula explicada, las siguientes ecuaciones.

a) $2x^2 - 3x - 5 = 0$

a) $x = \frac{3 \pm \sqrt{9 \pm 40}}{4} = \frac{3 \pm 7}{4} = \begin{cases} \frac{5}{2} \\ -1 \end{cases}$

b) $x^2 - 4x + 4 = 0$

b) $x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2} = 2$

7.A6 Halla el valor de a y b, para que el sistema tenga como solución $x = -3$ e $y = 4$.

$$\begin{cases} -2x + 5y = a \\ 3x - y = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x + 5y = a \\ 3x - y = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 \cdot (-3) + 5 \cdot 4 = a \\ 3 \cdot (-3) - 4 = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 26 = a \\ -13 = b \end{cases}$$

7.A7 Averigua si el sistema es compatible o incompatible, sin resolverlo.

$$\begin{cases} -5x + 2y = 6 \\ 10x - 4y = -8 \end{cases}$$

Es incompatible porque si multiplicamos la primera ecuación por -2, tenemos una equivalente que es $10x - 4y = -12$, y al resolver tendríamos que $-8 = -12$, lo cual es falso.

7.A8 **Resuelve los sistemas por el método más adecuado.**

a) $\begin{cases} 5x + y = -6 \\ -2x + 7y = -5 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x - 4y = -15 \\ -5x + 4y = 17 \end{cases}$

a) Sustitución: $\begin{cases} 5x + y = -6 \\ -2x + 7y = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -6 - 5x \\ -2x + 7(-6 - 5x) = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -6 - 5x \\ -37x = 37 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = -1 \end{cases}$

b) Reducción. Sumando las dos ecuaciones: $-2x = 2 \Rightarrow x = -1$

$$\begin{cases} 3x - 4y = -15 \\ -5x + 4y = 17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5(3x - 4y = -15) \\ 3(-5x + 4y = 17) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 15x - 20y = -75 \\ -15x + 12y = 51 \end{cases} \Rightarrow -8y = -24 \Rightarrow y = 3$$

7.A9 **En el garaje de una comunidad de vecinos hay un total de 31 vehículos entre coches y motos y 98 ruedas tocan el suelo del garaje. ¿Cuántos coches y cuántas motos hay en total?**

Sea x el número de coches e y el número de motos.

$$\begin{cases} x + y = 31 \\ 4x + 2y = 98 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 31 - y \\ 4(31 - y) + 2y = 98 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 31 - y \\ -2y = -26 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 31 - 13 = 18 \\ y = 13 \end{cases}$$

Hay 18 coches y 13 motos.

7.A10 **Halla un número tal que la diferencia entre su cuádruplo y su cuarta parte sea 45.**

Sea x el número.

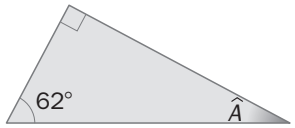
$$4x - \frac{x}{4} = 45 \Rightarrow 16x - x = 180 \Rightarrow x = 12$$

El número es 12.

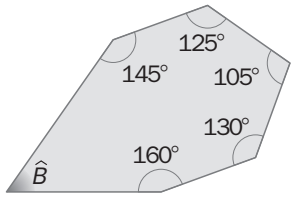
EJERCICIOS PROPUESTOS

8.1 Calcula la medida del ángulo que falta en cada figura.

a)



b)



a) En un triángulo, la suma de las medidas de sus ángulos es 180°.

$\widehat{A} = 180° - 90° - 62° = 28$

El ángulo mide 28°.

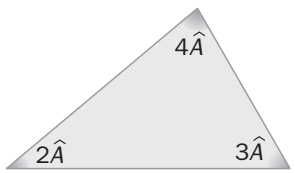
b) En un hexágono, la suma de las medidas de sus ángulos es $180 \cdot (6 - 2) = 720°$.

$\widehat{B} = 720° - 145° - 125° - 105° - 130° - 160° = 55$

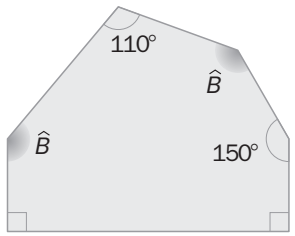
El ángulo mide 55°.

8.2 Determina cuánto mide el ángulo desconocido en estas figuras.

a)



b)

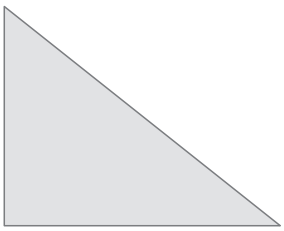


a) $180° = 2\widehat{A} + 4\widehat{A} + 3\widehat{A} = 9\widehat{A} \Rightarrow \widehat{A} \Rightarrow 20°$

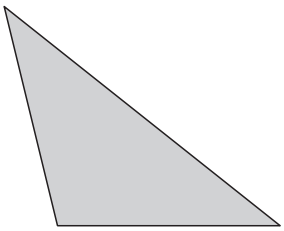
b) $720° = 90° + \widehat{B} + 110° + \widehat{B} + 150° + 90° = 440° + 2\widehat{B} \Rightarrow \widehat{B} = 140°$

8.3 **Copia cada triángulo y halla gráficamente el circuncentro, el incentro, el baricentro y el ortocentro.**

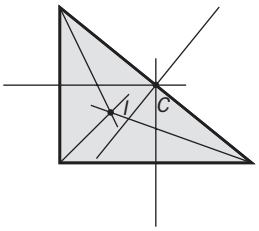
a)

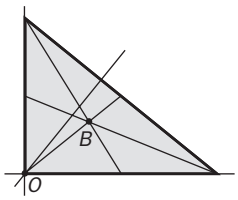


b)

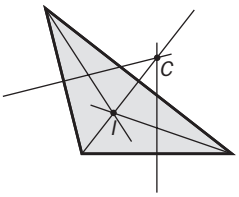


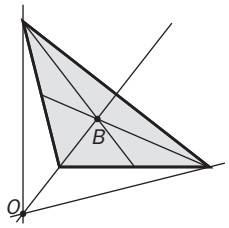
a)



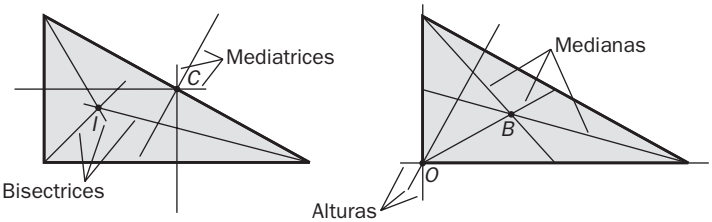


b)

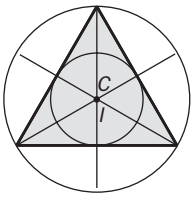




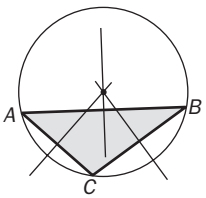
8.4 **Dibuja en un triángulo rectángulo las mediatrices, medianas, bisectrices y alturas.**



8.5 **Dibuja en un triángulo equilátero la circunferencia inscrita y la circunscrita.**



8.6 **Dibuja tres puntos *A*, *B* y *C*, no alineados, y traza una circunferencia que pase por ellos.**



8.7 **En un triángulo, el baricentro divide a una mediana en dos segmentos. Si el mayor mide 6 centímetros, ¿cuánto mide el otro segmento?**

El baricentro cumple que corta la mediana en un punto tal que su distancia al vértice es doble que su distancia al punto medio del lado opuesto. Si el mayor de esos dos segmentos es de 6 centímetros, el otro medirá 3 centímetros.

8.8 **Razona si las siguientes parejas de triángulos pueden ser semejantes.**

a) 40°, 50°, $\widehat{A}$; 40°, $\widehat{B}$, 90°

b) 60°, 60°, 60°; 8 cm, 8 cm, 8 cm

a) Para que sea triángulo, la suma de sus ángulos tiene que ser 180°, así tenemos que $\widehat{A}$ debe valer 90°, y $\widehat{B}$, 50°, de modo que todos los ángulos son iguales y $\widehat{B}$, por tanto, son semejantes.

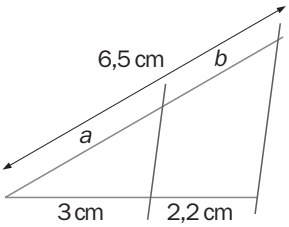
b) Son semejantes. El triángulo con los tres lados iguales es equilátero, así que tendrá los tres ángulos iguales, eso quiere decir que cada ángulo mide 60°, de modo que los ángulos son iguales a los del primer triángulo. Y por el otro lado, el primer triángulo tiene que tener los tres lados iguales por tener los tres ángulos iguales, así que todos los lados seguirán la misma proporción comparando con el segundo triángulo del enunciado.

8.9 **Los lados de un rectángulo miden 8 y 4 centímetros, respectivamente. Un rectángulo semejante tiene como perímetro 240 centímetros. ¿Cuáles son sus dimensiones?**

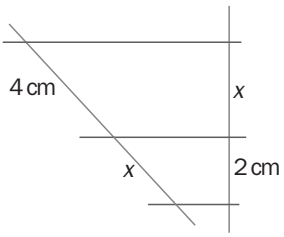
El perímetro del primer rectángulo es de $2 \cdot 8 + 2 \cdot 4 = 24$ centímetros. Si multiplicamos todos los lados por 10, tenemos un rectángulo de lados 80 y 40, que tiene de perímetro 240 centímetros. Así que los lados del rectángulo buscado miden 80 y 40 centímetros.

8.10 **Calcula el valor de los lados desconocidos.**

a)



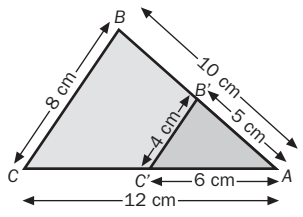
b)



a) $\dfrac{3}{a} = \dfrac{2{,}2}{6{,}5 - a} \Rightarrow 3 \cdot (6{,}5 - a) = 2{,}2a \Rightarrow 19{,}5 - 3a = 2{,}2a \Rightarrow a = 3{,}75$ cm y $b = 6{,}5 - 3{,}75 = 2{,}75$ cm

b) $\dfrac{4}{x} = \dfrac{x}{2} \Rightarrow x^2 = 8 \Rightarrow x = \sqrt{8}$ cm

8.11 **Los lados de un triángulo miden 8, 10 y 12 centímetros. Construye sobre él otro triángulo, en posición de Tales, sabiendo que la razón de semejanza es 0,5.**



$$0{,}5 = \frac{AB'}{AB} \Rightarrow AB' = 0{,}5 \cdot AB \Rightarrow AB' = 0{,}5 \cdot 10 = 5 \text{ cm}$$

$$\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'} = \frac{BC}{B'C'} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{AB}{AB'} = \dfrac{AC}{AC'} \Rightarrow \dfrac{10}{5} = \dfrac{12}{AC'} \Rightarrow AC' = 6 \text{ cm} \\ \dfrac{AB}{AB'} = \dfrac{BC}{B'C'} \Rightarrow \dfrac{10}{5} = \dfrac{8}{B'C'} \Rightarrow B'C' = 4 \text{ cm} \end{cases}$$

8.12 **Un alumno dibuja dos rectas *r* y *s*, secantes. A continuación, marca en *r* tres puntos *A*, *B* y *C*, que distan entre sí 3 y 4 centímetros, respectivamente. Por esos puntos traza rectas paralelas que cortan a *s* en *A'*, *B'* y *C'*. Si la distancia entre *A'* y *B'* es 6 centímetros, ¿cuál es la distancia entre *A'C'* y *B'C'*?**

$$\frac{3}{6} = \frac{4}{B'C'} = \frac{7}{A'C'} \Rightarrow \begin{cases} B'C' = 8 \text{ centímetros} \\ A'C' = 14 \text{ centímetros} \end{cases}$$

8.13 **La sala de una biblioteca tiene base rectangular cuyos lados miden 12 y 15 metros, respectivamente. ¿Cuánto mide la diagonal?**

Aplicando el teorema de Pitágoras: $d^2 = 12^2 + 15^2 = 369 \Rightarrow d = 19{,}2$ metros.

8.14 **Averigua cuáles de los siguientes datos corresponden a triángulos rectángulos.**

a) 9, 15 y 17

b) 6, 8 y 10

c) 9, 12 y 15

d) 12, 16 y 19

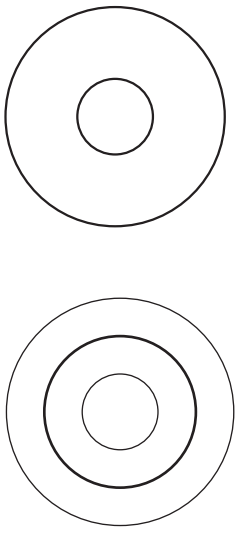
a) $17^2 = 289 \neq 306 = 81 + 225 = 9^2 + 15^2$. No es triángulo rectángulo.

b) $10^2 = 100 = 36 + 64 = 6^2 + 8^2$. Es triángulo rectángulo.

c) $15^2 = 225 = 81 + 144 = 9^2 + 12^2$. Es triángulo rectángulo.

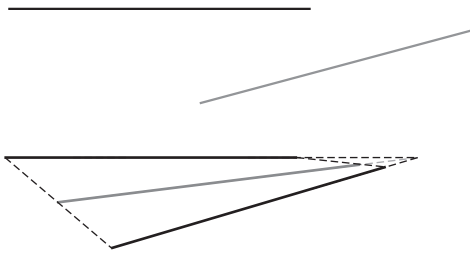
d) $19^2 = 361 \neq 400 = 144 + 256 = 12^2 + 16^2$. No es triángulo rectángulo.

8.15 **Copia las circunferencias de la figura y dibuja el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de ambas. Describe la figura resultante.**



La figura obtenida es una circunferencia concéntrica con las dos dadas, siendo la longitud del radio la media aritmética de las longitudes de los radios de las circunferencias dadas.

8.16 **Copia los segmentos de la figura y dibuja el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de ambos. Describe la figura resultante.**



La figura obtenida es parte de la bisectriz del ángulo formado por la prolongación de los segmentos dados.

8.17 Halla el área de un triángulo isósceles cuyos lados miden 8, 6 y 6 centímetros.

Averiguamos primero la altura, h, sobre el lado desigual. Dividiendo el triángulo por dicha altura obtenemos un triángulo rectángulo que cumple que $6^2 = h^2 + 4^2$. Despejamos h y obtenemos la altura, $h = 4{,}5$ centímetros.

Calculamos el área del triángulo: $A = \dfrac{8 \cdot 4{,}5}{2} = 18 \text{ cm}^2$.

8.18 Calcula el área y el perímetro de un rombo cuyas diagonales miden 18 y 12 centímetros.

$A = \dfrac{18 \cdot 12}{2} = 108 \text{ cm}^2$

Se calcula el lado como la hipotenusa del triángulo rectángulo que tiene por catetos las mitades de las dos diagonales del rombo:

$L = \sqrt{9^2 + 6^2} = 10{,}82$

$P = 4 \cdot 10{,}82 = 43{,}28 \text{ cm}$

8.19 La diagonal menor de un rombo mide 6 centímetros y el lado 5 centímetros. Determina su área.

Las diagonales se cortan en el punto medio. Dibujamos un triángulo rectángulo cuyos catetos son la mitad de cada una de las diagonales, y la hipotenusa, un lado.

$5^2 = 3^2 + c^2 \Rightarrow c = 4 \text{ cm} \Rightarrow D = 8 \text{ cm}$

$A = \dfrac{8 \cdot 6}{2} = 24 \text{ cm}^2$

8.20 ¿Cuánto mide el área de un hexágono regular de 20 centímetros de lado?¿Y su perímetro?

Formamos un triángulo rectángulo de catetos la apotema y la mitad de un lado, y de hipotenusa el segmento que va desde el centro del hexágono hasta uno de los vértices, que coincide con el radio de la circunferencia circunscrita, el cual, por tratarse de un hexágono regular, mide lo mismo que el lado del hexágono.

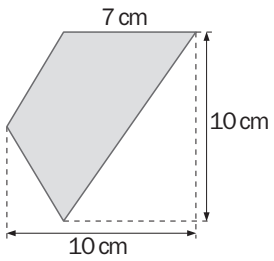
$20^2 = 10^2 + ap^2 \Rightarrow ap = 17{,}3 \text{ cm}$

$A = \dfrac{(6 \cdot 20) \cdot 17{,}3}{2} = 1\,038 \text{ cm}^2$

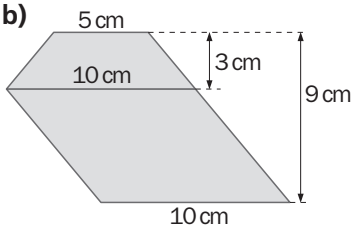
$P = 6 \cdot 20 = 120 \text{ cm}$

8.21 Averigua el área de estas figuras.

a)



b)



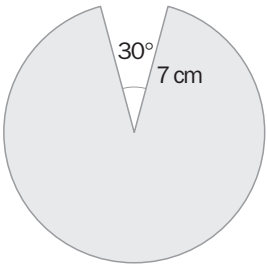
a) Sumamos el área de los dos triángulos: $A = \dfrac{10 \cdot 7}{2} + \dfrac{10 \cdot 3}{2} = 35 + 15 = 50 \text{ cm}^2$

b) Para calcular el área sumamos el área del trapecio y la del romboide.

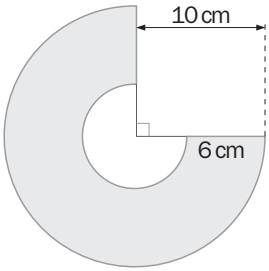
$A = \dfrac{(10 + 5) \cdot 3}{2} + 10 \cdot (9 - 3) = \dfrac{165}{2} = 82{,}5 \text{ cm}^2$

8.22 **Halla el área de las siguientes figuras.**

a)



b)

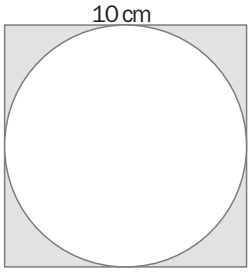


a) Sector circular: $A = \frac{\pi \cdot 7^2 \cdot 330}{360} = 141{,}11 \text{ cm}^2$

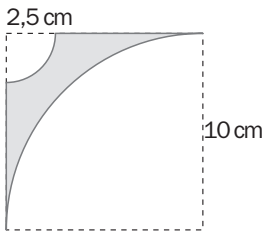
b) Trapecio circular: $A = \frac{\pi \cdot 270 \cdot (10^2 - 6^2)}{360} = 48\pi = 150{,}80 \text{ cm}^2$

8.23 **Calcula el área de las figuras sombreadas.**

a)



b)

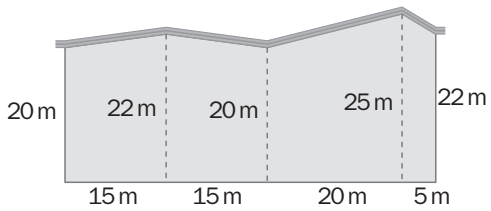


a) $A_{\text{Cuadrado}} - A_{\text{Círculo}} = 10^2 - \pi \cdot 5^2 = 21{,}46 \text{ cm}^2$

b) $A_{\text{Cuadrado}} - A_{\text{SecCirc1}} - A_{\text{SecCirc2}} = 10^2 - \frac{\pi \cdot 10^2 \cdot 90}{360} - \frac{\pi \cdot 2{,}5^2 \cdot 90}{360} = 100 - 78{,}54 - 4{,}91 = 16{,}55 \text{ cm}^2$

RESOLUFCIÓN DE PROBLEMAS

8.24 Calcula el área de la finca de la figura.

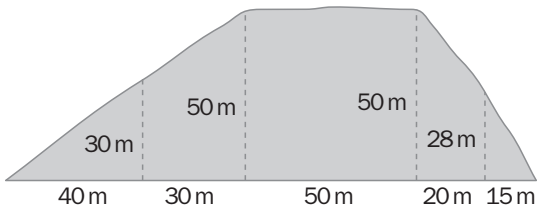


Sumamos las áreas de los cuatro trapecios en que podemos dividir la finca.

$$A = A_{T_1} + A_{T_2} + A_{T_3} + A_{T_4} = \frac{(20 + 22) \cdot 15}{2} + \frac{(22 + 20) \cdot 15}{2} + \frac{(20 + 25) \cdot 20}{2} + \frac{(25 + 22) \cdot 5}{2} = 1\,197{,}5$$

La finca tiene un área de 1 197,5 m^2.

8.25 Determina el área del islote de la figura.



Sumamos las áreas de los dos triángulos y los dos trapecios en que podemos dividir el plano del islote.

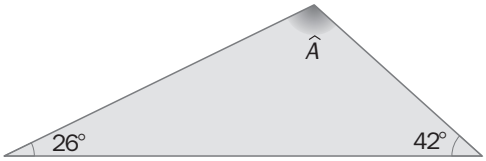
$$A = A_{T_1} + A_{T_2} + A_{T_3} + A_{T_4} + A_{T_5} = \frac{30 \cdot 40}{2} + \frac{(30 + 50) \cdot 30}{2} + \frac{(50 + 50) \cdot 50}{2} + \frac{(50 + 28) \cdot 20}{2} + \frac{28 \cdot 15}{2} = 5\,290$$

El islote tiene 5 290 m^2.

EJERCICIOS PARA ENTRENARSE

Ángulos y triángulos

8.26 Halla la medida del ángulo $\widehat{A}$ en el siguiente triángulo.



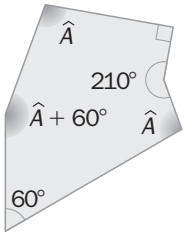
$180° = 26° + \widehat{A} + 42° \Rightarrow \widehat{A} = 180° - 26° - 42° = 112°$

8.27 Calcula la suma de los ángulos interiores de un pentágono.

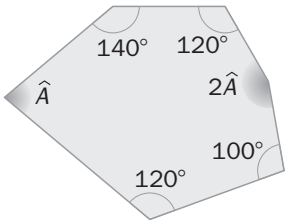
El pentágono tiene 5 lados; así, la suma de sus ángulos interiores es de $180° \cdot (5 - 2) = 540°$.

8.28 ¿Cuánto miden los ángulos designados por letras en estas figuras?

a)



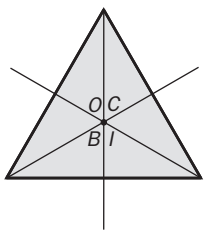
b)



a) $180°(6 - 2) = \widehat{A} + 90° + 210° + \widehat{A} + 60° + (\widehat{A} + 60°) \Rightarrow 3\widehat{A} = 300° \Rightarrow \widehat{A} = 100°$

b) $180°(6 - 2) = \widehat{A} + 140° + 120° + 2\widehat{A} + 100° + 120° \Rightarrow 3\widehat{A} = 240° \Rightarrow \widehat{A} = 80°$

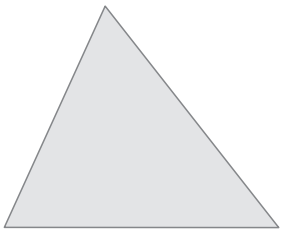
8.29 Dibuja un triángulo equilátero y traza sus mediatrices, medianas, bisectrices y alturas. Explica qué observas.



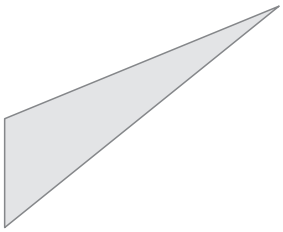
Que todas se cortan en el mismo punto.

8.30 **Traza la circunferencia inscrita y la circunscrita de los siguientes triángulos.**

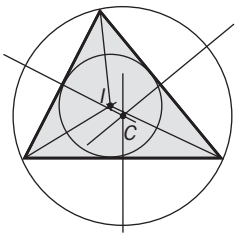
a)



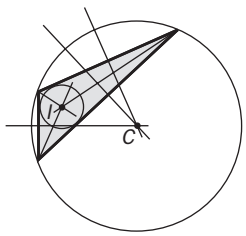
b)



a)



b)



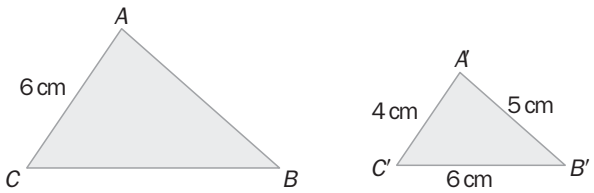
Figuras semejantes. Teorema de Tales

8.31 **Los lados de un triángulo miden, respectivamente, 10, 12 y 14 centímetros. Los de otro triángulo miden 15, 18 y 21 centímetros. ¿Son semejantes?**

$$\frac{15}{10} = \frac{18}{12} = \frac{21}{14} = 1{,}5$$

Son semejantes, puesto que los lados son proporcionales.

8.32 **Los triángulos de la figura son semejantes. Calcula el valor de *AB* y *BC*.**

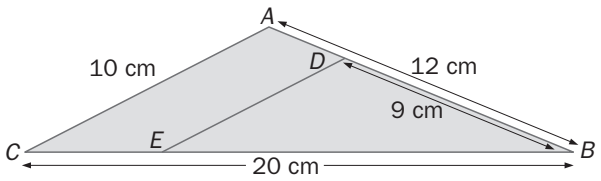


$$\frac{6}{4} = \frac{AB}{5} = \frac{BC}{6} \Rightarrow AB = 7{,}5 \text{ cm y } BC = 9 \text{ cm}$$

8.33 **Los lados de un triángulo miden 5, 6 y 9 centímetros. El lado menor de otro triángulo semejante al dado mide 20 centímetros. Halla la medida de los otros lados.**

$$\frac{20}{5} = \frac{a}{6} = \frac{b}{9} \Rightarrow a = 24 \text{ cm y } b = 36 \text{ cm}$$

8.34 **Calcula la medida de $\overline{DE}$ y $\overline{CE}$.**



$\frac{12}{9} = \frac{10}{\overline{DE}} \Rightarrow \overline{DE} = 7{,}5$ cm

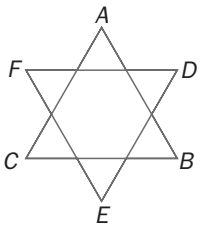
$\frac{12}{3} = \frac{20}{\overline{CE}} \Rightarrow \overline{CE} = 5$ cm

8.35 **Los lados de un triángulo miden 9, 12 y 16 centímetros. Calcula las longitudes de los lados de otro triángulo semejante al dado, tal que su perímetro es 148 centímetros.**

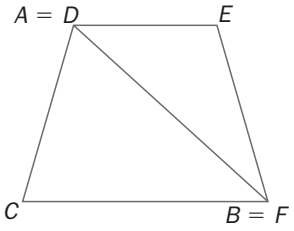
$$\frac{148}{9 + 12 + 16} = \frac{a}{9} = \frac{b}{12} = \frac{c}{16} \Rightarrow a = 36 \text{ cm}, b = 48 \text{ cm}, c = 64 \text{ cm}$$

8.36 **Razona, utilizando algún criterio de semejanza de triángulos, si los triángulos *ABC* y *DEF* son semejantes.**

a)



b)



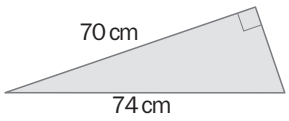
a) Son semejantes porque ambos son equiláteros.

b) El lado común de los dos triángulos es, obviamente, de la misma longitud en ambos, y también son de igual longitud los lados que se corresponden con los lados iguales del trapecio isósceles. La razón de proporcionalidad de los lados sería 1, pero los terceros lados, que son cada una de las bases del trapecio, no conservan esa razón de proporcionalidad. Por tanto, los triángulos no son semejantes.

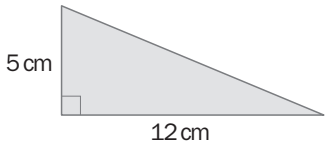
Teorema de Pitágoras

8.37 **Averigua el valor del lado desconocido de estos triángulos.**

a)



b)



a) $l^2 = 74^2 - 70^2 = 576 \Rightarrow l = 24$ cm

b) $l^2 = 5^2 + 12^2 = 169 \Rightarrow l = 13$ cm

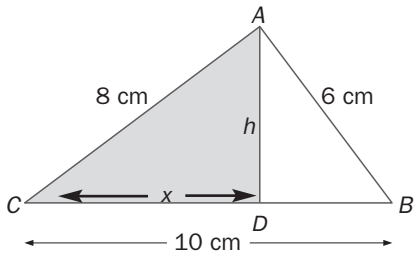
8.38 Determina la altura de un triángulo equilátero cuyo lado mide 12 centímetros.

Si llamamos h a la altura del triángulo, tendremos

$12^2 = h^2 + 6^2$

$h^2 = 12^2 - 6^2 = 108 \Rightarrow h = 10{,}39$ cm

8.39 Calcula el área del triángulo rectángulo sombreado.



Los triángulos ABC y DAC son semejantes, luego

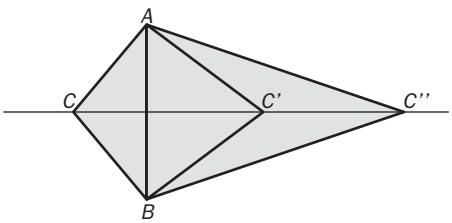
$$\frac{BC}{AC} = \frac{AC}{CD} \Rightarrow \frac{10}{8} = \frac{8}{x} \Rightarrow x = 6{,}4 \text{ cm} \Rightarrow h^2 = 8^2 - 6{,}4^2 = 23{,}04 \text{ cm} \Rightarrow h = 4{,}8 \text{ cm}$$

Por tanto, el área será

$$A = \frac{6{,}4 \cdot 4{,}8}{2} = 15{,}36 \text{ cm}^2$$

Lugar geométrico

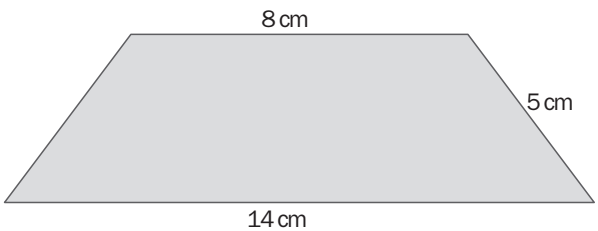
8.40 Construye varios triángulos isósceles cuyo lado desigual sea un segmento *AB* dado y nombra con la letra *C* al tercer vértice de dichos triángulos. ¿Cuál es el lugar geométrico que forman los puntos?



El lugar geométrico que forman los puntos C es la recta mediatriz del segmento AB.

Longitudes y áreas

8.41 Halla el área del trapecio isósceles de la figura.

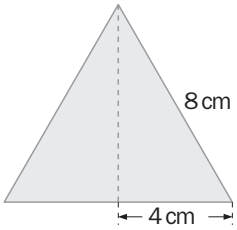


Usando el teorema de Pitágoras calculamos la altura: $h^2 + 3^2 = 5^2 \Rightarrow h = 4$ cm

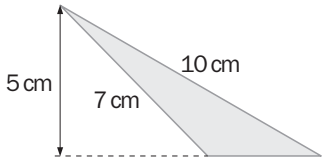
$$A = \left(\frac{B + b}{2}\right) \cdot h = \left(\frac{14 + 8}{2}\right) \cdot 4 = 44 \text{ cm}^2$$

8.42 **Calcula el área de estos triángulos.**

a)



b)



a) Aplicamos el teorema de Pitágoras para saber la altura: $h^2 = 8^2 - 4^2 \Rightarrow h = 6{,}93$ cm

$$A = \frac{8 \cdot 6{,}93}{2} = 27{,}72 \text{ cm}^2$$

b) Por Pitágoras calculamos la medida de la base del triángulo rectángulo de hipotenusa 10 y altura 5 y también la base del triángulo rectángulo de la misma altura y de hipotenusa 7. Restándolas tenemos la medida de la base del triángulo dado.

$b_1^2 = 10^2 - 5^2 \Rightarrow b_1 = 8{,}66$ cm

$b_2^2 = 7^2 - 5^2 \Rightarrow b_2 = 4{,}90$ cm

$b = 8{,}66 - 4{,}90 = 3{,}76$ cm $\Rightarrow A = \dfrac{3{,}76 \cdot 5}{2} = 9{,}4$ cm^2

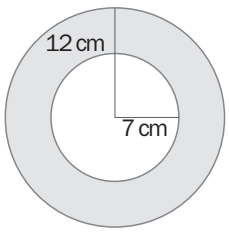
8.43 **¿Cuánto mide el área de un círculo de 20 centímetros de diámetro?**

El radio es entonces de 10 centímetros de longitud, luego

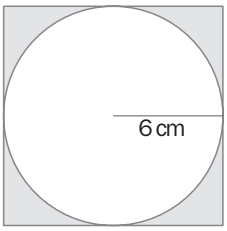
$$A = \pi \cdot 10^2 = 314{,}16 \text{ cm}^2$$

8.44 **Determina el área de las regiones sombreadas.**

a)



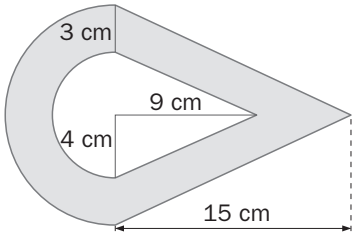
b)



a) $A = \pi(12^2 - 7^2) = 95\pi = 298{,}45$ cm^2

b) $A = A_{\text{Cuadrado}} - A_{\text{Círculo}} = 12^2 - \pi \cdot 6^2 = 144 - 113{,}10 = 30{,}9$ cm^2

8.45 **Halla el área de la región sombreada de la figura.**

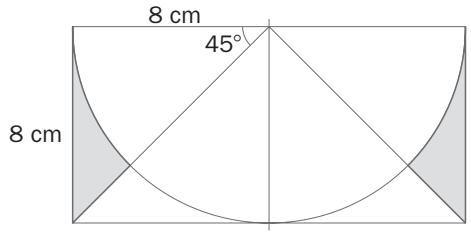


Por un lado, la media corona circular: $\dfrac{\pi(7^2 - 4^2)}{2} = 51{,}84$ cm^2

Por otro lado, la zona entre los dos triángulos: $\dfrac{14 \cdot 15}{2} - \dfrac{8 \cdot 9}{2} = 105 - 36 = 69$ cm^2

$$A = 51{,}84 + 69 = 120{,}84 \text{ cm}^2$$

8.46 Calcula el área de la región sombreada.



La figura es simétrica, basta con que se calcule el área de una parte y se multiplique por dos para tener el área de la región sombreada.

La parte sombreada es la mitad del área que queda después de restarle al área del cuadrado el área del sector circular de 90°, o lo que es lo mismo, una cuarta parte de la circunferencia.

$$A = 2 \cdot \left(\frac{8^2 - \frac{1}{4}\pi 8^2}{2} \right) = 13{,}74 \text{ cm}^2$$

8.47 El perímetro de un rombo es 40 centímetros y su diagonal mayor mide 16 centímetros. Averigua su área.

El rombo tiene todos sus lados iguales, cada uno de ellos medirá 10 cm. Usando el teorema de Pitágoras averiguamos la medida de la diagonal menor; para ello, el triángulo rectángulo que usamos es el formado por un lado del rombo y la mitad de cada una de las diagonales.

$c^2 = 10^2 - 8^2 \Rightarrow c = 6 \text{ cm} \Rightarrow d = 12 \text{ cm}$

$$A = \frac{16 \cdot 12}{2} = 96 \text{ cm}^2$$

8.48 Calcula la longitud del arco de circunferencia y el área del sector circular cuyo radio es 6 decímetros y cuyo ángulo mide 160°.

$$L = \frac{2 \cdot \pi \cdot 6 \cdot 160}{360} = 16{,}76 \text{ dm}$$

$$A = \frac{\pi \cdot 6^2 \cdot 160}{360} = 50{,}27 \text{ dm}^2$$

8.49 Halla el área de un hexágono regular de 12 centímetros de lado.

Por ser un hexágono regular, los triángulos que se forman al unir dos vértices consecutivos con el centro son equiláteros, y podemos calcular su altura, que coincide con la apotema.

$h^2 = 12^2 - 6^2 = 108 \Rightarrow h \equiv a = 10{,}39 \text{ cm}$

$$A = \frac{(12 \cdot 6) \cdot 10{,}39}{2} = 374{,}04 \text{ cm}^2$$

CUESTIONES PARA ACLARARSE

8.50 Dos triángulos rectángulos tienen un ángulo que mide 35°. ¿Son semejantes?

Los tres ángulos coinciden, porque si coinciden dos de ellos, el tercero tiene que coincidir, y aplicando el teorema de Tales a los dos triángulos que se escojan, podemos concluir que son semejantes.

8.51 En un triángulo, trazamos desde el vértice *A* la mediana al lado *BC* y medimos su longitud, 18 centímetros. Calcula la distancia del baricentro al vértice *A* y al punto medio del lado *BC*.

Sabemos que el baricentro es el punto que cumple que la distancia al vértice es el doble que la distancia al punto medio del lado opuesto.

La distancia al vértice será $\frac{2}{3}$ de la longitud de la mediana.

De modo que del baricentro al vértice *A* la distancia será de 12 cm, y al punto medio de *BC*, de 6 cm.

8.52 ¿Cuál es la máxima distancia que puede recorrer un jugador de fútbol en un campo cuyas medidas son 100 × 70 metros?

La diagonal del campo, que será la hipotenusa del triángulo rectángulo de catetos 100 y 70.

$$d^2 = 100^2 + 70^2 \Rightarrow d = 122{,}07 \text{ m}$$

8.53 En una circunferencia, inscribimos un triángulo equilátero y unimos cada uno de sus vértices con el centro de la circunferencia. ¿Cómo es cada uno de los triángulos que se forman?

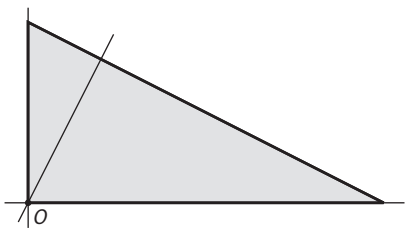
El centro de la circunferencia es el circuncentro del triángulo que está situado a igual distancia de cada uno de los vértices. Así que se forman tres triángulos isósceles. Como partíamos un triángulo equilátero, tendremos tres triángulos isósceles iguales.

8.54 Los catetos de un triángulo rectángulo miden 6 y 9 centímetros, respectivamente. Los catetos de otro triángulo rectángulo miden 10 y 15 centímetros. ¿Son semejantes ambos triángulos?

$\frac{6}{10} = \frac{9}{15}$. Aplicando el teorema de Tales, podemos decir que los triángulos son semejantes, puesto que si estos dos lados son proporcionales, el tercero también lo será.

8.55 ¿Dónde se encuentra situado el ortocentro de cualquier triángulo rectángulo? Ayúdate de un dibujo para encontrar la respuesta.

En el vértice cuyo ángulo es de 90°.



8.56 Tres pueblos *A*, *B* y *C* quieren construir una piscina común para sus habitantes, de forma que quede a la misma distancia de los tres. ¿En qué punto deben construirla?

En el circuncentro del triángulo cuyos vértices son la situación de cada uno de los pueblos.

8.57 La aguja pequeña del reloj de Julia describe un ángulo de 20° en 35 minutos. Razona si Julia tiene un reloj que atrasa o adelanta.

En 60 minutos, la aguja pequeña tiene que recorrer un ángulo de $\frac{360°}{12} = 30°$; entonces, debe describir un ángulo de 20° cuando sean $\frac{2}{3}$ del tiempo, es decir, transcurridos $\frac{2}{3}60 = 40$ minutos.

Como todavía no han pasado estos, eso quiere decir que la aguja va más rápido de lo que debería. Por tanto, adelanta.

PROBLEMAS PARA APLICAR

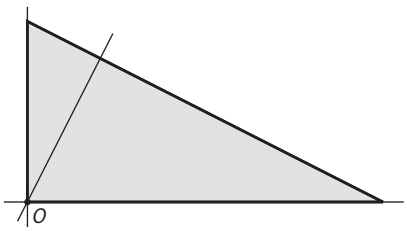
8.58 **En un determinado momento del día, un árbol arroja una sombra de 4,23 metros, mientras que, en el mismo momento, la sombra de un palo que mide 1,20 metros es de 0,64 metros. Averigua la altura del árbol.**

Aplicamos el teorema de Tales a los triángulos rectángulos formados por el árbol y su sombra y por el palo y la suya.

De modo que $\frac{4{,}23}{0{,}64} = \frac{h}{1{,}2} \Rightarrow h = 7{,}93$.

El árbol tiene una altura de 7,93 metros.

8.59 **En la carretera del dibujo se va a poner una gasolinera que se encuentre a la mínima distancia de los pueblos *A* y *B*. ¿Dónde tiene que construirse?**



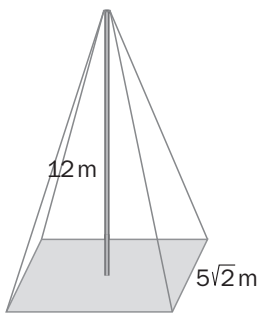
En el punto de corte de la carretera con la mediatriz del segmento que tiene como extremos las ciudades.

8.60 **Un hexágono tiene dos ángulos rectos y tres ángulos iguales que miden, cada uno, 132°. Halla el sexto ángulo.**

La suma de los ángulos de un hexágono es de $180° \cdot 4 = 720°$. De modo que conocidos cinco ángulos, el último mide $720° - 2 \cdot 90° - 3 \cdot 132° = 144°$.

8.61 **Un poste de 12 metros de altura se ha sujetado al suelo mediante cuatro cables, como muestra la figura. Los puntos de amarre de los cables forman un cuadrado de lado $5\sqrt{2}$ metros, en cuyo centro se sitúa el poste.**

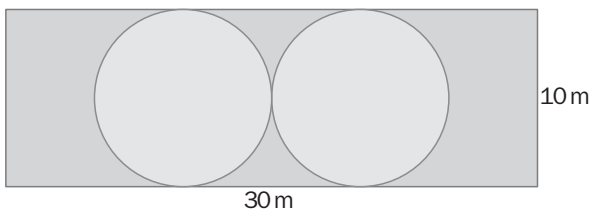
Calcula cuánto cable se ha necesitado en la operación.



Calculamos la diagonal del cuadrado de la base: $d^2 = 2\left(5\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow d = 10$ m.

La distancia del poste al cable es la mitad de la diagonal, es decir, 5 m. Usamos el teorema de Pitágoras para saber cuánto cable hay desde uno de los vértices hasta el poste: $l^2 = 12^2 + 5^2 \Rightarrow l = 13$ m. Esta longitud de cable es la misma las otras tres veces, de modo que se necesitan $4 \cdot 13 = 52$ m de cable.

8.62 **En un terreno rectangular se construyen dos fuentes circulares, como se muestra en la figura, y se planta césped en el terreno restante. ¿Qué superficie ocupa el césped?**



El radio de las fuentes es de 5 m, porque vemos que su diámetro coincide con la altura del rectángulo.

$$A_T = 30 \cdot 10 = 300 \text{ m}^2; A_F = \pi \cdot 5^2 = 78{,}54 \text{ m}^2$$

El espacio sobre el que se planta el césped es de $300 - 2 \cdot 78{,}54 = 142{,}92$ m^2.

8.63 **La rueda de un coche tiene un radio de 33 centímetros. ¿Cuántos kilómetros ha recorrido el coche si la rueda ha dado 80 000 vueltas?**

En cada vuelta recorre la longitud de la circunferencia de la rueda.

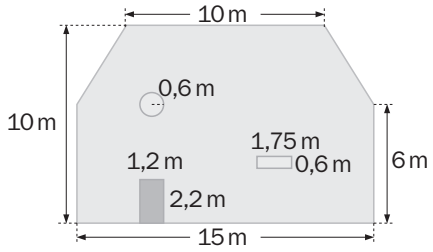
En una vuelta recorre $2 \cdot \pi \cdot 33 = 207{,}35$ cm; en 80 000 recorrerá $80\,000 \cdot 207{,}35 = 16\,588\,000$ cm, que son 165,880 km.

8.64 **El parterre de un jardín tiene forma de trapecio circular. Su ángulo mide 135° y los radios de las circunferencias 10 y 6 metros, respectivamente. Calcula la superficie que se puede plantar de césped.**

$$A = \frac{\pi \cdot 135 \cdot (10^2 - 6^2)}{360} = 24\pi = 75{,}40$$

Se puede plantar césped en 75,40 m^2.

8.65 **Queremos pintar la fachada de la casa de la figura. Calcula cuánta pintura es necesaria si se gastan 2,5 kilogramos de pintura por metro cuadrado.**

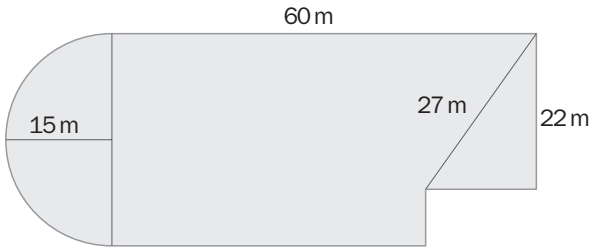


La superficie total de la fachada es de $6 \cdot 15 + \frac{(15 + 10) \cdot 4}{2} = 140$ m^2.

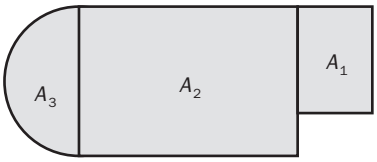
Veamos el área de las superficies que no se van a pintar: $1{,}2 \cdot 2{,}2 + 1{,}75 \cdot 0{,}6 + \pi \cdot 0{,}6^2 = 2{,}64 + 1{,}05 + 1{,}13 = 4{,}82$ m^2.

Hay que pintar $140 - 4{,}82 = 135{,}18$ m^2. La pintura necesaria es: $2{,}5 \cdot 135{,}18 = 337{,}95$ kg.

8.66 **La finca de la figura se vende a 200 euros el metro cuadrado. Calcula cuál es su precio total.**



Dividimos el terreno en figuras geométricas de las que conocemos cómo calcular el área.



$x = \sqrt{27^2 - 22^2} = 15{,}65$ m

$A_1 = 15{,}65 \cdot 22 = 344{,}5$ m^2

Si el radio de la circunferencia es de 15 m, el diámetro que coincide con la altura de la figura es de 30.

$A_2 = (60 - 15{,}65) \cdot 30 = 1\,330{,}5$ m^2 ; $A_3 = \dfrac{\pi 15^2}{2} = 353{,}43$ m^2

$A = 344{,}5 + 1\,330{,}5 + 353{,}43 = 2\,028{,}43$ m^2

$200 \cdot 2\,028{,}43 = 405\,686$.

La finca tiene un precio de 405 686 €.

8.67 **Juan y Miguel quieren medir la anchura del río de su pueblo y proceden de la siguiente manera: Juan se coloca en el borde del río y Miguel a 3 metros de él, alineados ambos con un árbol que está en la otra orilla. La línea que forman es perpendicular al río. Caminan paralelamente al río, Juan 2,8 metros y Miguel 6 metros, hasta que vuelven a estar alineados con el árbol. ¿Qué anchura tiene el río?**

Aplicamos el teorema de Tales, de modo que $\dfrac{2{,}8}{6} = \dfrac{a}{3 + a} \Rightarrow 2{,}8\,(3 + a) = 6a \Rightarrow a = 2{,}625$

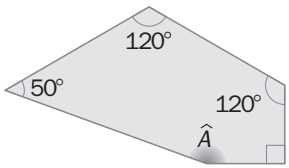
El río tiene un ancho de 2,625 m.

REFUERZO

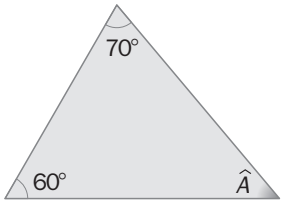
Ángulos y triángulos

8.68 Averigua la medida del ángulo $\widehat{A}$ de la figura.

a)



b)



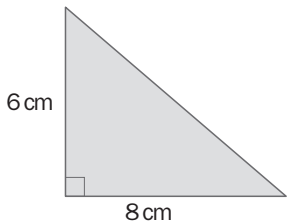
a) $180°(5 - 2) = 50° + 120° + 120° + 90° + \widehat{A} \Rightarrow \widehat{A} = 160°$

b) $180° = 60° + 70° + \widehat{A} \Rightarrow \widehat{A} = 50°$

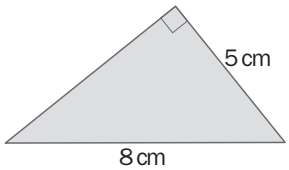
Teorema de Tales. Teorema de Pitágoras

8.69 Calcula el valor desconocido en los siguientes triángulos rectángulos.

a)



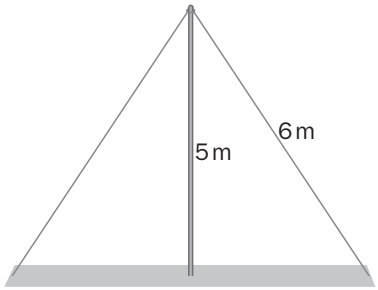
b)



a) $l^2 = 6^2 + 8^2 = 100 \Rightarrow l = \sqrt{100} = 10$ cm

b) $8^2 = 5^2 + l^2 \Rightarrow l = 6{,}24$ cm

8.70 Un poste de 5 metros de altura se ha sujetado al suelo mediante dos cables de 6 metros de longitud, como muestra la figura. ¿A qué distancia se han sujetado los cables de la base del poste?

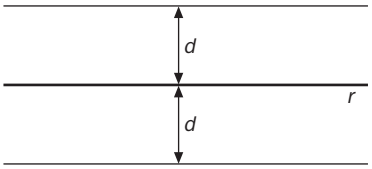


El poste forma un triángulo rectángulo con el suelo, de modo que aplicamos el teorema de Pitágoras: $6^2 = 5^2 + b^2 \Rightarrow b = 3{,}32$. Los cables se han sujetado a 3,32 m de la base del poste.

8 GEOMETRÍA DEL PLANO

Lugar geométrico

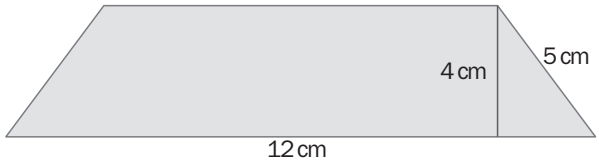
8.71 Determina el lugar geométrico de los puntos del plano que están a una distancia *d* de una recta *r* dada.



El lugar geométrico obtenido son dos rectas paralelas a la recta dada.

Longitudes y áreas

8.72 Halla el perímetro y el área del trapecio isósceles de la figura.



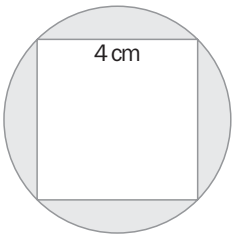
Para saber el valor de la base del triángulo que se forma a los lados del trapecio usamos el teorema de Pitágoras:

$5^2 = 4^2 - x^2 \Rightarrow x = 3$ cm.

$P = 12 + 5 + (12 - 3 - 3) + 5 = 28$ cm

$A = \dfrac{(12 + 6) \cdot 4}{2} = 36$ cm^2

8.73 Determina el área de la región sombreada de la figura, donde el lado del cuadrado mide 4 centímetros.

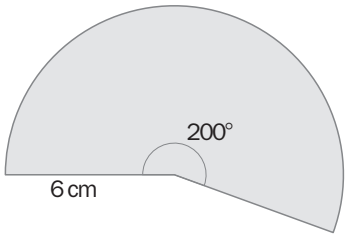


El diámetro del círculo coincide con la diagonal del cuadrado, y la podemos calcular usando el teorema de Pitágoras:

$d^2 = 4^2 + 4^2 \Rightarrow d = 5{,}66$ cm $\Rightarrow r = 2{,}83$ cm.

$A = \pi \cdot 2{,}83^2 - 4^2 = 9{,}16$ cm^2

8.74 Halla el perímetro y el área de la figura.



$$P = 6 + 6 + \frac{2 \cdot \pi \cdot 6 \cdot 200}{360} = 32{,}94 \text{ cm}; A = \frac{\pi \cdot 6^2 \cdot 200}{360} = 62{,}83 \text{ cm}^2$$

AMPLIACIÓN

8.75 **Los perímetros de dos triángulos isósceles semejantes miden, respectivamente, 32 y 40 centímetros. Si el lado desigual del menor mide 8 centímetros, ¿cuánto miden los lados del mayor?**

Como los triángulos son semejantes, La longitud de los perímetros es proporcional a la del lado menor:

$$\frac{32}{40} = \frac{8}{x} \Rightarrow x = 10$$

El lado desigual del triángulo mayor mide 10 cm, luego los otros dos lados juntos medirán $40 - 10 = 30$ cm.

Como estos lados deben ser iguales, $30 : 2 = 15$ cm, que es lo que miden los lados iguales del triángulo mayor.

8.76 **Por los vértices *A*, *B* y *C* de un triángulo trazamos una paralela al lado opuesto, formándose el triángulo de vértices *A'*, *B'* y *C'*. Halla:**

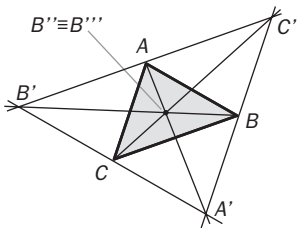
a) La relación entre los ángulos $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ y $\widehat{A}'$, $\widehat{B}'$, $\widehat{C}'$.

b) La relación entre los baricentros de ambos triángulos.

c) La relación entre los triángulos *ABC*, *AB'C*, *AC'B* y *A'BC*.

a) Los ángulos son iguales a los que les corresponden: $\widehat{A} = \widehat{A}'$, $\widehat{B} = \widehat{B}'$, $\widehat{C} = \widehat{C}'$.

b) Coinciden en el mismo punto.



c) Son iguales.

8.77 **Dos puntos *A* y *B* están situados en el plano a una distancia de 10 centímetros. Determina todos los puntos que están a 8 centímetros de *A* y a 6 centímetros de *B*.**

Para determinar los puntos que están a 8 cm de *A*, trazamos la circunferencia de centro *A* y que tenga 8 cm de radio.

Para determinar los puntos que están a 6 cm de *B*, trazamos la circunferencia de centro *B* y que tenga 6 cm de radio.

Estas circunferencias, se cortarán en dos puntos que están a 8 cm de *A* y a 6 de *B*, luego cumplen las condiciones del problema.

8.78 **Dos torres *A* y *B*, una de 40 metros y la otra de 30 metros de altura, están separadas por un puente de 60 metros de largo. En un punto *C* del puente hay una fuente. Dos pájaros que están en las almenas de cada una de las torres salen a beber de la fuente a la vez y con la misma velocidad, llegando al mismo tiempo a la fuente. ¿A qué distancia está la fuente de ambas torres?**

Si ambos pájaros salen a la vez y llegan a la vez, ambos con la misma velocidad, es que recorren igual distancia. Si llamamos x a la distancia de la fuente a la base de la torre de 30 m, tendremos que

$$d^2 = 30^2 + x^2 \text{ y } d^2 = 40^2 + (60 - x)^2$$

Así, $30^2 + x^2 = 40^2 + (60 - x)^2$.

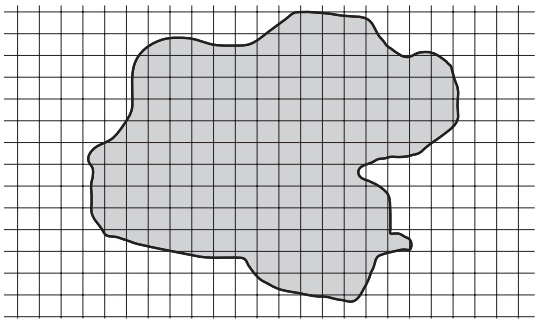
Resolvemos esta igualdad, $x = \frac{215}{6} = 35{,}83$.

La fuente está a 35,83 m de la torre de 30 m.

PARA INTERPRETAR Y RESOLVER

8.79 **La superficie de la isla**

Para estimar la superficie de una isla, Juan ha dibujado sobre una cuadrícula el contorno de la misma con la ayuda de una fotografía aérea y un mapa.



a) Observa el dibujo y di si las siguientes afirmaciones son verdaderas o no:

- **El número de cuadrados que están totalmente contenidos en el área encerrada por el contorno es una estimación inferior de dicha área.**
- **El número de cuadrados que tocan, al menos en parte, el área encerrada por el contorno es una estimación superior de dicha área**

b) Calcula ambas estimaciones y calcula qué error máximo se cometerá si se toma como nueva estimación la media aritmética de las dos anteriores.

a) Verdadero, ya que no se cuentan todos los cuadrados que contienen superficie de la isla, por lo que es una estimación inferior del área.

Verdadero, ya que se cuentan cuadrados que tocan el área sin estar totalmente contenidos en el área de la isla, por lo que es una estimación superior del área.

b) Estimación inferior 124 cuadrados.

Estimación superior 174 cuadrados.

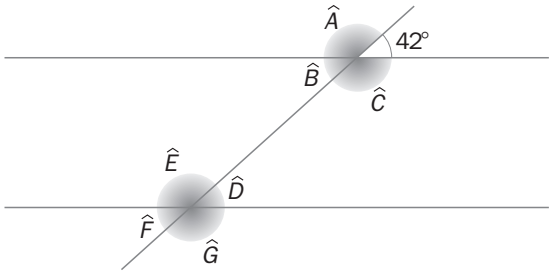
Nueva estimación: $\frac{124 + 174}{2} = 149$ cuadrados

El error máximo cometido es la mitad de la diferencia entre las estimaciones superior e inferior: $\frac{174 - 124}{2} = 25$

Por tanto, el error máximo cometido es 25 unidades.

AUTOEVALUACIÓN

8.A1 **Calcula la medida de los ángulos desconocidos de cada figura.**



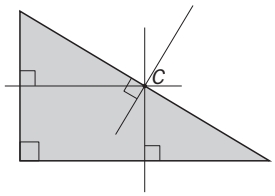
Por el teorema de Tales: $\widehat{B} = \widehat{D} = \widehat{F} = 42°$ y $\widehat{A} = \widehat{C} = \widehat{E} = \widehat{G} = \dfrac{360 - 2 \cdot 42}{2} = 138°$

8.A2 **¿Cuánto mide cada uno de los ángulos de un octógono regular?**

La suma de los ángulos del octógono es $180° \ (8 - 2) = 1\,080°$. Tienen que tener todos los ángulos iguales; así, $1\,080° : 8° = 135°$.

Cada uno de los ángulos de un octógono regular mide 135°.

8.A3 **Dibuja un triángulo rectángulo y traza su circuncentro. Explica lo que observas.**



El circuncentro de un triángulo rectángulo coincide con el punto medio de la hipotenusa.

8.A4 **Los lados de un triángulo miden 6, 7 y 9 centímetros, respectivamente. Otro triángulo semejante tiene de perímetro 66 centímetros. ¿Cuánto miden sus lados?**

El perímetro del primer triángulo es de 22 cm.

De modo que $\dfrac{22}{66} = \dfrac{6}{a} = \dfrac{7}{b} = \dfrac{9}{c}$

Entonces, $a = 18$ cm, $b = 21$ cm, $c = 27$ cm.

8.A5 **La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 10 centímetros y la suma de los catetos es 14 centímetros. Halla la medida de cada cateto.**

Usando el teorema de Pitágoras, $10^2 = c^2 + (14 - c)^2$

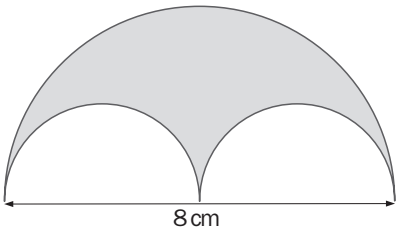
Resolviendo la igualdad tenemos que los catetos miden 8 y 6 cm.

8.A6 **Determina la longitud de la circunferencia y el área del círculo de radio 5 centímetros.**

$L = 2 \cdot \pi \cdot 5 = 10\pi$ cm

$A = \pi \cdot 5^2 = 25\pi$ cm^2

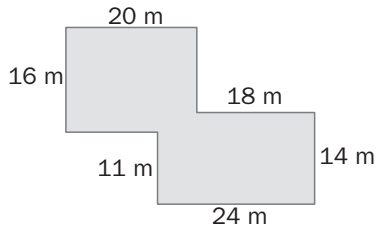
8.A7 **Averigua el área de la región roja de la figura.**



Es el área de medio círculo de 4 cm de radio menos el área de dos medios círculos (un círculo) de 2 cm de radio.

$$A = \frac{\pi 4^2}{2} - \pi 2^2 = 8\pi - 4\pi = 4\pi \text{ cm}^2$$

8.A8 **El terreno de la figura se vende a razón de 250 euros el metro cuadrado. ¿Cuál es su precio total?**



Calculamos primero los metros cuadrados del terreno:

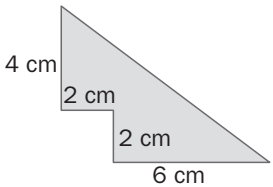
$$A = 20 \cdot 16 + 24 \cdot 14 - 6 \cdot 3 = 638 \text{ m}^2$$

Como cada metro cuadrado vale 250 €, el precio del terreno es:

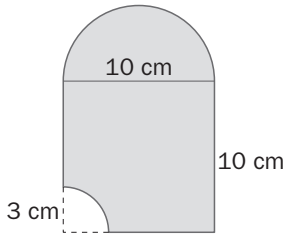
$$638 \cdot 250 = 159\,500 \text{ €}$$

8.A9 **Calcula el área de las siguientes figuras.**

a)



b)



a) $A = \dfrac{(6 + 2) \cdot (4 + 2)}{2} - 2^2 = 20 \text{ cm}^2$

b) $A = 10^2 + \dfrac{\pi \cdot 5^2}{2} - \dfrac{\pi \cdot 3^2}{4} = 132{,}20 \text{ cm}^2$

EJERCICIOS PROPUESTOS

5.1 Un triángulo puede definirse dando la medida de sus tres lados. Indica cuáles de las siguientes parejas de triángulos son semejantes.

a) 5, 6, 7 y 15, 18, 20

a) $\frac{5}{15} = \frac{6}{18} \neq \frac{7}{20} \Rightarrow$ No son semejantes.

b) 4, 6, 8 y 1; 1,5; 2

b) $\frac{4}{1} = \frac{6}{15} = \frac{8}{2} \Rightarrow$ Son semejantes.

5.2 Razona si son semejantes estas figuras.

a) Dos cuadrados.

b) Tres triángulos equiláteros.

c) Dos rectángulos.

a) Los ángulos de un cuadrado y de otro son todos iguales; además, al ser los cuatro lados iguales, siempre estarán en la misma proporción los de un cuadrado con los del otro.

b) Tres triángulos equiláteros tendrán los tres ángulos iguales de 60°, y como los lados de cada triángulo serán iguales, serán proporcionales los de un triángulo con los del otro.

c) Dos rectángulos, en general, no son semejantes porque los lados no tienen por qué ser proporcionales. Por ejemplo, si en un rectángulo $b = 1$ cm, $h = 2$ cm, y en otro, $b' = 1$ cm, $h' = 3$ cm, entonces $\frac{b}{b'} = 1 \neq \frac{h}{h'} = \frac{2}{3}$.

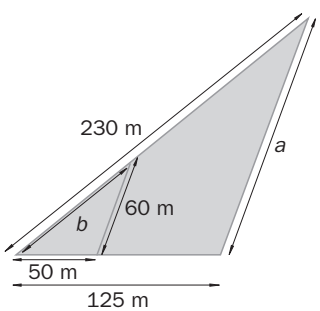
5.3 La escala de un mapa es de 1:2 500 000. ¿A cuántos kilómetros se encontrarán dos ciudades que en el mapa están separadas 12 centímetros?

Escala 1:2 500 000. En el mapa, 12 cm representan $12 \cdot 2\,500\,000 = 30\,000\,000$ cm $= 300$ km.

5.4 Un triángulo equilátero tiene 40 centímetros cuadrados de área. Halla el área del triángulo que se obtiene al unir los puntos medios de los lados.

Obtendremos un triángulo de razón $k = \frac{1}{2}$; por tanto, la razón de las áreas será $k^2 = \frac{1}{4}$. El área del nuevo triángulo será $A = \frac{1}{4} \cdot 40 = 10$ cm^2.

5.5 Halla las medidas que faltan en la figura.



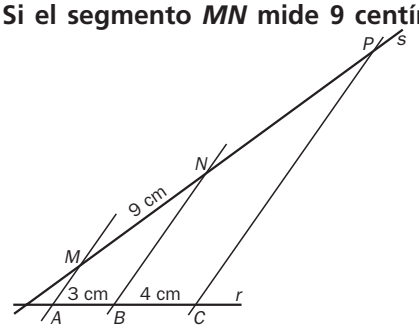
Aplicando el teorema de Tales,

$\frac{125}{50} = \frac{a}{60} = \frac{230}{b}$

Entonces, $a = 150$ m, y $b = 92$ m

5.6 En una recta *r* hay tres puntos *A, B* y *C* que distan sucesivamente 3 y 4 centímetros. Por esos puntos se trazan rectas paralelas que cortan a otra, *s*, en *M, N* y *P*.

Si el segmento *MN* mide 9 centímetros, ¿cuál es la distancia entre los puntos *N* y *P*?



$\frac{3}{9} = \frac{4}{NP}$

$NP = 12$ cm

5.7 **Dibuja un triángulo cualquiera *ABC* y construye paso a paso dos triángulos semejantes a él.**
a) Uno de razón 1 : 2
b) Otro de razón 2 : 1

Partiremos de un triángulo *ABC*.

a) Con los mismos ángulos y multiplicando por dos cada uno de sus lados obtenemos un triángulo de razón 1 : 2.

b) Si, con los mismos ángulos, dividimos los tres lados del triángulo *ABC* entre dos, obtenemos un nuevo triángulo de razón 2 : 1.

5.8 **Determina si son semejantes los triángulos que se indican.**
a) $\widehat{A} = 60°$, $\widehat{B} = 40°$ y $\widehat{A} = 80°$, $\widehat{E} = 60°$
b) $\widehat{A} = 90°$, $b = 6$, $c = 8$ y $\widehat{A}' = 90°$, $b' = 5$, $c' = 7$
c) $\widehat{A} = 45°$, $\widehat{B} = 75°$ y $\widehat{D} = 65°$, $\widehat{E} = 75°$
d) $a = 5$, $b = 8$, $\widehat{C} = 60°$ y $a' = 15$, $b' = 24$, $\widehat{C}' = 60°$

a) $\widehat{C} = 180 - (60 + 40) = 80°$ $\quad \widehat{F} = 180 - (80 + 60) = 40°$

Los dos triángulos tienen todos sus ángulos iguales. Por el criterio 1 sabemos que son semejantes.

b) $\frac{6}{8} \neq \frac{5}{7}$ no son proporcionales los lados que comprenden al ángulo igual (criterio 3); por tanto, no son semejantes.

c) $\widehat{C} = 180 - (45 + 75) = 60°$ $\quad \widehat{F} = 180 - (65 + 75) = 40°$

Solo tienen un ángulo igual; por tanto, no son semejantes (criterio 1).

d) $\frac{5}{15} = \frac{8}{24}$ son proporcionales y el ángulo que abarcan es igual; por tanto, son semejantes (criterio 3).

5.9 **Los catetos de un triángulo rectángulo miden 6 y 8 centímetros. Si la hipotenusa de otro triángulo rectángulo semejante mide 20 centímetros, calcula las longitudes de la hipotenusa del primero y de los catetos del segundo.**

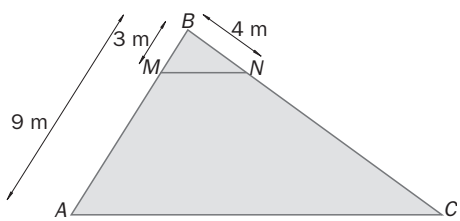
Utilizamos el teorema de Pitágoras para calcular la hipotenusa del primero:

$h^2 = 6^2 + 8^2 \Rightarrow h^2 = 100 \Rightarrow h = 10$ cm

Como los triángulos son semejantes:

$\frac{20}{10} = \frac{c_1}{6} = \frac{c_2}{8} \Rightarrow c_1 = 12$ cm, y $c_2 = 16$ cm

5.10 **Los lados *MN* y *AC* son paralelos. Calcula la medida del segmento *CN*.**

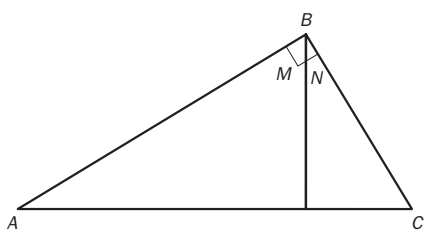


Llamamos x a la medida del segmento *CN*.

Por el teorema de Tales:

$\frac{3}{9} = \frac{4}{4 + x} \Rightarrow 4 + x = 12 \Rightarrow x = 8$ m

5.11 **En un triángulo rectángulo se traza la altura sobre la hipotenusa. ¿Son semejantes los triángulos en que ha quedado dividido el triángulo dado?**



$\left.\begin{matrix} \widehat{B} + \widehat{N} = 90 \\ \widehat{M} + \widehat{N} = 90 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{M}$

Los triángulos tienen un ángulo igual además del ángulo recto; por el criterio 1 deducimos que son semejantes.

5.12 **Comprueba que la razón de dos alturas correspondientes de dos triángulos semejantes es igual a la razón de semejanza.**

$A_1 = \dfrac{b_1 \cdot h_1}{2}$ $\qquad$ $A_2 = \dfrac{b_2 \cdot h_2}{2}$

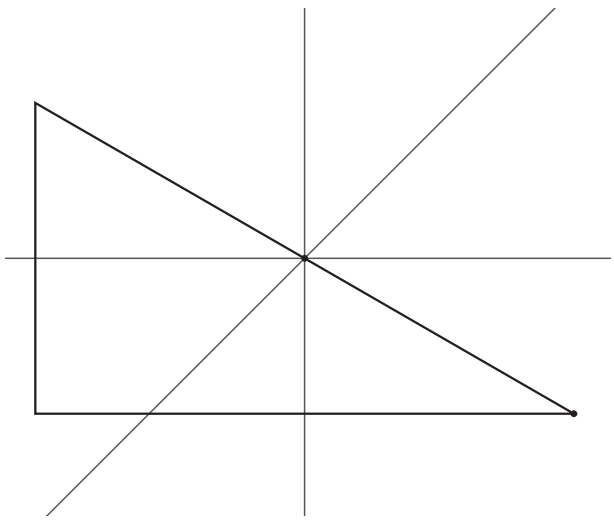
Si la razón de semejanza es k, la razón entre las áreas será k^2. Es decir: $k^2 = \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{\dfrac{b_1 \cdot h_1}{2}}{\dfrac{b_2 \cdot h_2}{2}} = \dfrac{b_1 \cdot h_1}{b_2 \cdot h_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \cdot \dfrac{h_1}{h_2} = k \cdot \dfrac{h_1}{h_2} \Rightarrow \dfrac{h_1}{h_2} = k$

5.13 **La altura de un triángulo rectángulo mide 7 centímetros y divide a la hipotenusa en dos segmentos *m* y *n* tales que $m = \dfrac{1}{4} n$. Calcula *m* y *n*.**

$7^2 = m \cdot n \quad \Rightarrow \quad 49 = \dfrac{1}{4} n \cdot n \quad \Rightarrow \quad 196 = n^2 \quad \Rightarrow \quad n = 14 \text{ cm} \quad \Rightarrow \quad m = \dfrac{1}{4} \cdot 14 = 3{,}5 \text{ cm}$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

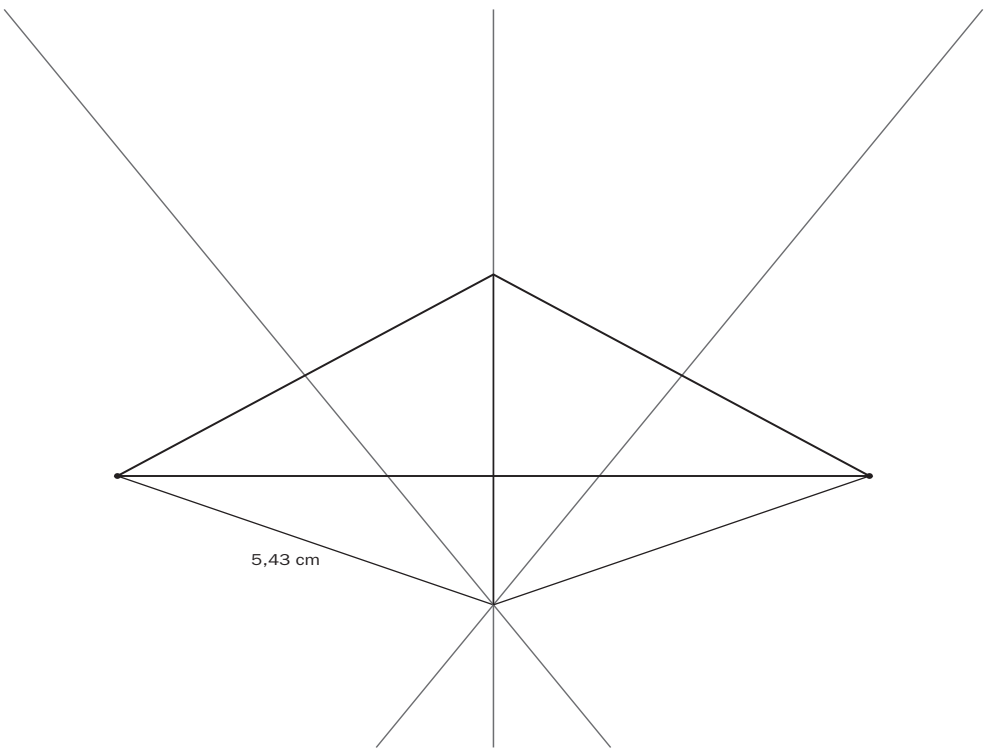
5.14 **Si en otro caso las distancias entre los pueblos son de 8 kilómetros de *A* a *B*, de 10 de *B* a *C* y de 6 de *A* a *C*, ¿dónde deberá situarse el hospital?**



Este ejercicio es algo más sencillo, ya que el triángulo resultante es rectángulo, y el circuncentro coincide con el punto medio de la hipotenusa. Por tanto, el hospital estará a 5 km de cada pueblo.

5.15 **¿Dónde estará ubicado el hospital si las distancias entre los pueblos son de 10 kilómetros de *A* a *B*, de 6 de *B* a *C* y de 6 de *A* a *C*?**

En este caso, el circuncentro queda fuera del triángulo. La distancia a cada pueblo será de 5,43 km.



ACTIVIDADES

EJERCICIOS PARA ENTRENARSE

Figuras semejantes

5.16 Calcula el valor de *a* y *b* para que los siguientes pares de triángulos sean semejantes.

a) 3, *a*, 5 y 1,5; 2; *b*

b) $\frac{5}{2}$, 3, *a* y 10, *b*, 24

c) 3, *a*, 8 y $\frac{6}{5}$, $\frac{14}{5}$, *b*

d) 45°, 75°, 60° y 75°, $\widehat{A}$, $\widehat{B}$

a) $\frac{3}{1,5} = \frac{a}{2} = \frac{5}{b} \Rightarrow a = 4;\ b = 2,5$

b) $\frac{\frac{5}{2}}{10} = \frac{3}{b} = \frac{a}{24} \Rightarrow a = 6;\ b = 12$

c) $\frac{3}{\frac{6}{5}} = \frac{a}{\frac{14}{5}} = \frac{8}{b} \Rightarrow a = 7;\ b = \frac{16}{5}$

d) $\widehat{A} = 60°,\ \widehat{B} = 45°$

5.17 El perímetro de un triángulo equilátero mide 30 centímetros.

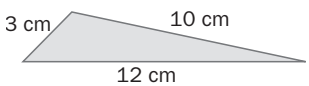
a) Halla las medidas de los lados de un triángulo equilátero semejante a él si la razón de semejanza es $k = \frac{1}{2}$.

b) ¿Cuál es la razón de sus áreas?

a) lado = 10 cm $\quad l' = l \cdot k = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5$ cm

b) $\frac{A'}{A} = k^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

5.18 Calcula las longitudes de los lados de un triángulo semejante al de la figura de modo que la razón de sus áreas sea $\frac{25}{4}$.



$\frac{A'}{A} = \frac{25}{4} = k^2 \Rightarrow k = \frac{5}{2}$ es la razón de semejanza. Por tanto:

$a' = a \cdot k = 3 \cdot \frac{5}{2} = \frac{15}{2} = 7,5$ cm

$b' = b \cdot k = 10 \cdot \frac{5}{2} = 25$ cm

$c' = c \cdot k = 12 \cdot \frac{5}{2} = 30$ cm

5.19 La arista de un cubo mide 8 metros. Halla la medida de la arista de otro cubo semejante a él si la razón de sus volúmenes es $\frac{1}{27}$.

$\frac{V'}{V} = \frac{1}{27} = k^3 \Rightarrow k = \sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \frac{1}{3}$ es la razón de semejanza. Por tanto: $a' = a \cdot k = 8 \cdot \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$ m

5.20 Los catetos de un triángulo rectángulo isósceles miden 30 centímetros. Calcula el perímetro de un triángulo semejante a él con razón de semejanza $k = \frac{1}{6}$.

Por el teorema de Pitágoras, la hipotenusa mide: $x = \sqrt{1800}$ cm

Por tanto, el perímetro mide $p = 60 + \sqrt{1800}$ cm

$\frac{p'}{p} = \frac{1}{6} = k \Rightarrow p' = \frac{1}{6} \cdot \left(60 + \sqrt{1800}\right) = \frac{60 + \sqrt{1800}}{6} = 10 + 5\sqrt{2}$ cm

5.21 **Javier se encuentra de vacaciones en Nueva York y dispone de un plano a escala 1:15 000 de la ciudad. Quiere ir desde su hotel a un museo que dista 3,5 centímetros en el plano. ¿Cuál es la distancia, medida en metros, que debe recorrer?**

$15\,000 \cdot 3{,}5 = 52\,500$ cm $= 525$ m

5.22 **Se realiza una fotocopia de un mapa, cuya escala es de 1:20 000, ampliándolo al 130%.**

a) Si la distancia entre dos lugares del mapa es de 4,8 centímetros, ¿qué distancia los separa en la fotocopia realizada?

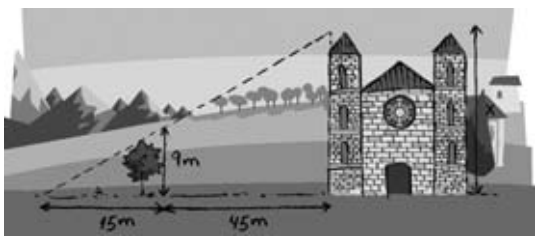
b) ¿Cuál es la distancia real que separa estos dos lugares?

a) $4{,}8 \cdot 1{,}3 = 6{,}24$ cm

b) $1{:}20\,000 \Rightarrow 1$ cm $= 20\,000$ cm $= 200$ m
Distancia real $= 4{,}8 \cdot 200 - 960$ m

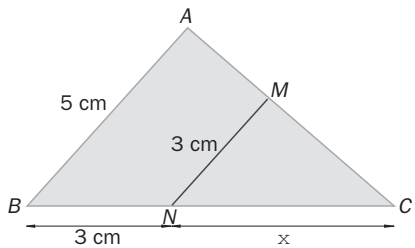
Teorema de Tales. Criterios de semejanza

5.23 **Calcula la altura de la torre de la iglesia.**



$\frac{x}{9} = \frac{60}{15} \Rightarrow 15x = 540 \Rightarrow x = 36$ m

5.24 **Si los segmentos *AB* y *MN* son paralelos, halla la medida del lado *BC*.**

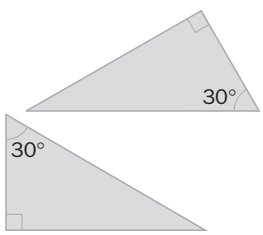


$\frac{5}{3} = \frac{x+3}{x} \Rightarrow 5x = 3x + 9 \Rightarrow x = \frac{9}{2} = 4{,}5$ cm

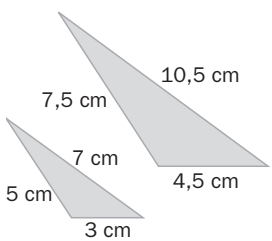
$BC = 3 + 4{,}5 = 7{,}5$ cm

5.25 **Determina si los siguientes pares de triángulos son semejantes, indicando, en caso afirmativo, el criterio de semejanza utilizado.**

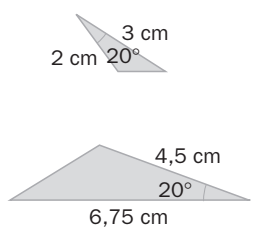
a)



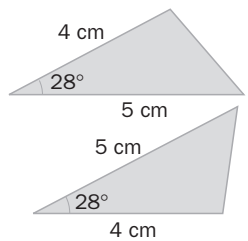
b)



c)

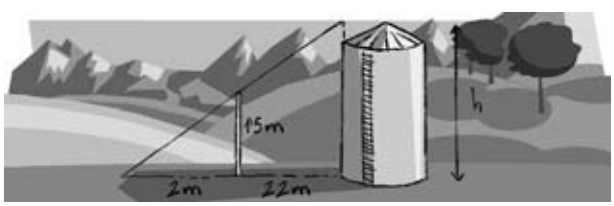


d)



a) Sí, ya que tienen dos ángulos iguales. Criterio 1.
b) Sí, ya que tienen sus tres lados proporcionales. Criterio 2.
c) Sí, ya que tienen un ángulo igual, y los lados correspondientes, proporcionales. Criterio 3.
d) Sí, ya que tienen un ángulo igual, y los lados correspondientes, iguales. Criterio 3.

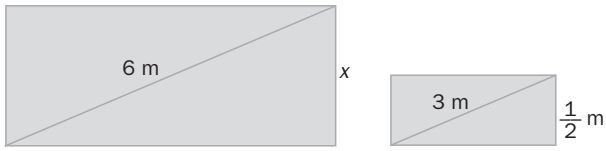
5.26 **Para saber la altura del silo (depósito de trigo) de un pueblo, se alinea con él un palo y se mide su sombra. Halla la altura del silo.**



$\frac{h}{1{,}5} = \frac{24}{2} \Rightarrow 2h = 36 \Rightarrow h = 18$ m

Consecuencias de los criterios de semejanza

5.27 Si los rectángulos son semejantes, ¿cuál es el valor de *x*?



Razón $= 6 : 3 = 2$

$x = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$ m

5.28 Dos triángulos son semejantes. Si el perímetro del primero mide 52 centímetros y la razón de sus áreas es $\frac{64}{49}$, ¿cuál es el perímetro del segundo?

$\frac{A'}{A} = \frac{64}{49} = k^2 \Rightarrow k = \frac{8}{7}$

$\frac{p'}{p} = k \Rightarrow p' = 52 \cdot \frac{8}{7} = \frac{416}{7} \approx 59{,}43$ cm

5.29 ¿Cuánto mide la altura de un triángulo rectángulo semejante al que tiene catetos de 12 y 16 centímetros si la razón de semejanza es $k = \frac{2}{3}$?

Calculamos la hipotenusa: $h^2 = 12^2 + 16^2 \Rightarrow h = 20$.

$A = \frac{12 \cdot 16}{2} = \frac{20 \cdot \text{altura}}{2}$ Despejamos la altura sobre la hipotenusa $\Rightarrow$ Altura $= 9{,}6$ cm

En el triángulo semejante: Altura' $= \frac{2}{3} \cdot 9{,}6 = 6{,}4$ cm

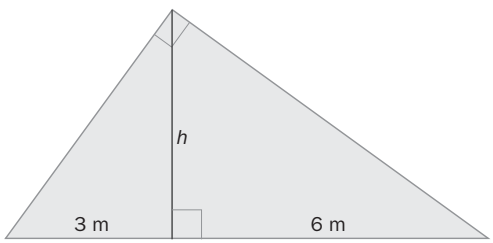
5.30 Se quiere construir dos rascacielos con base en forma de hexágono regular. La arista de la base de uno de ellos mide 2 decámetros. Calcula el área de la base del otro rascacielos sabiendo que la razón de sus perímetros es $\frac{3}{2}$.

Para hallar la apotema usamos el teorema de Pitágoras: $a^2 + 1^2 = 2^2 \Rightarrow a = \sqrt{3}$ dam

$A = \frac{p \cdot a}{2} = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$ dam^2

$\frac{p'}{p} = \frac{3}{2} = k \Rightarrow \frac{A'}{A} = k^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow A' = 6\sqrt{3}\,\frac{9}{4} = \frac{27\sqrt{3}}{2}$ dam^2

5.31 En la siguiente figura, ¿cuánto mide *h*?



Teorema de la altura: $h^2 = m \cdot n$

$h^2 = 3 \cdot 1\,6 = 18$

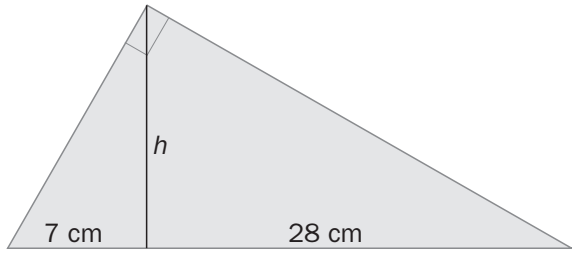
$h = \sqrt{18}$ m $\Rightarrow$ $h = 3\sqrt{2}$ m

5.32 Calcula el área de un triángulo rectángulo en el que la altura sobre la hipotenusa la divide en dos segmentos de 8 y 2 centímetros, respectivamente.

Por el teorema de la altura: $h^2 = 8 \cdot 2 = 16 \Rightarrow h = \sqrt{16} = 4$ cm

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{(8 + 2) \cdot 4}{2} = 20 \text{ cm}^2$$

5.33 Halla las longitudes de los catetos del triángulo rectángulo de la figura y calcula su área.



Por el teorema de la altura:

$h^2 = 28 \cdot 7 = 196 \Rightarrow h = \sqrt{196} = 14$ cm

Por el teorema de Pitágoras:

$14^2 + 7^2 = c^2 \Rightarrow c = \sqrt{245} = 7\sqrt{5}$ cm $= 15{,}65$ cm

Por el teorema de Pitágoras:

$14^2 + 28^2 = b^2 \Rightarrow b = \sqrt{980} = 14\sqrt{5}$ cm $= 31{,}3$ cm

$A = \dfrac{b \cdot h}{2} = \dfrac{35 \cdot 14}{2} = 245$ cm^2

CUESTIONES PARA ACLARARSE

5.34 Razona si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones.

a) Todos los cuadrados son semejantes.

b) Los ángulos de dos triángulos semejantes son proporcionales.

c) Dos triángulos rectángulos con un ángulo agudo igual son semejantes.

d) Todas las circunferencias son semejantes.

e) Los polígonos iguales son semejantes y su razón de semejanza es 1.

a) Verdadera (ejercicio 2).

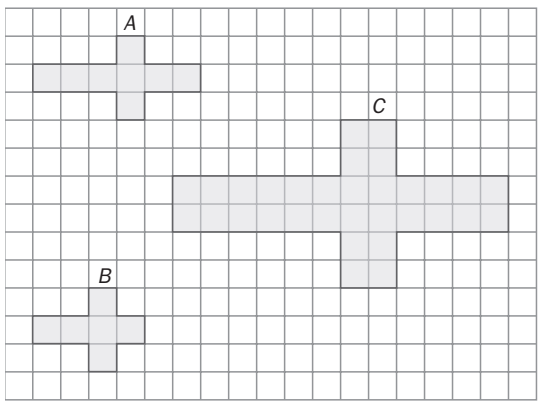
b) Falsa. Los ángulos son iguales.

c) Verdadera por el criterio 1.

d) Verdadera. Siempre están en la misma proporción el radio y el perímetro. El área guarda esa proporción al cuadrado.

e) Verdadera, ya que si son polígonos iguales, tienen lados y ángulos respectivamente iguales.

5.35 ¿Cuáles de los polígonos de la figura son semejantes?



A y *C* son semejantes, ya que todas sus dimensiones son proporcionales.

Razón $= \dfrac{12}{6} = \dfrac{6}{3} = \dfrac{2}{1} = 2$

5.36 Elige la respuesta correcta.

a) Dos triángulos son semejantes y la razón de semejanza es 3. Uno de ellos tiene un área de 6 unidades cuadradas. ¿Cuántas corresponden al área del otro?

i) 18 ii) 54 iii) 108

b) Dos prismas son semejantes y la razón de semejanza es 2. Uno de ellos tiene un volumen de 10 unidades cúbicas. ¿Cuántas corresponden al volumen del otro?

i) 40 ii) 200 iii) 80

a) Razón de longitudes $= 3$; razón de áreas $= 9$
ii) ya que $54\ u^2 = 9 \cdot 6\ u^2$

b) Razón de longitudes $= 2$; razón de volúmenes $= 8$
iii) ya que $80\ u^3 = 8 \cdot 10\ u^3$

5.37 Si dos pentágonos regulares *A* y *B* son semejantes, ¿cuáles de las siguientes igualdades son ciertas?

a) $\dfrac{\text{Perímetro de } A}{\text{Perímetro de } B} = \dfrac{\text{Apotema de } A}{\text{Apotema de } B}$ **b)** $\dfrac{\text{Perímetro de } A}{\text{Perímetro de } B} = \dfrac{\text{Área de } A}{\text{Área de } B}$ **c)** $\dfrac{\text{Perímetro de } A}{\text{Perímetro de } B} = \dfrac{\text{Diagonal de } A}{\text{Diagonal de } B}$

a) y c) Ciertas.

b) Falsa, ya que la razón de semejanza de las superficies es el cuadrado de la razón de longitudes.

5.38 **Un patio circular tiene 200 metros cuadrados de superficie. Si el radio se triplicara, ¿se triplicaría también la superficie? Razona tu respuesta.**

Área $A = \pi \cdot r^2 = 200$ m^2 Área $B = \pi \cdot (3r)^2 = 9 \cdot \pi \cdot r^2 = 9 \cdot 200 = 1800$ m^2

La superficie no se multiplica por 3, sino por 3^2, que, como ya sabemos, es la razón de las áreas de figuras con razón de semejanza 3.

PROBLEMAS PARA APLICAR

5.39 **El logotipo de una empresa tiene la forma de un hexágono cuyos lados miden 3, 4, 5, 7, 8 y 9 centímetros.**
En los carteles publicitarios se quiere dibujar un hexágono semejante de 117 centímetros de perímetro. ¿Cuánto miden los lados homólogos?

Perímetro del hexágono pequeño $= 3 + 4 + 5 + 7 + 8 + 9 = 36$ cm Razón $= \frac{117}{36} = 3{,}25$

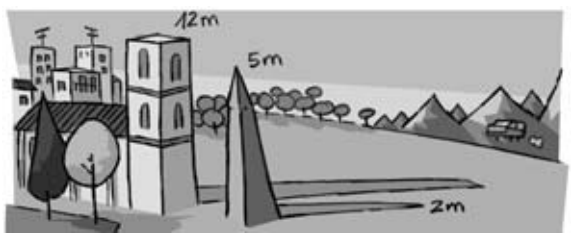
Lados del hexágono grande: $3 \cdot 3{,}25 = 9{,}75$ cm $4 \cdot 3{,}25 = 13$ cm $5 \cdot 3{,}25 = 16{,}25$ cm

$7 \cdot 3{,}25 = 22{,}75$ cm $8 \cdot 3{,}25 = 26$ cm $9 \cdot 3{,}25 = 29{,}25$ cm

5.40 **En el plano de una vivienda en construcción aparece dibujado un salón rectangular de 13,5 centímetros cuadrados de área. Si la escala del plano es de 1:150, ¿cuál es el área real del salón?**

Escala 1:150. Razón $= 150 : 1 = 150$ Área real $= (150)^2 \cdot 13{,}5 = 22\,500 \cdot 13{,}5 = 303\,750$ cm^2 $= 30{,}375$ m^2

5.41 **A la misma hora del día, se miden las sombras que proyectan la torre del reloj y el obelisco de una plaza. Halla la altura de la torre del reloj.**



Triángulos semejantes → lados proporcionales

Razón $= \frac{12}{2} = 6 \Rightarrow$ Altura de la torre $= 6 \cdot$ altura del obelisco $=$

$= 6 \cdot 5 = 30$ m

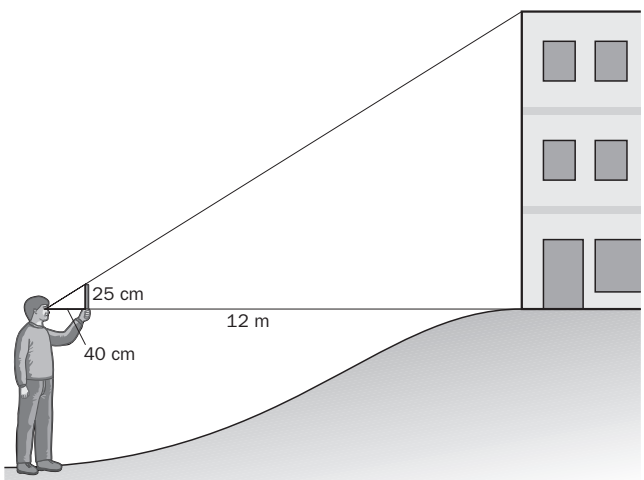
5.42 **Las alturas de Mónica y su madre en una fotografía, cuya escala es de 1:75, son 2,08 y 2,2 centímetros respectivamente.**
Si encargan una ampliación que aumenta el tamaño de la fotografía en un 25%, ¿cuánto medirán las dos en ella? ¿Cuál será la escala?

Altura de Mónica en la ampliación: $2{,}08 \cdot 1{,}25 = 2{,}6$ cm

Altura de la madre en la ampliación: $2{,}2 \cdot 1{,}25 = 2{,}75$ cm

Escala de la ampliación: $\frac{75}{1{,}25} = 60 \Rightarrow 1{:}60$

5.43 **Para realizar prácticas de óptica, un estudiante que mide 1,70 metros situado a 12 metros de un edificio, coloca frente a sus ojos una regla vertical de 25 centímetros con la que oculta exactamente la altura del mismo.**
Si la distancia del ojo a la regla es de 40 centímetros, calcula la altura del edificio.



Triángulos semejantes ⇒ alturas proporcionales

12 m $= 1200$ cm

Razón $= 1200 : 40 = 30$

Altura $= 25 \times 30 = 750$ cm $= 7{,}5$ m

Altura del edificio $= 7{,}5 + 1{,}7 = 9{,}2$ m

5.44 **Los servicios de protección contra incendios de una comarca española emiten un informe sobre el número de hectáreas quemadas en el último incendio.**
En su mapa de escala 1:60 000, la zona afectada tiene una superficie de 8 decímetros cuadrados.
¿Cuál es el resultado del informe?

$\text{Razón} = \frac{60\,000}{1} = 60\,000$

$\text{Área real} = (60\,000)^2 \cdot 8 = 28\,800\,000\,000 \text{ cm}^2 = 288\,000\,000 \text{ m}^2 = 288 \text{ km}^2$

5.45 **Un arquitecto construye una maqueta de un centro de exposiciones cuya planta es un rectángulo de 90 × 50 centímetros y cuyo volumen es de 350 000 centímetros cúbicos.**
Si la escala de la maqueta es de 1:150, calcula las dimensiones reales de la planta y el volumen del edificio.

$\text{Razón} = 150$
$\text{Largo de la planta real} = 90 \cdot 150 = 13\,500 \text{ cm} = 135 \text{ m}$
$\text{Ancho de la planta real} = 50 \cdot 150 = 7500 \text{ cm} = 75 \text{ m}$
$\text{Volumen real del edificio} = (150)^3 \cdot 0{,}35 \text{ m}^3 = 1\,181\,250 \text{ m}^3$

5.46 **Un estudiante de la Facultad de Bellas Artes desea trabajar en una figura a escala del *David* de Miguel Ángel cuya altura sea de 60 centímetros.**
Si el auténtico *David* mide 4,34 metros de altura y tiene un volumen de 1,2 metros cúbicos, ¿cuál será el volumen de la escultura esculpida por el estudiante?

$\text{Razón} = \frac{60}{434}$

$\text{Volumen de la figura} = \left(\frac{60}{434}\right)^3 \cdot 1{,}2 = 0{,}003 \text{ m}^3 = 3 \text{ dm}^3$

5.47 **Una tienda de fotografía ofrece varios tamaños, en centímetros, para positivar el negativo de las diapositivas.**

9 × 12 12 × 15 14 × 18 20 × 30

¿En cuál de ellos se pierde menos contenido de la diapositiva si su tamaño es de 25 × 38 milímetros?

Si las dimensiones de los formatos no son semejantes a las de la diapositiva, siempre se perderá algo de la imagen. El formato que más se asemeje a la razón entre dimensiones será el que más aproveche la imagen.

$\frac{25}{38} = 0{,}66$

$\frac{9}{12} = 0{,}75 \qquad \frac{12}{15} = 0{,}8 \qquad \frac{14}{18} = 0{,}78 \qquad \frac{20}{30} = 0{,}67$

Con lo cual, el formato de 20 × 30 es el que más aprovecha el tamaño de la imagen retratada.

5.48 **Se quiere construir una cometa utilizando trozos de tela con forma de triángulo rectángulo de colores distintos. Para ello se cortan los triángulos por la altura sobre la hipotenusa, de forma que esta se divide en dos segmentos de 30 y 50 centímetros, respectivamente. ¿Qué área deben tener los triángulos originales?**

$h^2 = 30 \cdot 50 = 1500 \Rightarrow h = \sqrt{1500} = 10\sqrt{15} \Rightarrow A = \frac{(30 + 50) \cdot 10\sqrt{15}}{2} = 400\sqrt{15} \text{ cm}^2$

5.49 **Tres amigos están situados en línea recta pegados a la pared de la casa de una amiga que les habla desde una ventana.**
Uno de ellos se encuentra bajo la ventana, y los otros dos, a 5 y 3 metros a su izquierda y su derecha, respectivamente.
Si la chica observa a los de los extremos bajo un ángulo de 90º, ¿a qué altura está la ventana desde la que les habla?

$h^2 = 5 \cdot 3 = 15 \Rightarrow h = \sqrt{15}$ m es la distancia del amigo de en medio a la ventana.

Semejanza. Criterios de semejanza

5.50 **Si la distancia entre dos ciudades es de 650 kilómetros, al medir en un mapa a escala 1:300 000, ¿qué distancia se obtiene?**

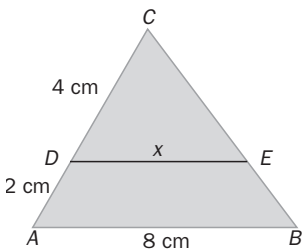
En la realidad: 650 km = 65 000 000 cm

En el mapa: 65 000 000 : 300 000 = 216,67 cm

5.51 **La razón de las áreas de dos hexágonos regulares es $\frac{49}{36}$. Si el lado de uno de ellos mide 18 centímetros, ¿cuál es el perímetro del otro?**

$\frac{A'}{A} = k^2 = \frac{49}{36} \Rightarrow k = \frac{7}{6} \Rightarrow l' = l \cdot k = 18 \cdot \frac{7}{6} = 21 \text{ cm} \Rightarrow p' = 21 \cdot 6 = 126 \text{ cm}$

5.52 **Halla el valor de *x* sabiendo que los lados *AB* y *DE* son paralelos.**

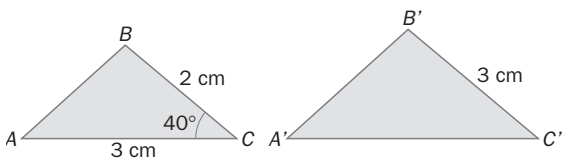


Por Tales sabemos que *CDE* y *CAB* son semejantes.

Razón $= \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

$\frac{3}{2}x = 8 \Rightarrow x = \frac{16}{3} = 5{,}33 \text{ cm}$

5.53 **Considera los triángulos *ABC* y *A'B'C'*. ¿Cuánto deben medir el lado *A'C'* y el ángulo $\widehat{C}'$ para que sean dos triángulos semejantes? ¿Qué criterio de semejanza utilizas?**

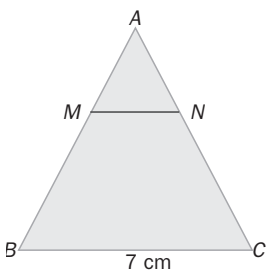


Si queremos que sean semejantes, el ángulo $\widehat{C}'$ debe valer 40º para ser igual al ángulo $\widehat{C}$, y los lados que forman dichos ángulos deben ser proporcionales:

$k = \frac{\frac{8}{5}}{2} = \frac{4}{5} \Rightarrow A'C' = 3 \cdot \frac{4}{5} = \frac{12}{5} = 2{,}4 \text{ cm}$

Consecuencias de los criterios de semejanza

5.54 **Si *M* y *N* son los puntos medios de los lados *AB* y *AC*, ¿cuánto mide el segmento *MN*?**



Por semejanza: $|MN| = \frac{1}{2}|BC| = \frac{1}{2}7 = \frac{7}{2} = 3{,}5 \text{ cm}$

5.55 **Los perímetros de dos triángulos isósceles son de 15 y 5 centímetros, respectivamente. ¿Cuál es la razón de semejanza?**

Si el lado desigual del primero mide 3 centímetros, ¿cuánto miden los lados del segundo?

$\frac{p'}{p} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$

Lado desigual $= 3 \cdot \frac{1}{3} = 1 \text{ cm}$

Lados iguales $= \frac{5-1}{2} = 2 \text{ cm}$

5.56 **Se realiza una fotocopia de un rectángulo de 8 centímetros de base y 6 de altura reduciendo su tamaño en un 25%. ¿Cuánto mide la diagonal del rectángulo fotocopiado?**

Por el teorema de Pitágoras: $d = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10$ cm

Si se reduce un 25%, queda un 75%; entonces, $k = 0{,}75$.

$d' = d \cdot k = 10 \cdot 0{,}75 = 7{,}5$ cm

5.57 **En un triángulo rectángulo, la altura sobre la hipotenusa la divide en dos segmentos que miden 4 y 16 centímetros, respectivamente. Halla el área de un triángulo semejante a él si la razón de semejanza es $k = \frac{1}{2}$.**

Por el teorema de la altura: $h^2 = 4 \cdot 16 = 64 \Rightarrow h = \sqrt{64} = 8$ cm

$A = \frac{(4 + 16) \cdot 8}{2} = 80$ cm^2

$\frac{A'}{A} = k^2 \Rightarrow A' = A \cdot k^2 = 80 \cdot \frac{1}{4} = 20$ cm^2

AMPLIACIÓN

5.58 **Un alumno de 4.º de ESO necesita para la realización de un trabajo una copia reducida de un dibujo rectangular de 35 centímetros de alto y 15 de ancho.**
¿Qué porcentaje de reducción tiene que aplicar para incluirlo en un hueco de 20 centímetros de alto?

Razón $= \frac{20}{35} = \frac{4}{7} < 0{,}58$ (se acota superiormente porque tiene que caber en el hueco)

Escala $= 58\% \Rightarrow$ Tiene que reducirlo un 42%.

5.59 **El Ayuntamiento de una ciudad tiene previsto construir una torre con las dimensiones del dibujo. Los profesionales que concursan para realizar el proyecto deben presentar una maqueta de 4,9 decímetros cúbicos. Calcula las dimensiones de la misma.**

Volumen real $= 7 \cdot 5 \cdot 10 + \frac{7 \cdot 5 \cdot 12}{3} = 350 + 140 = 490$ m^3 $= 490\,000$ dm^3

Razón $= \sqrt[3]{\frac{4{,}9}{490\,000}} = \sqrt[3]{0{,}000\,01} = 0{,}02$

Dimensiones:

$12 \times 0{,}02 = 0{,}24$ m $= 2{,}4$ dm
$5 \times 0{,}02 = 0{,}1$ m $= 1$ dm
$7 \times 0{,}02 = 0{,}14$ m $= 1{,}4$ dm
$10 \times 0{,}02 = 0{,}2$ m $= 2$ dm

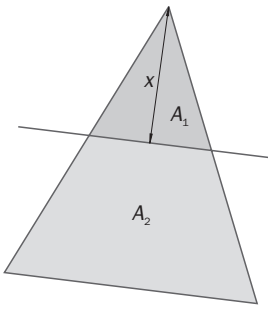
5.60 **La diagonal de una pista deportiva rectangular mide 13 metros y la razón entre sus lados es 2,4. Existe otra pista semejante con perímetro de 102 metros. ¿Cuánto mide su diagonal?**

$\frac{b}{a} = 2{,}4 \Rightarrow b = 2{,}4a$

$x + x + 2{,}4x + 2{,}4x = 102 \Rightarrow 6{,}8x = 102 \Rightarrow x = 15$ m $\Rightarrow 2{,}4x = 36$ m

Diagonal $= \sqrt{36^2 + 15^2} = 39$ m

5.61 **La altura del triángulo mayor de la figura es de 8 centímetros, y las bases de ambos son paralelas. Calcula el valor de x para que las áreas A_1 y A_2 sean iguales.**



En la figura se generan dos triángulos semejantes. Razón $= \frac{8}{x} b_2 = \frac{8}{x} b_1$

Área del triángulo pequeño $= \frac{b_1 \cdot x}{2}$

Área del triángulo grande $= \frac{b_2 \cdot 8}{2} = 4b_2$

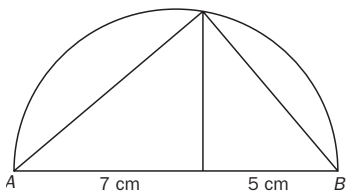
Área del trapecio $= \frac{(b_1 + b_2) \cdot (8 - x)}{2}$

Área del triángulo pequeño = área del trapecio

$$\frac{b_1 \cdot x}{2} = \frac{(b_1 + b_2) \cdot (8 - x)}{2} \Rightarrow b_1 \cdot x = \left(b_1 + \frac{8}{x} b_1\right)(8 - x) \Rightarrow x = \left(1 + \frac{8}{x}\right)(8 - x) \Rightarrow x = \frac{(x + 8)(8 - x)}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = 64 - x^2 \Rightarrow 2x^2 = 64 \Rightarrow x = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \text{ cm}$$

5.62 **Dibuja un cuadrado que tenga la misma área que un rectángulo cuyos lados miden 5 y 7 centímetros. Utiliza el teorema de la altura.**



$A_{\text{rectángulo}} = 5 \cdot 7 = 35 \text{ cm}^2$ $\quad A_{\text{cuadrado}} = 35 \text{ cm}^2 \Rightarrow \text{lado} = \sqrt{35} \text{ cm}$

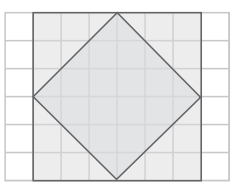
Para dibujar el lado $\sqrt{35}$ cm dibujamos un segmento AB de medida $5 + 7 = 12$ cm; con centro en el punto medio del segmento trazamos una semicircunferencia de radio 6 cm. A 7 cm de A trazamos una perpendicular a AB que se corte con la semicircunferencia. Este nuevo segmento será la altura del triángulo ABC. Además, por el teorema de la altura sabemos que $h^2 = 5 \cdot 7$; $h = \sqrt{35}$ cm = $\text{lado}_{\text{cuadrado}}$. Tomando esa medida con el compás podremos dibujar el cuadrado pedido.

PARA INTERPRETAR Y RESOLVER

5.63 **Figuras semejantes**

Determina si la figura interior es semejante a la exterior y calcula, si es posible, la razón de semejanza, la de los perímetros y la de las áreas.

a)



a) Para los cuadrados

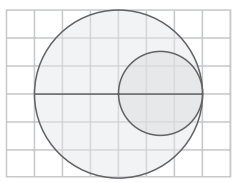
El lado del cuadrado menor es:

$$\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

La razón entre los perímetros es $\frac{7}{5}$.

La razón entre las áreas es $\frac{49}{25}$.

b)



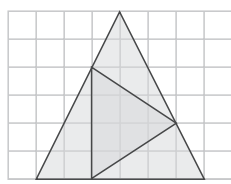
b) Para las circunferencias

La razón entre los perímetros es:

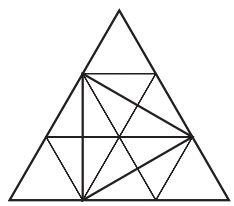
$$\frac{3}{1{,}5} = 2 \, .$$

La razón entre las áreas es $2^2 = 4$.

c)



c) Para los triángulos



La razón entre las áreas es:

$\frac{A_1}{A_2} = \frac{18}{6} = 3$

La razón entre los perímetros será $\sqrt{3}$.

5.64 **Latas de diseño**

Una conocida marca de refrescos ha diseñado una nueva forma de recipientes para su producto estrella. Las capacidades son de $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{2}$ de litro, respectivamente, y el diseño es el mismo para los dos, es decir, las latas son semejantes.

a) Calcula la altura de la lata grande sabiendo que la de la pequeña es de 12 centímetros.

b) Halla la superficie de la base de la lata pequeña sabiendo que la de la grande es de 75 centímetros cuadrados.

La razón de los volúmenes es: $\frac{V'}{V} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{2} = 1{,}5$

La razón de las medidas lineales será: $\frac{L'}{L} = \sqrt[3]{1{,}5} = 1{,}14$

La razón de las áreas será: $\frac{A'}{A} = \left(\sqrt[3]{1{,}5}\right)^2 = 1{,}30$

a) Si la altura de la lata menor es de 12 cm, la de la mayor será $h' = 12 \cdot 1{,}14 = 13{,}68$ cm.

b) Si la superficie de la base de la lata mayor es de 75 cm^2, la de la menor será $A = \frac{75}{1{,}3} = 57{,}69$ cm^2.

AUTOEVALUACIÓN

5.A1 **Indica cuáles de los siguientes pares de triángulos son semejantes y, en ese caso, calcula la razón de semejanza de sus lados.**

a) 3, 4, 5 y 4,5; 6; 7,5 cm

b) 2, 5, 6 y 4, 10, 11 cm

c) 5, 12, 13 y 12,5; 30; 32,5 cm

d) 4, 7, 10 y 2,4; 4,2; 6 cm

a) Sí $\Rightarrow k = \frac{3}{2}$ b) No c) Sí $\Rightarrow k = \frac{5}{2}$ d) Sí $\Rightarrow k = \frac{3}{5}$

5.A2 **Si ambas figuras son semejantes, calcula el área de *A* sabiendo que la de *B* es de 43 unidades cuadradas.**

Figura *A*

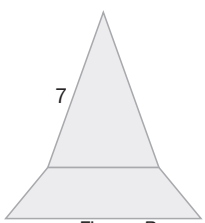


Figura *B*

Razón $= \frac{2}{7}$

$A = \left(\frac{2}{7}\right)^2 \cdot 43 = \frac{4}{49} \cdot 43 = \frac{172}{49} = 3{,}51$ u^2

5.A3 **Me han regalado una reproducción de la torre Eiffel a escala 1:4000 que mide 8 centímetros. ¿Cuál es la altura real del monumento?**

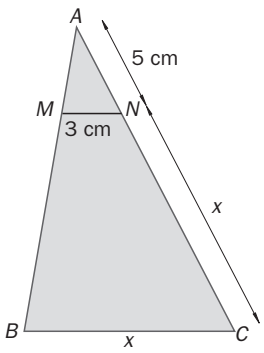
$8 \cdot 4000 = 32\,000$ cm $= 320$ m

5.A4 **Los catetos de un triángulo rectángulo miden 3 y 4 centímetros, respectivamente. Se quiere dibujar otro triángulo rectángulo semejante de modo que el cateto menor mida 6 centímetros. ¿Cuánto debe medir el otro cateto?**

Ya que los triángulos están en posición de Tales, son semejantes y, por tanto, sus lados son proporcionales:

$k = \frac{6}{3} = 2 \Rightarrow b = 4 \cdot 2 = 8$ cm

5.A5 **Considera los triángulos de la figura.**



a) ¿Cómo deben ser los lados *MN* y *BC* para que los triángulos *AMN* y *ABC* sean semejantes?

b) Halla el valor de *x*.

a) Deben ser paralelos.

b) $\frac{x+5}{5} = \frac{x}{3} \Rightarrow 3 \cdot (x+5) = 5x \Rightarrow 15 = 2x \Rightarrow x = \frac{15}{2} = 7{,}5$ cm

5.A6 **Calcula el perímetro de un rombo semejante a otro, cuyas diagonales miden 24 y 16 centímetros, si la razón de sus áreas es $k = \frac{1}{16}$.**

Por el teorema de Pitágoras:

$12^2 + 8^2 = l^2 \Rightarrow l = \sqrt{208} = 4\sqrt{13} \Rightarrow p = 4 \cdot l = 16\sqrt{13}$ cm

$\frac{A'}{A} = \frac{1}{16} = k^2 \Rightarrow k = \frac{1}{4}$

$\frac{p'}{p} = k \Rightarrow p' = k \cdot p = \frac{1}{4} \cdot 16\sqrt{13} = 4\sqrt{13}$ cm

5.A7 **En un triángulo rectángulo, la altura sobre la hipotenusa la divide en dos segmentos que miden 2 y 18 centímetros, respectivamente.**
Calcula el área de un triángulo rectángulo semejante con razón de semejanza $k = \frac{3}{2}$.

Por el teorema de la altura:

$h^2 = 18 \cdot 2 = 36 \Rightarrow h = \sqrt{36} = 6$ cm

$h' = h \cdot k = 6 \cdot \frac{3}{2} = 9$ cm

$b' = b \cdot k = 20 \cdot \frac{3}{2} = 30$ cm

$A = \frac{b' \cdot h'}{2} = \frac{30 \cdot 9}{2} = 135$ cm^2

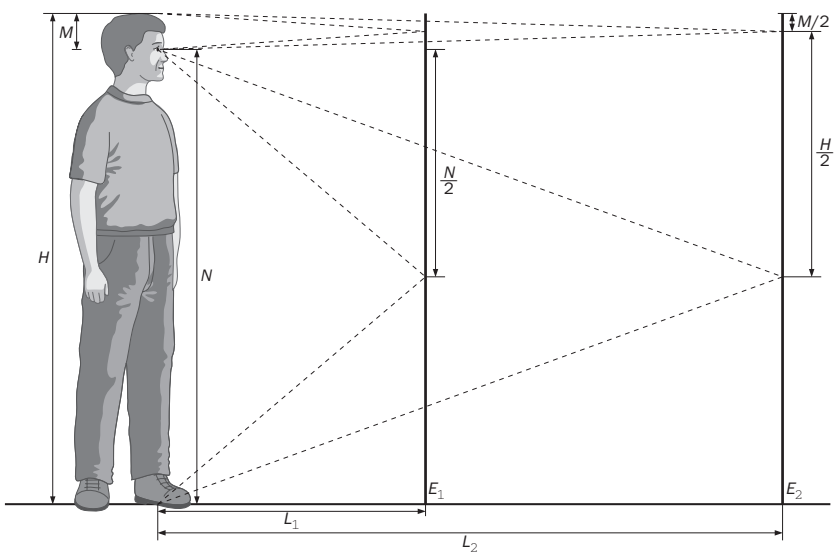
MURAL DE MATEMÁTICAS

MATETIEMPOS

El espejo

¿Qué dimensiones debe tener un espejo para que puedas verte en él a ti mismo por completo?

Cuando se plantea el problema las primeras ideas que se dan son que depende de la distancia a que esté el espejo o que el mismo tamaño que la persona. Haciendo un análisis más profundo se comprueba que ambas conjeturas son erróneas.
Plantearemos el siguiente gráfico:

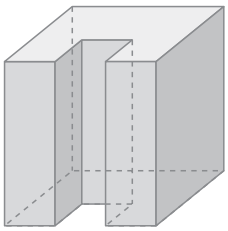


Podemos observar que el tamaño del espejo debe ser la mitad de la persona que mira y es independiente de la distancia a la que se lo coloque.

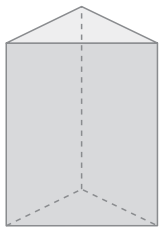
EJERCICIOS PROPUESTOS

10.1 Indica cuál de estos poliedros es cóncavo y cuál es convexo.

a)



b)



a) Cóncavo

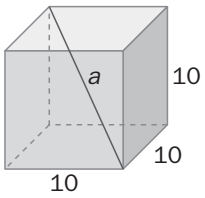
b) Convexo

10.2 Completa la siguiente tabla.

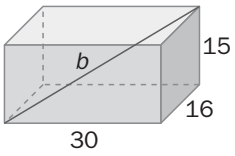
	Caras (C)	Vértices (V)	Aristas (A)	$C + V$	$A + 2$
Tetraedro	4	4	6	8	8
Cubo	6	8	12	14	14
Octaedro	8	6	12	14	14
Dodecaedro	12	20	30	32	32
Icosaedro	20	12	30	32	32

10.3 Halla el elemento desconocido en los siguientes prismas. Las medidas están dadas en centímetros.

a)



b)



a) Hallamos la diagonal de la base: $d = \sqrt{10^2 + 10^2} = \sqrt{200}$ cm

Y ahora la diagonal del prisma, por el teorema de Pitágoras:

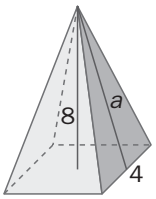
$a = \sqrt{\left(\sqrt{200}\right)^2 + 10^2} = \sqrt{300} = 10\sqrt{3}$ cm

b) Hallamos la diagonal de la base: $d = \sqrt{30^2 + 16^2} = \sqrt{1\,156} = 34$ cm

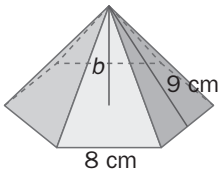
Y ahora la diagonal del prisma, por el teorema de Pitágoras: $b = \sqrt{34^2 + 15^2} = \sqrt{1\,381}$ cm

10.4 Calcula el elemento desconocido en estas pirámides. Las medidas están dadas en centímetros.

a)



b)



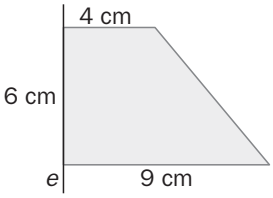
a) La base es un cuadrado, aplicamos el teorema de Pitágoras con catetos: 2 y 8

$a = \sqrt{8^2 + 2^2} = \sqrt{68} = 8{,}25$ cm

b) Sea h la apotema del hexágono, por Pitágoras: $h^2 = 8^2 - 4^2 \Rightarrow h = \sqrt{48} = 6{,}93$ cm

$b^2 + 6{,}93^2 = 9^2 \Rightarrow b^2 = 33 \Rightarrow b = 5{,}74$ cm

10.5 **¿Qué cuerpo geométrico se obtiene al girar el trapecio sobre el eje *e*? Halla la generatriz.**

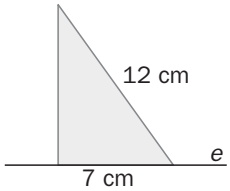


Se obtiene un tronco de cono.

Para el cálculo de la generatriz usamos el teorema de Pitágoras:

$g^2 = 6^2 + 5^2 = 61 \Rightarrow g = 7{,}81$ cm

10.6 **¿Qué cuerpo geométrico se obtiene al girar el triángulo sobre el eje *e*? ¿Cuánto mide el radio de la base?**

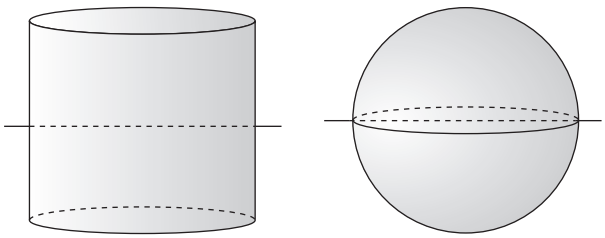


Se obtiene un cono.

El radio de la base es el cateto de longitud desconocida del triángulo, usamos Pitágoras para hallarlo.

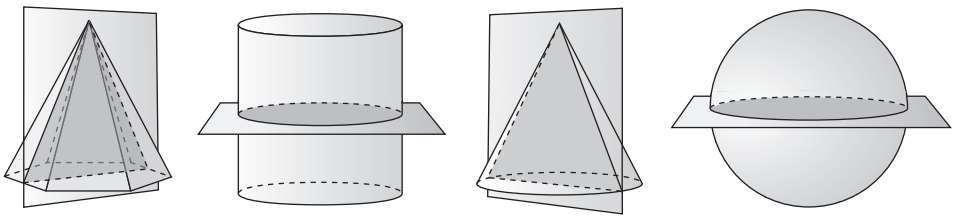
$12^2 = 7^2 + x^2 \Rightarrow x^2 = 95 \Rightarrow x = 9{,}75$ cm

10.7 **Para los cuerpos del ejercicio resuelto 3, traza, si es posible, otros ejes de simetría.**



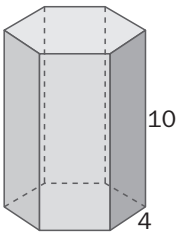
La pirámide y el cono no tienen más ejes de simetría.

10.8 **Para los cuerpos del ejercicio resuelto 3, traza, si es posible, otros planos de simetría.**

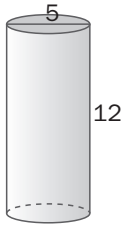


10.9 **Halla el área lateral y total de estos cuerpos. Las medidas están dadas en centímetros.**

a)



b)



a) $A_{\text{hexágono}} = 6\left(\frac{4h}{2}\right) = 12h = 12\sqrt{4^2 - 2^2} = 12\sqrt{12} = 41{,}57 \text{ cm}^2$

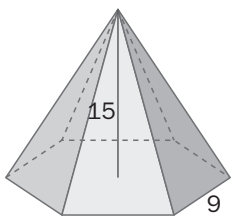
$A_{\text{lateral}} = 10 \cdot 24 = 240 \text{ cm}^2 \quad A_{\text{total}} = 240 + 2 \cdot 41{,}57 = 323{,}14 \text{ cm}^2$

b) $A_{\text{lateral}} = 2\pi rh = 2\pi \cdot 2{,}5 \cdot 12 = 60\pi = 188{,}4 \text{ cm}^2$

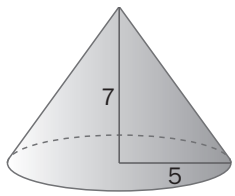
$A_{\text{cilindro}} = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 60\pi + 2\pi \cdot 2{,}5^2 = 72{,}5\pi = 227{,}77 \text{ cm}^2$

10.10 **Calcula el área lateral y total de los siguientes cuerpos, cuyas medidas están dadas en centímetros.**

a)



b)



a) Se calcula la longitud de arista lateral de la pirámide: $l = \sqrt{15^2 + 9^2} = 17{,}49$ cm

Se calcula la longitud de la apotema de la pirámide: $A = \sqrt{17{,}49^2 - 4{,}5^2} = 16{,}9$ cm

$A_{\text{lateral}} = \frac{p \cdot A}{2} = \frac{9 \cdot 6 \cdot 16{,}9}{2} = 456{,}3 \text{ cm}^2$

Se calcula la longitud de la apotema de la base: $a = \sqrt{9^2 - 4{,}5^2} = 7{,}8$ cm

$A_{\text{pirámide}} = \frac{p \cdot A}{2} + \frac{p \cdot a}{2} = 456{,}3 + \frac{9 \cdot 6 \cdot 7{,}8}{2} = 666{,}9 \text{ cm}^2$

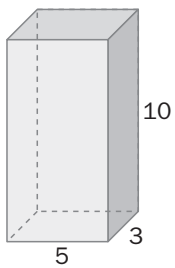
b) Se calcula la longitud de la generatriz: $g = \sqrt{7^2 + 5^2} = 8{,}6$ cm

$A_{\text{lateral}} = \pi rg = \pi \cdot 5 \cdot 8{,}6 = 43\pi = 135{,}02 \text{ cm}^2$

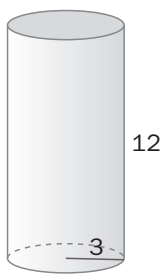
$A_{\text{cono}} = \pi rg + \pi r^2 = 43\pi + \pi \cdot 5^2 = 68\pi = 213{,}62 \text{ cm}^2$

10.11 **Calcula el volumen de los siguientes cuerpos. Las medidas están dadas en centímetros.**

a)



b)

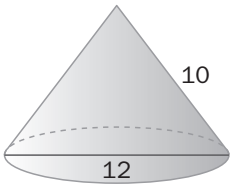


a) $V = A_{\text{base}} \cdot h = 5 \cdot 3 \cdot 10 = 150 \text{ cm}^3$

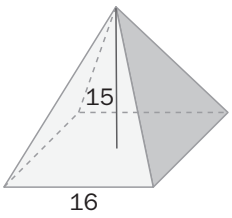
b) $V = \pi \cdot 3^2 \cdot 12 = 339{,}29 \text{ cm}^3$

10.12 **Halla el volumen de los siguientes cuerpos, cuyas medidas están dadas en centímetros.**

a)



b)



a) $V = \dfrac{\pi \cdot 6^2 \cdot 8}{3} = 301{,}59 \text{ cm}^3$

b) $V = \dfrac{16^2 \cdot 15}{3} = 1\,280 \text{ cm}^3$

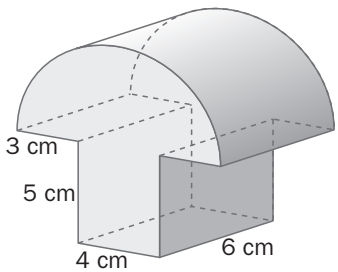
10.13 **Halla el volumen de una esfera cuyo diámetro mide 12 centímetros.**

$V = \dfrac{4}{3}\pi \cdot r^3 = 904{,}78 \text{ cm}^3$

10.14 **El volumen de una esfera es de 500 centímetros cúbicos. Calcula el área de dicha esfera.**

Se calcula la longitud del radio: $r = \sqrt[3]{\dfrac{3V}{4\pi}} = \sqrt[3]{\dfrac{3 \cdot 500}{4\pi}} = 4{,}9 \text{ cm} \Rightarrow A = 4\pi \cdot r^2 = 301{,}57 \text{ cm}^2$

10.15 **Calcula el área y el volumen de este cuerpo.**

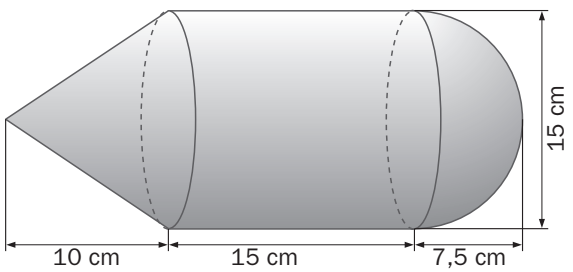


$A_1 = \pi \cdot 5 \cdot 6 + \pi \cdot 5^2 + 36 = 55\pi + 36 = 208{,}7 \text{ cm}^2$; $A_2 = 2 \cdot 4 \cdot 5 + 2 \cdot 5 \cdot 6 + 6 \cdot 4 = 40 + 60 + 24 = 124 \text{ cm}^2$

$A = 208{,}7 + 124 = 332{,}7 \text{ cm}^2$

$V_1 = \dfrac{\pi \cdot r^2 h}{2} = \dfrac{\pi \cdot 5^2 \cdot 6}{2} = 235{,}5 \text{ cm}^3$; $V_2 = 5 \cdot 4 \cdot 6 = 120 \text{ cm}^3 \Rightarrow V = 235{,}5 + 120 = 355{,}5 \text{ cm}^3$

10.16 **Determina el área y el volumen del siguiente cuerpo.**



Se calcula la longitud de la generatriz del cono: $g = \sqrt{10^2 - 7{,}5^2} = 6{,}61 \text{ cm}$

$A_1 = \pi \cdot r \cdot g = \pi \cdot 7{,}5 \cdot 6{,}61 = 155{,}67 \text{ cm}^2$; $A_2 = 2\pi \cdot r \cdot h = 2\pi \cdot 7{,}5 \cdot 15 = 706{,}5 \text{ cm}^2$; $A_3 = 2\pi \cdot 7{,}5^2 = 353{,}25 \text{ cm}^2$

$A = 155{,}67 + 706{,}5 + 353{,}25 = 1\,215{,}42 \text{ cm}^2$

$V_1 = \dfrac{\pi r^2 h}{3} = \dfrac{\pi \cdot 7{,}5^2 \cdot 10}{3} = 588{,}75 \text{ cm}^3$; $V_2 = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 7{,}5^2 \cdot 15 = 2\,649{,}38 \text{ cm}^3$;

$V_3 = \dfrac{2\pi r^3}{3} = \dfrac{2\pi \cdot 7{,}5^3}{3} = 883{,}13 \text{ cm}^3 \Rightarrow V = 588{,}75 + 2\,649{,}38 + 883{,}13 = 4\,121{,}26 \text{ cm}^3$

10.17 **Dos ciudades se encuentran situadas sobre dos meridianos que forman un ángulo de 225°. ¿Cuál será su diferencia horaria?**

$\frac{225}{15} = 15$ horas

10.18 **Halla el área de la superficie terrestre sabiendo que el radio de la Tierra mide, aproximadamente, 6 371 kilómetros.**

$A = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 6\,371^2 = 509\,805\,891 \text{ km}^2$

10.19 **Halla la distancia entre los dos puntos terrestres. *A*(10° O, 25° S) *B*(10° O, 55° S)**

Como están en el mismo meridiano (10° O), la distancia en grados es $55° - 25° = 30°$.

$$\text{dist} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 30° \cdot 6\,371}{360} = 3\,334{,}16 \text{ km}$$

10.20 **Las coordenadas geográficas de una ciudad son (15° E, 45° N). ¿Cuál es la distancia al ecuador medida sobre el meridiano de dicha ciudad?**

$$\text{Como está a } 45° \text{ N} \Rightarrow \text{dist} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 45° \cdot 6\,371}{360} = 5\,001{,}24 \text{ km}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

10.21 **Una empresa que fabrica caramelos en forma de cubo de 1 centímetro de arista quiere preparar paquetes de 4 caramelos. ¿Qué tipo de envasado deberá realizar para reducir los costes al mínimo?**

Se colocan los caramelos de manera que formen un ortoedro de dimensiones $2 \times 2 \times 1$ cm.

10.22 **Las medidas, en centímetros, de un tetrabrik de leche son: $16{,}5 \times 9{,}5 \times 6$. Un fabricante quiere empaquetar 12 tetrabriks. ¿Cómo debe envasarlos para que el gasto sea mínimo?**

Se colocan de manera que formen un ortoedro de dimensiones $3 \times 2 \times 2$ tetrabriks, donde la altura es 33 cm ($16{,}5 \times 2$), la longitud 19 cm ($9{,}5 \times 2$) y la anchura 18 cm (6×3). La superficie del plástico necesario es 3126 cm^2.

EJERCICIOS PARA ENTRENARSE

Poliedros y cuerpos redondos. Propiedades

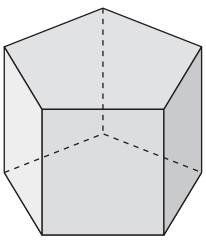
10.23 **Un poliedro regular tiene 8 vértices y 12 aristas. Utiliza la fórmula de Euler para saber de qué poliedro se trata.**

$C + V = A + 2$; $C = A - V + 2 \Rightarrow C = 12 - 8 + 2 = 6$. Se trata de un cubo.

10.24 **Queremos construir con alambre el esqueleto de un tetraedro de 8 centímetros de arista. ¿Cuánto alambre necesitamos?**

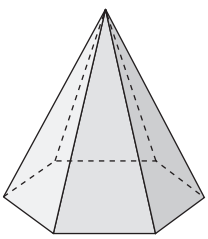
Como el tetraedro tiene 6 aristas, son necesarios $6 \cdot 8 = 48$ cm de alambre.

10.25 **Dibuja un prisma pentagonal recto, e indica cuántas aristas, cuántas caras y cuántos vértices tiene.**



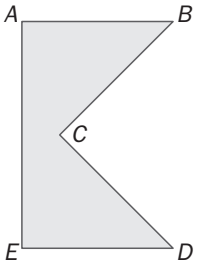
El prisma tiene 15 aristas, 7 caras y 10 vértices.

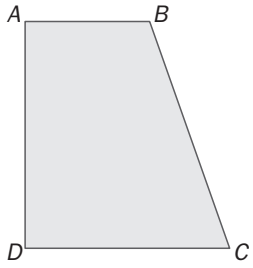
10.26 **Dibuja una pirámide hexagonal recta, e indica cuántas aristas, cuántas caras y cuántos vértices tiene.**



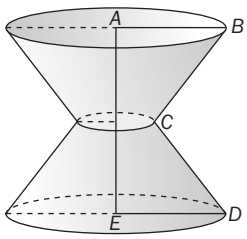
La pirámide tiene 12 aristas, 7 caras y 7 vértices.

10.27 **Dibuja la figura que se obtiene al hacer girar los siguientes polígonos sobre el lado que se indica.**

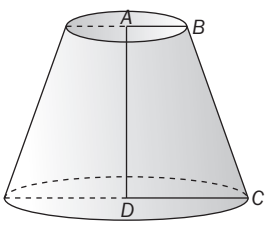




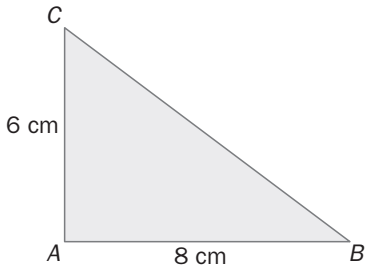
a) Lado *AE*



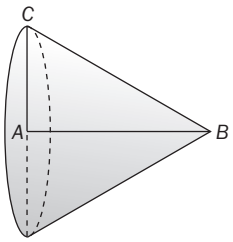
b) Lado *AD*



10.28 **El triángulo rectángulo *BAC* de la figura se hace girar sobre el cateto *AB*. Dibuja el cuerpo que se obtiene y calcula la longitud de su generatriz.**



Generatriz: $g = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ cm

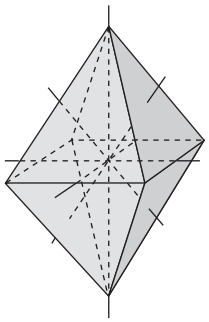


10.29 **Las aristas del ortoedro de la figura miden 12, 4 y 3 centímetros, respectivamente. Halla la longitud de la diagonal *d*.**

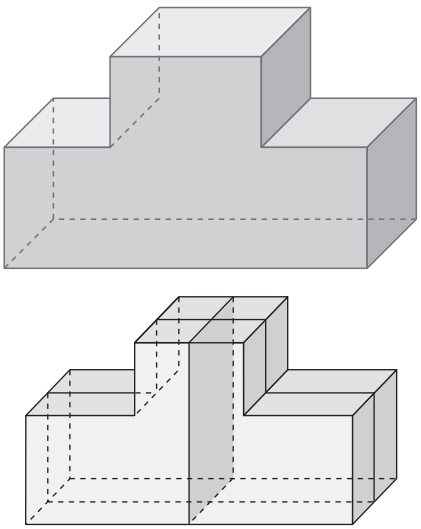
$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{12^2 + 3^2 + 4^2} = 13$ cm

Simetría en poliedros y cuerpos redondos

10.30 **Dibuja todos los ejes de simetría que se pueden trazar en un octaedro.**



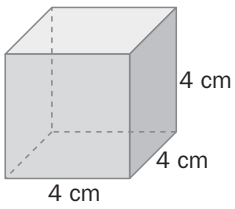
10.31 **Queremos cortar el cuerpo de la figura, de manera que quede dividido en dos trozos exactamente iguales. Dibuja todos los posibles planos de simetría para resolver el problema**



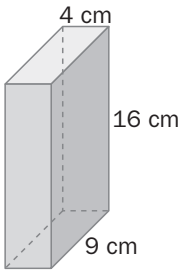
Áreas y volúmenes de poliedros, cilindros y conos

10.32 Calcula el área lateral y el área total de los siguientes cuerpos.

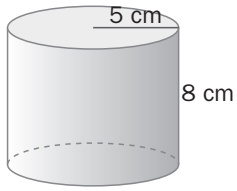
a)



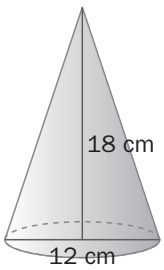
b)



c)



d)



a) $A_{\text{lateral}} = 4a^2 = 4 \cdot 4^2 = 64 \text{ cm}^2$; $A_{\text{cubo}} = 6a^2 = 6 \cdot 4^2 = 96 \text{ cm}^2$

b) $A_{\text{lateral}} = p \cdot h = 2 \cdot (4 + 9) \cdot 16 = 416 \text{ cm}^2$; $A_{\text{poliedro}} = p \cdot h + 2 \text{ Área base} = 416 + 2 \cdot 9 \cdot 4 = 488 \text{ cm}^2$

c) $A_{\text{lateral}} = 2\pi rh = 2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot 8 = 251{,}2 \text{ cm}^2$; $A_{\text{cilindro}} = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 251{,}2 + 2 \cdot \pi \cdot 5^2 = 251{,}2 + 157 = 408{,}2 \text{ cm}^2$

d) Se calcula la longitud de la generatriz: $g = \sqrt{18^2 + 6^2} = 18{,}97 \text{ cm}$

$A_{\text{lateral}} = \pi rg = \pi \cdot 6 \cdot 18{,}97 = 357{,}39 \text{ cm}^2$; $A_{\text{cono}} = \pi rg + \pi r^2 = 357{,}39 + \pi \cdot 6^2 = 470{,}43 \text{ cm}^2$

10.33 Un prisma recto, cuya base es un rectángulo de dimensiones 5 y 6 centímetros, tiene una altura de 15 centímetros. Calcula su volumen.

$V = \text{Área base} \cdot h = 5 \cdot 6 \cdot 15 = 450 \text{ cm}^3$

10.34 La generatriz de un cono mide 6 centímetros y el radio de su base mide 3 centímetros. Calcula:

a) La altura del cono.

b) Su área lateral.

c) Su área total.

d) Su volumen.

a) Se calcula la altura aplicando el teorema de Pitágoras: $\sqrt{6^2 - 3^2} = 5{,}2 \text{ cm}$

b) $A_{\text{lateral}} = \pi rg = \pi \cdot 3 \cdot 6 = 56{,}52 \text{ cm}^2$

c) $A_{\text{cono}} = \pi rg + \pi r^2 = 56{,}52 + \pi \cdot 3^2 = 84{,}78 \text{ cm}^2$

d) $V = \dfrac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} = \dfrac{3{,}14 \cdot 32 \cdot 5{,}2}{3} = 48{,}984 \text{ cm}^3$

10.35 El volumen de un depósito cilíndrico es 1 695,60 metros cúbicos y el radio de su base mide 6 metros. Calcula la altura del depósito.

Se sustituyen los datos en la fórmula:

$V_{\text{cilindro}} = \text{Área base} \cdot h$; $1\,695{,}6 = \pi \cdot 6^2 \cdot h$

Se despeja la altura: $h = \dfrac{1\,695{,}6}{\pi \cdot 6^2} = 15 \text{ cm}$

10.36 **Las pirámides de los faraones Keops y Micerinos se pueden encontrar muy próximas en Gizeh, aunque con proporciones bien distintas. La pirámide de Keops tiene una base cuadrada de lado 230 metros y de altura 147 metros. El lado de la base cuadrada de la pirámide de Micerinos es 105 metros y la altura 65 metros.**

a) Calcula el volumen de cada una de ellas.

b) ¿Cuántas veces es mayor la pirámide de Keops respecto a la de Micerinos?

a) $V_{\text{pirámide Keops}} = \dfrac{230^2 \cdot 147}{3} = 2\,592\,100 \text{ m}^3$

$V_{\text{pirámide Micerinos}} = \dfrac{105^2 \cdot 65}{3} = 238\,875 \text{ m}^3$

b) $\dfrac{2\,592\,100}{238\,875} = 10{,}85$

El volumen de la pirámide de Keops es 10,85 veces mayor que el de la de Micerinos.

La esfera

10.37 **Calcula el área de una superficie esférica cuyo radio mide 7 centímetros.**

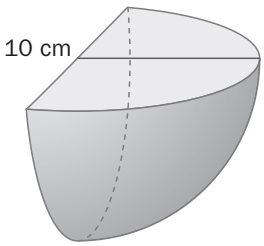
$A = 4\pi \cdot r^2 = 4\pi \cdot 7^2 = 615{,}44 \text{ cm}^2$

10.38 **Halla el volumen de una esfera cuyo diámetro mide 18 centímetros.**

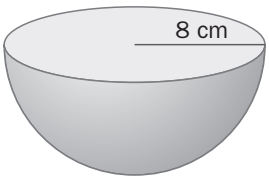
$V = \dfrac{4}{3}\pi \cdot r^3 = \dfrac{4}{3}\pi \cdot 9^3 = 3\,052{,}08 \text{ cm}^3$

10.39 **Averigua el volumen de cada uno de estos cuerpos.**

a)



b)



a) $V = \dfrac{1}{3}\pi \cdot r^3 = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 10^3 = 1\,047{,}20 \text{ cm}^3$

b) $V = \dfrac{2}{3}\pi \cdot r^3 = \dfrac{2}{3}\pi \cdot 8^3 = 1\,072{,}33 \text{ cm}^3$

10.40 **Calcula el volumen de una esfera cuya superficie esférica mide 1 256 centímetros cuadrados.**

Se calcula la longitud del radio: $r = \sqrt{\dfrac{S}{4\pi}} = \sqrt{\dfrac{1\,256}{4\pi}} = 10 \text{ cm}$

Se calcula el volumen: $V = \dfrac{4}{3}\pi \cdot r^3 = 4\,186{,}67 \text{ cm}^3$

10.41 **En una superficie esférica de radio 10 centímetros, se tiene una circunferencia máxima y una circunferencia menor paralela a ella.**

Calcula la distancia entre sus centros sabiendo que el radio de la circunferencia menor es 5 centímetros.

Se aplica el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo formado por los dos radios y el segmento que une los dos centros:

$d = \sqrt{10^2 - 5^2} = 8{,}66$ cm

La Tierra. Coordenadas geográficas

10.42 **Calcula la superficie de cada uno de los husos horarios, sabiendo que el radio de la Tierra es, aproximadamente, 6 371 kilómetros.**

$$A = \frac{4 \cdot \pi \cdot 6\,371}{24} = 21\,252\,686{,}33 \text{ km}^2$$

10.43 **Calcula la distancia que recorre un avión que vuela entre un punto de Europa de coordenadas geográficas (8° E, 45° N) y otro de América de coordenadas (70° O, 45° N), siguiendo el paralelo común.**

Como tiene la misma latitud y es 45° N, el avión sigue una circunferencia de radio:

$r^2 + r^2 = 6\,371^2 \Rightarrow r = 4\,505$ km

El ángulo que recorre es $70° + 8° = 78°$

$$\text{dist} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 4\,505 \cdot 78}{360} = 6\,132{,}91 \text{ km}$$

10.44 **Dos puntos *A* y *B* situados sobre el Ecuador tienen de longitud 20° E y 20° O. ¿Cuál es la distancia entre ambos? Recuerda que el Ecuador mide 40 030 km.**

$$\text{dist} = \frac{40\,030 \cdot 40}{360} = 4\,447{,}78 \text{ km}$$

CUESTIONES PARA ACLARARSE

10.45 ¿Qué nombre recibe la pirámide que tiene todas sus caras iguales?

Tetraedro.

10.46 ¿Qué cuerpo geométrico se forma al unir los centros de las caras de un tetraedro?

Un tetraedro.

10.47 Razona si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones.

a) Los cilindros son poliedros.

b) Un prisma regular recto pentagonal tiene siete caras.

c) El menor número de caras que concurren en el vértice de un poliedro es tres.

d) En cualquier poliedro todas las caras son iguales.

a) Falso, ya que los cilindros no tienen sus caras planas.

b) Verdadero, cinco caras laterales y dos de las bases.

c) Verdadero, ya que de lo contrario no se podría formar el poliedro.

d) Falso, hay poliedros que no tiene todas sus caras iguales.

10.48 ¿Cuántos ejes de simetría puedes trazar en una esfera?

Tantos como se quiera siempre que pasen por el centro de la esfera.

10.49 Describe los planos de simetría de un cilindro.

Todos los planos que incluyan el segmento formado al unir los centros de las circunferencias de las bases son planos de simetría del cilindro. Además el plano paralelo a las bases que divide al cilindro en dos partes iguales también es plano de simetría.

10.50 ¿Qué condición tienen que cumplir los planos de simetría de una esfera?

Que pasen por el centro de la esfera.

10.51 Si el área total de un tetraedro es 48 centímetros cuadrados, ¿cuánto mide el área de su base?

El área del tetraedro está formado por 4 triángulos equiláteros iguales luego el área de la base, es la de uno de los triángulos, por tanto:

$$A_{\text{base}} = \frac{48}{4} = 12$$

10.52 Un cilindro y un cono tienen la misma base y el mismo volumen. ¿Qué diferencia de altura existe entre ambos?

El cono debe ser tres veces más alto.

10.53 **Disponemos de un cubo y de una esfera que tienen el mismo volumen, 125 centímetros cúbicos. ¿Cuál de ellos tiene mayor superficie?**

Calculamos la arista del cubo: $a = \sqrt[3]{125} = 5$

Calculamos la superficie del cubo: $S = 6a^2 = 6 \cdot 5^2 = 150$ cm^2

Se calcula la longitud del radio: $r = \sqrt[3]{\dfrac{3V}{4\pi}} = \sqrt[3]{\dfrac{3 \cdot 125}{4\pi}} = 3{,}1$ cm

Se calcula el área: $A = 4\pi \cdot r^2 = 120{,}7$ cm^2

Tiene mayor superficie el cubo.

10.54 **Dos esferas de radios 5 y 7 centímetros tienen un solo punto en común. ¿Qué distancia hay entre sus centros?**

Como las circunferencias son tangentes, la distancia entre sus centros es la suma de sus radios.

$5 + 7 = 12$

La distancia entre sus centros es 12 cm.

10.55 **Una esfera y una semiesfera tienen el mismo volumen. ¿Qué relación existe entre sus radios?**

Se despeja de la fórmula el radio de la esfera: $r = \sqrt[3]{\dfrac{3V}{4\pi}}$

Se despeja de la fórmula el radio de la semiesfera: $R = \sqrt[3]{\dfrac{3V}{2\pi}}$

Se calcula el cociente de los radios: $\sqrt[3]{\dfrac{\dfrac{3V}{4\pi}}{\dfrac{3V}{2\pi}}} = \sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}$

Luego el radio de la esfera es $\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}$ el de la semiesfera.

10.56 **Encuentra la relación que existe entre los volúmenes de un cono y de un cilindro, cuyas bases y alturas miden lo mismo.**

Observando las fórmulas, el volumen del cono es la tercera parte del volumen del cilindro.

10.57 **¿Existe algún paralelo que mida lo mismo que un meridiano? En caso afirmativo, di cuál es.**

Sí. El ecuador.

10.58 **¿Cuántos grados abarca un huso horario?**

$\dfrac{360}{24} = 15°$

10.59 **¿Cuáles son las coordenadas geográficas del polo Norte y del polo Sur?**

Polo Norte (0°, 90° N). Polo Sur (0°, 90° S)

PROBLEMAS PARA APLICAR

10.60 **Calcula la cantidad de lámina de hojalata necesaria para fabricar un bote de conservas de forma cilíndrica, cuya base tiene un diámetro de 16 centímetros y cuya altura mide 20 centímetros.**

$A_{\text{cilindro}} = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi \cdot 8 \cdot 20 + 2\pi \cdot 8^2 = 448\pi = 1\,406{,}72 \text{ cm}^2$

Se necesitan 1 406,72 cm^2 de lámina.

10.61 **Una apisonadora tiene un rodillo de 1,20 metros de diámetro y 2,30 metros de largo.**

¿Qué superficie de tierra apisona en cada vuelta de rodillo?

La superficie apisonada, es igual al área lateral del cilindro del rodillo:

$A_{\text{lateral}} = 2\pi rh = 2\pi \cdot 0{,}6 \cdot 2{,}3 = 8{,}67 \text{ m}^2$

La superficie que apisona en cada vuelta es 8,67 m^2.

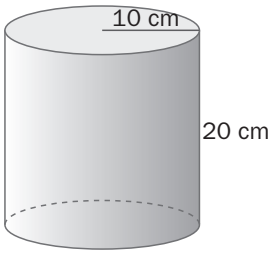
10.62 **Una fábrica de bastones recibe un pedido de cajas de 80 centímetros de alto, 7 centímetros de ancho y 3 centímetros de largo. Calcula cuánto mide el bastón más largo que se puede embalar en una de estas cajas.**

La distancia mayor que quepa dentro de la caja es la diagonal.

Se calcula la diagonal: $D = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{7^2 + 3^2 + 80^2} = 80{,}36$ cm

El bastón más largo que se puede embalar en las cajas es 80,36 cm

10.63 **Una empresa dona a una ONG 1 000 000 centímetros cúbicos de leche en polvo. Para envasarla, utilizan unos botes como los de la figura.**



¿Cuántas unidades se necesitan?

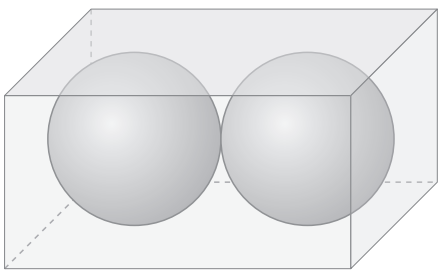
Se calcula el volumen del cilindro: $V = \text{Área base} \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 10^2 \cdot 20 = 6\,280 \text{ cm}^3$

Se calcula el número de botes necesario: $\dfrac{1\,000\,000}{6\,280} = 159{,}2$

Se necesitan 160 unidades.

10.64 **En la caja de la figura se quieren guardar dos esferas macizas de 10 centímetros de radio.**

¿Qué volumen ocupa el aire que queda en la caja?



$V_{\text{caja}} = 20 \cdot 10 \cdot 10 = 2\,000 \text{ cm}^3$; $V_{\text{esferas}} = \dfrac{2 \cdot 4 \cdot \pi \cdot 5^3}{3} = 1\,047{,}2 \text{ cm}^3$

$V_{\text{aire}} = 2\,000 - 1\,047{,}2 = 952{,}8 \text{ cm}^3$

10.65 **El volumen de un depósito cilíndrico es 1 695,60 metros cúbicos y el radio de su base mide 6 metros. Calcula la altura del depósito.**

Se despeja de la fórmula la altura del cilindro:

$h = \dfrac{V}{\text{Área base}}$ $\qquad$ $h = \dfrac{1\,695{,}6}{\pi \cdot 6^2} = 15$ m

La altura del depósito es 15 metros.

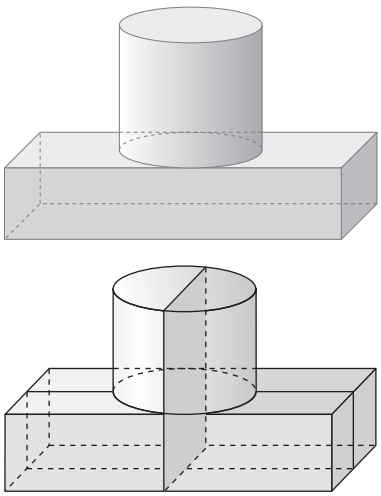
10.66 **Un obelisco está formado por un prisma recto de base cuadrada coronado por una pirámide. El lado de la base mide 80 centímetros, mientras que la altura del prisma es de 10 metros y la altura total del obelisco es de 13 metros. Halla su volumen.**

$V_{\text{prisma}} = \text{Área base} \cdot h = 0{,}8^2 \cdot 10 = 6{,}4$ m^3

$V_{\text{pirámide}} = \dfrac{\text{Área base} \cdot h}{3} = \dfrac{0{,}8^2 \cdot 3}{3} = 0{,}64$ m^3

$V_{\text{obelisco}} = 6{,}4 + 0{,}64 = 7{,}04$ m^3

10.67 **El pedestal de una estatua como el de la figura, se quiere dividir en dos partes iguales. ¿De cuántas maneras se ç hacer?**



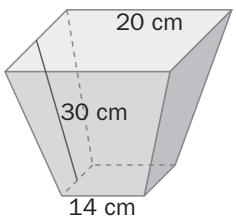
Se puede hacer de dos maneras distintas.

10.68 **Un recipiente tiene forma de tronco de pirámide cuadrangular como el de la figura. Calcula:**

a) La altura del recipiente.

b) El área lateral.

c) El área total (observa que está abierto por arriba).

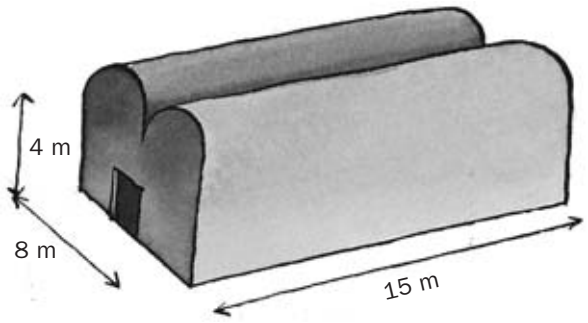


a) Se aplica el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo que tiene por hipotenusa la apotema del tronco de pirámide y por catetos la altura del tronco y la mitad de la diferencia de los lados de las bases. $h = \sqrt{30^2 - 3^2} = 29{,}85$ cm

b) $A_{\text{lateral}} = \dfrac{\text{Suma perímetros bases} \cdot \text{apotema tronco}}{2} = \dfrac{(4 \cdot 20 + 4 \cdot 14) \cdot 30}{2} = 2\,040$ cm^2

c) $A = A_{\text{lateral}} + A_{\text{base}} = 2\,040 + 14^2 = 2\,236$ cm^2

10.69 **La nave de un almacén tiene la forma indicada en la figura. Determina el volumen de la nave.**



La figura se puede descomponer en dos semicilindros y un ortoedro.

Se calcula el volumen de los semicilindros: $V =$ Área base $\cdot\ h = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 2^2 \cdot 15 = 188{,}4\ \text{m}^3$

Se calcula el volumen del ortoedro: $V =$ Área base $\cdot\ h = 15 \cdot 8 \cdot 4 = 480\ \text{m}^3$

El volumen de la nave es $188{,}4 + 480 = 668{,}4\ \text{m}^3$

10.70 **Dos puntos de la esfera terrestre se dice que están situados en las antípodas cuando son diametralmente opuestos; es decir, el segmento que los une pasa por el centro de la Tierra. Calcula las coordenadas de las antípodas de Roma cuyas coordenadas geográficas son (12° 40′ E, 41° 50′ N).**

(12° 40′ O, 41° 50′ S)

REFUERZO

Poliedros

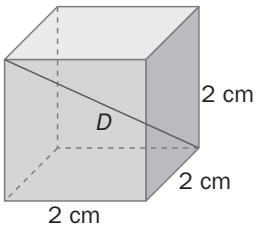
10.71 Señala cuántas caras, aristas y vértices tiene una pirámide hexagonal recta, y comprueba que verifica la fórmula de Euler.

Una pirámide hexagonal recta tiene 7 caras, 12 aristas y 7 vértices.

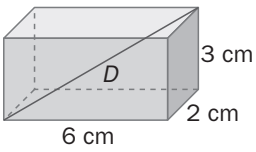
Se comprueba que verifica la fórmula de Euler: $C + V = A + 2$; $7 + 7 = 12 + 2$; $14 = 14$

10.72 Calcula los elementos que están señalados con una letra en los siguientes cuerpos.

a)



b)

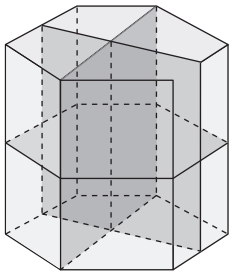


a) Se calcula la diagonal: $D = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} = 3{,}46$ cm

b) Se calcula la diagonal: $D = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + \sqrt{6^2 + 2^2 + 3^2} = 7$ cm

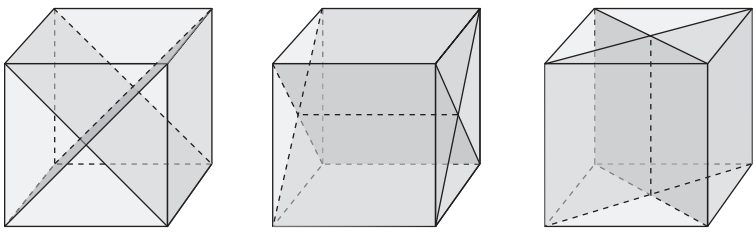
Simetría en poliedros y cuerpos redondos

10.73 Dibuja los planos de simetría de un prisma hexagonal recto.



Además de los de la figura hay otros 4 planos de simetría verticales análogos a los ya representados.

10.74 Dibuja todos los planos de simetría de un cubo que pasen por dos aristas opuestas. ¿Cuántos hay?

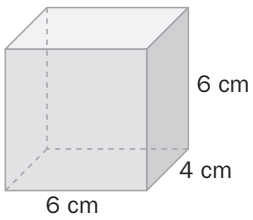


Hay 6 planos de simetría.

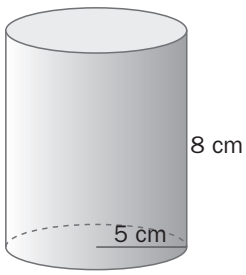
Áreas y volúmenes de cuerpos geométricos

10.75 **Halla el área lateral, el área total y el volumen de estos cuerpos geométricos.**

a)



b)

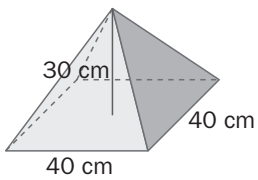


a) $A_l = 20 \cdot 6 = 120\ cm^2$; $A_t = 120 + 2 \cdot 6 \cdot 4 = 168\ cm^2$, $V = 4 \cdot 6 \cdot 6 = 144\ cm^3$

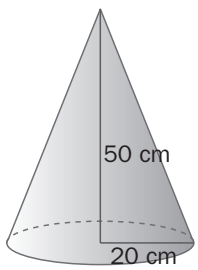
b) $A_l = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 5 \cdot 8 = 251{,}2\ cm^2$; $A_t = 251{,}2 + 2 \cdot 3{,}14 \cdot 5^2 = 408{,}2\ cm^2$, $V = 3{,}14 \cdot 5^2 \cdot 8 = 628\ cm^3$

10.76 **Averigua el área lateral, el área total y el volumen de los siguientes cuerpos geométricos.**

a)



b)



a) $h = \sqrt{30^2 + 20^2} = 36{,}1$ cm; $A_l = 4 \cdot \dfrac{40 \cdot 36{,}1}{2} = 2\,888\ cm^2$; $A_t = 2\,888 + 40^2 = 4\,488\ cm^2$

$V = \dfrac{40^2 \cdot 30}{3} = 16\,000\ cm^3$

b) $g = \sqrt{20^2 + 50^2} = 53{,}85$; $A_l = \pi \cdot 20 \cdot 53{,}85 = 3\,383{,}6\ cm^2$; $A_t = 3\,381{,}78 + \pi \cdot 20^2 = 4\,640{,}24\ cm^2$

$V = \dfrac{\pi \cdot 20^2 \cdot 50}{3} = 20\,943{,}95\ cm^3$

10.77 **Un triángulo rectángulo, cuyos catetos miden 3 y 4 centímetros, respectivamente, gira alrededor del cateto mayor. Calcula el área total y el volumen del cuerpo que genera.**

$A_t = 3{,}14 \cdot 3 \cdot 5 + 3{,}14 \cdot 3^2 = 75{,}36\ cm^2$

$V = \dfrac{3{,}14 \cdot 3^2 \cdot 4}{3} = 37{,}68\ cm^3$

La esfera y la Tierra

10.78 **Halla el área y el volumen de las siguientes esferas.**

a) Radio = 10 cm **b) Diámetro = 31 cm**

a) $A = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 10^2 = 1\,256\ cm^2$; $V = \dfrac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 10^3}{3} = 4\,186{,}67\ cm^3$

b) $A = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 15{,}5^2 = 3\,017{,}54\ cm^2$; $V = \dfrac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 15{,}5^3}{3} = 15\,590{,}62\ cm^3$

10.79 **Una circunferencia, cuya longitud es de 15,70 centímetros, gira alrededor de un diámetro generando una esfera. Calcula el volumen de dicha esfera.**

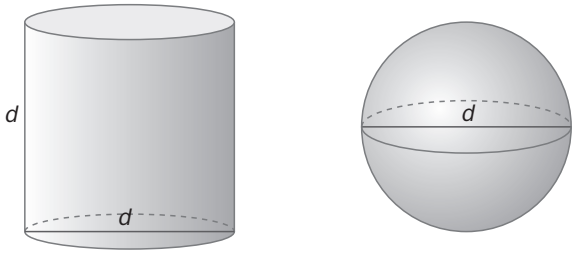
$$15{,}70 = 2 \cdot 3{,}14 \cdot r \Rightarrow r = 2{,}5 \text{ cm} \Rightarrow V = \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 2{,}5^3}{3} = 65{,}42 \text{ cm}^3$$

10.80 **Dos puntos, *A* y *B*, situados sobre el ecuador, tienen de longitud 30° E y 15° O, respectivamente. ¿Cuál es la distancia entre ambos? Recuerda que el ecuador mide 40 030 kilómetros.**

$$\text{dist} = \frac{40\,030 \cdot 45}{360} = 5\,003{,}75 \text{ km}$$

AMPLIACIÓN

10.81 **Halla la relación que existe entre el volumen de la esfera y el del cilindro de la figura, sabiendo que el diámetro de la base del cilindro, su altura y el diámetro de la esfera miden lo mismo.**



$$V_{\text{cilindro}} = \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot d = \frac{\pi \cdot d^3}{4};\ V_{\text{esfera}} = \frac{4 \cdot \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^3}{3} = \frac{\pi \cdot d^3}{6} \Rightarrow 2V_{\text{cilindro}} = 3V_{\text{esfera}}$$

10.82 **Un barco está situado en un punto de coordenadas (20° O, 60° S) y avanza en dirección este 15° sobre el mismo paralelo.**

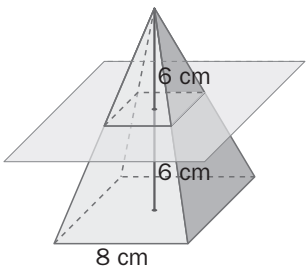
a) ¿En qué punto se encontrará situado? **b) ¿Cuántos kilómetros ha recorrido?**

a) (5° O, 60° S)

b) $r = \frac{6\,371}{2} = 3\,185{,}5 \text{ km} \Rightarrow \text{dist} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 3\,185{,}5 \cdot 15}{360} = 833{,}96 \text{ km}$

10.83 **La pirámide de la figura se corta con un plano paralelo a la base por el punto medio de la altura de la pirámide.**

Calcula la relación que existe entre los volúmenes de las dos figuras resultantes.



Al ser figuras semejantes de razón 2, el volumen de la pirámide mayor es 8 veces (2^3) el de la menor.

$V_{\text{pirámide pequeña}} = \frac{1}{8} V_{\text{pirámide grande}}$ $V_{\text{tronco de pirámide}} = \frac{7}{8} V_{\text{pirámide grande}}$ $V_{\text{tronco de pirámide}} = 7\ V_{\text{pirámide pequeña}}$

10.84 **Una esfera de 20 centímetros de radio se corta con un plano a 12 centímetros del centro. Averigua la longitud de la circunferencia que se origina al cortar la superficie esférica con el plano.**

$r = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16 \text{ cm} \Rightarrow l = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 16 = 100{,}48 \text{ cm}$

PARA INTERPRETAR Y RESOLVER

10.85 **Jardín de piedra**

Se quiere extender 4 toneladas y media de gravilla sobre una superficie rectangular de 15 metros de largo y 3 de ancho.

Se sabe que un metro cúbico de este tipo de gravilla pesa 2 000 kilogramos.

a) ¿Qué altura en centímetros tendrá la capa de gravilla que se va a extender?

b) Si se quiere aumentar en un 25 % la superficie en la que se va a echar la gravilla y conservando la altura de la capa, ¿cuántos kilogramos más de gravilla de deberán comprar?

c) Si utilizamos otra clase de gravilla, menos densa, de 1 500 kilogramos por metro cúbico, ¿qué superficie podremos cubrir si la capa de gravilla alcanza la misma altura que en los casos anteriores?

a) Se cuenta con 4,5 t = 4 500 kg de gravilla que ocupará un volumen de 2,25 m^3

El volumen de la capa será de $15 \cdot 3 \cdot h = 2{,}25\ m^3 \Rightarrow h = \dfrac{2{,}25}{15 \cdot 3} = 0{,}05\ m = 5\ cm$

b) La cantidad de kg nuevos que se han de adquirir es el 25 % de los que se tenía inicialmente.

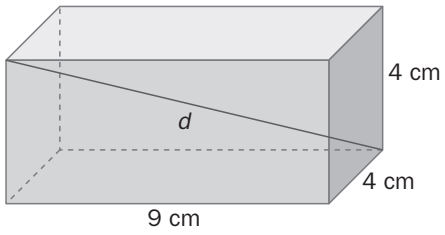
Por tanto $4\,500 \cdot 0{,}25 = 1\,125$ kg

c) En este caso 4,5 t = 4 500 kg de gravilla que ocupará un volumen de 3 m^3

El volumen de la capa será de $15 \cdot 3 \cdot h = 3\ m^3 \Rightarrow h = \dfrac{3}{15 \cdot 3} = 0{,}067\ m = 6{,}7\ cm$

AUTOEVALUACIÓN

10.A1 Calcula la longitud de la diagonal del prisma cuadrangular recto de la figura.



$d = \sqrt{9^2 + 4^2 + 4^2} = 10{,}63$ cm

10.A2 Queremos pintar el techo y las paredes de una habitación de 4 metros de largo por 3,5 metros de ancho y 3 metros de alto. Sabiendo que la pintura cuesta 3 euros por cada metro cuadrado de pared, ¿cuánto nos costará pintar la habitación?

$A = 4 \cdot 3{,}5 + 2 \cdot 3{,}5 \cdot 3 + 2 \cdot 4 \cdot 3 = 59$ m^2 $\Rightarrow$ Precio $= 59 \cdot 3 = 177$ €

10.A3 En un cubo, cuya arista mide 4 centímetros, introducimos una esfera maciza tangente a las caras del cubo. Determina el volumen del espacio comprendido entre ambos cuerpos.

$V_{cubo} = 4^3 = 64$ cm^3; $V_{esfera} = \dfrac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 2^3}{3} = 33{,}49$ cm^3 $\Rightarrow V = 64 - 33{,}49 = 30{,}51$ cm^3

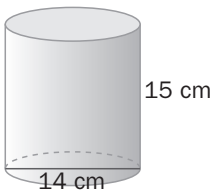
10.A4 Las coordenadas geográficas de dos ciudades son: *A*(10° E, 45° N) y *B*(10° O, 45° N). Calcula la distancia entre ambas, teniendo en cuenta que el radio de la Tierra es 6 371 kilómetros.

Como tiene la misma latitud y es 45° N, $\Rightarrow r^2 + r^2 = 6\,371^2 \Rightarrow r = 4\,505$ km

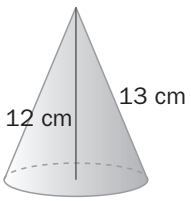
$\text{dist} = \dfrac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 4\,505 \cdot 20}{360} = 1\,571{,}74$ km

10.A5 Averigua el área lateral y el área total de estos cuerpos geométricos.

a)



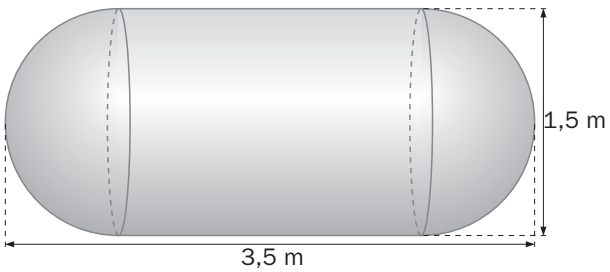
b)



a) $A_l = \pi \cdot 14 \cdot 15 = 659{,}73$ cm^2; $A_t = 659{,}4 + 2 \cdot \pi \cdot 7^2 = 967{,}61$ cm^2

b) $A_l = \pi \cdot 5 \cdot 13 = 204{,}2$ cm^2; $A_t = 204{,}1 + \pi \cdot 5^2 = 283{,}74$ cm^2

10.A6 **Para abastecer de agua algunas zonas de África, una empresa dona depósitos como el de la figura. Calcula el volumen de cada depósito.**



$$V = \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}75^3}{3} + 3{,}14 \cdot 0{,}75^2 \cdot 2 = 5{,}3 \text{ m}^3$$

10.A7 **Calcula el volumen de los siguientes cuerpos geométricos.**

a) Pirámide de base cuadrada, de 7 centímetros de altura, cuya base tiene una arista de 6 centímetros.

b) Prisma recto de base hexagonal, de 8 centímetros de altura, cuya base tiene una arista de 2 centímetros.

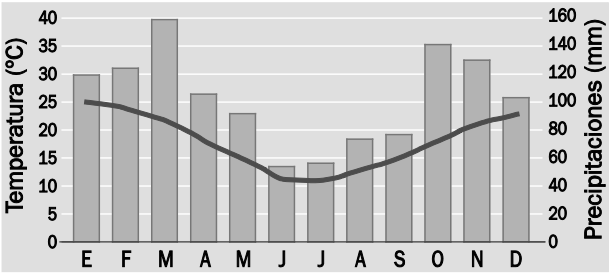
a) $V = \frac{6^2 \cdot 7}{3} = 84 \text{ cm}^3$

b) $V = \frac{6 \cdot 2 \cdot 1{,}73}{2} \cdot 8 = 83{,}04 \text{ cm}^3$

8 Funciones. Propiedades globales

ACTIVIDADES INICIALES

8.I. Este es el climograma correspondiente a la ciudad de Buenos Aires para el año 2009.



¿En qué mes se alcanzan las temperaturas máximas? ¿Y las mínimas? ¿Cuáles son los meses de verano en Argentina?

Las temperaturas máximas se alcanzan en diciembre y enero, y las mínimas, en junio y julio. Las temperaturas varían al revés que en España, de forma que los meses de verano argentinos se corresponden con los de invierno españoles.

8.II. ¿Coinciden los meses más lluviosos con los de tu ciudad?

Respuesta variable, dependiendo de la ciudad.

8.III. ¿Qué tipo de ropa llevará un turista que visite Buenos Aires en enero?

El turista llevará en enero ropa de verano.

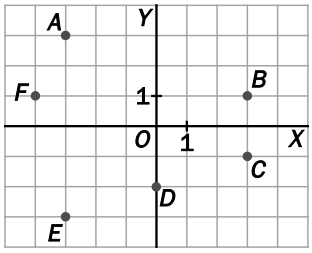
8.IV. Es posible que no tengas a mano los datos de las precipitaciones en tu ciudad. Representa en una gráfica sólo las temperaturas medias en cada mes, utilizando datos aproximados. Compara tu gráfico con el de tus compañeros.

Actividad con los compañeros. La gráfica variará según la ciudad.

ACTIVIDADES PROPUESTAS

8.1. Actividad resuelta.

8.2. Escribe las coordenadas de los puntos que aparecen en la figura.

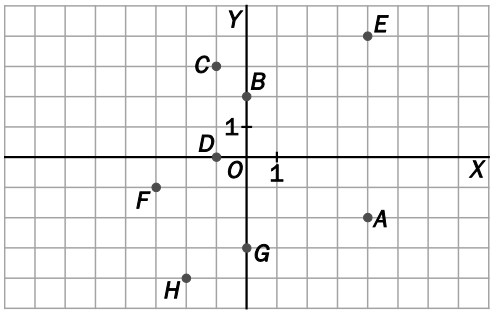


A(–3, 3) *B*(3, 1) *C*(3, –1) *D*(–3, –3)

8.3. (TIC) Representa estos puntos en unos ejes de coordenadas.

***A*(4, –2)** ***C*(–1, 3)** ***E*(4, 4)** ***G*(0, –3)**

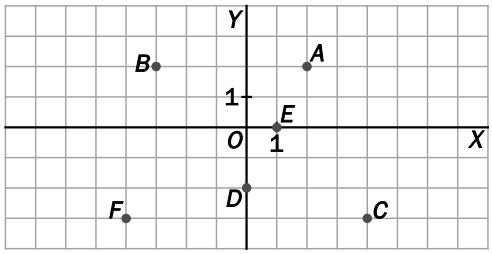
***B*(0, 2)** ***D*(–1, 0)** ***F*(–3, –1)** ***H*(–2, –4)**



8.4. (TIC) Representa estos puntos en unos ejes de coordenadas indicando su cuadrante.

***A*(2, 2)** ***C*(4, –3)** ***E*(1, 0)**

***B*(–3, 2)** ***D*(0, –2)** ***F*(–4, –3).**



Primer cuadrante: *A*(2, 2)

Segundo cuadrante: *B*(–3, 2)

Tercer cuadrante: *F*(–4, –3)

Cuarto cuadrante: *C*(4, –3)

El punto *D*(0, –2) está sobre el eje de ordenadas.

El punto *E*(1, 0) está sobre el eje de abscisas.

8.5. ¿Verdadero o falso?

a) *A*(–3, –1) pertenece al 3.^{er} cuadrante.

b) *B*(2, 0) está sobre el eje de ordenadas.

c) En el punto *C*(4, –2), el 4 es la abscisa.

d) Los puntos *D*(–1, 1) y *E*(–4, –2) están en el 2.º cuadrante.

a) Verdadero.

b) Falso, está sobre el de abscisas.

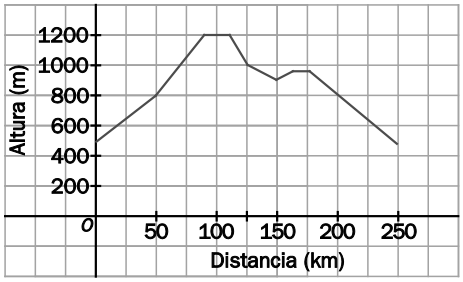
c) Verdadero.

d) Falso. *D* está en el 2.º cuadrante, y *E*, en el 3.º

8.6. Actividad interactiva.

8.7. Actividad resuelta.

8.8. La gráfica representa una etapa ciclista. A cada distancia al punto de salida le corresponde una determinada altitud.



a) ¿Cuál es la variable independiente?

b) ¿Cuándo se alcanza la mayor altitud?

c) ¿Cuántos kilómetros se recorren en la etapa?

a) La variable independiente es la distancia al punto de salida.

b) La mayor altitud se alcanza entre los 88 y 112 km de distancia al punto de salida.

c) Se recorren 250 km en la etapa.

8.9. Escribe la fórmula del perímetro de un triángulo equilátero en función de sus lados.

El perímetro P se obtiene multiplicando por 3 la longitud x del lado; por tanto: $P = 3x$.

8.10. En la tabla se representa la temperatura de una persona a lo largo de un día.

Hora	0	4	8	12	16	20	24
Temperatura (ºC)	38	36	36,5	36	38	39	38

a) ¿Cuál es la variable dependiente?

b) ¿Cuándo varió más la temperatura?

a) La variable dependiente es la temperatura (ºC).

b) La máxima variación se produjo entre las 0 y las 4 horas, y entre las 12 y las 16 horas.

8.11. En la tabla tienes el tiempo que se tarda en hacer un trabajo según los alumnos que participen.

Tiempo (horas)	6	3	2	1,5	1,2	1
N.º de alumnos	1	2	3	4	5	6

Si solo se dispone de media hora para preparar el trabajo, ¿cuántos alumnos deberían participar?

La relación entre las variables es inversamente proporcional. Por tanto, si para hacer el trabajo en 1 hora participan 6 alumnos, para la mitad de tiempo, media hora, participará el doble de alumnos, 12.

8.12. Actividad interactiva.

8.13. Actividad resuelta.

8.14. Actividad resuelta.

8.15. Di si las siguientes relaciones son funciones.

a) El espacio entre dos ciudades y el tiempo que tarda un tren en ir de una a otra.

b) La duración de un partido de fútbol y los goles que se marcan.

c) La edad de un árbol y el número de anillos de su tronco.

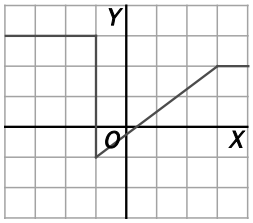
a) Sí es una función porque para cada valor de la distancia entre las dos ciudades hay un único valor del tiempo que tarda el tren en ir de una a otra.

b) No, porque para un valor de la duración de los partidos de fútbol, el número de goles no es único.

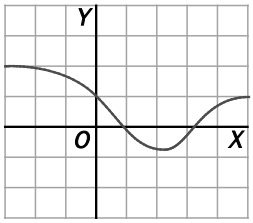
c) Sí, porque para cada valor de la edad hay un único valor del número de anillos del tronco.

8.16. Indica razonadamente si las siguientes gráficas representan funciones.

a)



b)



a) No es una función porque para $x = -1$, la variable y toma infinitos valores.

b) Sí es una función porque para cada valor de x hay un único valor de y.

8.17. Una función asigna a cada número entero el resultado de multiplicarlo por 4 y restarle 1.

a) Escribe la fórmula general de dicha función.

b) Calcula la imagen de 7.

c) ¿Para qué número entero se obtiene una imagen de 11?

a) $f(x) = 4 \cdot x - 1$

b) $f(7) = 4 \cdot 7 - 1 = 28 - 1 = 27$

c) $4x - 1 = 11 \Rightarrow x = 3$

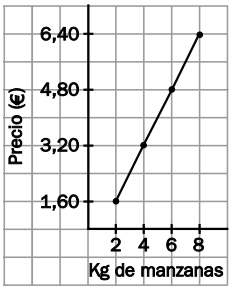
8.30. (TIC)

a) Representa gráficamente la función que viene dada por la siguiente tabla

kg de manzanas	2	4	6	8
Precio en euros	1,60	3,20	4,80	6,40

b) ¿Tiene sentido unir los puntos?

a)



b) Sí tiene sentido unir los puntos, ya que se pueden adquirir cantidades de manzanas que no sean kilos enteros; por ejemplo, 3,57 kg.

8.31. (TIC) Un grupo de alumnos va a alquilar un autobús para ir de excursión por 400 euros. El precio que debe pagar cada alumno depende de cuántos vayan a la excursión, según la siguiente tabla.

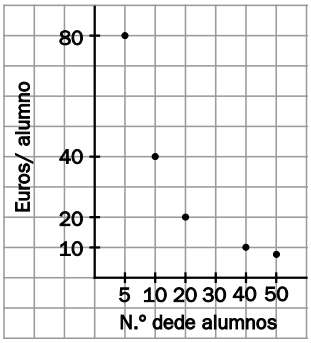
N.º de alumnos	5	10	20	40	50
Euros/alumno	80	40	20	10	8

a) Representa la función correspondiente.

b) ¿Tiene sentido unir los puntos?

a)

.



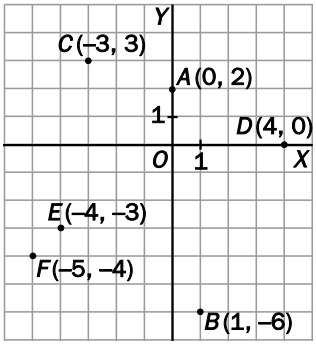
b) No tiene sentido unir los puntos, puesto que el número de alumnos ha de ser entero. No tiene sentido hablar de 1,5 alumnos, por ejemplo.

EJERCICIOS

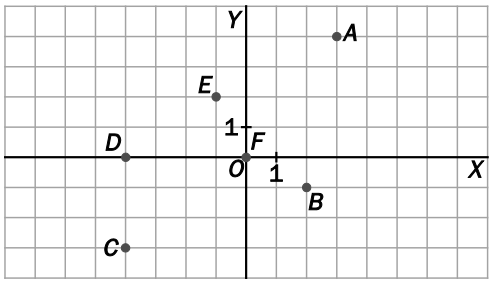
Coordenadas cartesianas

8.42. (TIC) Representa los puntos de coordenadas.

***A*(0, 2)** ***B*(1, –6)** ***C*(–3, 3)** ***D*(4, 0)** ***E*(–4, –3)** ***F*(–5, –4)**



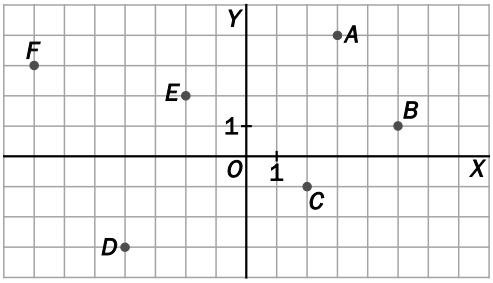
8.43. Escribe las coordenadas de los puntos representados en la siguiente figura.



A(3, 4) *C*(–4, –3) *E*(–1, 2)

B(2, –1) *D*(–4, 0) *F*(0, 0)

8.44. Escribe las coordenadas de los puntos de la figura e indica en qué cuadrante se encuentran.



A(3, 4). En el primer cuadrante

B(5, 1). En el primer cuadrante

C(2, –1). En el cuarto cuadrante

D(–4, –3). En el tercer cuadrante

E(–2, 2). En el segundo cuadrante

F(–7, 3). En el segundo cuadrante

8.45. Indica el cuadrante de cada punto.

a) ***A*(–2, –5)**

b) ***B*(1, 2)**

c) ***C*(5, 0)**

d) ***D*(–6, 8)**

a) Tercer cuadrante

b) Primer cuadrante

c) Sobre el eje *X*

d) Segundo cuadrante

8.46. Dado el punto *A*(–3, 6), escribe las coordenadas de un punto *B* que tenga como abscisa el doble que *A* y esté sobre el eje de abscisas.

La abscisa es $x = 2 \cdot (-3) = -6$.

La ordenada ha de ser 0 para que esté sobre el eje *X*.

El punto es *B*(–6, 0).

Fórmulas, tablas y gráficas

8.47. La siguiente gráfica muestra cómo varía la longitud de la sombra de un árbol a distintas horas del día.

a) ¿A qué hora la sombra fue menor?

b) ¿Cuánto medía la sombra a las 19.30?

c) ¿A qué horas la sombra mide lo mismo?

a) Entre las 14 y las 15 horas

b) 200 cm

c) Entre las 14 y las 15 horas

8.48. Escribe la fórmula asociada a la tabla.

x	**–2**	**–1**	**0**	**1**	**2**	**6**
y	**–6**	**–3**	**0**	**3**	**6**	**18**

La función asocia a cada número su triple; por tanto, la fórmula es: $f(x) = 3x$.

8.49. La siguiente tabla recoge dimensiones de rectángulos de 28 metros de perímetro.

Base (m)	**2**	**2,5**		**7**	**9**		**10**
Altura (m)			**9**		**5**	**4,5**	

a) Copia y completa la tabla en tu cuaderno.

b) ¿Algún rectángulo es un cuadrado?

a) Utilizando la fórmula del perímetro de un rectángulo, $28 = 2 \cdot B + 2 \cdot A$, se obtiene:

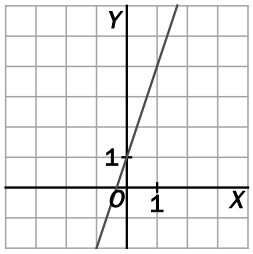
Base (m)	2	2,5	5	7	9	9,5	10
Altura (m)	12	11,5	9	7	5	4,5	4

b) El rectángulo que tiene 7 m de base y 7 m de altura es un cuadrado.

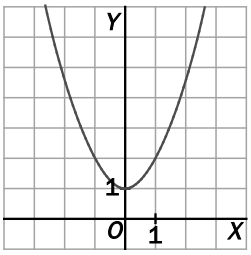
Concepto de función. Representación gráfica

8.50. Indica cuáles de las siguientes gráficas representan una función y cuáles no.

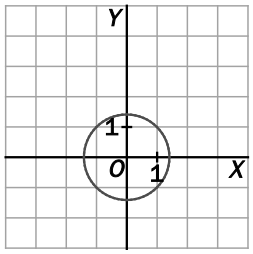
a)



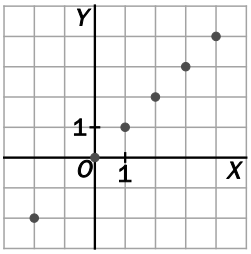
c)



b)



d)



a) Es función.

b) No es función.

c) Es función.

d) Es función.

8.51. (TIC) Calcula las imágenes de las siguientes funciones en los puntos que se indican.

a) $f(x) = 5x + 4$ $\quad x = 2$

b) $f(x) = 3x(x - 5)$ $\quad x = 5$

c) $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2}$ $\quad x = -3$

d) $f(x) = -x^2$ $\quad x = -1$

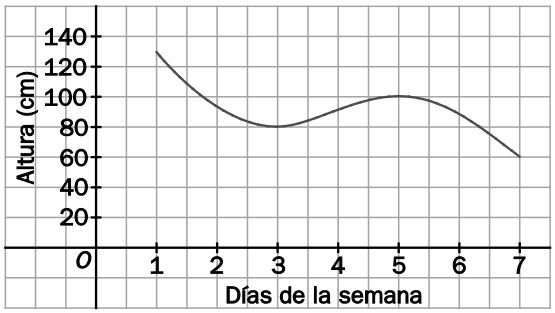
a) $f(2) = 14$

b) $f(5) = 0$

c) $f(-3) = 0$

d) $f(-1) = -1$

8.66. La siguiente gráfica muestra la altura del agua en un depósito a lo largo de una semana.



a) ¿Qué día alcanzó la máxima altura? ¿Cuál fue?

b) ¿Cuándo alcanzó la mínima altura? ¿Cuál fue?

c) ¿Entre qué días creció el nivel? ¿En cuáles decreció?

d) Si el estudio hubiera durado más días, y la función alcanzase el eje *X* en el punto (9, 0), ¿qué significado tendría el punto de corte?

a) La máxima altura se alcanzó el primer día. Fue de 130 cm.

b) La mínima altura se alcanzó el séptimo día. El nivel del agua fue de 60 cm.

c) El nivel creció entre el 3.º y el 5.º día, y decreció del 1.º al 3.º y del 5.º al 7.º día.

d) Significaría que el noveno día se habría acabado completamente el agua del depósito.

8.67. (TIC) Un ciclista recorre 280 kilómetros a velocidad constante de 40 kilómetros por hora.

a) Haz una tabla que exprese la duración del viaje.

b) Escribe la función asociada a la tabla.

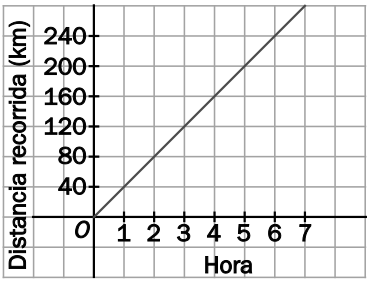
c) Representa gráficamente la función.

a)

Hora	0	2	4	6	7
Distancia recorrida (km)	0	80	160	240	280

b) Cada hora, el ciclista recorre 40 km. Por tanto, en x horas recorre $40x$ kilómetros. La fórmula que indica la distancia recorrida en función del tiempo (en horas) transcurrido es $f(x) = 40 \cdot x$.

c) Puesto que el ciclista tarda 280 : 40 = 7 horas en realizar el recorrido completo, la gráfica no debe tener valores de x mayores de 7.



8.68. Para pasar de centímetros a pulgadas se multiplica por 2 y se divide entre 5.

Si *x* representa el número de centímetros e *y* el de pulgadas:

a) Escribe *y* en función de *x*

b) Forma una tabla de valores

c) Representa gráficamente los valores de la tabla.

d) ¿Se pueden unir los puntos?

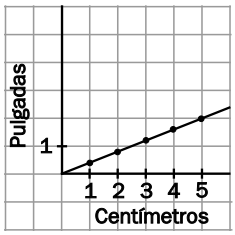
a) $y = \frac{2x}{5}$

b)

Cm	1	2	3	4	5
Pulgadas	0,4	0,8	1,2	1,6	2

c)

c)



d) Tiene sentido unir los puntos, ya que los valores seleccionados para formar la tabla son aleatorios, no necesariamente se han de transformar centímetros enteros.

8.69. (TIC) Dos compañías de teléfonos ofertan las siguientes condiciones en sus llamadas locales.

	Establecimiento de llamada	Precio por minuto
COMPAÑÍA *A*	**0,02 €**	**0,03 €**
COMPAÑÍA *B*	**0,03 €**	**0,02 €**

a) Escribe la función que relaciona el coste de una llamada con su duración en *A* y en *B*.

b) ¿Cuál es la variable independiente?

c) Represéntalas en los mismos ejes.

d) ¿A partir de qué momento resulta más rentable la compañía *B*?

a) Compañía *A*: $f(x) = 0{,}02 + 0{,}03 \cdot x$ Compañía *B*: $g(x) = 0{,}03 + 0{,}02 \cdot x$

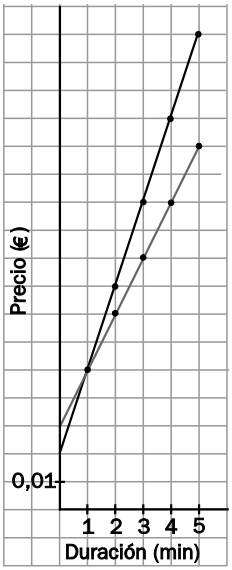
b) La variable independiente es el tiempo de duración de la llamada.

c) Compañía *A*

Duración (min)	1	2	3	4	5
Precio (€)	0,05	0,08	0,11	0,14	0,17

Compañía *B*

Duración (min)	1	2	3	4	5
Precio (€)	0,05	0,07	0,09	0,11	0,13



d) Transcurrido el primer minuto resulta más rentable la compañía *B*: la gráfica de *B* está por debajo de la gráfica de *A* a partir de $x = 1$.

8.70. (TIC) En una tienda de deportes se ofertan todos sus artículos con un 30 % de descuento.

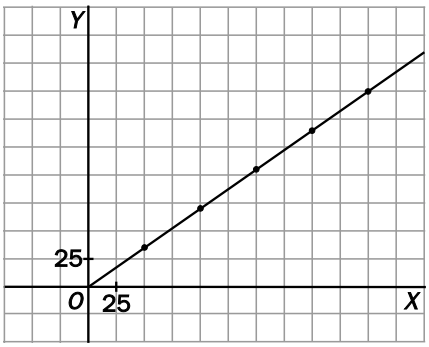
a) Encuentra una fórmula que exprese el precio de cada uno de ellos después de hacer el descuento.

b) Representa la función gráficamente teniendo en cuenta que el artículo más caro antes de la oferta costaba 250 euros.

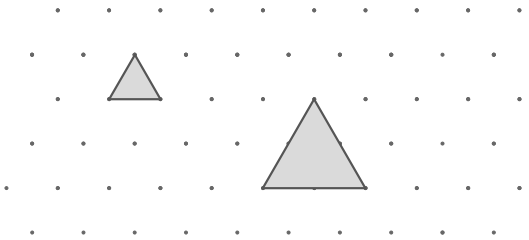
a) Como los artículos tienen un 30 % de descuento, el precio final es el 70 % del precio inicial. La función que transforma el precio inicial en el final es $f(x) = 0{,}70 \cdot x$.

b)

x	50	100	150	200	250
$f(x)$	35	70	105	140	175



8.71. Sobre un geoplano triangular como el representado en la figura se construyen triángulos de lado 1 unidad, 2 unidades, 3 unidades, etc.



a) Calcula el número de puntos por los que pasa el contorno de cada triángulo.

b) Copia y completa la siguiente tabla.

Unidades lineales de lado	**1**	**2**	**3**	**4**
N.º de puntos por los que pasa el contorno	**3**	**6**		

c) Encuentra la función que expresa el número de puntos por los que pasa el contorno de cada triángulo, en función de las unidades de lado.

a) El triangulo de lado 1 pasa por 3 puntos. El triángulo de lado 2 pasa por 6 puntos.

b)

Unidades lineales de lado	1	2	3	4
N.º de puntos por los que pasa	3	6	10	15

c) $y = \dfrac{(x+1)\cdot(x+2)}{2}$

8.72. (TIC) Un traductor trabaja desde las 9.00 hasta las 11.30. Durante la primera hora traduce a un ritmo de 20 palabras por minuto. Después descansa media hora y luego continúa trabajando a 15 palabras por minuto.

a) Construye una tabla de valores que exprese el número de palabras que lleva traducidas cada 15 minutos.

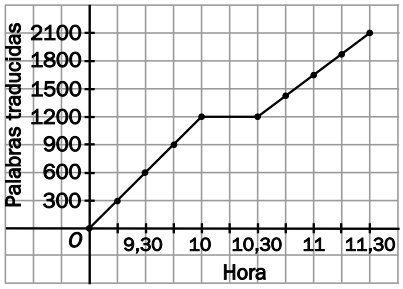
b) Representa gráficamente los datos de la tabla.

c) ¿Es una función continua? ¿Es siempre creciente?

a)

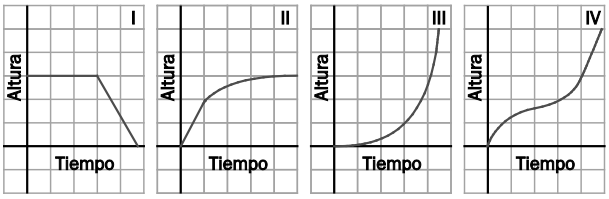
Hora	9.15	9.30	9.45	10.00	10.30	10.45	11.00	11.15	11.30
N.º de palabras	300	600	900	1200	1200	1425	1650	1875	2100

b)



c) Se puede considerar como función continua porque el ritmo de 20 palabras por minuto es una media.

8.73. (TIC) Di si alguna de las gráficas se corresponde con el llenado de alguno de los recipientes que se muestran en la figura. En los que no sea posible, dibuja la gráfica correspondiente.

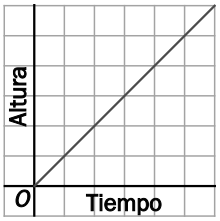


La gráfica 1 se puede descartar, ya que indica que el recipiente tiene agua al comenzar. También la gráfica 3, ya que se corresponde con el llenado de una botella que se llena muy despacio al principio, porque tiene una sección muy grande, y que cada vez se llena más rápido porque su sección se va estrechando.

La gráfica 2 corresponde al primer recipiente, primero se llena muy rápido y de forma lineal en la parte cilíndrica, y luego, más lento a medida que se asciende por el cono.

La gráfica 4 corresponde al llenado del recipiente 2. Este se llena en dos fases, primero la esfera y luego el cilindro. En la esfera, el crecimiento de la función debe ser rápido al principio, ya que las secciones transversales tienen un radio pequeño. Como el radio crece hasta el ecuador de la esfera, al principio, la velocidad a la que aumenta la altura del recipiente es decreciente. Después, el radio disminuye y, por tanto, la velocidad a la que crece la altura aumenta. El último tramo de la gráfica ha de ser una recta de gran pendiente, ya que es el llenado de un cilindro de radio pequeño.

La gráfica correspondiente al recipiente 3 es:

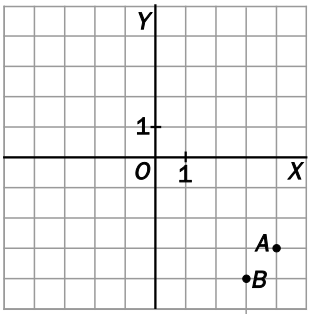


AUTOEVALUACIÓN

8.1. Representa los siguientes puntos en los ejes de coordenadas.

a) Un punto *A* de abscisa 4 y ordenada –3.

b) Un punto *B* de abscisa 3 y ordenada –4.



8.2. La función *f* asigna a cada número natural el resultado de sumarle 3 y elevar la suma al cuadrado, y la función *g* asocia a cada número natural el resultado de elevarlo al cuadrado y sumarle 3.

a) Escribe las expresiones de *f* y de *g*.

b) ¿Son *f* y *g* funciones iguales?

c) Halla las imágenes de 2, 5 y 0 según *f*.

d) Halla las imágenes de 2, 5 y 0 según *g*.

a) $f(x) = (x + 3)^2$; $g(x) = x^2 + 3$

b) *f* y *g* son funciones diferentes.

c) $f(2) = (2 + 3)^2 = 5^2 = 25$ $\quad f(5) = (5 + 3)^2 = 8^2 = 64$ $\quad f(0) = (0 + 3)^2 = 9$

d) $g(2) = 2^2 + 3 = 7$ $\quad g(5) = 5^2 + 3 = 28$ $\quad g(0) = 0^2 + 3 = 3$

8.3. Si $f(x) = 2x - 3$, copia en tu cuaderno y halla los valores que faltan.

a) $f(-2) = \square$ **c) $f(0) = \square$**

b) $f(\square) = 0$ **d) $f(\square) = 1$**

a) $f(-2) = 2 \cdot (-2) - 3 = -4 - 3 = -7$

c) $f(0) = 2 \cdot 0 - 3 = -3$

b) $f(x) = 0 \Rightarrow 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

d) $f(x) = 1 \Rightarrow 2x - 3 = 1 \Rightarrow x = \frac{4}{2} = 2$

8.4. Dada la función $y = 3x - 2$.

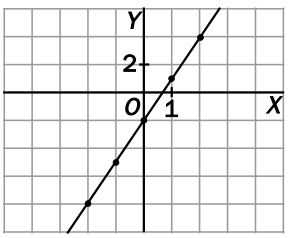
a) Construye una tabla de valores.

b) Representa gráficamente la función.

a)

x	–2	–1	0	1	2
y	–8	–5	–2	1	4

b)



PON A PRUEBA TUS COMPETENCIAS

Analiza e interpreta > El viaje de Sara

Sara ha estado este verano de viaje. Ha recorrido varias ciudades, en las que había diferencias de temperatura bastante grandes. Por curiosidad, ha ido apuntando en una tabla la temperatura media durante cada día de su viaje.

Día	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Temperatura (ºC)	22	21	24	25		29	36	29	27	22	15	21	24	22	23

8.1. El quinto día, Sara no pudo apuntar la temperatura. Recuerda que subió, pero no demasiado bruscamente, y que el cambio al día siguiente fue mayor. ¿Qué dato podría encajar con esta descripción?

Podría ser, por ejemplo, 26 ºC.

8.2. ¿Cuáles han sido las temperaturas máximas y mínimas durante el viaje?

La temperatura máxima y la mínima fueron 36 y 15 ºC, respectivamente.

8.3. Suponiendo que en este viaje no salió de España, ¿cómo explicarías las diferencias de temperatura?

Las diferencias se explican por los distintos climas en España y por la altura a la que se encuentra cada día. El máximo podría corresponder a un día caluroso en alguna región semidesértica, ya que hay mucha variación respecto a los días más próximos, y el mínimo correspondería a una zona de montaña.

Sara quiere hacer un resumen de sus vacaciones, en el que pondrá fotos de los lugares visitados, recuerdos del viaje, etc.

A su madre no le gustan mucho las tablas de Sara, y le sugiere que quedaría mejor alguna gráfica con los datos que ha ido anotando durante todos esos días.

Además de las temperaturas, Sara ha recogido la distancia recorrida cada día y las horas de viaje.

Día	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Horas	6	1	3	1	1	3	3	4	0,25	3	3	2	1	0,25	0,25

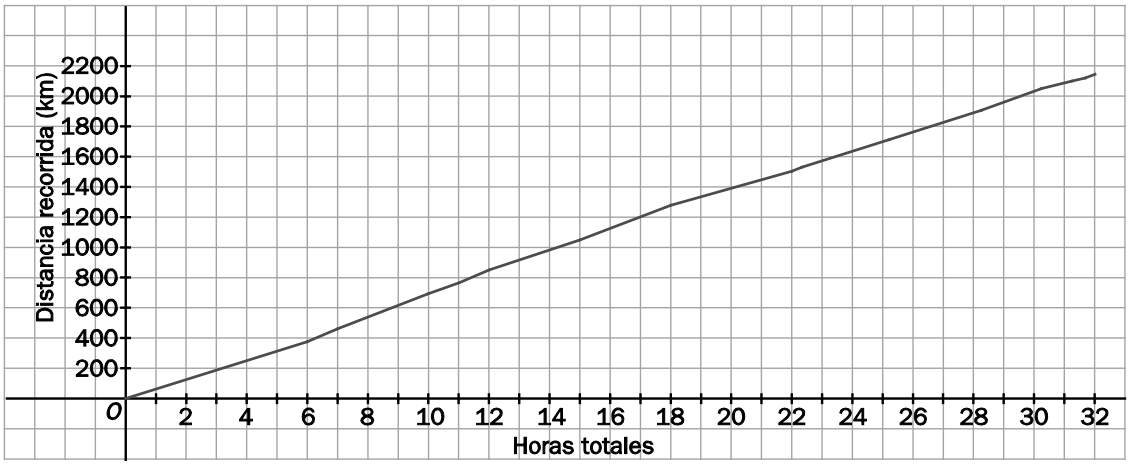
Día	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Distancia (km)	390	75	240	70	60	210	220	250	10	200	180	145	90	10	10

8.4. Sara ha decidido dibujar una sola gráfica. Para hacerlo, ha unido los datos en una tabla, en la que aparecen las horas totales y la distancia total recorrida. Completa la tabla y dibuja la gráfica correspondiente.

Horas totales	**0**	**6**	**7**	**10**												
Distancia recorrida (km)	**0**	**390**	**465**	**705**												

Horas totales	0	6	7	10	11	12	15	18
Distancia recorrida (km)	0	390	465	705	775	835	1045	1265

Horas totales	22	22,25	25,25	28,25	30,25	31,25	31,5	31,75
Distancia recorrida (km)	1515	1525	1725	1905	2050	2140	2150	2160



8.5. Sara ha hecho todo el viaje en coche. ¿Cuál ha sido su velocidad media?

La velocidad media ha sido 2160 : 31,75 = 68 km/h.

8.6. Sara escribió una carta a un amigo, en la que le contó su viaje. Escribe la carta. Debes dar información sobre el viaje, pero es una carta a un amigo, no te limites a dar los datos. Puedes usar también los datos de las temperaturas de la actividad anterior. ¡A ver quién cuenta el viaje más interesante!

Respuesta abierta. Cada alumno elaborará su propia carta.

EJERCICIOS PROPUESTOS

8.1 Las dimensiones de las hojas de un libro de texto de 80 páginas son 20 × 30 centímetros. Si se extendieran, sin solaparse, todas las hojas del libro sobre el suelo, ¿qué superficie ocuparían?

Número de hojas del libro: 160

Superficie de una hoja: $20 \cdot 30 = 600$ cm^2

Superficie que ocuparían: $160 \cdot 600 = 96\,000$ cm^2 $= 9{,}60$ m^2

8.2 El volumen de un cubo es numéricamente igual a su área total. Tomando como unidad el centímetro, calcula cuánto miden su arista, su superficie y su volumen.

Sea x la medida de la arista. $x^3 = 6x^2 \Rightarrow x^2(x - 6) = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = 6$

Solución válida: $x = 6$

a) Medida de la arista: 6 cm

b) Medida del área: $6x^2 = 216$ cm^2

c) Medida del volumen: $x^3 = 216$ cm^3

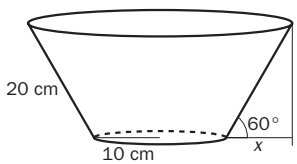
8.3 Calcula el área de un trapecio circular cuyos radios mayor y menor miden 10 y 5 centímetros, respectivamente, y que abarca un ángulo de 60°.

$x = 10 \cdot \cos 60° = 5$ cm $\Rightarrow R = 10 + 5 = 15$ cm

$A_{\text{lateral}} = \pi(15 + 10) \cdot 20 = 500\pi$ cm^2

$A_{\text{base}} = \pi 10^2 = 100\pi$ cm^2

$A_{\text{trapecio}} = 500\pi + 100\pi = 600\pi$ cm^2



8.4 Las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo son tres múltiplos consecutivos de 3. Halla las dimensiones de sus lados y el área del triángulo.

Medida de los tres lados consecutivos: $x - 3,\ x,\ x + 3$

Teorema de Pitágoras: $(x - 3)^2 + x^2 = (x + 3)^2$

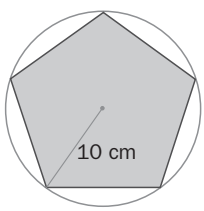
Se opera: $x^2 - 6x + 9 + x^2 = x^2 + 6x + 9 \Rightarrow x^2 - 12x = 0 \Rightarrow x(x - 12) = 0.$

Soluciones de la ecuación: $x = 0,\ x = 12$. La primera solución no es válida.

Medidas de los lados: catetos: 9, 12; hipotenusa: 15

$A_{\text{triángulo}}$: $\dfrac{9 \cdot 12}{2} = 54$

8.5 Halla el área del pentágono que aparece en la figura.



El radio de la circunferencia inscrita se corresponde con la apotema: r.

El radio de la circunferencia circunscrita se corresponde con el radio del octógono: R.

Ángulo central $= 360° : 5 = 72°$ $\quad 2\alpha = 180° - 72° = 108° \quad \alpha = 54°$

$\dfrac{10}{\text{sen } 54°} = \dfrac{x}{\text{sen } 72°} \Rightarrow x = 11{,}76$ cm

$ap^2 = 10^2 - 5{,}88^2 = 65{,}43 \Rightarrow ap = 8{,}09$ cm

$A = \dfrac{11{,}76 \cdot 5 \cdot 8{,}09}{2} = 237{,}85$ cm^2

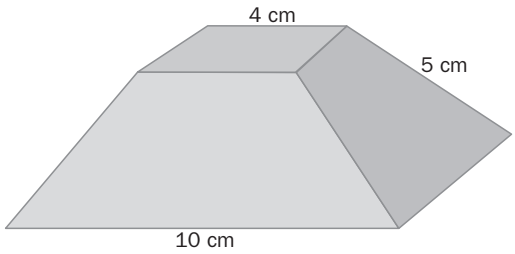
8.6 Halla el área de las bases y el área total de un cilindro de 5 centímetros de radio y 12 de altura.

a) Área de las bases: $2\pi r^2 = 2 \cdot 25\pi = 50\pi$ cm^2 $= 157{,}01$ cm^2

b) Área lateral: $2\pi rh = 2\pi \cdot 5 \cdot 12 = 120\pi$ cm^2 $= 377$ cm^2

c) Área total: $157{,}01 + 377 = 534{,}01$ cm^2

8.7 Calcula el área lateral y el área total del tronco de pirámide de la figura.



Para calcular la apotema que corresponde a la hipotenusa del triángulo rectángulo señalado en la figura:

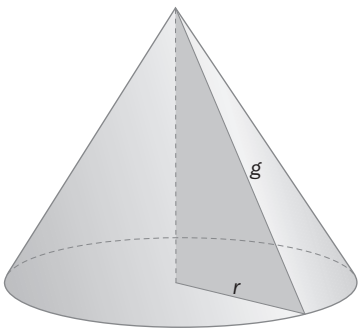
$25 = h^2 + 9 \Rightarrow h = 4$ cm

Se calcula el área lateral: $A_L = \dfrac{(P + p) \cdot A}{2}$

$A_L = \dfrac{(40 + 16) \cdot 4}{2} = 112$ cm^2

$A_T = A_B + A_b + A_L = 16 + 100 + 112 = 228$ cm^2

8.8 La generatriz de un cono mide 10 decímetros, y su altura, 80 centímetros. Calcula su área lateral y su área total.

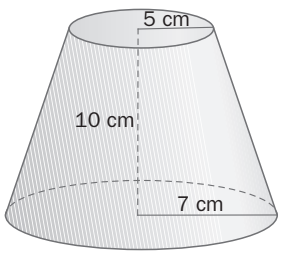


Se aplica Pitágoras para calcular el radio r: $r = \sqrt{g^2 - h^2} = 60$ cm

$A_L = \pi \cdot r \cdot g = 3{,}14 \cdot 60 \cdot 100 = 18\,840$ cm

$A_T = A_L + A_B = A_L + \pi r^2 = 18\,840 + 11\,304 = 30\,144$ cm

8.9 La figura representa un tronco de cono de radios *R* y *r*. Calcula el área lateral y el área total.



Se resta el área de la base superior del radio de la base superior para obtener 2 cm, que es la distancia horizontal que las separa.

Según el triángulo rectángulo que vemos dibujado dentro de la figura calculamos la generatriz.

$g = \sqrt{100 + 2^2} = 10{,}20$ cm

$A_L = \pi \cdot r \cdot g = 3{,}14 \cdot 12 \cdot 10{,}20 = 384{,}34$ cm

$A_T = A_L + A_B + A_b = A_L + \pi \cdot R^2 + \pi \cdot r^2$

$A_T = 153{,}86 + 78{,}5 + 384{,}34 = 616{,}70$ cm

8.10 Calcula el volumen de un ortoedro cuyas dimensiones sean 50 × 80 × 100 milímetros.

El volumen de un ortoedro es: $V = A_B \cdot h = 50 \cdot 80 \cdot 100 = 400\,000$ mm $= 400$ m.

8.11 El volumen de un cubo es de 25 cm³. ¿Cuánto aumentará su volumen si se duplica la longitud de sus aristas?

Ecuación: $x^3 = 25$ litros

Volumen: $(2x)^3 = 8x^3 = 8 \cdot 25 = 200$ litros

Incremento: $200 - 25 = 175$ litros

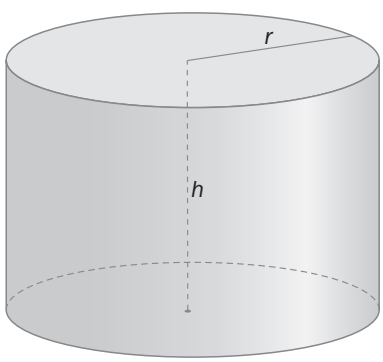
8.12 Dibuja un cilindro recto de 5 centímetros de radio y 12 centímetros de altura. Calcula su volumen.

a) La base del cilindro es un círculo de radio $r = 5$ cm.
Área de la base $= \pi r^2 = \pi \cdot 5^2 = 25\pi$ cm^2

b) El área lateral del cilindro es el área de un rectángulo.
Base del rectángulo: $2\pi r$
Altura del rectángulo = altura del cilindro
Área lateral: $2\pi \cdot 5 \cdot 12 = 120\pi$ cm^2

c) Área de todo el cilindro: $120\pi + 25\pi = 145\pi$ cm^2

d) Volumen del cilindro: $25\pi \cdot 12 = 300\pi$ cm^3



8.13 **Las aristas de dos cubos difieren en 2 centímetros, y sus volúmenes, en 56 cm³. Halla el valor de la longitud de las aristas de ambos cubos.**

Medidas de las aristas: $x,\ x + 2$

Ecuación resultante: $(x + 2)^3 - x^3 = 56 \Rightarrow x^3 + 6x^2 + 12x + 8 - x^3 = 56 \Rightarrow 6x^2 + 12x - 48 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 8 = 0$

Soluciones: $x = -4,\ x = 2$

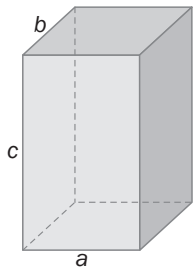
Medida de las aristas: $x = 2$ cm, 4 cm

8.14 **Del prisma de la figura conocemos el área de sus caras. Sin resolver ningún sistema, calcula su volumen sabiendo que:**

$a \cdot b = 270$ cm²

$b \cdot c = 450$ cm²

$a \cdot c = 540$ cm²



$ab \cdot bc \cdot ac = a^2b^2c^2 = (abc)^2 = V^2$

$V^2 = ab \cdot bc \cdot ac = 270 \cdot 450 \cdot 540 = 6\,561\,000$

El volumen del ortoedro es de 8100 cm³.

8.15 **Sabiendo que el volumen de un cono mide 300 cm³, y su altura, 30 centímetros, calcula su generatriz.**

$V = 300$ cm³ $\qquad V = \frac{1}{2} \cdot A_B \cdot h \Rightarrow A_B = \frac{2V}{h} = 20$ cm²

$h = 30$ cm $\qquad A_B = \pi \cdot r^2 \Rightarrow r = \sqrt{\frac{A_B}{\pi}} = 2{,}52$ cm

La generatriz de un cono es $g = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{30^2 + 2{,}52^2} = 30{,}11$ cm

8.16 **El radio medio de la Tierra, suponiendo una esfera perfecta, es aproximadamente de 6370 kilómetros. A partir de este dato, calcula:**

a) La longitud del ecuador terrestre.

b) El área de la superficie terrestre.

a) Longitud del ecuador: $2\pi r = 2\pi \cdot 6370 \approx 40\ 000$ km

b) Área de la superficie terrestre: $4\pi r^2 = 4\pi \cdot 6370^2 \approx 510$ millones de km²

8.17 **La anchura y la profundidad de una sala de música de forma rectangular suman 54 metros. Si su superficie es de 720 m², ¿cuáles son las dimensiones de la sala?**

Medidas de las dimensiones: $x,\ 54 - x$

Ecuación de áreas: $x(54 - x) = 720$

Se opera: $54x - x^2 = 720$

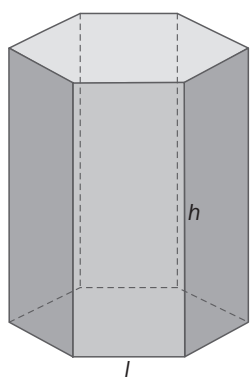
Ecuación de segundo grado: $x^2 - 54x + 720 = 0$

Soluciones de la ecuación: $x = 30,\ x = 24$

Dimensiones de la sala: 30 m de largo, 24 m de ancho

8.18 **Se quieren pintar las paredes y el techo de una sala de exposiciones que tiene forma de prisma hexagonal regular. La arista de la base mide 9 metros y la altura de la sala es de 12 metros.**

Halla la superficie total que va a ser pintada.



La base hexagonal se descompone en 6 triángulos equiláteros de lado 9 cm.

Área de la base $= 6 \cdot 9^2 \cdot \sqrt{\frac{3}{4}} = 420{,}89$ cm²

Área lateral: $6 \cdot a_b \cdot h = 6 \cdot 9 \cdot 12 = 648$ m²

Superficie que va a ser pintada: $648 + 420{,}89 = 1068{,}89$ m²

8.19 **En clase de Tecnología, los alumnos van a construir el tablero de un juego de mesa como el de la figura.**

¿Qué cantidad de madera (expresada en metros cuadrados) será necesaria, como mínimo, si son 20 alumnos en el aula?

$\text{Apotema} = \text{tg}\,\frac{\frac{360}{8}}{2} \cdot \frac{l}{2} = 0{,}41 \cdot 15 = 6{,}15$ cm

$A_{\text{octoedro}} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \text{apotema} \cdot 30 = 738$ cm^2

$A_T = 4 \cdot 30^2 + 738 = 4338$ cm^2

La cantidad de madera necesaria será: $20 \cdot 4338 = 86\,760$ cm^2 $= 8{,}68$ m^2

8.20 **Un aula tiene 12 metros de largo, 10 de ancho y 4 de alto. Si se llenase con bloques cúbicos de porexpán de 2 metros de arista, ¿podrías decir cuántos se necesitarían?**

Si la clase tiene 20 alumnos y cada uno transporta el mismo número de bloques, ¿cuántos tendrá que mover cada alumno para rellenar completamente la clase?

$V_{\text{aula}} = 12 \cdot 10 \cdot 4 = 480$ m^3

$V_{\text{bloque}} = 2^3 = 8$ m^3

Para llenar el aula hacen falta $\frac{480}{8} = 60$ bloques cúbicos.

Cada alumno moverá 3 bloques.

8.21 **Se quiere levantar un monumento en forma de pirámide. Su base será cuadrada, y la altura prevista, de 30 metros.**

Si se necesitan 811,2 m^3 de piedra, ¿cuál es la medida de la arista de la base?

$V_{\text{pirámide}} = \frac{1}{3} \cdot a_{\text{base}} \cdot h \Rightarrow a_{\text{base}} = \frac{3V_{\text{pirámide}}}{h} \Rightarrow a_{\text{base}} = \frac{3 \cdot 811{,}2}{30} = 81{,}12$ m

$a_{\text{base}} = l^2 \Rightarrow l = \sqrt{81{,}12} = 9{,}01$ m

8.22 **El almacén de una empresa gráfica tiene forma de ortoedro y sus dimensiones son proporcionales a los números 3, 4 y 5.**

Halla las longitudes de las aristas y el volumen total sabiendo que el área total es de 752 m^2.

Dimensiones de los lados: $3x$, $4x$ y $5x$, ya que son proporcionales a los números 3, 4 y 5.

Área total: $2(3x \cdot 4x) + 2(3x \cdot 5x) + 2(4x \cdot 5x) = 752$ m^2

Se opera: $94x = 752$

Valor de x: $x = 8$

Dimensiones del almacén: 24 m, 32 m y 40 m

Volumen del ortoedro: $V = 24 \cdot 32 \cdot 40 = 30\,720$ m^3

8.23 **En cada esquina de una plancha de hojalata de forma cuadrada se recorta un cuadrado de 5 centímetros de lado. Después, doblando los rectángulos hacia arriba y pegando las caras laterales, se forma una caja de 281,25 cm^3.**

Halla el lado inicial de la plancha.

Sea x el lado de la plancha.

Se utiliza la fórmula del volumen de ortoedro:

$1280 = 5(x - 10)(x - 10) \Rightarrow 256 = x^2 - 20x + 100 \Rightarrow x^2 - 20x - 156 = 0 \Rightarrow x = 26,\ x = -6$

El lado de la plancha de cartón mide 26 cm.

El valor $x = -6$ no es válido, ya que el lado debe ser positivo.

8.24 **Un arquitecto quiere quitar la rampa y construir una nueva, de forma que, para subir, sólo haya que dar tres vueltas. ¿Cuánto medirá esa rampa?**

Ahora el cateto vertical medirá 8 m. La hipotenusa del triángulo será:

$h = \sqrt{31{,}4^2 + 8^2} \rightarrow h = 32{,}4$ m

La rampa medirá en total $3 \cdot 32{,}4 = 97{,}2$ metros.

8.25 **Y si hiciéramos que la rampa diera cinco vueltas completas, ¿qué longitud tendría que recorrer Luis?**

Ahora el cateto vertical medirá 4,8 m. La hipotenusa del triángulo será:

$h = \sqrt{31{,}4^2 + 4{,}8^2} \rightarrow h = 31{,}76$ m

La rampa medirá en total $5 \cdot 31{,}76 = 158{,}8$ metros.

Una vez hecho el ejercicio, se puede explicar por qué la rampa más corta no es la mejor, calculando la pendiente de cada una usando la trigonometría (tema anterior) e incluso construyendo rampas a escala.

ACTIVIDADES

EJERCICIOS PARA ENTRENARSE

Perímetro, área y volumen

8.26 **Asocia en tu cuaderno cada magnitud con la unidad que le corresponde.**

a) Cantidad de cartón de un *tetra brik*
b) Suelo cubierto con parqué
c) Espacio que ocupa una caja
d) Longitud del cordón de una deportiva
e) Cantidad de agua de un pantano

I. cm^3
II. hm^3
III. cm^2
IV. cm
V. m^2

8.27 **Escribe una magnitud que se exprese en las siguientes unidades.**

a) m **b) m^3** **c) cm^2** **d) mm**

a) Longitud de una mesa.
b) Agua consumida en una casa durante tres meses.
c) Superficie que ocupa una hoja de papel.
d) Longitud de un tornillo.

8.28 **Indica las unidades que corresponden a las siguientes magnitudes, y di si se trata de un perímetro, un área o un volumen.**

a) Zona ocupada por 10 CD extendidos sobre una mesa.
b) Espacio que ocupan 10 CD colocados unos sobre otros.
c) Medida del borde de un CD.

a) Área. Se mide en m^2.
b) Volumen. Se mide en m^3.
c) Perímetro. Se mide en m.

Área de figuras planas

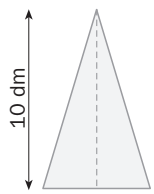
8.29 **Calcula el perímetro de un cuadrado de 576 cm^2 de superficie.**

$l = \sqrt{576} = 24$ cm de lado. $P = 4 \cdot 24 = 96$ cm

8.30 **Calcula los lados de este triángulo sabiendo que su área es de 30 dm^2.**

$30 = \dfrac{b \cdot 10}{2} \Rightarrow b = 6$ dm mide la base.

$c = \sqrt{6^2 + 10^2} = 11{,}66$ dm mide cada uno de los lados iguales.



8.31 **Halla el área del triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 13 centímetros, y uno de sus catetos, 5.**

$c = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ cm

$A = \dfrac{5 \cdot 12}{2} = 30$ cm^2

8.32 **La diagonal de un rectángulo mide 39,36 decímetros, y su base, 18. Halla su perímetro y su área.**

El otro lado del rectángulo, a: $a = \sqrt{39{,}36^2 - 18^2} = 35$ dm

$P = 2 \cdot 18 + 2 \cdot 35 = 106$ dm

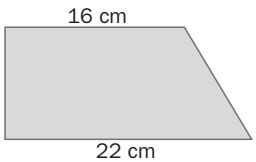
$A = 18 \cdot 35 = 630$ dm^2

8.33 **El lado de un hexágono regular mide 20 centímetros. Calcula la medida de la apotema y el área del hexágono.**

$a = \sqrt{20^2 - 10^2} = 17{,}32$ cm

$A = \dfrac{20 \cdot 6 \cdot 17{,}32}{2} = 1401$ cm^2

8.34 **Halla la altura del trapecio de la figura sabiendo que su área es de 190 cm^2.**



$190 = \dfrac{(22 + 16) \cdot h}{2}$

$h = \dfrac{190 \cdot 2}{37} = 10{,}27$ cm

8.35 **Halla el área de la corona circular formada por dos circunferencias de 3 y 8 centímetros de radio.**
¿Cuál es el área del trapecio circular de 90°?
¿Y del trapecio de 40°?

$A = \pi \cdot (8^2 - 3^2) = 235{,}5$ cm^2 es el área de la corona circular.

Área del trapecio de 90° $= \dfrac{A}{4} = \dfrac{235{,}5}{2} = 117{,}75$ cm^2

Área del trapecio de 40° $= \dfrac{\pi \cdot 40°(8^2 - 3^2)}{360°} = 20{,}58$ c,m^2

8.36 **Calcula la longitud de las circunferencias inscrita y circunscrita a un cuadrado de 8 centímetros de lado.**

El radio de la circunferencia inscrita es la mitad del lado del cuadrado, $r = 4$ cm. $L = 2 \cdot \pi \cdot 4 = 25{,}12$ cm.

El radio de la circunferencia circunscrita es la mitad de la diagonal del cuadrado.

$$r = \frac{d}{2} = \frac{\sqrt{8^2 + 8^2}}{2} = 5{,}66 \text{ cm} \Rightarrow L = 2 \cdot \pi \cdot 5{,}66 = 35{,}54 \text{ cm}$$

8.37 **El área de un sector circular dibujado en un círculo de 9 decímetros de diámetro es de 8,84 dm^2. Calcula el número de grados que abarca.**

$8{,}84 = \dfrac{\pi \cdot 4{,}5^2 \cdot n}{360°} \Rightarrow n = \dfrac{8{,}84 \cdot 360°}{\pi \cdot 4{,}5^2} = 50{,}05°$

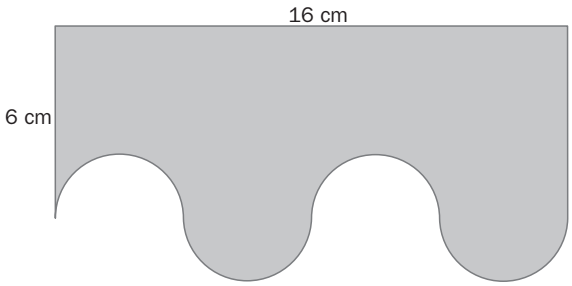
8.38 **Con centro en el de una circunferencia de 106,81 centímetros de longitud, se ha trazado otra cuyo radio es 4 centímetros menor que el de aquella.**
Calcula el área de la corona circular que determinan.

$106{,}81 = 2 \cdot \pi \cdot R \Rightarrow R = 17$ cm mide el radio de la circunferencia mayor.

$r = 13$ cm mide el radio de la menor.

$A = \pi \cdot (17^2 - 13^2) = 376{,}8$ cm^2 es el área de la corona circular.

8.39 Halla el perímetro y el área de la siguiente figura.



Dibuja un polígono que tenga la misma área.

¿Tiene también el mismo perímetro?

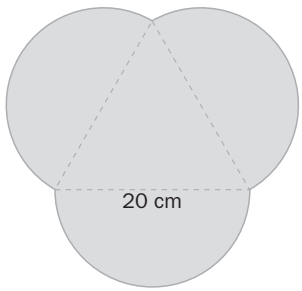
$P = 6 \cdot 2 + 16 + 2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 2 = 219{,}06$ cm^2

$A = 6 \cdot 16 + \pi \cdot 2^2 - \pi \cdot 2^2 = 6 \cdot 16 = 96$ cm^2

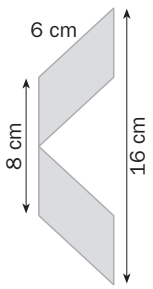
El polígono de igual área es un rectángulo de lados 16 y 6 cm, y perímetro: $6 \cdot 2 + 16 \cdot 2 = 12 + 32 = 44$ cm, que es distinto del de la figura del ejercicio.

8.40 Calcula el área y el perímetro de las siguientes figuras planas, cuyas medidas vienen dadas en centímetros.

a)



b)



a) Altura del triángulo: $\sqrt{20^2 - 10^2} = 17{,}32$ cm $\Rightarrow A_{\text{triángulo}} = \dfrac{20 \cdot 17{,}32}{2} = 137{,}2$ cm^2

$A_{\text{semicírculo}} = \pi \cdot 10^2 = 314{,}16$ cm^2

$A_{\text{total}} = 137{,}2 + 3 \cdot 314{,}16 = 1076{,}68$ cm^2

$P = 3 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 10 = 188{,}4$ cm

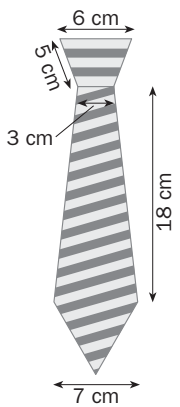
b) $P = 8 + 4 \cdot 2 + 6 \cdot 4 = 40$ cm

La altura de los paralelogramos, si la base es de 4 cm, es la del triángulo isósceles de base 8 cm y lados iguales a 6 cm:

$h = \sqrt{6^2 - 4^2} = 4{,}47$ cm.

$A = 2 \cdot 4 \cdot 4{,}47 = 35{,}76$ cm^2

8.41 Calcula el perímetro y el área de la figura siguiente.



La figura está formada por 2 trapecios isósceles y un triángulo equilátero.

Trapecio superior: $h = \sqrt{5^2 - (6 - 3)^2} = 4$ cm $\Rightarrow A = \dfrac{(6 + 3) \cdot 4}{2} = 18$ cm^2

Trapecio inferior: $A = \dfrac{(3 + 7) \cdot 18}{2} = 90$ cm^2

Lados iguales: $l = \sqrt{18^2 + (7 - 3)^2} = 18{,}44$ cm

Triángulo equilátero: $h = \sqrt{7^2 - 3{,}5^2} = 6{,}06 \Rightarrow A = \dfrac{7 \cdot 6{,}06}{2} = 21{,}21$ cm^2

Área de la figura: $A = 18 + 90 + 21{,}21 = 129{,}21$ cm^2

$P = 7 \cdot 2 + 18{,}44 \cdot 2 + 5 \cdot 2 + 6 = 66{,}88$ cm

Áreas y volúmenes de cuerpos geométricos

8.42 Halla el área total y el volumen de las siguientes figuras.

a) Un cilindro de 19 centímetros de diámetro y 10 de altura.

b) Un ortoedro de 20 decímetros de largo, 8 de ancho y 9 de alto.

c) Una esfera de 32 centímetros de diámetro.

a) $A = 2 \cdot \pi \cdot 9{,}5^2 + 2 \cdot \pi \cdot 9{,}5 \cdot 10 = 1163{,}96 \text{ cm}^2$

$V = \pi \cdot 9{,}5^2 \cdot 10 = 2835{,}29 \text{ cm}^3$

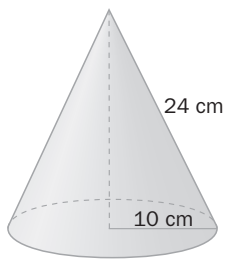
b) $A = 2 \cdot 20 \cdot 8 + 2 \cdot 20 \cdot 9 + 2 \cdot 8 \cdot 9 = 824 \text{ cm}^2$

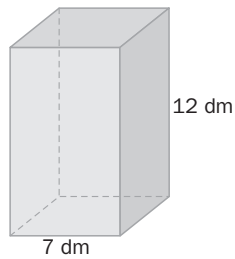
$V = 20 \cdot 8 \cdot 9 = 1440 \text{ cm}^3$

c) $A = 4 \cdot \pi \cdot 16^2 = 3217 \text{ cm}^2$

$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 16^3 = 17\,157{,}28 \text{ cm}^3$

8.43 Halla el área lateral de estos cuerpos geométricos.



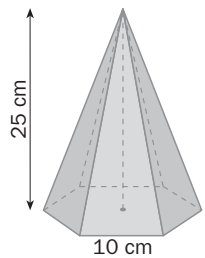


a) $A_L = 2 \cdot \pi \cdot 10 \cdot 24 = 1507{,}97 \text{ cm}^2$

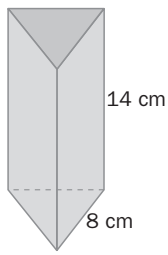
b) $A_L = 4 \cdot 7 \cdot 12 = 336 \text{ cm}^2$

8.44 Calcula el volumen de las siguientes figuras geométricas.

a)



b)



a) Apotema de la base: $a = \sqrt{10^2 - 5^2} = 8{,}66 \text{ cm} \Rightarrow V = \frac{6 \cdot 10 \cdot 8{,}66}{2} \cdot 25 = 6495 \text{ cm}^3$

b) Altura del triángulo de la base: $h = \sqrt{8^2 - 4^2} = 6{,}93 \text{ cm} \Rightarrow V = \frac{8 \cdot 6{,}93}{2} \cdot 14 = 388{,}08 \text{ cm}^3$

8.45 El área de un cubo es de 864 cm². Calcula su volumen.

$864 = 6 \cdot l^2 \Rightarrow l = \sqrt{\frac{864}{4}} = 12$ cm mide el lado del cubo.

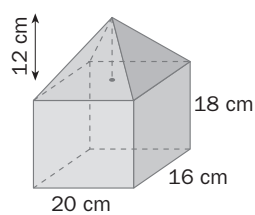
$V = 12^3 = 1728 \text{ cm}^3$

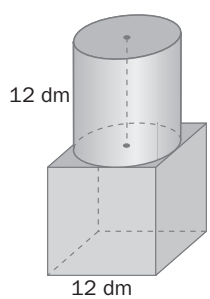
8.46 Calcula el volumen de los siguientes objetos.

a) $V = 20 \cdot 16 \cdot 18 + \frac{1}{3} \cdot 20 \cdot 16 \cdot 12$

$V = 7040 \text{ cm}^3$

b) $V = 12^3 + \pi \cdot 6^2 \cdot 12 = 3085{,}17 \text{ dm}^3$





8.47 **Halla el área total de las figuras del ejercicio anterior.**

a) Altura de las caras laterales de la pirámide cuyas bases son 20 cm: $h = \sqrt{12^2 - 10^2} = 15{,}62$ cm

Altura de las caras laterales de la pirámide cuyas bases son 16 cm: $h = \sqrt{12^2 + 8^2} = 14{,}42$ cm

$A = 20 \cdot 16 + 4 \cdot 16 \cdot 18 + 2 \cdot \frac{20 \cdot 15{,}62}{2} + 2 \cdot \frac{16 \cdot 14{,}42}{2} = 2015{,}12$ cm^2

b) Área del cubo sin la cara superior: $A = 5 \cdot 12^2 = 1440$ dm^2

Área lateral del cilindro y de la base superior: $A' = 2 \cdot \pi \cdot 6 \cdot 12 + \pi \cdot 6^2 = 150{,}80$ dm^2

Área de la cara superior del cubo quitando la base del cilindro: $A'' = 12^2 - \pi \cdot 6^2 = 30{,}90$ dm^2

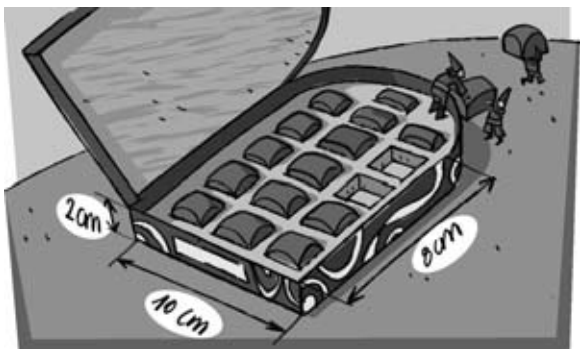
Área total de la figura: $A = 1440 + 150{,}80 + 30{,}90 = 1621{,}70$ dm^2

8.48 **Calcula el volumen comprendido entre una esfera de 8 centímetros de radio y un cilindro dentro de ella de 3 centímetros de diámetro y 10 de altura.**

Haz un dibujo de la composición.

$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 8^3 + \pi \cdot 1{,}5^2 \cdot 10 = 2215{,}35$ cm^3

8.49 **Calcula el área y el volumen de la caja de la figura, suponiéndola cerrada.**



$A = 2 \cdot 8 \cdot 10 + 2 \cdot 8 \cdot 2 + 2 \cdot 10 + \pi \cdot 5^2 + \pi \cdot 5 \cdot 2$

$A = 321{,}95$ cm^2

$V = 8 \cdot 10 \cdot 2 + \frac{\pi \cdot 5^2}{2} \cdot 2 = 238{,}54$ cm^3

CUESTIONES PARA ACLARARSE

8.50 **Señala en tu cuaderno si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones.**

a) El volumen de un cuadrado se obtiene elevando al cubo la medida de su lado.

b) La medida de la superficie habitable de un apartamento es de 50 metros.

c) El volumen de un cuerpo geométrico se puede relacionar con su capacidad.

d) El perímetro de un triángulo es el triple de su lado.

a) Falsa. El cuadrado no tiene volumen.

b) Falsa. La superficie se mide en unidades cuadradas.

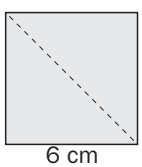
c) Verdadera. 1 dm^3 = 1 l.

d) Falsa. Es la suma de sus lados y solo es igual al triple cuando el triángulo es equilátero.

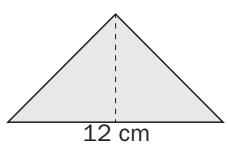
8.51 **Con dos triángulos rectángulos isósceles cuyos catetos miden 6 centímetros se pueden formar dos figuras de igual área: un cuadrado de 6 centímetros de lado, y un triángulo isósceles de 12 centímetros de base y 6 de altura.**

Dibuja las dos figuras y demuestra que tienen la misma área.

¿Tienen también el mismo perímetro?



Área del cuadrado: $6^2 = 36$ cm^2



Área del triángulo: $\frac{12 \cdot 6}{2} = 36$ cm^2

Perímetro: $4 \cdot 6 = 24$ cm

No tienen el mismo perímetro.

Lados iguales: $\sqrt{6^2 + 6^2} = 8{,}49$ cm

Perímetro: $12 + 2 \cdot 8{,}49 = 28{,}98$ cm

8.52 **Considera un prisma y una pirámide que tienen la misma base y altura.**
¿Cuántas pirámides se necesitan para obtener el mismo volumen del prisma?

Se necesitan 3 pirámides.

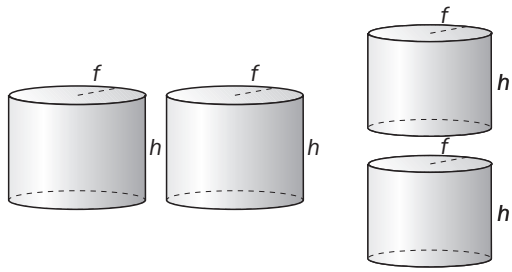
8.53 **Si se divide un cuadrado en dos rectángulos al unir los puntos medios de dos lados opuestos, y en dos triángulos, al trazar una diagonal, ¿el área del rectángulo y el triángulo formados es la misma?**

Sí, ya que en los dos casos el área es $\frac{a^2}{2}$.

8.54 **¿De qué manera habrá que unir dos cilindros iguales para que su área sea exactamente el doble que la de uno de ellos? Dibújalo.**
¿Cómo habrá que colocarlos para que no se cumpla lo anterior, aun estando unidos?

En el primer caso se deben colocar unidos por la generatriz.

En el segundo, unidos por una de sus bases.



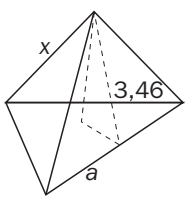
8.55 **¿Qué relación tienen el área de un tetraedro y la de un cubo con la misma arista? Ayúdate de un ejemplo para responder a la pregunta.**

Si tienen de arista 4 cm, por ejemplo, $V_{cubo} = 4^3 = 64$ cm^3.

Para hallar el área de la base del tetraedro hay que calcular primero la altura de un triángulo equilátero de 4 cm de lado:

$h = \sqrt{4^2 - 2^2} = 3{,}46$ cm.

Área del triángulo de la base: $\frac{4 \cdot 3{,}46}{2} = 6{,}92$ cm^2



Para calcular la altura del tetraedro, en el triángulo rectángulo del dibujo, a es la tercera parte de la altura del triángulo de la base porque en un triángulo equilátero la altura coincide con la mediana:

$a = 3{,}46 : 3 = 1{,}15$ cm

Por tanto, $x = \sqrt{3{,}46^2 - 1{,}15^2} = 3{,}26$ cm

$V_{tetraedro} = \frac{1}{3} \cdot 6{,}92 \cdot 3{,}26 = 7{,}53$ cm^3

$64 : 7{,}53 = 8{,}5$

El volumen del cubo es 8,5 veces el del tetraedro.

PROBLEMAS PARA APLICAR

8.56 **En el abanico del dibujo, calcula el área de la zona coloreada.**

$A = \frac{\pi \cdot (40^2 - 30^2) \cdot 75°}{360°} = 1010{,}95$ cm^2

8.57 **En la fiesta de cumpleaños de Nerea se han preparado unos sándwiches con unas rebanadas de pan con forma de prisma cuadrangular de 10 centímetros de lado de la base y 15 milímetros de altura. Contesta a las siguientes preguntas.**

a) En el centro de la rebanada superior de cada sándwich se ha recortado un trozo circular de 2 centímetros de radio para decorarlo. ¿Qué cantidad de pan queda en la rebanada superior?

b) Nerea quiere tirar el pan del círculo recortado, y su madre, no, porque dice que con él se podría alimentar a muchas personas.

Si se han preparado 50 sándwiches, ¿cuánto pan se perdería con todos los recortes? ¿Cuántas rebanadas como las utilizadas se podrían hacer con él?

a) $V_{\text{rebanada}} = 10^2 \cdot 0{,}1 = 1000 \text{ cm}^3$
$V_{\text{recorte}} = \pi \cdot 2^2 \cdot 0{,}1 = 1{,}26 \text{ cm}^3$
$V_{\text{queda}} = 1000 - 1{,}26 = 998{,}74 \text{ cm}^3$

b) $50 \cdot 1{,}26 \text{ cm}^3 = 63 \text{ cm}^3$
No se podría hacer ni una sola rebanada de pan.

8.58 **En una fábrica de golosinas se han preparado 600 kilogramos de caramelo de fresa para hacer piruletas y caramelos como los de la figura.**

a) Si solo se hacen piruletas, ¿cuántas se pueden preparar?

b) ¿Y cuántos caramelos, si solo se elaboran de este tipo?

c) Si cada piruleta se vende a 0,75 euros y cada caramelo a 0,90, estudia la opción más rentable: hacer solo piruletas, solo caramelos o la mitad de cada uno de ellos.

a) $V = \pi \cdot 3{,}5^2 \cdot 1 = 38{,}48 \text{ cm}^3 = 0{,}03848 \text{ kg} \Rightarrow 600 : 0{,}03848 = 15\,592{,}52$ piruletas $\approx 15\,592$ piruletas

b) $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 2{,}5^3 = 65{,}45 \text{ cm}^3 = 0{,}06545 \text{ kg} \Rightarrow 600 : 0{,}06545 = 9176{,}30$ caramelos ≈ 9176 caramelos

c) Solo piruletas: $15\,592 \cdot 0{,}75 = 11\,694$ €
Solo caramelos: $9176 \cdot 0{,}90 = 8258{,}40$ €
Mitad de piruletas y mitad de caramelos: $7796 \cdot 0{,}75 + 4588 \cdot 0{,}90 = 9976{,}20$ €
Lo más rentable es hacer solo piruletas.

8.59 **En unos recipientes cilíndricos de 6 metros de diámetro y 6 de altura se ha preparado cera para elaborar velas. Unas tienen forma de prisma cuadrangular de 7 centímetros de lado de la base y 10 de altura, y otras, forma cilíndrica de 9 centímetros de diámetro de la base y 10 de altura.**

Para hacer un pedido de 2000 velas con forma de prisma y 300 con forma de cilindro, ¿es suficiente con uno de los recipientes de cera?

$V_{\text{recipiente}} = \pi \cdot 3^2 \cdot 6 = 169{,}65 \text{ m}^3$ de cera se hace en el recipiente.
$V_{\text{prisma}} = 7^2 \cdot 10 = 490 \text{ cm}^3$
$V_{\text{cilindro}} = \pi \cdot 3^2 \cdot 10 = 282{,}74 \text{ cm}^3$
En total se gastan: $2000 \cdot 490 + 300 \cdot 282{,}74 = 1\,064\,822 \text{ cm}^3 = 1{,}06 \text{ m}^3$ se utilizan en las velas. Por tanto, hay suficiente.

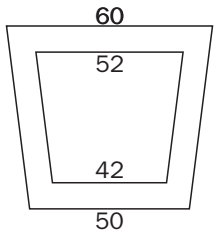
8.60 **En una ciudad se han colocado 60 farolas formadas por cuatro trapecios isósceles de cristal de 20 milímetros de grosor, adornado con un borde de forja, como los de la figura.**

a) ¿Cuánto cristal ha sido necesario en la construcción de todas las farolas?

b) Suponiendo que el adorno de hierro tiene un grosor tan fino que se puede considerar una figura plana, ¿qué cantidad de este metal se ha empleado en total?

a) $V = \frac{(60 + 40) \cdot 50}{2} \cdot 0{,}2 = 500 \text{ cm}^3$ de cristal se han empleado en la construcción de cada farola.
$60 \cdot 500 = 30\,000 \text{ cm}^3$ de cristal se han utilizado entre todas ellas.

b) La cantidad de hierro es el área comprendida entre los dos trapecios de la figura:



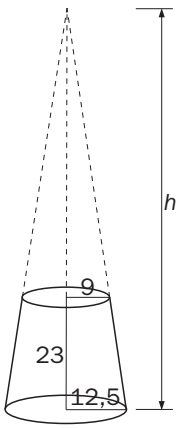
$$A = A_{\text{trapecio mayor}} - A_{\text{trapecio menor}} = \frac{(60 + 50) \cdot 40}{2} - \frac{(52 + 42) \cdot 32}{2} =$$

$= 2200 - 736 = 1474$ cm^2 de hierro se han utilizado.

8.61 **Paula ha comprado 5 kilogramos de tierra para plantas. Va a utilizar 3 macetas con forma de ortoedro de 45 centímetros de largo, 20 de ancho y 15 de alto, y otras 4 macetas con forma troncocónica de 25 centímetros de diámetro superior, 18 de diámetro de la base y 23 de altura.**

Sabiendo que la densidad de la tierra es de 300 kilogramos por metro cúbico, ¿tendrá suficiente tierra para llenar todas las macetas?

$V_{\text{ortoedro}} = 45 \cdot 20 \cdot 15 = 13\,500$ cm^3 $\Rightarrow 3 \cdot 13\,500 = 40\,500$ cm^3 de tierra se utiliza en las macetas con forma de ortoedro.



Para hallar el volumen de las macetas troncocónicas, hallamos primero la altura del cono si estuviera completo.

Por Tales: $\frac{9}{h - 23} = \frac{12{,}5}{h} \Rightarrow 9h = 12{,}5h - 287{,}5 \Rightarrow h = \frac{287{,}5}{3{,}5} = 82{,}14$ cm

$V_{\text{troncocónicas}} = \frac{1}{3}(\pi \cdot 12{,}5^2 \cdot 82{,}14 - 9^2 \cdot 59{,}14) = 2681{,}35$ cm^3 $\Rightarrow$

$\Rightarrow 4 \cdot 2681{,}35 = 10\,725{,}4$ cm^3

En total se han utilizado: $40\,500 + 10\,725{,}4 = 51\,225{,}4$ cm^3 $= 51{,}23$ dm^3 $= 51{,}23$ kg.

Por tanto, no tiene suficiente tierra.

REFUERZO

Áreas de figuras planas

8.62 **Calcula el perímetro y el área de estas figuras.**

a) Un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 38 centímetros, y uno de sus catetos, 16.

b) Un cuadrado cuya diagonal mide 50 centímetros.

c) Un rombo de diagonales 16 y 12 centímetros.

a) El otro cateto: $b = \sqrt{38^2 - 16^2} = 34{,}47$ cm

$P = 38 + 16 + 34{,}47 = 88{,}47$ cm

$A = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 34{,}47 = 274{,}76$ cm^2

b) $l = \sqrt{\frac{50^2}{2}} = 35{,}36$ cm mide el lado.

$P = 4 \cdot 35{,}36 = 141{,}44$ cm

$A = 35{,}36^2 = 1250{,}33$ cm^2

c) $l = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$ cm

$P = 4 \cdot 10 = 40$ cm

$A = \frac{16 \cdot 12}{2} = 96$ cm^2

8.63 **Calcula el área de las siguientes figuras.**

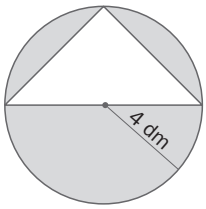
a) Un sector circular de 8 centímetros de radio y un ángulo de 36°.

b) La corona circular comprendida entre dos circunferencias de 19 y 34 centímetros de diámetro cada una de ellas.

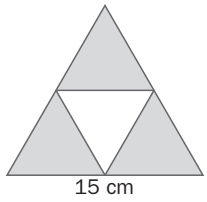
a) $A = \frac{\pi \cdot 8^2 \cdot 36^\circ}{360^\circ} = 20{,}11$ cm^2

b) $A = \pi \cdot (17^2 - 9{,}5^2) = 624{,}39$ cm^2

8.64 **Calcula el área de la parte coloreada de las figuras compuestas presentadas a continuación.**



a) $A = \pi \cdot 4^2 - \dfrac{8 \cdot 4}{2} = 34{,}27 \text{ cm}^2$

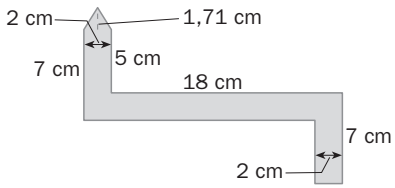


b) Son 3 triángulos equiláteros de 7,5 cm de lado.

La altura: $h = \sqrt{7{,}5^2 - 3{,}75^2} = 6{,}5$ cm

$A = 3 \cdot \dfrac{7{,}5 \cdot 6{,}5}{2} = 73{,}13 \text{ cm}^2$

8.65 **Calcula el perímetro y el área de esta figura.**



Para hallar el perímetro es necesario calcular la medida de los lados iguales del triángulo:

$l = \sqrt{1{,}71^2 + 1^2}$ $\qquad l = 1{,}98$ cm

$P = 2 + 7 + (20 - 2) + 5 + 2 \cdot 1{,}98 + 7 + (20 - 2)$

$P = 60{,}96$ cm

$A = 2 \cdot 7 + (20 - 7) \cdot 2 + 5 \cdot 2 + \dfrac{2 \cdot 1{,}71}{2} = 61{,}71 \text{ cm}^2$

Áreas y volúmenes de cuerpos geométricos

8.66 **Calcula el área total y el volumen de las figuras indicadas a continuación.**

a) Un prisma pentagonal regular de 30 centímetros de perímetro en su base, 11 de altura y 3,44 de apotema.

b) Un cono de 17 decímetros de diámetro en su base y 25 de altura.

a) El lado de la base es $30 : 5 = 6$ cm.

$A = 2 \cdot \dfrac{30 \cdot 3{,}44}{2} + 5 \cdot 6 \cdot 11 = 433{,}2$

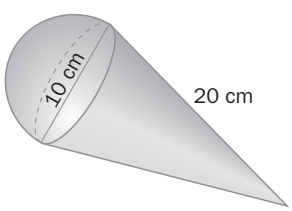
$V = \dfrac{30 \cdot 3{,}44}{2} \cdot 11 = 567{,}6 \text{ cm}^3$

b) La generatriz del cono: $g = \sqrt{25^2 + 8{,}5^2} = 26{,}41$ cm

$A = \pi \cdot 8{,}5^2 + 2\pi \cdot 8{,}5 \cdot 26{,}41 = 1637{,}46 \text{ dm}^2$

$V = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 8{,}5^2 \cdot 25 = 1891{,}5 \text{ dm}^3$

8.67 **Halla el volumen de la figura geométrica representada a la izquierda.**



La altura del cono: $h = \sqrt{20^2 - 5^2} = 19{,}36$ cm

$V = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 5^2 \cdot 19{,}36 + 4 \cdot \pi \cdot 5^2 = 821 \text{ cm}^3$

8.68 **¿Qué cantidad de chapa se necesita para hacer una esfera hueca de 5 metros de diámetro? ¿Cuánta agua cabe en su interior?**

$461{,}81 = \pi \cdot 0{,}175^2 \cdot h \Rightarrow h = \dfrac{461{,}81}{0{,}175^2 \cdot \pi} = 4{,}8$ cm

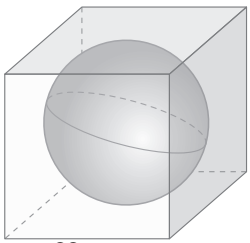
$A = 2 \cdot \pi \cdot 0{,}175^2 + 2\pi \cdot 0{,}175 \cdot 4{,}8 = 5{,}47 \text{ cm}^2$

8.69 **Halla la altura y el área total de un cilindro de 461,81 cm³ de volumen si el radio de la base mide 35 milímetros.**

$A_b = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 = 179{,}60 \text{ cm}^2 \Rightarrow h = \frac{V}{A_b} = 2{,}57 \text{ cm}$

$A_t = 2 \cdot A_b + A_{\text{lateral}} = 2 \cdot 179{,}60 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h = 415{,}74 \text{ cm}^2$

8.70 **En el interior de este cubo se ha colocado una esfera tangente a sus caras. Calcula el volumen que queda entre ambas figuras.**



$V = 22^3 - \frac{4}{3}\pi \cdot 11^3 = 5072{,}72 \text{ cm}^3$

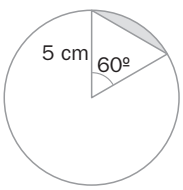
AMPLIACIÓN

8.71 **El volumen de un cilindro es de 24 033,18 dm³ y su altura mide 340 centímetros. ¿Cuál es su radio?**

$24\,033{,}18 = \pi \cdot r^2 \cdot 34$

$r = \sqrt{\frac{24\,033{,}18}{34\pi}} = 15 \text{ dm}$

8.72 **Calcula el área de la parte coloreada de la figura representada.**



$A_{\text{segmento circular}} = A_{\text{sector circular}} - A_{\text{triángulo}}$

$A_{\text{sector circular}} = \frac{\pi \cdot 5^2 \cdot 60^\circ}{360^\circ} = 13{,}09 \text{ cm}^2$

Para hallar el área del triángulo, hay que calcular su base y su altura. En principio es isósceles, puesto que dos de sus lados son iguales al radio de la circunferencia y, por tanto, los ángulos que forman estos con el segmento que delimita la zona a calcular son iguales: $\frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ$ mide cada uno de ellos. Se trata, entonces, de un triángulo equilátero y el lado desconocido mide también 5 cm.

$h = \sqrt{5^2 - 2{,}5^2} = 4{,}33 \text{ cm} \Rightarrow A_{\text{triángulo}} = \frac{5 \cdot 4{,}33}{2} = 10{,}83 \text{ cm}^2$

$A_{\text{segmento circular}} = 13{,}09 - 10{,}83 = 2{,}26 \text{ cm}^2$

8.73 **En el interior de una esfera de 13 decímetros de diámetro hay una pirámide triangular de 8 decímetros de lado y 6 de altura. ¿Qué volumen queda entre los dos cuerpos geométricos?**

$V = V_{\text{esfera}} - V_{\text{tetraedro}}$

$V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3}\pi \cdot 6{,}5^2 = 178{,}07 \text{ dm}^3$

Para hallar el área de la base de la pirámide hay que calcular primero la altura de un triángulo equilátero de 8 dm de lado:

$h = \sqrt{8^2 - 4^2} = 6{,}93 \text{ dm}$

Área del triángulo de la base: $\frac{8 \cdot 6{,}93}{2} = 27{,}72 \text{ dm}^2$

$V_{\text{pirámide}} = \frac{1}{3} \cdot 27{,}72 \cdot 6 = 55{,}44 \text{ dm}^3$

$V = 178{,}07 - 55{,}44 = 122{,}63 \text{ dm}^3$ es el volumen entre los dos cuerpos.

8.74 **La diagonal de un cubo es de $7\sqrt{3}$ centímetros. Calcula su área y su volumen. ¿Cuál es el radio de una esfera circunscrita al cubo?**

Si l es el lado del cuadrado, la diagonal de una cara es: $d = \sqrt{l^2 + l^2} = \sqrt{2l^2} = \sqrt{2}l$.

La diagonal del cubo: $D = \sqrt{\left(\sqrt{2}l\right)^2 + l^2} = \sqrt{2l^2 + l^2} = \sqrt{3}l \Rightarrow 7\sqrt{3} = \sqrt{3}l \Rightarrow l = 7$ cm

$A = 6 \cdot 7^2 = 294$ cm^2

$V = 7^3 = 343$ cm^3

$R - \dfrac{7\sqrt{3}}{2}$

8.75 **Estudia cómo varía el volumen de un cilindro de radio r y altura h en cada uno de los siguientes casos.**

a) Su altura aumenta el doble.

b) Su radio disminuye a la mitad.

c) Su altura aumenta el doble y su radio también.

El volumen del cilindro es: $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$.

a) $V = \pi \cdot r^2 \cdot 2h = 2 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = 2V$

El volumen también aumenta el doble.

b) $V = \pi \cdot \left(\dfrac{r}{2}\right)^2 \cdot h = \dfrac{1}{4}\pi \cdot r^2 \cdot h = \dfrac{1}{4} \cdot V$

El volumen disminuye a la cuarta parte.

c) $V = \pi \cdot (2r)^2 \cdot 2h = 8 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = 8 \cdot V$

El volumen se multiplica por 8.

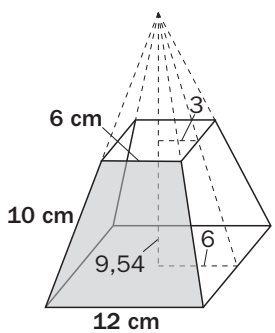
8.76 **Halla el área total y el volumen del tronco de pirámide representado a la derecha.**

Para hallar el área de una cara lateral es necesario calcular su altura:

$h = \sqrt{10^2 - \left(\dfrac{12 - 6}{2}\right)^2} = 9{,}54$ cm

$A_{\text{lateral}} = 4 \cdot \dfrac{(12 + 6) \cdot 9{,}54}{2} = 343{,}44$ cm^2

$A_{\text{total}} = 12^2 + 6^2 + 343{,}44 = 523{,}44$ cm^2



Para obtener el volumen, hay que conocer la altura de la pirámide de la que se obtuvo este tronco:

$\dfrac{6}{h} = \dfrac{3}{h - 9{,}54} \Rightarrow 6h - 57{,}24 = 3h \Rightarrow h = 19{,}08$ cm

$V = \dfrac{1}{3}12^2 \cdot 19{,}08 - \dfrac{1}{3}6^2 \cdot (19{,}08 - 9{,}54) = 801{,}36$ cm^3

8.77 **Unos módulos para guardar ropa debajo de la cama tienen la base con forma de sector circular de 60 centímetros de radio y ángulo de 80°. La altura de los mismos es de 20 centímetros.**

¿Qué capacidad tienen?

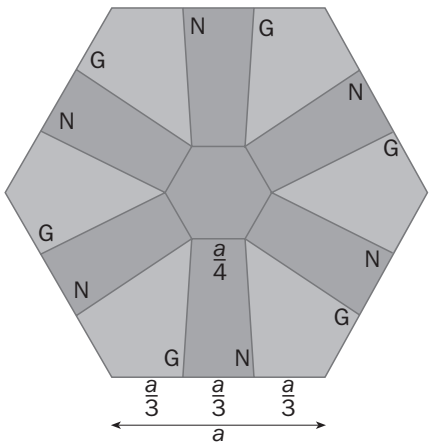
Si la base fuera un círculo completo, la figura sería un cilindro, de modo que es una parte de él.

$A_{\text{sector}} = \dfrac{\pi \cdot 60^2 \cdot 80^\circ}{360^\circ} = 2513{,}27$ cm^2

$V = 2513{,}17 \cdot 20 = 50\,263{,}40$ cm^3

Logotipo

8.78 **A continuación se muestra el logotipo de una marca de coches. Su contorno exterior es un hexágono regular, y en el interior incluye otro hexágono, también regular. En el diseño hay únicamente zonas de color gris y zonas de color naranja, tal y como muestra la figura.**



a) Calcula en qué proporción está el área de color gris respecto del área de color naranja.

b) Halla dichas áreas si el lado del hexágono interior es de un centímetro.

Apotema del hexágono exterior: $\frac{\sqrt{3}}{2}a$

Apotema del hexágono interior: $\frac{\sqrt{3}}{8}a$

Altura de los trapecios isósceles: $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{8}\right)a = \frac{3\sqrt{3}}{8}a$

Área de un trapecio: $\frac{\left(\frac{a}{3} + \frac{a}{4}\right)\frac{3\sqrt{3}}{8}a}{2} = \frac{7\sqrt{3}}{64}a^2$

Área naranja: $6 \cdot \frac{7\sqrt{3}}{64}a^2 + \frac{\frac{3}{2}a \cdot \frac{\sqrt{3}}{8}a}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$ Área gris: $\frac{6a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2 - \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$

a) $\frac{\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2}{\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2} = 1$

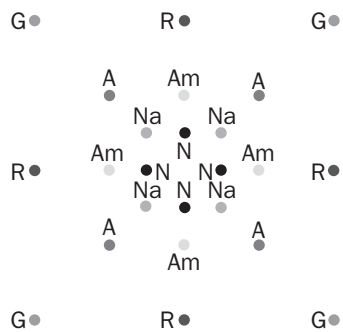
b) $\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$ cm^2

Bolas de colores

8.79 **En la siguiente disposición se verifica que:**

- **En cualquier caso, las cuatro bolas de un mismo color son los vértices de un cuadrado.**
- **Cualquier bola roja es el punto medio de un segmento cuyos extremos son dos bolas grises.**
- **Cualquier bola azul es el punto medio de un segmento cuyos extremos son dos bolas rojas.**
- **Cualquier bola amarilla es el punto medio de un segmento cuyos extremos son dos bolas azules.**
- **Cualquier bola naranja es el punto medio de un segmento cuyos extremos son dos bolas amarillas.**
- **Cualquier bola de color negro es el punto medio de un segmento cuyos extremos son dos bolas naranjas.**

Si la distancia entre dos bolas grises es de 10 centímetros, calcula las áreas de los cuadrados determinados por las bolas del mismo color y halla la distancia entre dos bolas negras consecutivas.



Áreas de los cuadrados de extremos:

Grises: 100	Rojos: 50	Azules: 25
Amarillos: 12,5	Verdes: 6,25	Negros: 3,125

Distancia entre dos bolas negras: $\sqrt{3{,}125} = 1{,}768$ cm

8.A1 **Calcula el perímetro y el área de:**

a) Un cuadrado de 18 centímetros de diagonal.

b) Un octógono regular de 7 centímetros de lado y 5,3 de apotema.

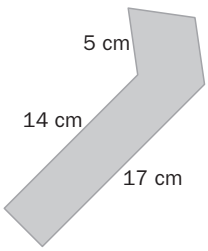
a) $18^2 = 2 \Rightarrow l^2 \Rightarrow l = 12{,}73$ cm; por tanto, $P = 50{,}91$ cm y $A = 162$ cm^2

b) $P = 8 \cdot 7 = 56$ cm^2

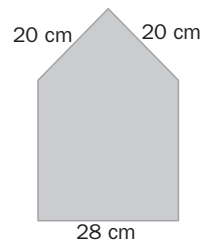
$$A = \frac{p \cdot a}{2} = \frac{56 \cdot 5{,}3}{2} = 148{,}40 \text{ cm}^2$$

8.A2 **Halla el área de las figuras siguientes.**

a)



b)



a) $h_{\text{trapecio}} = \sqrt{5^2 - \left(\frac{17 - 14}{2}\right)^2} = 4{,}77$ cm

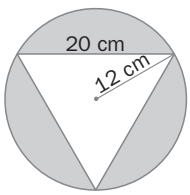
$$A = \frac{(17 + 14) \cdot 4{,}77}{2} = 73{,}94 \text{ cm}^2$$

b) $h_{\text{triángulo}} = \sqrt{20^2 - 14^2} = 14{,}28$ cm

$$A = 28^2 + \frac{28 \cdot 14{,}28}{2} = 983{,}92 \text{ cm}^2$$

8.A3 **Calcula el área de la zona coloreada.**

a)



a) $A = A_{\text{círculo}} - A_{\text{triángulo}}$

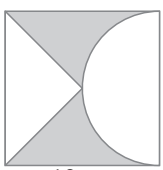
$A_{\text{círculo}} = \pi \cdot 12^2 = 452{,}39$ cm^2

La altura del triángulo: $h = \sqrt{20^2 - 10^2} = 17{,}32$ cm

$$A_{\text{triángulo}} = \frac{20 \cdot 17{,}32}{2} = 173{,}2 \text{ cm}^2$$

$A = 452{,}39 - 173{,}2 = 279{,}18$ cm^2

b)



b) $A = A_{\text{cuadrado}} - A_{\text{semicírculo}} - A_{\text{triángulo}}$

$A_{\text{cuadrado}} = 10^2 = 100$ cm^2

$$A_{\text{semicírculo}} = \frac{1}{2}\pi \cdot 5^2 = 39{,}27 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{triángulo}} = \frac{10 \cdot 5}{2} = 25 \text{ cm}^2$$

$A = 100 - 39{,}27 - 25 = 35{,}73$ cm^2

8.A4 **Calcula el área total de las siguientes figuras.**

a) Un prisma pentagonal de 6 centímetros de lado, 3,8 de apotema y 18 de altura.

b) Un cono de 24 centímetros de generatriz y 6 de radio de base.

c) Una pirámide con 2 lados verticales de 15 cm de altura cuya base es un triángulo rectángulo isósceles de 8 cm de hipotenusa.

a) $A = 2 \cdot A_b + A_{\text{lateral}} = 2 \cdot \frac{P \cdot a}{2} + P \cdot h = 2 \cdot \frac{5 \cdot 6 \cdot 3{,}8}{2} + 5 \cdot 6 \cdot 18 = 654$ cm^2

b) $A = \pi \cdot 6^2 + 2 \cdot \pi \cdot 6 \cdot 24 = 1017{,}88$ cm^2

c) Los catetos de la base miden: $c = \sqrt{\frac{8^2}{2}} = 5{,}66$ cm^2.

Para calcular la altura del triángulo lateral cuya base es la hipotenusa del triángulo de la base, consideramos el triángulo rectángulo de catetos la altura de la pirámide, 15 cm, y la tercera parte de la mediana (que coincide con la altura sobre la hipotenusa) del triángulo de la base.

Altura sobre la hipotenusa: $a = \sqrt{5{,}66^2 - 4^2} = 4$ cm

Altura del triángulo lateral: $b = \sqrt{4^2 + 15^2} = 15{,}52$ cm

$$A = \frac{5{,}66^2}{2} + 2 \cdot \frac{5{,}66 \cdot 15}{2} + \frac{8 \cdot 15{,}52}{2} = 163 \text{ cm}^2$$

8.A5 **Halla la altura de un cilindro de 5852,79 dm³ de volumen y 23 decímetros de diámetro.**

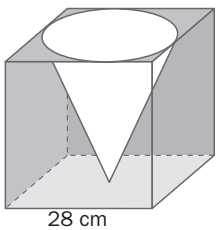
$$5852{,}79 = \pi \cdot 11{,}5^2 \cdot h \Rightarrow h = \frac{5852{,}79}{11{,}5^2\pi} = 14{,}09 \text{ dm}$$

8.A6 **Calcula el radio de una esfera de 0,18 m³ de volumen.**

$$0{,}18 = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{0{,}18 \cdot 3}{4\pi}} = 0{,}35 \text{ m}$$

8.A7 **Halla el volumen de la zona sombreada:**

a)



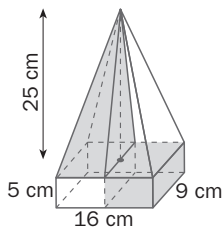
$V = V_{cubo} - V_{cono}$

$V_{cubo} = 28^3 = 21\,952$ cm^3

$V_{cono} = \pi \cdot 12^2 \cdot 12 = 5428{,}67$ cm^3

$V = 21\,952 - 5428{,}67 = 16\,523{,}33$ cm^3

b)



$V = V_{ortoedro} + V_{pirámide}$

$V_{ortoedro} = 16 \cdot 9 \cdot 5$

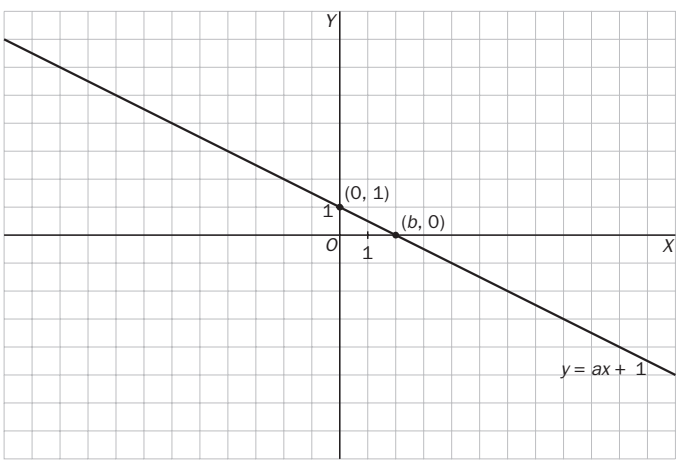
$V_{pirámide} = \frac{1}{3} \cdot 16 \cdot 9 \cdot 25$

$V = 1920$ cm^3

M A T E T I E M P O S

El área mínima de un triángulo

Todas las rectas de ecuación $y = ax + 1$ forman triángulos con los ejes de coordenadas para diferentes valores de a ($a \neq 0$). Calcula el valor de a para que el triángulo sea isósceles. ¿Qué valor debe tener para que el área del triángulo sea mínima?



El valor de a podrá ser positivo si la recta es creciente o negativo si es decreciente, y siempre la recta pasará por el punto (0, 1). Analicemos la recta decreciente (la recta creciente será simétrica al eje $x = 0$ y tendrá los mismos resultados). El área será:

$$A = \frac{b \times 1}{2} = \frac{b}{2}$$

El área del triángulo será mínima cuando b se acerque a cero, luego el área tenderá a cero.

El triángulo será isósceles cuando $b = 1$ y la recta pase por el punto (1, 0). Entonces, $a = -1$.

También será isósceles si $b = -1$ y la recta pasa por el punto $(-1, 0)$. Entonces, $a = 1$.