3

EDUCACIÓN SECUNDARIA

Matemáticas

J. Colera, I. Gaztelu, Mª J. Oliveira

ADAPTACIÓN CURRICULAR

Esta serie de **Matemáticas** responde a un proyecto pedagógico creado y desarrollado por Anaya Educación para la ESO. En su elaboración han participado:

Autores: José Colera, Ignacio Gaztelu, M.ª José Oliveira y Leticia Colera Cañas

Coordinación editorial: Mercedes García-Prieto

Edición: César de la Prida

Diseño de cubiertas e interiores: Miguel Ángel Pacheco y Javier Serrano

Tratamiento infográfico del diseño: Javier Cuéllar, Patricia Gómez y Teresa Miguel

Equipo técnico: José Luis Román

Corrección: Sergio Borbolla

Ilustraciones: Montse Español y Álex Orbe

Edición gráfica: Nuria González y Mar Merino

Fotografías: 123RF; Age Fotostock; Album; Archivo Anaya: Cosano, P.; Enríquez, S.; Leiva, Á. De; Lezama, D.; Martin, J.; Ortega, Á.; Rico, J.J. ; Ruiz, J.B.; Velasco, P.; Zurdo, F.; Cordón Press/Corbis; Getty Images; NASA.

Agradecimientos al niño: Diego Lezama

Agradecemos la colaboración de José Manuel González Aparici, por su aportación en algunos de los enunciados de los problemas que aparecen en esta obra, y a José Colera Cañas, por la elaboración de las HOJAS DE CÁLCULO que se pueden encontrar en www.anayadigital.com.

Índice

Unidad	Contenidos	Competencias
1 Fracciones y decimales Página 7 	**1.** Números racionales ... 8 **2.** Operaciones con fracciones ... 10 **3.** La fracción como operador ... 11 **4.** Números decimales ... 12 **5.** Cálculo con porcentajes ... 13	Ejercicios y problemas ... 16 Consolida lo aprendido utilizando tus competencias. Autoevaluación ... 18
2 Potencias y raíces. Números aproximados Página 19 	**1.** Potenciación ... 20 **2.** Raíces exactas ... 22 **3.** Aproximaciones y errores ... 23 **4.** Notación científica ... 25	Ejercicios y problemas ... 27 Consolida lo aprendido utilizando tus competencias. Autoevaluación ... 28
3 Progresiones Página 29 	**1.** Sucesiones ... 30 **2.** Progresiones aritméticas ... 32 **3.** Progresiones geométricas ... 34	Ejercicios y problemas ... 35 Consolida lo aprendido utilizando tus competencias. Autoevaluación ... 36
4 El lenguaje algebraico Página 37 	**1.** Expresiones algebraicas ... 38 **2.** Monomios ... 39 **3.** Polinomios ... 40 **4.** Identidades ... 42	Ejercicios y problemas ... 44 Consolida lo aprendido utilizando tus competencias. Autoevaluación ... 45

Unidad	Contenidos	Competencias

5 Ecuaciones

Página 47

1. Ecuaciones. Solución de una ecuación 48
2. Ecuaciones de primer grado 49
3. Ecuaciones de segundo grado....................... 51
4. Resolución de problemas con ecuaciones 54

Ejercicios y problemas 55
Consolida lo aprendido utilizando tus competencias.
Autoevaluación 56

6 Sistemas de ecuaciones

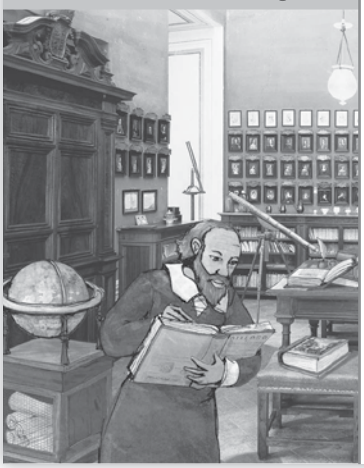
Página 57

1. Ecuaciones con dos incógnitas. Soluciones... 58
2. Sistemas de ecuaciones................................ 59
3. Número de soluciones de un sistema lineal.................................... 60
4. Resolución de sistemas................................ 61
5. Resolución de problemas mediante sistemas 62

Ejercicios y problemas 63
Consolida lo aprendido utilizando tus competencias.
Autoevaluación 64

7 Funciones y gráficas

Página 65



1. Las funciones y sus gráficas 66
2. Variaciones de una función.......................... 68
3. Tendencias de una función 70
4. Discontinuidades. Continuidad 71
5. Expresión analítica de una función.............. 72

Ejercicios y problemas 73
Consolida lo aprendido utilizando tus competencias.
Autoevaluación 74

Unidad	Contenidos	Competencias
8 Funciones lineales Página 75 	1. Función de poporcionalidad $y = mx$ .... 76 2. La función $y = mx + n$ .... 78 3. Recta de la que se conoce un punto y la pendiente .... 79 4. Ecuación de la recta que pasa por dos puntos .... 80 5. Forma general de la ecuación de una recta ... 81 6. Aplicaciones de la función lineal .... 82 7. Estudio conjunto de dos funciones 83	Ejercicios y problemas .... 84 Consolida lo aprendido utilizando tus competencias. Autoevaluación 86
9 Problemas métricos en el plano Página 87 	1. Teorema de Pitágoras. Aplicaciones .... 88 2. Lugares geométricos.................................... 90 3. Las cónicas como lugares geométricos .... 91 4. Áreas de los polígonos................................. 93 5. Áreas de figuras curvas 94	Ejercicios y problemas .... 95 Consolida lo aprendido utilizando tus competencias. Autoevaluación 96
10 Cuerpos geométricos Página 97 	1. Poliedros regulares (sólidos platónicos) .... 98 2. Poliedros semirregulares.............................. 99 3. Superficie de los cuerpos geométricos........... 101 4. Medida del volumen de los cuerpos geométricos .... 105 5. Coordenadas geográficas 107	Ejercicios y problemas .... 109 Consolida lo aprendido utilizando tus competencias. Autoevaluación 110

Unidad	Contenidos	Competencias
11 **Transformaciones geométricas** Página 111 	**1.** Movimientos en el plano .... 112 **2.** Estudio de las traslaciones .... 113 **3.** Estudio de los giros .... 115 **4.** Simetrías axiales .... 116 **5.** Estudio de los mosaicos 117	Ejercicios y problemas .... 118 Consolida lo aprendido utilizando tus competencias. Autoevaluación 118
12 **Estadística** Página 119 	**1.** Población y muestra.................................. 120 **2.** Variables estadísticas .... 121 **3.** Confección de una tabla de frecuencias........ 122 **4.** Gráfico adecuado al tipo de información ..... 123 **5.** Parámetros estadísticos............................... 125 **6.** Cálculo de $\overline{x}$ y σ en tablas de frecuencia ...... 127 **7.** Coeficiente de variación 128	Ejercicios y problemas .... 129 Consolida lo aprendido utilizando tus competencias. Autoevaluación 130
13 **Azar y probabilidad** Página 131 	**1.** Sucesos aleatorios....................................... 132 **2.** Probabilidad de un suceso........................... 133 **3.** Ley de Laplace para experiencias regulares.... 134	Ejercicios y problemas .... 135 Consolida lo aprendido utilizando tus competencias. Autoevaluación 136

1 Fracciones y decimales

Tanto las fracciones como los números decimales, que ahora interpretamos y manejamos con toda soltura, recorrieron un largo y tortuoso camino de muchos siglos hasta llegar a la versión actual.

Los egipcios (siglo XVII a.C.) utilizaban exclusivamente las **fracciones unitarias,** es decir, aquellas en las que el numerador es 1. Por ejemplo, para expresar $\frac{3}{5}$ ponían $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{15}$ (también podían poner $\frac{1}{2} + \frac{1}{10}$, pero, curiosamente, preferían la primera descomposición). Para efectuar estas descomposiciones, se valían de unas complicadas tablas.

Nos resulta chocante que no consideraran correcto expresar $\frac{3}{5}$ como $\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$, pero más sorprendente aún es que esta afición por las fracciones unitarias se prolongara hasta el siglo XIII (tres milenios después), en que **Fibonacci,** quien aunque ya conocía y manejaba las fracciones ordinarias, siguió dedicando mucho esfuerzo en descomponerlas en unitarias.

El sistema de numeración decimal se usaba en Occidente desde el siglo VIII en los números enteros. Sin embargo, para expresar las partes de la unidad se recurría a las fracciones sexagesimales. Por ejemplo, una aproximación de π se expresaba así:

$$3;8,29,44, \text{ que significaba } 3 + \frac{8}{60} + \frac{29}{60^2} + \frac{44}{60^3}$$

No fue hasta finales del siglo XVI cuando se popularizó el uso de los decimales para expresar partes de la unidad. El francés **Vieta** y el flamenco **Stevin** fueron los principales impulsores del cambio.

DEBERÁS RECORDAR

- Conceptos y procedimientos de divisibilidad.
- Las operaciones con números enteros.

1 Números racionales

Fracciones y números fraccionarios

Los números enteros sirven para contar elementos, pero no son buenos para expresar medidas. Para medir, suele ser necesario fraccionar la unidad: la mitad, cuatro terceras partes, siete milésimas… Estas medidas se expresan mediante fracciones: 1/2, 4/3, 7/1 000.

Una fracción es el cociente indicado de dos números enteros. Dicho cociente puede ser:

- Un número entero. Por ejemplo, $\frac{6}{2} = 3$, $\frac{-12}{3} = -4$
- Un número fraccionario. Por ejemplo, $\frac{17}{2} = 8 + \frac{1}{2}$, $\frac{-13}{5} = -2 - \frac{3}{5}$

A la unión de todos los números enteros y de todos los números fraccionarios se la llama conjunto de **números racionales** y se designa por $\mathbb{Q}$. Los números racionales son los que se pueden poner en forma de fracción.

Simplificación de fracciones

Si el numerador y el denominador de una fracción se pueden dividir por un mismo número, al hacerlo diremos que hemos **simplificado** o **reducido.**

Por ejemplo:

$$\frac{25}{15} = \frac{5}{3}; \quad \frac{8}{-12} = \frac{4}{-6} = \frac{-2}{3}; \quad \frac{3\,000}{4\,500} = \frac{2}{3}$$

Cuando una fracción no se puede reducir más y su denominador es positivo, diremos que es **irreducible.** Por ejemplo, 2/3 es irreducible.

Entrénate

1 Simplifica estas fracciones:

$\frac{2}{4}$ $\frac{2}{6}$

$\frac{5}{10}$ $\frac{10}{15}$

$\frac{20}{30}$ $\frac{30}{40}$

$\frac{30}{45}$ $\frac{40}{60}$

Actividades

1 Clasifica estos números en enteros o fraccionarios:

$$\frac{17}{3}, -\frac{16}{4}, \frac{20}{5}, \frac{2}{3}, \frac{16}{7}, -\frac{25}{5}, -\frac{7}{2}$$

2 Simplifica hasta obtener la fracción irreducible:

a) $\frac{12}{21}$ b) $\frac{15}{40}$ c) $\frac{18}{24}$

3 Simplifica estas fracciones hasta que obtengas la fracción irreducible:

a) $\frac{28}{35}$ b) $\frac{48}{72}$ c) $\frac{54}{72}$

d) $\frac{84}{96}$ e) $\frac{75}{150}$ f) $\frac{208}{240}$

Fracciones equivalentes

Cada número racional puede expresarse mediante muchas (infinitas) fracciones:

$$\frac{3}{5} = \frac{6}{10} = \frac{9}{15} = \dots$$

De ahí la necesidad de establecer un criterio que permita reconocer cuándo dos fracciones representan al mismo número racional.

Se dice que dos **fracciones** son **equivalentes** cuando, al simplificarse, dan lugar a la misma fracción irreducible, que tomamos como expresión habitual del correspondiente número racional.

$\frac{18}{30}$ y $\frac{21}{35}$ son equivalentes, pues $\frac{18}{30} = \frac{18:6}{30:6} = \frac{3}{5}$ y $\frac{21}{35} = \frac{21:7}{35:7} = \frac{3}{5}$.

Entrénate

1 Comprueba, en cada caso, si las fracciones dadas son equivalentes:

a) $\frac{3}{4}$ y $\frac{21}{28}$

b) $\frac{2}{3}$ y $\frac{6}{4}$

c) $\frac{27}{48}$ y $\frac{9}{16}$

Comparación de fracciones

Dos fracciones con el mismo denominador son muy fáciles de comparar. Para comparar dos fracciones con distinto denominador, las "reducimos a común denominador", es decir, buscamos fraccciones respectivamente equivalentes a ellas y que tengan el mismo denominador.

Ejercicio resuelto

Comparar $\frac{7}{12}$, $\frac{5}{8}$ y $\frac{9}{16}$.

Tomaremos como denominador común el mín.c.m. (12, 8, 16) = 48.

$$\left.\begin{array}{l} 48 : 12 = 4 \ \rightarrow \ \frac{7}{12} = \frac{7 \cdot 4}{12 \cdot 4} = \frac{28}{48} \\ 48 : 8 = 6 \ \rightarrow \ \frac{5}{8} = \frac{5 \cdot 6}{8 \cdot 6} = \frac{30}{48} \\ 48 : 16 = 3 \ \rightarrow \ \frac{9}{16} = \frac{9 \cdot 3}{16 \cdot 3} = \frac{27}{48} \end{array}\right\}$$

Evidentemente:

$$\frac{27}{48} < \frac{28}{48} < \frac{30}{48}$$

Por tanto:

$$\frac{9}{16} < \frac{7}{12} < \frac{5}{8}$$

Cálculo mental

1 Es evidente que $\frac{2}{3} < \frac{7}{4}$ porque:

$\frac{2}{3} < 1$ $\qquad$ $\frac{7}{4} > 1$

Compara mentalmente:

a) $\frac{7}{9}$ y $\frac{11}{2}$ $\qquad$ b) $\frac{2}{3}$ y $-\frac{4}{5}$

c) $\frac{17}{4}$ y $\frac{20}{7}$ $\qquad$ d) $\frac{23}{5}$ y 3

e) 2 y $\frac{8}{11}$ $\qquad$ f) 2 y $\frac{6}{3}$

Actividades

4 Compara mentalmente cada pareja de números:

a) $\frac{3}{4}$ y $\frac{4}{3}$ $\qquad$ b) $\frac{6}{8}$ y $\frac{7}{8}$

c) $\frac{3}{5}$ y $\frac{6}{10}$ $\qquad$ d) 3 y $\frac{11}{2}$

5 Compara estas fracciones y ordénalas de menor a mayor:

$$\frac{3}{5} \qquad \frac{3}{4} \qquad \frac{5}{8} \qquad \frac{7}{10}$$

2 Operaciones con fracciones

Suma y resta de fracciones

Para **sumar (o restar) fracciones con el mismo denominador,** se suman (o se restan) sus numeradores y se mantiene el denominador.

Para **sumar (o restar) fracciones con distinto denominador,** se empieza por transformarlas en otras equivalentes con el mismo denominador.

Por ejemplo: $\frac{7}{10} - \frac{5}{12} + 2 = \frac{42}{60} - \frac{25}{60} + \frac{120}{60} = \frac{42 - 25 + 120}{60} = \frac{137}{60}$

Producto de fracciones

El **producto de dos fracciones** es otra fracción cuyo numerador es el producto de sus numeradores y cuyo denominador es el producto de sus denominadores:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Por ejemplo: $\frac{8}{3} \cdot \frac{7}{10} = \frac{8 \cdot 7}{3 \cdot 10} = \frac{56}{30} = \frac{28}{15}$

Cociente de fracciones

La **inversa de una fracción** $\frac{a}{b}$ es $\frac{b}{a}$ porque $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{a \cdot b}{b \cdot a} = 1$.

Por ejemplo, la inversa de $\frac{5}{7}$ es $\frac{7}{5}$, y la inversa de 3 es $\frac{1}{3}$.

El **cociente de dos fracciones** es el producto de la primera por la inversa de la segunda:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Por ejemplo: $\frac{9}{4} : \frac{5}{7} = \frac{9}{4} \cdot \frac{7}{5} = \frac{63}{20}$; $\quad \frac{6}{11} : 3 = \frac{6}{11} \cdot \frac{1}{3} = \frac{6}{33} = \frac{2}{11}$

Entrénate

1 Calcula:

a) $\frac{2}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2}$

b) $\frac{3}{4} + \frac{7}{12} - \frac{5}{9}$

c) $\frac{3}{5} + \frac{1}{4} - \frac{7}{10}$

d) $\frac{5}{6} - \frac{1}{3} + \frac{3}{8} - \frac{5}{24}$

2 Opera hasta llegar a la fracción irreducible:

a) $\frac{2}{3} - \frac{3}{4} - \frac{5}{6}$

b) $\frac{7}{10} - \frac{5}{6} + \frac{1}{5}$

c) $\frac{7}{9} + \frac{5}{6} - \frac{2}{3}$

d) $\frac{13}{16} + \frac{11}{24} - \frac{7}{12}$

3 Opera:

a) $\frac{6}{5} : \frac{3}{5}$ b) $\frac{6}{5} : 6$

c) $\frac{6}{5} : \frac{1}{2}$ d) $\frac{1}{3} : \frac{1}{6}$

Actividades

Efectúa las siguientes operaciones y simplifica el resultado:

1 a) $\frac{5}{7} \cdot \left(\frac{2}{5} + 1\right)$ b) $\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{3} - 1\right)$

c) $\frac{3}{14} : \left(1 - \frac{5}{7}\right)$ d) $\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right) : \frac{5}{6}$

2 a) $\frac{1}{2} - \left(\frac{3}{4} - 1\right)$ b) $(-3) \cdot \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{3}\right)$

3 a) $3 - \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{5} - \frac{2}{15}\right)$ b) $\left(\frac{2}{3} - \frac{5}{9}\right) \cdot \left(\frac{3}{4} - \frac{5}{6}\right)$

3 La fracción como operador

Para hallar los 2/3 de una cantidad, 600 €, se divide esta por 3 (obteniéndose, así, *una tercera parte*), y el resultado se multiplica por 2. Es decir, se multiplica la cantidad por 2/3 → $\frac{2}{3} \cdot 600 = 400$ €

Lo que corresponde a una fracción $\frac{a}{b}$ de una cantidad C es la parte $P = \frac{a}{b} \cdot C$.

▼ **EJEMPLO:** *¿Cuántas cartas le toca repartir a un cartero al que asignan $\frac{3}{28}$ del total de 4 004 cartas que hay?*

$\frac{3}{28} \cdot 4\,004 = 429$ cartas le toca repartir.

Si conocemos la parte P que corresponde a la fracción $\frac{a}{b}$ de una cantidad C, esa cantidad se obtiene multiplicando P por la fracción inversa, $C = P \cdot \frac{b}{a}$.

▼ **EJEMPLO:** *Ramiro posee 7/20 de una compañía. Este año le han correspondido 37 800 €. ¿Cuál ha sido la ganancia total de la compañía?*

[Beneficios totales] = $\frac{20}{7}$ · [Beneficios de Ramiro] = $\frac{20}{7} \cdot 37\,800 = 108\,000$ €

Las distintas partes (fracciones) de un todo suman 1.

Para hallar una parte $\frac{a}{b}$ de otra $\frac{c}{d}$ de una cantidad, se multiplica $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot C$.

▼ **EJEMPLO:** *De una herencia de 104 000 €, Alberto posee 3/8; Berta, 5/12, y Claudia, el resto. ¿Qué parte le corresponde a Claudia?*

Si Claudia emplea 2/5 de su parte en pagar deudas, ¿cuánto le queda?

$1 - \frac{3}{8} - \frac{5}{12} = \frac{24 - 9 - 10}{24} = \frac{5}{24}$ es la fracción de Claudia.

Como gasta $\frac{2}{5}$, le quedan $\frac{3}{5}$. Es decir, le quedan $\frac{3}{5}$ de $\frac{5}{24}$.

$\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{24} \cdot 104\,000 = \frac{1}{8} \cdot 104\,000 = 13\,000$ € le quedan.

Entrénate

1 Calcula mentalmente:

a) $\frac{1}{4}$ de 32 b) $\frac{3}{4}$ de 24

c) $\frac{1}{2}$ de 52 d) $\frac{2}{5}$ de 20

e) $\frac{5}{6}$ de 30 f) $\frac{2}{7}$ de 70

2 Calcula:

a) $\frac{2}{9}$ de 117 b) $\frac{7}{10}$ de 380

c) $\frac{7}{11}$ de 132 d) $\frac{11}{14}$ de 350

e) $\frac{5}{21}$ de 1 428 f) $\frac{15}{22}$ de 1 540

3 Calcula mentalmente:

a) $\frac{1}{2}$ de □ = 13 b) $\frac{1}{4}$ de □ = 8

c) $\frac{3}{4}$ de □ = 15 d) $\frac{3}{7}$ de □ = 30

4 Calcula:

a) $\frac{1}{6}$ de □ = 107

b) $\frac{3}{4}$ de □ = 210

c) $\frac{2}{5}$ de □ = 168

d) $\frac{3}{7}$ de □ = 132

Actividades

1 Un ciclista ha recorrido los 5/9 de la etapa de hoy, de 216 km. ¿Cuántos kilómetros lleva recorridos?

2 He sacado del banco 3 900 €, que son los 3/11 de mis ahorros. ¿A cuánto ascienden mis ahorros?

4 Números decimales

Los números decimales sirven para designar medidas, pues con ellos se puede expresar cualquier valor intermedio entre dos números enteros.

Tipos de números decimales

Veamos las distintas clases de números decimales que existen:

- **Decimal exacto** es el que tiene un número limitado de cifras decimales.

  Por ejemplo: 5,4; 0,97; 8; –0,0725

- **Decimal periódico** es el que tiene infinitas cifras decimales que se repiten periódicamente.

  $7,81818181\ldots = 7,\widehat{81}$

  PERIODO

  $0,735735735\ldots = 0,\widehat{735}$

  Estos se llaman **periódicos puros,** porque en ellos el periodo empieza inmediatamente después de la coma.

  $18,352222\ldots = 18,35\widehat{2}$

  $0,0454545\ldots = 0,0\widehat{45}$

  Son **periódicos mixtos,** porque antes del periodo tienen otras cifras decimales.

- **Decimales no exactos ni periódicos.** Son los números decimales que tienen infinitas cifras que no se repiten periódicamente.

  Por ejemplo: $\sqrt{2} = 1,4142135\ldots$ $\pi = 3,14159265\ldots$

Recuerda

En un número, el grupo de cifras decimales que se repite una y otra vez se llama **periodo.** Se indica poniendo un arco sobre las cifras correspondientes:

$7,\widehat{81}$ $18,35\widehat{2}$

Recuerda

Números racionales son los que se pueden poner en forma de fracción.

Los decimales con infinitas cifras no periódicas no son racionales.

Paso de fracción a decimal

Para obtener la expresión decimal de una fracción, se efectúa la división entre el numerador y el denominador. El cociente puede ser:

- **Un número entero.** Por ejemplo: $\frac{72}{9} = 8$; $\frac{-240}{15} = -16$
- **Un decimal exacto.** Por ejemplo: $\frac{3}{8} = 0,375$; $\frac{123}{40} = 3,075$; $\frac{42}{25} = 1,68$
- **Un decimal periódico.** Por ejemplo: $\frac{11}{3} = 3,\widehat{6}$; $\frac{86}{11} = 7,\widehat{81}$; $\frac{87}{66} = 1,3\widehat{18}$

Entrénate

1 Expresa en forma decimal:

a) $\frac{5}{3}$ b) $\frac{11}{8}$

c) $\frac{11}{100}$ d) $\frac{7}{30}$

Actividades

1 Indica qué tipo de número decimal es cada uno:

3,52 $2,\widehat{8}$ $1,\widehat{54}$ $\sqrt{3} = 1,7320508\ldots$

$2,7\widehat{3}$ 3,5222… $\pi - 2 = 1,1415926\ldots$

2 Ordena de menor a mayor los siguientes números decimales:

$2,\widehat{5}$ 2,5 $2,3\widehat{5}$ 2,505005…

5 Cálculos con porcentajes

Cálculo de un tanto por ciento de una cantidad

Para calcular el 16% de 5 000, se suele proceder así: $\frac{5\,000 \cdot 16}{100} = 800$.

Pero $\frac{16}{100} = 0{,}16$, y esta expresión decimal del tanto por ciento permite proceder del siguiente modo: El 16% de 5 000 es $5\,000 \cdot 0{,}16 = 800$.

Para hallar un tanto por ciento de una cantidad, se expresa el tanto por ciento en forma decimal y se multiplica por él.

Entrénate

1 Expresa en forma decimal:

10% 1% 160% 127%

2 Calcula.

a) El 24% de 300.

c) El 30% de 83 200.

e) El 230% de 5 200.

3 ¿Qué tanto por ciento representa cada cantidad respecto a su total?

a) 15 respecto a 30.

b) 5 respecto a 20.

c) 2 respecto a 10.

4 Calcula el tanto por ciento que representa.

a) 45 respecto a 225.

b) 4 230 respecto a 9 000.

c) 6 000 respecto a 4 000.

d) 975 respecto a 32 500.

Obtención del tanto por ciento correspondiente a una proporción

En una población de 5 000 personas, 800 han leído El Quijote. *¿Qué porcentaje del total representan?*

Hemos de calcular cuántas, de cada 100 personas, han leído *El Quijote*:

$\frac{800}{5\,000} \cdot 100 = 16$. Han leído *El Quijote* el 16% del total.

Para hallar qué tanto por ciento representa una cantidad, a, respecto a un total, C, se efectúa $\frac{a}{C} \cdot 100$.

Actividades

1 En un hotel de 175 habitaciones están ocupadas el 60%. ¿Cuántas habitaciones están ocupadas?

2 El 32% de los 25 alumnos de una clase participan en un torneo de ajedrez. ¿Cuántos alumnos participan en el torneo?

3 En un colegio de 750 alumnos han aprobado todas las materias 495. ¿Qué tanto por ciento de alumnos ha aprobado todo?

4 Un agente inmobiliario cobra una comisión del 1,5% sobre el precio de un apartamento que se ha vendido por 100 500 €. ¿Cuánto cobrará por esa venta?

5 En un club deportivo hay 124 socios que juegan al baloncesto y representan el 25% del total. Calcula cuántos socios tiene ese club.

6 En un hospital están ocupadas 405 camas de las 450 que tiene el centro. ¿Cuál es el porcentaje de camas ocupadas?

7 En un depósito de agua hemos echado 57,4 litros que representan el 82% de su capacidad. ¿Cuántos litros caben en el depósito?

8 La superficie cultivada de una comunidad es 357 ha, lo que representa el 38% de su extensión. ¿Cuál es la superficie de esa comunidad?

Cálculo de aumentos porcentuales

Un reloj de 50 € aumenta su precio un 16%. ¿Cuánto vale ahora?

Con lo que sabemos hasta ahora, podríamos resolverlo así:

Aumento: $50 \cdot 0{,}16 = 8$ €

Precio final: $50 + 8 = 58$ €

Pero observemos que si sube un 16%, el precio actual es el 116% del anterior. Por eso, para obtenerlo, se puede multiplicar directamente 50 por 1,16:

$$50 \cdot 1{,}16 = 58 \text{ €}$$

1,16 es 1 + 0,16 (la cantidad más 16 centésimas)

El número por el que hay que multiplicar la cantidad inicial para obtener la cantidad final se llama **índice de variación.**

En **aumentos porcentuales,** el índice de variación es 1 más el aumento porcentual expresado en forma decimal.

Para **calcular el valor final,** halla el índice de variación y multiplícalo por la cantidad inicial: VALOR FINAL = VALOR INICIAL · ÍNDICE DE VARIACIÓN.

Entrénate

1 Halla, mentalmente, el índice de variación que corresponde a estos aumentos porcentuales:

a) 25% b) 5% c) 40%

d) 80% e) 110% f) 200%

2 Unas acciones que valían a principios de año 13,70 € han subido un 35%. ¿Cuánto valen ahora?

Cálculo de disminuciones porcentuales

Una nevera valía 620 €. Se rabaja un 40%. ¿Cuánto vale ahora?

Si quitamos un 40% al precio inicial, queda el 60%. Su precio final es:

$$620 \cdot 0{,}60 = 372 \text{ €}$$

0,60 es la unidad menos 40 centésimas: $1 - 0{,}40 = 0{,}60$

En una **disminución porcentual,** el índice de variación es 1 menos la disminución porcentual puesta en forma decimal.

Para **calcular el valor final,** halla el índice de variación y multiplícalo por la cantidad inicial: VALOR FINAL = VALOR INICIAL · ÍNDICE DE VARIACIÓN.

Entrénate

3 ¿Qué índice de variación corresponde a estas disminuciones porcentuales? Hazlo mentalmente.

a) 25% b) 5% c) 40%

d) 15% e) 88% f) 1%

4 En una comunidad autónoma había 69 580 parados. Han disminuido un 15%. ¿Cuántos hay ahora?

Actividades

9 En un restaurante han subido el menú del día un 8%. ¿Cuál será el nuevo precio si costaba 7,5 €?

10 Tengo que pagar 352 € por un mueble en el que incluyen el cobro de un 10% por transportarlo hasta casa. ¿Cuál será el precio del mueble prescindiendo del transporte?

11 ¿Cuál sera el precio de unos zapatos de 68 € si nos hacen un descuento del 40%?

12 ¿Qué descuento me han hecho en una factura de 1 385 € si he pagado 1 135,7 €?

13 Una camiseta cuesta 21 € después de rebajarla un 30%. ¿Cuál era su precio antes de la rebaja?

14 El número de alumnos que juega al baloncesto ha pasado en un año de 110 a 145, mientras que el número de los que juegan al tenis ha pasado de 45 a 57. ¿En cuál de los dos deportes ha sido mayor el aumento porcentual?

15 El precio de un coche que hoy cuesta 39 200 € ha subido en el último año un 12%. ¿Cuánto costaba ese mismo coche hace un año?

Cálculo de la cantidad inicial conociendo la variación porcentual y la cantidad final

Tras aumentar su precio un 35%, un ordenador cuesta 783 €. ¿Cuánto valía antes de la subida?

Observa el esquema siguiente:

$$\text{PRECIO INICIAL} \underset{:\,1{,}35}{\overset{\cdot\,1{,}35}{\rightleftarrows}} \text{PRECIO FINAL}$$

PRECIO INICIAL · 1,35 = PRECIO FINAL

$\boxed{\text{PRECIO INICIAL} = \text{PRECIO FINAL} : 1{,}35}$

Precio inicial = 783 : 1,35 = 580 €

Si conocemos la cantidad final que resulta después de haber aplicado una variación porcentual, la cantidad inicial se obtiene dividiendo la cantidad final por el índice de variación.

CANTIDAD INICIAL = CANTIDAD FINAL : ÍNDICE DE VARIACIÓN

Entrénate

1 Indica cuál es la cantidad inicial si sabemos que:

a) Aumenta 50%. C. final = 1 500.

b) Aumenta 50%. C. final = 3 000.

c) Aumenta 25%. C. final = 125.

d) Aumenta 25%. C. final = 250.

e) Disminuye 50%. C. final = 400.

f) Disminuye 40%. C. final = 600.

Problemas resueltos

1. El precio de un televisor fue de 566,40 €. ¿Cuál era su precio antes de cargarle un 18% de IVA?

1. El índice de variación es 1 + 0,18 = 1,18.

Por tanto, el precio del televisor antes de cargarle el IVA era:

566,40 : 1,18 = 480 €

2. En unos grandes almacenes, todos los artículos han bajado un 35%. Hemos comprado un cuadro por 195 €, una bicicleta por 78 € y un libro por 14,30 €. ¿Cuánto valía cada cosa antes de las rebajas?

2. En los tres casos, el índice de variación es 1 – 0,35 = 0,65.

Por tanto, los precios de los artículos antes de las rebajas eran:

Cuadro → 195 : 0,65 = 300 €

Bicicleta → 78 : 0,65 = 120 €

Libro → 14,30 : 0,65 = 22 €

Actividades

16 El precio de una batidora, después de aplicarle un IVA de un 18%, es de 70,80 €. ¿Cuál es su precio antes de cargarle ese IVA?

17 Al estirar una goma elástica, su longitud aumenta un 30% y, en esa posición, mide 104 cm. ¿Cuánto mide sin estirar?

18 En unas rebajas en las que se hace el 30% de descuento, Roberto ha comprado una cámara fotográfica por 50,40 €. ¿Cuál era su precio inicial?

19 Un cartero ha repartido el 36% de las cartas que tenía. Aún le quedan 1 184. ¿Cuántas tenía antes de empezar el reparto?

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

Opera y calcula

Operaciones con números enteros

1 ▼▽▽ Calcula mentalmente.

a) $-17 + (-13)$ b) $-15 + 17 - (-8)$

c) $5(-7 - 5)$ d) $-50 - 5(-11)$

e) $-3(6 + 4) + 7$ f) $(-3)^2 - (-2)^3$

Operaciones con fracciones

2 ▼▽▽ Calcula y simplifica el resultado hasta obtener una fracción irreducible.

a) $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{7}\right) \cdot \left(\frac{5}{6} + \frac{1}{3}\right)$ b) $\left(\frac{5}{9} - \frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{6}{5} - 3\right)$

c) $\left(1 - \frac{7}{10}\right) : \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{5}\right)$ d) $\left(\frac{7}{3} - 2\right) : \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{3}\right)$

3 ▼▽▽ Opera y simplifica hasta obtener una fracción irreducible.

a) $\dfrac{\frac{2}{3} - \frac{3}{5}}{1 - \frac{1}{5}}$ b) $\dfrac{\frac{1}{3} - \frac{1}{7}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{7}}$

c) $\dfrac{2 \cdot \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{5}\right)}{(-3) \cdot \left(\frac{3}{10} - \frac{8}{15}\right)}$ d) $\dfrac{(-4) \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{5}\right)}{(-11) \cdot \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{5}\right)}$

4 ▼▽▽ Calcula paso a paso y, después, comprueba el resultado con la calculadora utilizando las teclas de fracción y paréntesis.

a) $-\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4} - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} : \frac{2}{3}\right)$

b) $3 - \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{8}(-2)$

c) $\left(\frac{5}{2} - \frac{5}{6} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4}\right) : \left[2 - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{5}{3}\right)\right]$

Fracciones y decimales

5 ▼▽▽ Agrupa las fracciones que sean equivalentes.

$$\frac{21}{49} \quad \frac{24}{36} \quad \frac{4}{5} \quad \frac{14}{21} \quad \frac{10}{15} \quad \frac{15}{35} \quad \frac{3}{7}$$

6 ▼▽▽ Simplifica las fracciones siguientes:

$$\frac{24}{60} \quad \frac{114}{72} \quad \frac{51}{68} \quad \frac{26}{39} \quad \frac{125}{50} \quad \frac{225}{400}$$

7 ▼▽▽ En cada apartado, reduce a común denominador y ordena de menor a mayor:

a) $\frac{5}{6}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{7}{10}, \frac{8}{15}$ b) $-\frac{1}{2}, -\frac{5}{8}, -\frac{7}{12}, -\frac{3}{4}$

8 ▼▽▽ Calcula y simplifica mentalmente.

a) $2 + \frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{2} - \frac{1}{5}$

d) $2 \cdot \frac{5}{4}$ e) $\frac{2}{3} : 2$ f) $\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3}$

g) $\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{4}$ h) $\frac{12}{7} : 3$ i) $\frac{7}{3} \cdot 21$

9 ▼▽▽ Expresa como un número decimal las siguientes fracciones:

$$\frac{9}{25} \quad \frac{13}{9} \quad \frac{23}{6} \quad \frac{17}{200} \quad \frac{5}{7} \quad \frac{233}{990} \quad \frac{13}{22}$$

10 ▼▽▽ Ordena de menor a mayor en cada apartado:

a) $3{,}56;\ \ 3{,}5\overset{\frown}{6};\ \ 3{,}\overset{\frown}{5};\ \ 3{,}\overset{\frown}{56}$

b) $-1{,}32;\ \ -1{,}3\overset{\frown}{2};\ \ -1{,}\overset{\frown}{32};\ \ -1{,}\overset{\frown}{3}$

Porcentajes

11 ▼▽▽ Calcula los porcentajes siguientes:

a) 28% de 325 b) 80% de 37

c) 3% de 18 d) 0,7% de 4 850

e) 2,5% de 14 300 f) 130% de 250

12 ▼▽▽ ¿Qué porcentaje representa?

a) 78 de 342 b) 420 de 500

c) 25 de 5 000 d) 340 de 200

13 ▼▽▽ Calcula, en cada caso, la cantidad inicial de lo que conocemos:

a) El 28% es 98. b) El 15% es 28,5.

c) El 2% es 325. d) El 150% es 57.

14 ▼▽▽ ¿Por qué número hay que multiplicar para que se produzca uno de estos resultados?

a) Aumenta un 12%. b) Disminuye el 37%.

c) Aumenta un 150%. d) Disminuye un 2%.

15 ▼▽▽ Calcula el índice de variación y la cantidad final:

a) 325 aumenta el 28%.

b) 87 disminuye el 80%.

c) 425 aumenta el 120%.

d) 125 disminuye el 2%.

16 ▼▽▽ ¿Qué porcentaje de aumento o de disminución corresponde a estos índices de variación?:

a) 1,54 b) 0,18 c) 0,05

d) 2,2 e) 1,09 f) 3,5

17 ▼▽▽ Calcula mentalmente.

a) 10% de 340 b) 25% de 400

c) 75% de 4 000 d) 150% de 200

Aplica lo aprendido

18 ▼▽▽ ¿Cuántas botellas de 3/4 de litro se pueden llenar con un bidón de 30 litros de aceite?

19 ▼▽▽ Con una botella de 3/4 de litro de perfume podemos rellenar 25 frasquitos para regalar. ¿Qué fracción de litro cabe en cada frasquito?

20 ▼▽▽ Seis amigos se reparten los 3/7 de un premio, y el resto lo entregan a una ONG. Si cada uno ha recibido 22 €, ¿cuál era el importe del premio? ¿Cuánto donaron a la ONG?

21 ▼▽▽ Si me como los 4/9 del bizcocho que he hecho con mi padre y él se come los 3/5 del resto, ¿qué fracción del bizcocho ha comido mi padre? ¿Qué fracción queda?

22 ▼▽▽ De los 25 estudiantes que hay en una clase, tres han llegado, hoy, tarde. ¿Cuál es porcentaje de estudiantes que, hoy, han sido puntuales?

23 ▼▽▽ En una encuesta realizada para valorar un programa de radio, 224 personas lo aprueban. Si estas son el 35% de las encuestadas, ¿cuántas personas fueron consultadas?

24 ▼▽▽ Si el precio del alquiler de un piso es 410 € mensuales y lo suben un 3%, ¿cuál será la nueva mensualidad?

25 ▼▽▽ El precio de un medicamento es 32 €. Con una receta médica he pagado 9,60 €. ¿Qué porcentaje me han descontado?

26 ▼▽▽ Una mezcla de cereales está compuesta por 7/15 de trigo, 9/25 de avena y el resto de arroz.

a) ¿Qué parte de arroz tiene la mezcla?

b) ¿Qué cantidad de cada cereal habrá en 600 g de mezcla?

27 ▼▽▽ Julia gastó 1/3 de su dinero en libros y 2/5 en discos. Si le han sobrado 36 €, ¿cuánto tenía?

28 ▼▽▽ De los 300 libros de una biblioteca, 1/6 son de poesía; 180, de novela, y el resto, de historia. ¿Qué fracción representan los libros de historia?

29 ▼▽▽ En una papelería hacen una rebaja del 15% en todos los artículos. ¿Cuál será el precio que hemos de pagar por una cartera de 24 € y una calculadora de 18 €?

30 ▼▽▽ Si el precio del abono transporte de una ciudad subió el 12%, ¿cuál era el precio anterior si ahora cuesta 35,84 €?

31 ▼▽▽ He pagado 187,2 € por un billete de avión que costaba 240 €. ¿Qué porcentaje de descuento me hicieron?

32 ▼▽▽ He pagado 885 € por un artículo que costaba 750 € sin IVA. ¿Qué porcentaje de IVA me han aplicado?

33 ▼▽▽ La información nutricional de una marca de leche dice que en un litro hay 160 mg de calcio, que es el 20% de la cantidad diaria recomendada. Calcula la cantidad diaria de calcio que debe tomar una persona.

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

34 ▼▼▽ Un comerciante compra 50 kg de naranjas a 1,20 € el kilo, y las vende ganando un 40%. Calcula la cantidad recaudada por la venta de las naranjas.

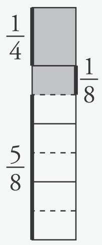
35 ▼▼▽ Un tornillo tiene un paso de rosca de 5/8 de milímetro. ¿Cuántas vueltas hemos de dar para que penetre 1,5 milímetros?

36 ▼▼▽ Un depósito de agua está lleno hasta los 5/7 de su capacidad. Se necesitan todavía 380 litros para completarlo. ¿Cuál es la capacidad del depósito?

Resuelve problemas

37 ▼▼▽ **Ejercicio resuelto**

De un depósito de agua, se saca la cuarta parte y, después, la sexta parte del resto, quedando aún 40 litros. ¿Cuál es su capacidad?



Sacamos $\frac{1}{4}$. Dividimos los $\frac{3}{4}$ que nos quedan en 6 partes $\rightarrow$ $\frac{3}{4} : 6 = \frac{1}{8}$

Queda $1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) = \frac{5}{8}$, que son 40 *l*.

La capacidad es $\frac{40 \cdot 8}{5} = 64$ *l*.

38 ▼▼▽ Del dinero de una cuenta bancaria, retiramos los 3/8 y, después, los 7/10 de lo que quedaba.

Si el saldo actual es de 1 893 €, ¿cuánto había al principio?

39 ▼▼▽ De un depósito de aceite, se vacía la mitad; de lo que queda, se vacía otra vez la mitad; luego, los 11/15 del resto, y al final quedan 36 *l*.

¿Cuántos litros había al principio?

40 ▼▼▽ El 70% de todos los asistentes a un congreso son europeos, y los no europeos ascienden a 75. De estos últimos, la quinta parte son asiáticos, un tercio son africanos y el resto son americanos.

a) ¿Cuántas personas asisten a ese congreso?

b) Calcula el número de asistentes de cada continente.

41 ▼▼▽ Nos comprometimos a pagar en tres plazos una lavadora que costaba 700 €.

En el primer plazo pagamos los 2/5 del total; en el segundo, los 2/3 de lo quedaba por pagar y en el tercero, el resto.

a) ¿Qué parte del total tuvimos que pagar en el tercer plazo?

b) Calcula la cantidad pagada en cada uno de los dos primeros plazos.

Autoevaluación

1 Efectúa y simplifica el resultado:

$$\frac{2}{3} - \frac{3}{5}\left(1 - \frac{5}{9}\right) + 4 \cdot \frac{2}{15}$$

2 De las entradas de un concierto se vendieron los 3/5 por internet y 3/4 del resto en la taquilla. Si quedaron 34 entradas sin vender, ¿cuántas se pusieron a la venta?

3 a) Expresa en forma decimal estas fracciones:

$$\frac{5}{8} \quad \frac{13}{6} \quad \frac{11}{3} \quad \frac{35}{11}$$

b) Ordena esos números de menor a mayor.

4 Un programa de radio tenía 130 000 oyentes a principios de año. Hasta hoy, su audiencia ha aumentado un 110%.

¿Cuántos oyentes tiene ahora?

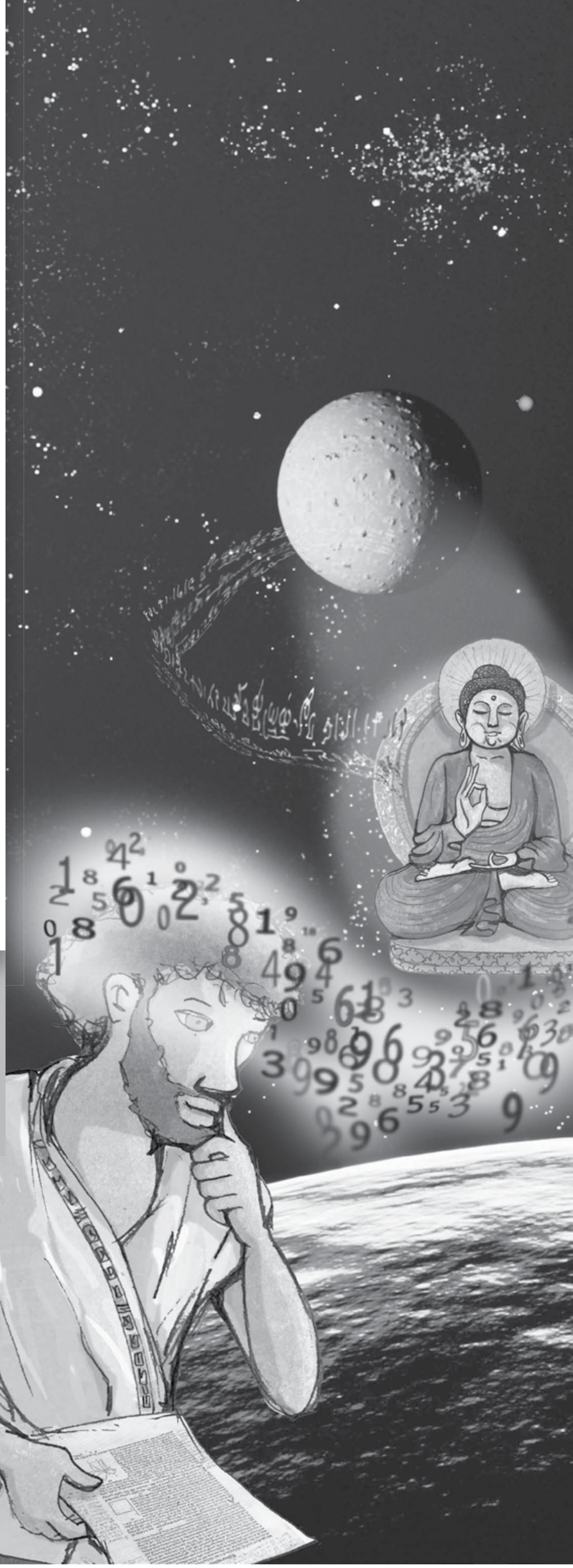
5 He comprado una camisa, que estaba rebajada un 25%, por 18 €.

¿Cuál era su precio inicial?

6 El abono mensual del autobús costaba 30 € y lo han subido a 36 €.

¿Cuál ha sido el porcentaje de aumento?

2 Potencias y raíces. Números aproximados



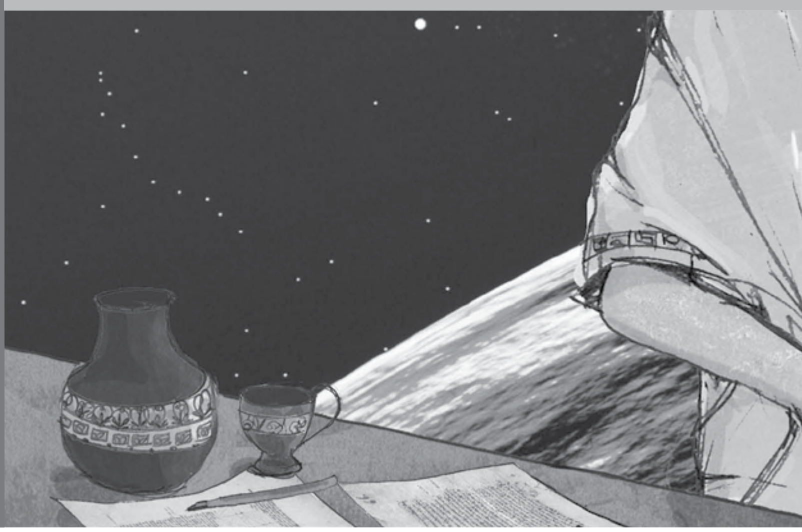
Nuestro sistema de numeración llegó a la civilización occidental por medio de los árabes (siglo IX), quienes, a su vez, lo aprendieron de los indios entre los siglos VII y VIII. Por eso, lo que hoy llamamos "numeración arábiga" debería llamarse "hindú" o "indoarábiga".

Los antiguos indios fueron muy aficionados a los números enormes. En su gran poema *Mahabarata* (siglo VI a.C., aproximadamente), se cuenta que Buda tuvo $6 \cdot 10^{11}$ hijos y se habla de $24 \cdot 10^{15}$ divinidades. Y una leyenda popular describe una batalla en la que intervinieron 10^{40} monos.

Arquímedes, gran matemático, ingeniero e inventor griego (siglo III a.C.), con el fin de demostrar que el número de granos de arena "no era infinito", se propuso escribir un número mayor que el número de granos de arena que cabrían en el universo. Y para ello escribió todo un libro, *El Arenario*, en el que tuvo que inventar una nueva forma de escribir números extraordinariamente grandes.

DEBERÁS RECORDAR

- Operaciones con potencias de base 10.
- Aproximación de números decimales: truncamiento y redondeo.



1 Potenciación

Entrénate

1 Completa estos productos con los exponentes que faltan:

a) $3^4 \cdot 3 = 3^{\text{h}}$ b) $2^5 \cdot 2^2 = 2^{\text{h}}$

c) $4^5 \cdot 4^3 = 4^{\text{h}}$ d) $5^{\text{h}} \cdot 5^2 = 5^6$

e) $7^3 \cdot 7^{\text{h}} = 7^5$ f) $4^3 \cdot 4^{\text{h}} = 4^6$

2 Completa las siguientes divisiones con los exponentes que faltan:

a) $a^5 : a^3 = a^{\text{h}}$ b) $x^9 : x^6 = x^{\text{h}}$

c) $n^4 : n^2 = n^{\text{h}}$ d) $2^9 : 2^{\text{h}} = 2^4$

e) $3^{\text{h}} : 3^4 = 3^2$ f) $5^7 : 5^{\text{h}} = 5^2$

3 Completa estas potencias con los exponentes que faltan:

a) $(a^2)^3 = a^{\text{h}}$ b) $(b^2)^2 = b^{\text{h}}$

c) $(c^3)^3 = c^{\text{h}}$ d) $(2^3)^{\text{h}} = 2^6$

e) $(4^3)^{\text{h}} = 4^{12}$ f) $(5^4)^{\text{h}} = 5^8$

Potencias de exponente positivo

Las potencias de exponente entero positivo (1, 2, 3, …) son fáciles de interpretar:

$$a^1 = a \qquad a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ veces}}$$

Por ejemplo: $8^1 = 8$, $(-6)^4 = (-6) \cdot (-6) \cdot (-6) \cdot (-6)$, $\left(\frac{2}{7}\right)^3 = \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{7}$

Propiedades

① $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ Por ejemplo: $a^3 \cdot a^4 = (a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a \cdot a) = a^{3+4}$

② $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ Por ejemplo: $(a \cdot b)^3 = (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) = (a \cdot a \cdot a) \cdot (b \cdot b \cdot b) = a^3 \cdot b^3$

③ $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ Por ejemplo: $(a^2)^3 = a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 = (a \cdot a) \cdot (a \cdot a) \cdot (a \cdot a) = a^{2 \cdot 3}$

④ $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ Por ejemplo: $\frac{a^6}{a^4} = \frac{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot a \cdot a}{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a}} = \frac{a^{6-4}}{1} = a^{6-4}$

⑤ $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ Por ejemplo: $\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a \cdot a \cdot a}{b \cdot b \cdot b} = \frac{a^3}{b^3}$

Ejercicio resuelto

Reducir a una sola potencia.

a) $5^2 \cdot 5^6 \cdot 5^3$ **b)** $(2^3)^4$

c) $\frac{5^8}{5^6}$

d) $\frac{14^5}{7^5}$

e) $2^7 \cdot 5^7$

a) $5^2 \cdot 5^6 \cdot 5^3 = 5^{2+6+3} = 5^{11}$ (Propiedad ①)

b) $(2^3)^4 = 2^{3 \cdot 4} = 2^{12}$ (Propiedad ③)

c) $\frac{5^8}{5^6} = 5^{8-6} = 5^2$ (Propiedad ④)

d) $\frac{14^5}{7^5} = \left(\frac{14}{7}\right)^5 = 2^5$ (Propiedad ⑤)

e) $2^7 \cdot 5^7 = (2 \cdot 5)^7 = 10^7$ (Propiedad ②)

Actividades

1 Calcula las siguientes divisiones como en el ejemplo:

$15^3 : 5^3 = (15 : 5)^3 = 3^3 = 27$

a) $16^4 : 8^4$ b) $12^4 : 4^4$ c) $32^3 : 8^3$

d) $\frac{75^2}{25^2}$ e) $\frac{21^3}{7^3}$ f) $\frac{35^4}{7^4}$

2 Reduce a una sola potencia.

a) $4^3 \cdot 4^4 \cdot 4$ b) $(5^6)^3$ c) $\frac{7^6}{7^4}$

d) $\frac{15^3}{3^3}$ e) $2^{10} \cdot 5^{10}$ f) $\frac{12^5}{3^5 \cdot 4^5}$

Potencias de exponente cero o negativo

La propiedad ④ solo era válida para $m > n$.

Veamos qué ocurriría si fuera $m = n$ o $m < n$:

$$\frac{a^3}{a^3} = a^{3-3} = a^0. \text{ Pero } \frac{a^3}{a^3} = 1. \text{ Por tanto, tendría que ser } a^0 = 1.$$

$$\frac{a^3}{a^5} = a^{3-5} = a^{-2}. \text{ Pero } \frac{a^3}{a^5} = \frac{\cancel{a}\cdot\cancel{a}\cdot\cancel{a}}{\cancel{a}\cdot\cancel{a}\cdot\cancel{a}\cdot a\cdot a} = \frac{1}{a^2} \rightarrow a^{-2} = \frac{1}{a^2}$$

Estas igualdades nos sugieren la siguiente definición:

Si a es un número racional distinto de cero y n es entero positivo:

$$a^0 = 1 \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Por ejemplo:

$$6^{-2} = \frac{1}{6^2} \qquad \frac{1}{6^{-2}} = 6^2 \qquad \left(\frac{2}{3}\right)^{-5} = \left(\frac{3}{2}\right)^5 \qquad \frac{2}{3^{-4}} = 2 \cdot 3^4$$

Las propiedades que teníamos para las potencias de exponente positivo también son válidas para potencias de exponentes enteros cualesquiera.

Entrénate

1 Escribe en forma de fracción:

a) 3^{-2} b) 2^{-3} c) 5^{-1}

2 Expresa como un entero:

a) $\frac{1}{3^{-2}}$ b) $\frac{1}{2^{-3}}$ c) $\frac{1}{5^{-1}}$

3 Calcula.

a) $a^{-3} \cdot a^5$ b) $a^2 \cdot a^{-6}$

c) $\frac{x^3}{x^4}$ d) $\frac{1}{x^2 \cdot x^3}$

4 Calcula.

a) $4^3 \cdot 4^{-2}$ b) $3^2 \cdot 3^{-3}$

c) $4^2 \cdot 2^{-2}$ d) $5^3 \cdot 5^{-4}$

e) $6^4 \cdot 6^{-4}$ f) $3^5 \cdot 3^{-2}$

Actividades

3 Simplifica y completa los siguientes productos:

a) $\left(\frac{a}{b}\right)^3 \cdot \frac{b^4}{b^3}$ b) $\left(\frac{a}{b}\right)^3 \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^3$

c) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-3} \cdot \frac{a^4}{b^3}$ d) $\left(\frac{a}{b}\right)^3 \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{-3}$

4 Expresa como potencia de base 10 esta operación y, después, halla su resultado:

$$0{,}00001 : 10\,000\,000$$

5 Expresa como fracción simplificada.

a) $\frac{3^4}{3^5}$ b) 5^{-1} c) a^{-6}

d) $4^{-1}5^{-2}$ e) $(3^2)^{-2}$ f) $5 \cdot 3^{-1} \cdot x^{-2}$

6 Escribe como una potencia de base a y exponente un número entero:

a) $\frac{1}{a^{-3}}$ b) $\frac{a^6}{a^8}$ c) $a^2 \cdot a^{-6}$

d) $\frac{1}{a^2 \cdot a^3}$ e) $\frac{a}{a^3}$ f) $\frac{a^{-4}}{a}$

7 Calcula:

a) 2^{-3} b) $\frac{1}{3^{-2}}$ c) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}$

8 Reduce a un único número racional.

a) $\left(\frac{1}{5}\right)^2$ b) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$ c) $\left(\frac{-1}{5}\right)^{-2}$

d) $\left(\frac{3}{4}\right)^0$ e) $\left(\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2}\right)^{-6}$ f) $\left(\frac{1}{2}\right)^6 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^6$

2 Raíces exactas

Dos raíces cuadradas

Observa:

$$3^2 = 9,\ \ (-3)^2 = 9$$

Por tanto, 9 tiene dos raíces cuadradas: 3 y –3.

Pero, ¡atención!, cuando ponemos $\sqrt{9}$ nos estamos refiriendo a la raíz positiva, es decir, $\sqrt{9} = 3$.

Análogamente, 16 tiene dos raíces cuartas: 2 y –2.

Pero $\sqrt[4]{16} = 2$.

Raíces cuadradas

Como sabes, $\sqrt{25} = 5$, porque $5^2 = 25$.

Análogamente, $\sqrt{\dfrac{25}{4}} = \dfrac{5}{2}$, porque $\left(\dfrac{5}{2}\right)^2 = \dfrac{5^2}{2^2} = \dfrac{25}{4}$.

Raíces cúbicas

Las raíces cúbicas se comportan de forma similar a las raíces cuadradas:

$\sqrt[3]{8} = 2$, porque $2^3 = 8$

$\sqrt[3]{\dfrac{8}{1\,000}} = \dfrac{2}{10}$, porque $\left(\dfrac{2}{10}\right)^3 = \dfrac{2^3}{10^3} = \dfrac{8}{1\,000}$

Otras raíces

Del mismo modo, interpretamos raíces de índice superior a 3:

Puesto que $2^5 = 32$, $\sqrt[5]{32} = 2$.

$\sqrt[4]{10\,000} = 10$, porque $10^4 = 10\,000$

En general: si $a = b^n$, entonces $\sqrt[n]{a} = b$.

Ejercicio resuelto

Calcular las siguientes raíces:

a) $\sqrt{\dfrac{49}{16}}$

b) $\sqrt{4\,356}$

c) $\sqrt[3]{\dfrac{1\,000}{64}}$

d) $\sqrt[5]{\dfrac{1}{243}}$

a) $\left(\dfrac{7}{4}\right)^2 = \dfrac{7^2}{4^2} = \dfrac{49}{16}$. Por tanto, $\sqrt{\dfrac{49}{16}} = \dfrac{7}{4}$.

b) Puesto que piden $\sqrt{4\,356}$, supondremos que 4 356 es un cuadrado perfecto.

Para comprobarlo, lo descomponemos en factores primos: $4\,356 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 11^2$.

Es decir, $4\,356 = (2 \cdot 3 \cdot 11)^2 = 66^2$. Por tanto, $\sqrt{4\,356} = 66$.

c) $1\,000 = 10^3$, $64 = 4^3$. Por tanto, $\sqrt[3]{\dfrac{1\,000}{64}} = \dfrac{10}{4}$.

d) $243 = 3^5$. Por tanto, $\sqrt[5]{\dfrac{1}{243}} = \dfrac{1}{3}$.

Actividades

1 Calcula las siguientes raíces:

a) $\sqrt[3]{8}$ b) $\sqrt[5]{32}$ c) $\sqrt[3]{27}$ d) $\sqrt[4]{16}$

e) $\sqrt[4]{81}$ f) $\sqrt[3]{125}$ g) $\sqrt[3]{1\,000}$ h) $\sqrt[5]{100\,000}$

2 Calcula las siguientes raíces:

a) $\sqrt[4]{625}$ b) $\sqrt[5]{243}$ c) $\sqrt[3]{343}$ d) $\sqrt[6]{1\,000\,000}$

e) $\sqrt[6]{64}$ f) $\sqrt[7]{128}$ g) $\sqrt[4]{28\,561}$ h) $\sqrt[3]{10\,648}$

3 Aproximaciones y errores

Recuerda

Recuerda que para **aproximar** un número a un determinado orden de unidades:

- Se suprimen todas las cifras de la derecha de dicho orden.
- Si la primera cifra suprimida es igual o mayor que cinco, se suma 1 a la cifra anterior.

Número de cifras significativas

Las estimaciones que hacemos en la vida corriente, sin ánimo de que sean muy precisas, tienen una o, a lo sumo, dos cifras significativas:

"ESTAS CASAS CUESTAN CUATROCIENTOS VEINTE MIL EUROS"

Una cantidad dada con tres cifras afina mucho. Solo en la ciencia se necesitan precisiones de cuatro o más cifras.

Los números decimales son especialmente útiles para expresar cantidades aproximadas.

Por qué usar números aproximados

Con mucha más frecuencia de la que somos conscientes, usamos números aproximados.

Lo hacemos, en general, por uno de estos motivos:

— o bien porque no es conveniente o no es necesario dar una cantidad exacta que sí conocemos,

— o bien porque, simplemente, no tenemos forma de medirla (o no la conocemos) con exactitud.

Por ejemplo:

- Al comunicar (o comentar) que a alguien le han tocado 3 527 834,56 € en la primitiva, diremos "tres millones y medio" o, acaso, "3 millones 528 mil euros" (no es necesario decir la cantidad exacta).
- Al medir la longitud de una mesa con una cinta métrica, nos aproximaremos hasta los centímetros o, como mucho, a los milímetros (con una cinta métrica no somos capaces de medir con más exactitud).

Cifras significativas

La altura a la que vuela un avión se puede expresar de diversas formas (nos fijamos en el número de cifras que usamos en cada caso):

9 km → solo una cifra

9,2 km → dos cifras

9 200 m → cuatro cifras (¿o, tal vez, solo dos?)

9 246 m → cuatro cifras

Está claro que cuantas más cifras se utilizan con más precisión se está dando la medida. Pero, a veces, no es conveniente dar demasiadas: ¿es razonable que la altura de un avión se dé afinando hasta los metros?

Fijémonos ahora en la medición 9 200 m. ¿Han querido ser exactos hasta los "metros" o solo hasta los "cientos de metros"? Muy probablemente sea esto último y, en este caso, los dos ceros finales no son *cifras significativas*.

Se llaman **cifras significativas** aquellas con las que se expresa un número aproximado. Solo deben utilizarse aquellas cuya exactitud nos conste.

Los ceros del final de un número no son cifras significativas si solo se han utilizado para poder expresar la cantidad en la unidad deseada (9 200 m en lugar de 92 cientos de metros).

Control del error cometido

Es claro que cuando damos una medida aproximada estamos cometiendo un error, que consiste en la diferencia, en valor absoluto, entre el valor exacto (o real) y el valor aproximado. Se llama **error absoluto.**

$$\textbf{Error absoluto} = |\text{Valor real} - \text{Valor aproximado}|$$

En general, el error absoluto es desconocido (porque no conocemos el valor real), pero puede controlarse. Por ejemplo, al dar la altura del avión, 9,2 km, podemos saber que el error cometido es menor que 0,05 km = 50 m, ya que si se da 9,2 es porque está más cerca de esta medida que de 9,1 y que de 9,3.

No es lo mismo cometer un error de 50 m al medir la altura de un avión, que al medir la altura de un edificio o la altura de un satélite. Por eso se define el **error relativo** como el cociente entre el error absoluto y la medida exacta.

$$\textbf{Error relativo} = \frac{\text{Error absoluto}}{\text{Valor real}}$$

Cuantas más cifras significativas se utilicen para dar la medida aproximada, menor es el error relativo cometido.

Por ejemplo, si comparamos el error relativo de las mediciones 87 m, 5 km y 453 km, podemos asegurar que el menor error relativo se da en 453 km, ya que en ella se utilizan tres cifras significativas.

Actividades

1 ¿Qué podemos decir del error absoluto y del error relativo de estas mediciones?

a) Volumen de una bañera, 326 litros.

b) Volumen de una piscina, 326 m^3.

2 Compara el error relativo cometido al hacer las siguientes pesadas:

a) Una ballena, 37 toneladas.

b) Un pavo, 3 kg.

3 Aproxima al orden de la unidad indicada:

a) 2,3148 a las centésimas.

b) 43,18 a las unidades.

c) 0,00372 a las milésimas.

d) 13 847 a las centenas.

e) 4 723 a los millares.

f) 37,9532 a las décimas.

4 Expresa con dos cifras significativas estas cantidades:

a) Presupuesto de un club: 1 843 120 €.

b) Votos de un partido político: 478 235.

c) Precio de una empresa: 15 578 147 €.

d) Tamaño de un ácaro: 1,083 mm.

5 ¿En cuál de las aproximaciones dadas se comete menos error absoluto?

a) $\frac{14}{3} \approx$ 4,6 / 4,7

b) $\sqrt{6} \approx$ 2,44 / 2,45

6 Calcula el error absoluto cometido en cada caso:

	CANTIDAD REAL	CANTIDAD APROXIMADA
PRECIO DE UN COCHE	12 387 €	12 400 €
TIEMPO DE UNA CARRERA	81,4 min	80 min
DISTANCIA ENTRE DOS PUEBLOS	13,278 km	13,3 km

4 Notación científica

Los números siguientes están puestos en notación científica:

$$3{,}56 \cdot 10^{13} \ (= \underbrace{35\,600\,000\,000\,000}_{13 \text{ cifras}})$$

$$9{,}207 \cdot 10^{-16} \ (= 0{,}\underbrace{0000000000000009}_{16 \text{ cifras}}207)$$

La notación científica tiene sobre la usual la siguiente ventaja: las cifras se nos dan contadas, con lo que el orden de magnitud del número es evidente. Esta notación es útil, sobre todo, para expresar números muy grandes o muy pequeños.

Un número puesto en notación científica consta de:

- Una parte entera formada por una sola cifra que no es el cero (la de las unidades).
- El resto de las cifras significativas, si las hay, puestas como parte decimal.
- Una potencia de base 10 que da el orden de magnitud del número.

$$N = \underbrace{a}_{\text{PARTE ENTERA (SOLO UNA CIFRA)}} , \underbrace{b\,c\,d\,\ldots}_{\text{PARTE DECIMAL}} \cdot \underbrace{10^{n}}_{\text{POTENCIA ENTERA DE BASE 10}}$$

Si n es positivo, el número N es “grande”.

Y si n es negativo, entonces N es “pequeño”.

Entrénate

1 Expresa como potencias enteras de base 10.

a) 100 000

b) 10

c) 10 000 000

2 Expresa como potencias enteras de base 10.

a) 0,001

b) 0,1

c) 0,000001

3 Escribe con todas sus cifras.

a) $2{,}3 \cdot 10^{5}$ b) $6{,}8 \cdot 10^{-4}$

c) $1{,}94 \cdot 10^{7}$ d) $2{,}26 \cdot 10^{-8}$

Actividades

1 Escribe estos números con todas sus cifras:

a) $4 \cdot 10^{7}$ b) $5 \cdot 10^{-4}$ c) $9{,}73 \cdot 10^{8}$

d) $8{,}5 \cdot 10^{-6}$ e) $3{,}8 \cdot 10^{10}$ f) $1{,}5 \cdot 10^{-5}$

2 Opera y expresa el resultado como una potencia de base 10:

a) 1 000 · 100 000

b) 1 000 · 0,01

c) 1 000 : 0,01

d) 1 000 : 0,000001

e) 1 000 · 0,000001

f) 0,0001 · 0,01

g) 0,0001 : 0,01

3 Escribe estos números en notación científica:

a) 13 800 000 b) 0,000005

c) 4 800 000 000 d) 0,0000173

4 Escribe estos números en notación científica:

a) 27 800 000 b) 950 000 000 000

c) 0,00057 d) 0,00000000136

5 Expresa en notación científica.

a) Distancia Tierra-Sol: 150 000 000 km.

b) Caudal de una catarata: 1 200 000 *l*/s.

c) Velocidad de la luz: 300 000 000 m/s.

d) Emisión de CO_2: 54 900 000 000 kg.

PREFIJOS PARA ÓRDENES DE UNIDADES	
tera	10^{12}
giga	10^{9}
mega	10^{6}
kilo	10^{3}
hecto	10^{2}
deca	10
deci	10^{-1}
centi	10^{-2}
mili	10^{-3}
micro	10^{-6}
nano	10^{-9}

Calculadora para notación científica

Las teclas para poner el exponente en una notación científica son, dependiendo del modelo de calculadora, [EXP] o [$\times 10^x$].

Interpretación

Cuando la calculadora obtiene un resultado con más cifras de las que caben en su pantalla, recurre a la notación científica. Por ejemplo:

123 000 000 [×] 45 000 [=] [5.535 $\times 10^{12}$]

0,000123 [÷] 50 000 [=] [2.46 $\times 10^{-09}$]

Escritura

Para poner $5{,}74 \cdot 10^9$, hacemos: 5,74 [EXP] 9 [o bien 5,74 [$\times 10^x$] 9]

Para poner $2{,}95 \cdot 10^{-13}$, hacemos: 2,95 [EXP] 13 [+/–] [o bien 2,95 [$\times 10^x$] [(–)] 13]

Operaciones

Las operaciones se encadenan como si fueran números cualesquiera. La propia calculadora, al presionar la tecla [=], da el resultado en forma científica.

Ejercicios resueltos

a) $(3{,}214 \cdot 10^{-5}) \cdot (7{,}2 \cdot 10^{15})$

a) 3,214 [EXP] 5 [+/–] [×] 7,2 [EXP] 15 [=] [2.31408 $\times 10^{11}$]

b) $\dfrac{3{,}214 \cdot 10^{-5}}{7{,}2 \cdot 10^{15}}$

b) 3,214 [EXP] 5 [+/–] [÷] 7,2 [EXP] 15 [=] [4.4638889 $\times 10^{-21}$]

c) $3{,}2 \cdot 10^8 + 7{,}3 \cdot 10^{-14} - 4{,}552 \cdot 10^8$

c) 3,2 [EXP] 8 [+] 7,3 [EXP] 14 [+/–] [–] 4,552 [EXP] 8 [=] [–1.352 $\times 10^{8}$]

Si los números que queremos sumar son muy diferentes en orden de magnitud, el resultado que muestra la calculadora es de orden igual al mayor de ellos.

Por ejemplo: 7,32 [EXP] 4 [+] 5,35 [EXP] 17 [=] [5.35 $\times 10^{17}$]

Actividades

6 Calcula:

a) $(3{,}25 \cdot 10^7) \cdot (9{,}35 \cdot 10^{-15})$

b) $(5{,}73 \cdot 10^4) + (-3{,}2 \cdot 10^5)$

7 Efectúa con la calculadora:

a) $(2{,}5 \cdot 10^7) \cdot (8 \cdot 10^3)$

b) $(5 \cdot 10^{-3}) : (8 \cdot 10^5)$

c) $(7{,}4 \cdot 10^{13}) \cdot (5 \cdot 10^{-6})$

8 Efectúa con la calculadora:

a) $(2 \cdot 10^5) \cdot (3 \cdot 10^{12})$

b) $(1{,}5 \cdot 10^{-7}) \cdot (2 \cdot 10^{-5})$

c) $(3{,}4 \cdot 10^{-8}) \cdot (2 \cdot 10^{17})$

d) $(8 \cdot 10^{12}) : (2 \cdot 10^{17})$

e) $(9 \cdot 10^{-7}) : (3 \cdot 10^7)$

f) $(4{,}4 \cdot 10^8) : (2 \cdot 10^{-5})$

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

Opera y calcula

Potencias y raíces

1 ▼▽▽ Calcula las potencias siguientes:

a) $(-3)^3$ b) $(-2)^4$ c) $(-2)^{-3}$

d) -3^2 e) -4^{-1} f) $(-1)^{-2}$

g) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$ h) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}$ i) $\left(\frac{4}{3}\right)^{0}$

2 ▼▽▽ Calcula.

a) 3^{-2} b) 2^{-3} c) 5^{-1}

d) $\frac{1}{3^{-2}}$ e) $\frac{1}{2^{-3}}$ f) $\frac{1}{5^{-1}}$

3 ▼▽▽ Calcula.

a) $4^3 \cdot 4^{-2}$ b) $3^2 \cdot 3^{-3}$ c) $4^2 \cdot 2^{-2}$

d) $5^3 \cdot 5^{-4}$ e) $6^4 \cdot 6^{-4}$ f) $3^5 \cdot 3^{-2}$

4 ▼▽▽ Opera.

a) $a^{-3} \cdot a^5$ b) $a^2 \cdot a^{-6}$ c) $a^{-1} \cdot a^5$

d) $\frac{x^3}{x^4}$ e) $\frac{1}{x^2 \cdot x^3}$ f) $\frac{1}{x^{-2}}$

5 ▼▽▽ Opera y simplifica los siguientes productos:

a) $\left(\frac{a}{b}\right)^3 \cdot \frac{b^4}{a^3}$ b) $\left(\frac{a}{b}\right)^3 \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^3$

c) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-3} \cdot \frac{a^4}{b^3}$ d) $\left(\frac{a}{b}\right)^3 \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{-3}$

6 ▼▽▽ Expresa como potencia única.

a) $\frac{3^4}{3^{-3}}$ b) $\frac{2^{-5}}{2^3}$ c) $\left(\frac{2^{-3}}{2^{-2}}\right)^{-1}$

7 ▼▽▽ Calcula.

a) $\sqrt[4]{16}$ b) $\sqrt{\frac{16}{25}}$

c) $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$ d) $\sqrt[5]{-1}$

8 ▼▽▽ Calcula las siguientes raíces:

a) $\sqrt[6]{64}$ b) $\sqrt[3]{216}$

c) $\sqrt{14\,400}$ d) $\sqrt[6]{\frac{1}{64}}$

e) $\sqrt[3]{\frac{64}{216}}$ f) $\sqrt[3]{\frac{3\,375}{1\,000}}$

9 ▼▽▽ Justifica si son ciertas o no las siguientes frases:

a) Como $(-5)^2 = 25$, entonces $\sqrt{25} = -5$.

b) -5 es una raíz cuadrada de 25.

c) 81 tiene dos raíces cuadradas: 3 y -3.

d) 27 tiene dos raíces cúbicas: 3 y -3.

Notación científica

10 ▼▼▽ Di cuál debe ser el valor de n para que se verifique la igualdad en cada caso:

a) $3\,570\,000 = 3{,}57 \cdot 10^n$

b) $0{,}000083 = 8{,}3 \cdot 10^n$

c) $157{,}4 \cdot 10^3 = 1{,}574 \cdot 10^n$

d) $93{,}8 \cdot 10^{-5} = 9{,}38 \cdot 10^n$

e) $14\,700 \cdot 10^5 = 1{,}47 \cdot 10^n$

f) $0{,}003 \cdot 10^8 = 3 \cdot 10^n$

11 ▼▼▽ Efectúa estas operaciones con la calculadora:

a) $3{,}6 \cdot 10^{12} - 4 \cdot 10^{11}$

b) $5 \cdot 10^9 + 8{,}1 \cdot 10^{10}$

c) $8 \cdot 10^{-8} - 5 \cdot 10^{-9}$

d) $5{,}32 \cdot 10^{-4} + 8 \cdot 10^{-6}$

Aplica lo aprendido

12 ▼▽▽ Si la edad del Sol es $5 \cdot 10^9$ años, y la de la Tierra, 4 600 millones de años, ¿cuál de los dos es más viejo?

Calcula la diferencia entre la edad del Sol y la de la Tierra y exprésala en notación científica y en millones de años.

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

13 ▼▽▽ Si una persona respira unas 15 veces por minuto, ¿cuántas veces habrá respirado esa persona si vive hasta los 80 años?

14 ▼▽▽ El número estimado de estrellas de nuestra galaxia es de $1,1 \cdot 10^{11}$, y el número estimado de galaxias en el universo es de $1,2 \cdot 10^{12}$. Si suponemos que, en todas las galaxias, el número de estrellas es aproximadamente el mismo, ¿cuál será el número de estrellas en el universo?

15 ▼▽▽ En un gramo de arena hay alrededor de 250 granos. ¿Cuántos granos habrá en un contenedor en el que hay una tonelada de arena?

16 ▼▽▽ El volumen de una gota de agua es 1/4 de mililitro, aproximadamente. ¿Cuántas gotas habrá en un depósito que contiene 1 m^3 de agua?

17 ▼▽▽ El diámetro de un virus es $5 \cdot 10^{-4}$ mm. ¿Cuántos de esos virus son necesarios para rodear la Tierra? (Radio medio de la Tierra: 6 370 km).

18 ▼▽▽ El presupuesto en educación de una comunidad autónoma ha pasado de $8,4 \cdot 10^6$ € a $1,3 \cdot 10^7$ € en tres años.

¿Cuál ha sido la variación porcentual?

19 ▼▽▽ En España se consumen, aproximadamente, 7,2 millones de toneladas de papel al año.

¿Cuál es el consumo anual per cápita? (Población de España: 45 millones).

20 ▼▽▽ Los veterinarios estiman que el 5% de la población mundial tiene un perro.

Según esta estimación, ¿cuántos perros hay en el mundo? (Población mundial: $6,8 \cdot 10^9$ habitantes).

21 ▼▼▽ La velocidad de la luz es $3 \cdot 10^8$ m/s. Un *año luz* es la distancia que recorre la luz en un año.

a) ¿Qué distancia recorre la luz del Sol en un año?

b) ¿Cuánto tarda la luz del Sol en llegar a Plutón? (Distancia del Sol a Plutón: $5,914 \cdot 10^6$ km).

c) La estrella Alfa-Centauro está a 4,3 años luz de la Tierra. Expresa en kilómetros esa distancia.

22 ▼▼▽ En un reloj que mide el crecimiento de la población mundial, observo que aumentó en 518 personas en 30 minutos.

Si se mantiene ese ritmo de crecimiento, ¿cuándo llegaremos a 7 mil millones? (Población mundial: $6,8 \cdot 10^9$).

Autoevaluación

1 Calcula:

a) 5^0 b) 3^{-2}

c) $(-2)^3$ c) $(-5)^{-1}$

2 Simplifica:

a) $(3^{-2} \cdot 3^4)^3$ b) $5^3 : 5^{-2}$

3 Calcula aplicando la definición:

a) $\sqrt[3]{-8}$ b) $\sqrt[4]{81}$ c) $\sqrt[5]{1/32}$

4 Expresa en notación científica:

a) 234 000 000 b) 0,000075

5 Escribe con todas las cifras:

a) $5,2 \cdot 10^6$ b) $8 \cdot 10^{-5}$

6 Efectúa con la calculadora:

a) $(3,5 \cdot 10^7) \cdot (8 \cdot 10^{-13})$

b) $(9,6 \cdot 10^8) : (3,2 \cdot 10^{10})$

c) $(2,7 \cdot 10^8) + (3,3 \cdot 10^7)$

7 La población mundial está estimada en $6,8 \cdot 10^9$, y el número de internautas es, aproximadamente, de 1 600 millones de personas.

¿Qué porcentaje de la población mundial utiliza internet?

3 Progresiones

Las progresiones geométricas fueron tratadas por primera vez, de forma rigurosa, por **Euclides,** matemático griego del siglo III a.C. Fue el fundador y primer director de la gran escuela matemática de Alejandría, donde escribió su monumental obra *Elementos*, que consta de 13 libros en los que se desarrolló sobre todo la geometría, pero cuatro de ellos los dedicó a la aritmética. En uno de estos, el IX, trató las progresiones geométricas. Aunque sus resultados son similares a los que se exponen en esta unidad, la nomenclatura era muy distinta. Incluso cambia el nombre: Euclides las llamó *proporciones continuas*.

En el siglo I, **Nicómaco** recopiló lo que entonces se sabía de aritmética, casi todo conocido desde Euclides. Aunque sus aportaciones fueron escasas, en su obra incluyó el estudio de las progresiones aritméticas, que no trató Euclides cuatrocientos años antes.

Hay que esperar hasta el siglo XIII para que aparezca la sucesión más conocida de la historia, la de Fibonacci:

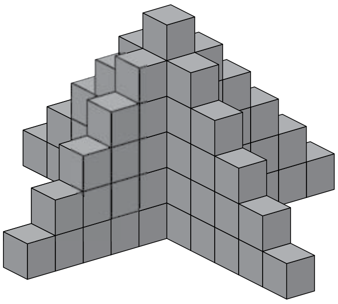
1 1 2 3 5 8 13 21 34 …

Su autor, **Leonardo de Pisa** (hijo de Bonaccio: **Fibonacci**), la describió en su *Liber Abaci*, en un contexto de descendencia de conejos: “Cuántas parejas de conejos se producirán en un año, comenzando por una pareja única, si cada mes cualquier pareja engendra otra pareja que se reproduce, a su vez, desde el segundo mes”.

DEBERÁS RECORDAR

- Cómo se usan el “factor constante” y el “sumando constante” con la calculadora.
- Algunas propiedades de potencias y de raíces.

1 Sucesiones



¿A cuál de las sucesiones de la derecha corresponde esta torre?

Entrénate

1 Añade tres términos más a cada una de las siguientes sucesiones:

a) 12, 14, 16, 18, …

b) 25, 20, 15, 10, …

c) 7, 3, –1, –5, …

d) –13, –8, –3, 2, …

2 Escribe el octavo término de cada una de estas sucesiones, de las que conocemos sus cuatro primeros términos:

a) $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 8$, $a_4 = 16$

b) $b_1 = 15$, $b_2 = 9$, $b_3 = 3$, $b_4 = -3$

Las **sucesiones** son conjuntos de números (u otros objetos) dados ordenadamente. Por ejemplo:

a) 1, 5, 9, 13, 17, …

b) 170, 120, 70, 20, –30, –80, …

c) 2, 4, 8, 16, 32, 64, …

d) 1, –3, 9, –27, 81, –243, …

e) 1, 1, 2, 3, 5, 8, …

f) 1, 4, 9, 16, 25, 36, …

Cada una de las sucesiones anteriores se construye siguiendo un cierto criterio. Algunos son evidentes:

— Sumar siempre la misma cantidad.

— Multiplicar siempre por la misma cantidad.

Otros son menos evidentes:

— Cada término se obtiene sumando los dos anteriores.

— Cada término se obtiene elevando al cuadrado el número que indica su posición.

A los elementos de la sucesión los llamamos **términos.** Podemos referirnos al primer término, al segundo término, al tercer término… de una sucesión c, pero es más cómodo llamarlos $c_1, c_2, c_3, \dots$

Así, por ejemplo, para indicar que en la primera sucesión la diferencia de cada término al anterior es 4, podemos escribir:

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \dots = 4$$

Se llama **sucesión** a un conjunto de números dados ordenadamente de modo que se puedan numerar: primero, segundo, tercero…

Los elementos de la sucesión se llaman **términos** y se suelen designar mediante una letra con subíndice. El subíndice de cada elemento indica el lugar que ocupa en la sucesión:

$$s_1,\ s_2,\ s_3,\ s_4,\ s_5,\ s_6, \dots$$

Actividades

1 Añade tres términos más a cada una de las siguientes sucesiones:

a) $\frac{1}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \dots$ b) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$

c) 3, 6, 12, 24, … d) 1, 3, 4, 7, …

2 Escribe el octavo término de cada una de estas sucesiones:

a) $a_1 = 1{,}2$; $a_2 = 2{,}3$; $a_3 = 3{,}4$; $a_4 = 4{,}5$; …

b) $b_1 = 1$, $b_2 = -3$, $b_3 = 9$, $b_4 = -27$, …

Término general de una sucesión

A veces, podemos encontrar una expresión que sirve para obtener un término cualquiera de la sucesión con solo saber el lugar que este ocupa.

Por ejemplo, para la sucesión a) 1, 5, 9, 13, 17, … de la página anterior, encontramos la expresión $a_n = 4n - 3$, pues dándole a n los valores 1, 2, 3, 4, …, obtenemos los términos $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$

$a_n = 4n - 3$ es el **término general** de esta sucesión.

Se llama **término general** de una sucesión s (y se simboliza con s_n) a la expresión que representa un término cualquiera de esta.

Hay sucesiones cuyo término general puede expresarse mediante una fórmula, $s_n = f(n)$, en la cual, dándole a n un cierto valor, se obtiene el término correspondiente.

Las sucesiones que habitualmente manejaremos estarán formadas siguiendo algún criterio. Algunas vendrán dadas por su término general o será fácil obtenerlo. Pero en otras, cada término se obtendrá operando con los anteriores.

Las **sucesiones** cuyos términos se obtienen a partir de los anteriores se dice que están dadas en **forma recurrente.**

Por ejemplo, en la sucesión e) 1, 1, 2, 3, 5, 8, …, cada término es la suma de los dos anteriores, $e_n = e_{n-1} + e_{n-2}$.

Entrénate

1 Escribe los cuatro primeros términos de cada sucesión:

$a_n = 7n - 10$

$b_n = 43 - 13n$

$c_n = (-1)^n \cdot n^2$

2 Halla el término general de las siguientes sucesiones:

a) 3, 9, 27, 81, …

b) $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \dots$

c) 4, 5, 6, 7, …

d) 1, 3, 5, 7, …

Actividades

3 Escribe los cuatro primeros términos y el décimo de cada una de las siguientes sucesiones:

$a_n = \dfrac{2n-5}{n^2+1}$ $\qquad b_n = 5 \cdot 2^{n-1}$

$c_n = 4 + \dfrac{5n-5}{2}$ $\qquad d_n = (-1)^{n+1} \cdot n$

4 Calcula los términos que se piden en cada una de estas sucesiones:

$a_n = \dfrac{3n-2}{n} \rightarrow a_5,\ a_{10}$ y a_{100}

$b_n = \dfrac{(-2)^n}{5} \rightarrow b_5,\ b_6$ y b_7

$c_n = 39 - 17n \rightarrow c_1,\ c_4$ y c_{15}

$d_n = \left(\sqrt{2}\right)^n \rightarrow d_1,\ d_6$ y d_{20}

5 Halla el término general de las siguientes sucesiones:

a) $\dfrac{1}{3}, \dfrac{4}{3}, \dfrac{9}{3}, \dfrac{16}{3}, \dots$ $\qquad$ b) 7, 14, 21, 28, …

6 ¿Cuál es el término general de estas sucesiones?

a) $\dfrac{1}{5}, \dfrac{1}{10}, \dfrac{1}{15}, \dfrac{1}{20}, \dots$ $\qquad$ b) $\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, \dots$

7 ¿Cuál es el término general de estas sucesiones?

a) $\dfrac{0}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{2}{6}, \dfrac{3}{8}, \dots$ $\qquad$ b) 3, 6, 11, 18, 27, …

c) –1, 2, 7, 14, 23, … $\qquad$ d) 12, 14, 16, 18, …

e) 25, 20, 15, 10, … $\qquad$ f) 6, 12, 24, 48, …

8 Descubre la ley de recurrencia y añade un nuevo término a cada una de las siguientes sucesiones:

a) 1, –4, 5, –9, 14, –23, … (Diferencia)

b) 1, 2, 3, 6, 11, 20, …
(Relaciona cada elemento con los tres anteriores)

c) 1; 2; 1,5; 1,75; … (Semisuma)

d) 1, 2, 2, 1, 1/2, 1/2, 1, … (Cociente)

2 Progresiones aritméticas

Con calculadora

Añade cuatro términos a cada una de las sucesiones de la derecha. Si decimos que en a) la diferencia es 3, ¿cuál será la diferencia en las demás?

Con calculadora de pantalla sencilla generamos las sucesiones así:

a) 3 [+] [+] 2 [=] [=] [=] [=] [=] [=] …

b) 20 [+] [+] 120 [=] [=] [=] [=] [=] [=] …

c) 2 [+/–] [+] [+] 9 [=] [=] [=] [=] [=] [=] …

d) 0,04 [+] [+] 5,83 [=] [=] [=] [=] [=] …

Y con calculadora de pantalla descriptiva, así:

a) 2 [=] [Ans] [+] 3 [=] [=] [=] [=] [=] …

b) 120 [=] [Ans] [+] 20 [=] [=] [=] [=] …

c) 9 [=] [Ans] [+] [(–)] 2 [=] [=] [=] [=] …

d) 5,83 [=] [Ans] [+] 0,04 [=] [=] [=] [=] …

Observa las siguientes sucesiones:

a) 2, 5, 8, 11, 14, 17, …

b) 120, 140, 160, 180, 200, 220, …

c) 9, 7, 5, 3, 1, –1, –3, –5, …

d) 5,83; 5,87; 5,91; 5,95; 5,99; 6,03; …

A estas sucesiones se las llama **progresiones aritméticas.**

Una **progresión aritmética** es una sucesión en la que se pasa de cada término al siguiente sumando un mismo número (positivo o negativo), al que se llama **diferencia,** d, de la progresión.

Obtención del término general

Una progresión aritmética queda perfectamente determinada si conocemos el primer término y la diferencia. Por ejemplo, en la progresión a) de arriba, $a_1 = 2$ y $d = 3$. ¿Cómo hallaríamos el término 100?

— Para pasar del a_1 al a_{100}, hemos de dar 99 pasos.

— Cada paso supone aumentar 3 unidades.

— Por tanto, para pasar del término a_1 al a_{100}, aumentamos $99 \cdot 3 = 297$ unidades.

— Es decir, $a_{100} = 2 + 297 = 299$.

El **término general** a_n de una progresión aritmética cuyo primer término es a_1 y cuya diferencia es d se obtiene razonando así:

Para pasar de a_1 a a_n damos $n - 1$ pasos de amplitud d. Por tanto:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$$

Actividades

1 Asocia cada una de las siguientes progresiones aritméticas I, II, III y IV con su término general:

I) 3, 10, 17, 24, … II) –8, –12, –16, –20, …

III) 14, 11, 8, 5, … IV) –1,5; 0; 1,5; 3; …

$a_n = -3n + 17$ $b_n = 7n - 4$

$c_n = 1{,}5n - 3$ $d_n = -4n - 4$

2 Determina el término general de las progresiones aritméticas de las que conocemos:

a) $a_1 = 11$; $d = 3$ b) $b_1 = -5$; $d = 2$

3 Determina el término general de las progresiones aritméticas de las que conocemos:

a) $a_2 = -7$; $d = -4$ b) $b_2 = 3/2$; $d = 1$

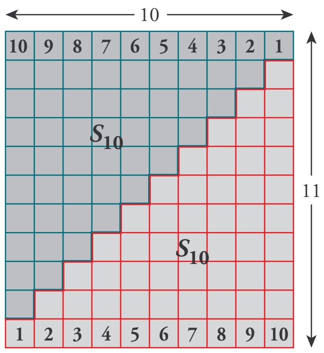
4 Halla el término general de las siguientes progresiones aritméticas:

a) 25, 20, 15, 10, …

b) 7, 3, –1, –5, …

c) –10, –7, –4, –1, …

d) –8, –12, –16, –20, …



$$S_{10} = \frac{10 \cdot 11}{2}$$

Suma de los términos de una progresión aritmética

Los números naturales forman una progresión aritmética de diferencia $d = 1$. Veamos cómo obtenemos la suma de los diez primeros términos; es decir, la suma $1 + 2 + 3 + \ldots + 10$:

$$\begin{array}{rl} S_{10} = & 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 \\ S_{10} = & 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 \\ \hline 2S_{10} = & 11 + 11 + 11 + \ldots\ldots\ldots + 11 + 11 \end{array}$$

$$2S_{10} = 10 \cdot 11 \to S_{10} = \frac{10 \cdot 11}{2} = 55$$

Esta forma simplificada de proceder se debe a la siguiente propiedad:

En una progresión aritmética de n términos, los términos equidistantes de los extremos suman lo mismo.

La **suma** $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n$ de los $\boldsymbol{n}$ **primeros términos** de una progresión aritmética es:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

Actividades

5 Calcula la suma de los treinta primeros términos de las siguientes progresiones aritméticas:

a) $a_1 = 3$; $a_2 = 10$; $a_3 = 1,7$; $a_4 = 24$; …; $a_n = 7n - 4$

b) $b_1 = 11$, $b_2 = 14$, $b_3 = 17$, $b_4 = 20$, …; $b_n = 3n + 8$

c) $c_1 = -10$, $c_2 = -7$, $c_3 = -4$, $c_4 = -1$, …; $c_n = 3n - 13$

d) $d_1 = 7$, $d_2 = 3$, $d_3 = -1$, $d_4 = -5$, …; $d_n = -4n + 11$

6 Calcula la suma de los veinte primeros términos de las siguientes progresiones aritméticas:

a) $a_n = 2n - 7$ b) $b_n = -4n - 4$

c) $c_n = -3n + 17$ d) $d_n = 1,5n - 3$

7 Calcula la suma de los once primeros términos de las siguientes progresiones aritméticas:

a) $a_n = 6 - n$ b) $b_1 = 4$, $b_2 = 7$

c) $c_1 = 12$, $c_4 = 18$ d) $d_2 = 10$, $d_4 = 16$

8 Halla la suma de todos los números pares menores que cien: 2, 4, 6, 8, …, 98.

9 En una progresión aritmética conocemos su sexto término, $a_6 = 13$, y la diferencia, $d = -3$.

Calcula el primer término y la suma de los quince primeros términos.

10 En una progresión aritmética, $a_1 = 5$ y $a_2 = 7$.

Calcula el término que ocupa el lugar 40, a_{40}, y la suma de los primeros cuarenta términos, S_{40}.

11 En una progresión aritmética, $b_1 = 5$ y $b_2 = 12$.

Calcula la suma de los 32 primeros términos, S_{32}.

12 El primer término de una progresión aritmética es $c_1 = 17$ y el quinto es $c_5 = 9$. Halla la suma S_{20}.

13 Los primeros términos de una progresión aritmética son $a_1 = 4$, $a_2 = 7$. Halla esta suma:

$$a_{10} + a_{11} + a_{12} + \ldots + a_{19} + a_{20}$$

3 Progresiones geométricas

Observa las siguientes sucesiones:

a) 3, 6, 12, 24, 48, 96, … Cada término se obtiene multiplicando el anterior por 2. Se trata de una progresión geométrica de razón 2.

b) 3, 30, 300, 3 000, … Es una progresión geométrica de razón 10.

c) 80; –40; 20; –10; 5; –2,5; … Progresión geométrica de razón –1/2 = –0,5

Una **progresión geométrica** es una sucesión en la que se pasa de cada término al siguiente multiplicando por un número fijo, r, llamado **razón.**

Obtención del término general

Una progresión geométrica queda completamente definida si conocemos el primer término y la razón. Por ejemplo, en la progresión a), el primer término es $a_1 = 3$ y la razón es $r = 2$. ¿Cómo hallaríamos el término 25?

— Para pasar del a_1 al a_{25}, hemos de dar 24 pasos.

— Cada paso supone multiplicar por 2. Por tanto, para pasar del a_1 al a_{25} habremos de multiplicar veinticuatro veces por 2; es decir, por 2^{24}.

— Así, $a_{25} = 3 \cdot 2^{24} = 3 \cdot 16\,777\,216 = 50\,331\,648$.

El **término general** a_n de una progresión geométrica cuyo primer término es a_1 y cuya razón es r se obtiene razonando del siguiente modo:

Para pasar de a_1 a a_n hemos de dar $n - 1$ pasos. Cada paso consiste en multiplicar por r. Por tanto:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

Problema resuelto

1. **Los dos primeros términos de una progresión geométrica son $a_1 = 250$ y $a_2 = 300$. Calcular r, a_6 y a_n.**

$a_2 = a_1 \cdot r \;\rightarrow\; 300 = 250 \cdot r \;\rightarrow\; r = \dfrac{300}{250} = 1{,}2$

$a_1 = 250,\; a_2 = 300,\; a_3 = 360,\; a_4 = 432,\; a_5 = 518{,}4;\; a_6 = 622{,}08$

TÉRMINO GENERAL: $a_n = 250 \cdot 1{,}2^{n-1}$

Con calculadora

Añade dos términos a cada una de las progresiones a), b), c) de la derecha.

Obtén nuevamente, con la calculadora, las tres progresiones geométricas usando el **factor constante.**

Por ejemplo, para a):

2 ⊗⊗ 3 ⊜ ⊜ ⊜ ⊜ ⊜ …

↓ ↓ ↓ ↓ ↓

6 12 24 48 96

O bien, con la calculadora de pantalla descriptiva:

3 ⊜ Ans ⊗ 2 ⊜ ⊜ ⊜ ⊜ …

↓ ↓ ↓ ↓

6 12 24 48

Entrénate

1 Asocia cada una de las progresiones geométricas I, II y III con su término general:

I) 125, 50, 20, …

II) 1 000, 800, 640, …

III) 1 000; 160; 25,6; …

$a_n = 1\,000 \cdot (0{,}16)^{n-1}$

$b_n = 125 \cdot (0{,}4)^{n-1}$

$c_n = 1000 \cdot (0{,}8)^{n-1}$

2 Halla el término general de estas progresiones geométricas:

a) $a_1 = 4,\ r = 3$

b) $b_1 = 3,\ r = -2$

c) $c_1 = 5,\ r = 5$

d) $d_1 = -2,\ r = 1/3$

Actividades

1 En las siguientes progresiones geométricas, calcula el término que se pide:

a) $a_1 = 5,\ r = 2 \rightarrow a_6$ b) $b_1 = 1/2,\ r = -2 \rightarrow b_7$

c) $c_1 = 10,\ r = 0{,}1 \rightarrow c_5$ d) $d_1 = 15,\ r = 1/2 \rightarrow d_8$

2 Calcula el término general de las siguientes progresiones geométricas:

a) 5, 50, 500, 5000, … b) $\dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{9}, \dfrac{2}{27}, \dfrac{2}{81}, \dots$

c) –3, 6, –12, 24, … d) $5, \dfrac{15}{2}, \dfrac{45}{4}, \dfrac{135}{8}, \dots$

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

Practica

Sucesiones: formación, término general

1 ▼▽▽ Escribe los cinco primeros términos de las siguientes sucesiones:

a) Cada término se obtiene sumando 7 al anterior. El primero es –10.

b) El primer término es 0,1. Los demás se obtienen multiplicando el anterior por 2.

c) El primero es 2; el segundo, 4, y los siguientes, la semisuma de los dos anteriores.

2 ▼▽▽ Escribe los términos a_{10} y a_{25} de las siguientes sucesiones:

a) $a_n = 3n - 1$

b) $b_n = \dfrac{n^2 + 1}{2}$

c) $c_n = (-1)^n + \dfrac{1}{n}$

d) $d_n = 1 + \dfrac{(-1)^n}{10}$

e) $e_n = n(n - 1)$

f) $f_n = \dfrac{n - 2}{n + 2}$

3 ▼▽▽ Escribe los cinco primeros términos de la siguiente sucesión:

$$a_1 = 1 \qquad a_n = 2a_{n-1} + 3$$

4 ▼▽▽ Averigua el criterio con el que se ha formado cada una de las siguientes sucesiones:

a) 11, 9, 7, 5, …

b) $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}, \dfrac{1}{16}, \ldots$

c) 2,5; 2,9; 3,3; 3,7; …

d) $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \ldots$

e) 8, 12, 18, 27, …

f) 0, 3, 8, 15, …

Progresiones aritméticas

5 ▼▽▽ En las siguientes progresiones aritméticas, calcula el término que se pide:

a) $a_1 = 5,\ d = 4 \rightarrow a_8$

b) $b_1 = -3,\ d = -2 \rightarrow b_{10}$

c) $c_1 = 4,\ c_2 = 7 \rightarrow c_{11}$

d) $d_1 = 12,\ d_4 = 18 \rightarrow d_9$

e) $e_2 = 10,\ e_4 = 16 \rightarrow e_1$

6 ▼▽▽ Calcula la diferencia de las siguientes progresiones aritméticas en las que conocemos dos términos:

a) $a_1 = 7,\ a_{10} = 34$

b) $b_2 = 3,\ b_8 = 15$

c) $c_3 = 8,\ c_{11} = 16$

7 ▼▽▽ Escribe los cinco primeros términos y a_{20} de las siguientes progresiones aritméticas:

a) $a_1 = 1{,}5;\ d = 2$

b) $a_1 = 32;\ d = -5$

c) $a_1 = 5;\ d = 0{,}5$

d) $a_1 = -3;\ d = -4$

8 ▼▽▽ Halla, en cada caso, el término general y calcula, después, a_{50}:

a) 25, 18, 11, 4, …

b) –13, –11, –9, –7, …

c) 1,4; 1,9; 2,4; 2,9; …

d) –3, –8, –13, –18, …

9 ▼▽▽ Calcula la suma de los veinte primeros términos de las siguientes progresiones aritméticas:

a) $a_1 = 5;\ d = 2$

b) $a_1 = -1;\ a_2 = -7$

c) Los números pares.

d) Los múltiplos de 3.

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

Progresiones geométricas

10 ▼▽▽ Escribe los cinco primeros términos de las siguientes progresiones geométricas:

a) $a_1 = 0{,}3;\ \ r = 2$

b) $a_1 = -3;\ \ r = \dfrac{1}{2}$

c) $a_1 = 200;\ \ r = -0{,}1$

d) $a_1 = \dfrac{1}{81};\ \ r = 3$

11 ▼▽▽ Halla, en cada una de las sucesiones siguientes, el término general:

a) 20; 8; 3,2; 1,28; …

b) 40, 20, 10, 5, …

c) 6; –9; 13,5; –20,25; …

d) 0,48; 4,8; 48; 480; …

Resuelve problemas

12 ▼▼▽ En un teatro, la primera fila dista del escenario 4,5 m, y la octava, 9,75 m.

a) ¿Cuál es la distancia entre dos filas?

b) ¿A qué distancia del escenario está la fila 17?

13 ▼▼▽ Para preparar una carrera, un deportista comienza corriendo 3 km y aumenta 1,5 km su recorrido cada día.

¿Cuántos días tiene que entrenar para llegar a hacer un recorrido de 15 km?

14 ▼▼▽ En el año 1986 fue visto el cometa *Halley* desde la Tierra, a la que se acerca cada 76 años. Esta era la cuarta vez que nos visitaba desde que el astrónomo Halley lo descubrió.

a) ¿En qué año fue descubierto?

b) ¿Cuándo será visto en el siglo XXI?

15 ▼▼▽ La dosis de un medicamento es 100 mg el primer día y 5 mg menos cada uno de los siguientes. El tratamiento dura 12 días.

¿Cuántos miligramos tiene que tomar el enfermo durante todo el tratamiento?

16 ▼▼▽ Un tipo de bacteria se reproduce por bipartición cada cuarto de hora. ¿Cuántas bacterias habrá después de 6 horas?

17 ▼▼▽ La población de un cierto país aumenta por término medio un 2,5% anual. Si la población actual es de 3 millones, ¿cuál será dentro de 10 años?

Autoevaluación

1 Escribe, en cada caso, los cinco primeros términos de las sucesiones cuyo término general es:

a) $a_n = 3n - 2$

b) $a_n = 2^{n-1}$

c) $a_n = \dfrac{n+1}{2n}$

2 Añade un nuevo término a cada una de las progresiones siguientes. Después, escribe el término general de cada una:

a) 7, 10, 13, 16, ...

b) 1, 3, 9, 27, ...

3 En una progresión aritmética conocemos $a_1 = 13$ y $a_4 = 4$. Escribe su término a_{10} y el término general.

4 De una progresión geométrica sabemos que el primer término es igual a 5 y que la razón es 2. Escribe el cuarto término y el término general.

5 Por el alquiler de un local pagamos 3 000 € el primer año. En el contrato figura que habrá una subida de 100 € al año.

a) ¿Cuánto pagaremos el décimo año?

b) Calcula la cantidad total que pagaremos durante esos 10 años.

4 El lenguaje algebraico

Los problemas algebraicos están presentes en todas las antiguas civilizaciones, casi siempre ligados a situaciones cotidianas: repartos, herencias, partición de terrenos, cálculo de superficies…

Sin perder su componente utilitaria, el estudio teórico del álgebra fue avanzando, de modo que la historia de su desarrollo fue la mejora del simbolismo y la sistematización en la resolución de ecuaciones.

En el siglo III, **Diofanto** de Alejandría inventó una notación simbólica que, aunque rudimentaria, supuso un importante progreso.

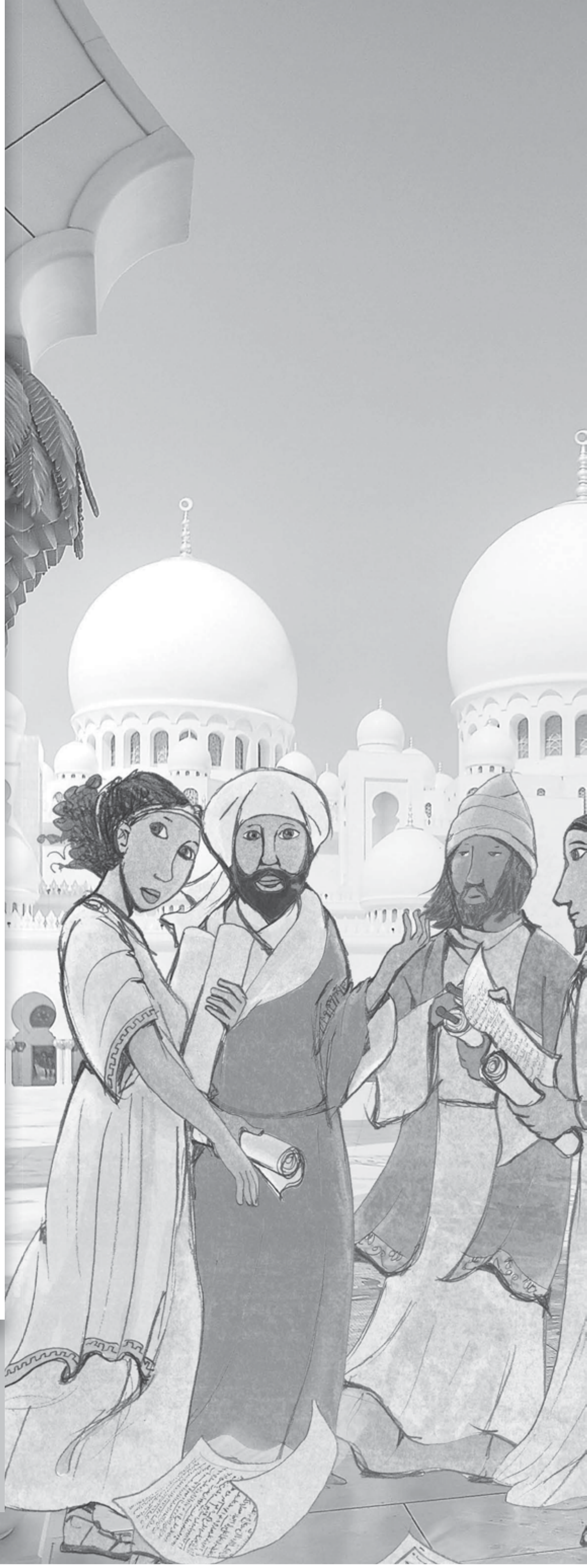
En el siglo IX, el máximo exponente de la matemática árabe fue **Al-Jwarizmi.** Escribió un manual que tuvo una gran influencia en todo el mundo civilizado, incluso siglos después. Se le puede considerar el "padre" del álgebra como ciencia.

Los europeos aprendieron de los árabes, del mismo modo que estos habían aprendido de los griegos y de los indios. El desarrollo del álgebra no fue uniforme en Europa y cabe destacar la escuela de algebristas italianos del siglo XVI.

El álgebra, tal como la conocemos hoy, terminó de evolucionar con los estudios de los franceses **Vieta** (finales del siglo XVI) y **Descartes** (siglo XVII).

Un ejemplo del largo camino que hubo que transitar hasta llegar a un simbolismo eficaz es el nombre que se le dio a la incógnita: los egipcios la llamaron "el montón", y los árabes, "la cosa". Esta nomenclatura pasó a Europa, donde al álgebra se la llegó a denominar "el arte de la cosa" o "el arte cósico".

¿Y la x, de dónde viene? "Cosa", en árabe, se pronuncia "xay" y así fue transcrita al castellano. Poco a poco fue sustituida por su letra inicial.



DEBERÁS RECORDAR

- La traducción al lenguaje algebraico es muy importante. Ejercítate todo lo que puedas resolviendo muchos casos sencillos.

1 Expresiones algebraicas

Trabajar en álgebra consiste en manejar relaciones numéricas en las que una o más cantidades son desconocidas. Estas cantidades se llaman **variables** o **incógnitas** y se representan por letras.

Al traducir al lenguaje algebraico los términos de un problema, se obtienen **expresiones algebraicas.**

Hay expresiones algebraicas de muy distinto tipo:

- **Monomios:** $7x^3$, $-\frac{3}{2}x$, $4\pi r^2$ (superficie de la esfera)
- **Polinomios:** $5x^3 + x^2 - 11$, $2\pi rh + 2\pi r^2$ (área total del cilindro)

Algunas expresiones algebraicas contienen el signo "=":

- **Identidades:** $5(x + 4) = 5x + 20$. La segunda parte de la igualdad se consigue operando en la primera.
- **Ecuaciones:** $5(x + 4) = x + 44$. La igualdad solo es cierta para algún valor de la incógnita x. En este caso, para $x = 6$.

Entrénate

1 Indica, de estas expresiones algebraicas, cuáles son identidades y cuáles ecuaciones:

a) $2x + 3 = 8$

b) $2(x + 3) = 2x + 6$

c) $-x + 5 - (1 - x^2) = x^2 - x + 4$

d) $x^2 - x + 4 = x + 4$

Ejercicio resuelto

Expresar algebraicamente:

a) El triple de un número menos cuatro unidades.

b) El triple del resultado de restarle cuatro unidades a un número.

c) El perímetro de un rectángulo es 60 cm y uno de sus lados es el triple del otro.

a) El triple de un número $\to 3x$

El triple de un número menos cuatro unidades $\to 3x - 4$

b) Quitarle a un número cuatro unidades $\to x - 4$

El triple del anterior resultado $\to 3(x - 4)$

c) 

El rectángulo del que nos hablen es de esta forma.

Su perímetro es la suma de sus cuadtro lados, es decir, $x + 3x + x + 3x$.

Su perímetro es 60 cm $\to x + 3x + x + 3x = 60$

Si operamos en la expresión anterior, $8x = 60$

Actividades

1 Describe mediante una expresión algebraica los enunciados siguientes:

a) El doble de un número.

b) El doble de un número menos su tercera parte.

c) Sumar tres unidades a un número.

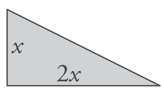
d) El doble del resultado de sumarle tres unidades a un número.

2 Describe mediante una expresión algebraica con dos incógnitas:

a) Un número más el doble de otro.

b) La mitad de la suma de dos números.

3 Describe mediante una expresión algebraica: el área de este triángulo es 36 cm^2.



2 Monomios

Ejemplos

- Estas expresiones son monomios:

  $7a^2, \quad \frac{4}{5}xy^2, \quad (5 + \sqrt{2})x^5$

  Sus coeficientes respectivos son:

  $7, \quad 4/5 \quad$ y $\quad 5 + \sqrt{2}$.
- El grado de $7a^2 = 7(a \cdot a)$ es 2.

  El de $\frac{4}{5}xy^2 = \frac{4}{5}(x \cdot y \cdot y)$ es 3.
- $9 = 9x^0$ es un monomio de grado cero.
- $5abx^2$ y $-7abx^2$ son semejantes.

Monomio es el producto de un número por una o varias letras.

En un monomio, *las letras* **(parte literal)** *representan números* de valor desconocido o indeterminado. Por eso conservan todas las propiedades de los números y sus operaciones.

- El **coeficiente** de un monomio es el número que multiplica a la parte literal.
- Se llama **grado** de un monomio al número total de factores que forman su parte literal.

  Los números son monomios de grado cero, pues $x^0 = 1$.
- Dos **monomios** son **semejantes** cuando tienen idéntica la parte literal.

Suma y resta de monomios

- La suma de monomios semejantes es otro monomio, también semejante a ellos, cuyo coeficiente es la suma de sus coeficientes.

  Por ejemplo: $7x^5 + 11x^5 = 18x^5$
- Si dos monomios no son semejantes, su suma no se puede simplificar y hay que dejarla indicada. Entonces el resultado ya no es un monomio.

  Por ejemplo: $7x^5 + 11x^3$ no admite simplificación.
- La resta es un caso particular de la suma.

  Por ejemplo: $3abx^2 - 8abx^2 = -5abx^2$

Producto de monomios

El producto de dos o más monomios es otro monomio cuyo coeficiente es el producto de los coeficientes, y su parte literal, el producto de las partes literales de los factores.

Por ejemplo: $(3x^2ab) \cdot (5xac) = 15x^3a^2bc$

Entrénate

1 Efectúa estas operaciones:

a) $2x^3 + 7x^3$ b) $-3x^2 + 8x^2$

c) $4y^4 - 2y^4$ d) $-z^5 - 3z^5$

e) $3xy + 8xy$ f) $-2y^2x + 8y^2x$

g) $5 \cdot (3x^2)$ h) $-3 \cdot (-2x)$

i) $(2x) \cdot (3x^2)$ j) $(2y) \cdot (5y^2)$

Actividades

1 ¿Cuál es el grado de cada uno de los siguientes monomios?

a) $-5xy^2z^3$ b) $11xy^2$ c) -12

2 Efectúa las siguientes sumas de monomios:

a) $5x + 3x^2 - 11x + 8x - x^2 + 7x$

b) $6x^2y - 13x^2y + 3x^2y - x^2y$

c) $2x - 5x^2 + 3x + x^2 - 3$

3 Efectúa los siguientes productos de monomios:

a) $(3x) \cdot (5x^2)$ b) $(-3x^2) \cdot (4x^3)$

c) $\left(\frac{2}{3}x^3\right) \cdot (-6x)$ d) $\left(\frac{2}{9}x^2\right) \cdot \left(-\frac{3}{5}x^3\right)$

4 Escribe dos monomios semejantes a cada uno de los siguientes:

a) $-5ab^2c^3$ b) $6x^3$ c) x d) 7

3 Polinomios

- Un **polinomio** es la suma de dos o más monomios. Cada uno de los monomios que lo forman se llama **término.**
- Si en un polinomio hay monomios semejantes, conviene operar, simplificar la expresión y obtener el polinomio en su **forma reducida.**
- El **grado** de un polinomio es el mayor de los grados de los monomios que lo componen cuando el polinomio se ha puesto en su forma reducida (es necesario reducir el polinomio antes de decir su grado, ya que es posible que los monomios de mayor grado se simplifiquen y desaparezcan).
- El **valor numérico** de un polinomio para $x = a$ es el número que se obtiene al sustituir la x por a. Por ejemplo, el valor de $2x^3 - 5x^2 + 7$ para $x = 2$ es $2 \cdot 2^3 - 5 \cdot 2^2 + 7 = 2 \cdot 8 - 5 \cdot 4 + 7 = 3$.
- Si el valor numérico de un polinomio para $x = a$ es 0, entonces se dice que a es una **raíz** de dicho polinomio.

Ejemplos

- Son polinomios: $3x^2y + 5x^3 - 8$
  $2x^2 + x^2 - 5x + 1$
- Simplificación:
  $5x^2 + 4x^4 - 2x^2 - 3x^4 + 1 \;\rightarrow$
  $\rightarrow\; x^4 + 3x^2 + 1$
- Simplificar antes de asignar el grado a un polinomio:
  $7x^3 + 5x^2 + 3x^3 - 2x - 10x^3 =$
  $= 5x^2 - 2x \;\rightarrow\;$ Su grado es 2.

Suma y resta de polinomios

Para sumar dos polinomios, agrupamos sus términos y sumamos los monomios semejantes.

Para restar dos polinomios, se suma al minuendo el opuesto del sustraendo. El **opuesto** de un polinomio es el que resulta de cambiar de signo todos sus términos.

Por ejemplo, sean $A = 6x^2 - 4x + 1$ y $B = x^3 + 2x^2 - 11$:

$$\begin{array}{rcr} A & \rightarrow & 6x^2 - 4x + 1 \\ +B & \rightarrow & x^3 + 2x^2 \qquad - 11 \\ \hline A + B & \rightarrow & x^3 + 8x^2 - 4x - 10 \end{array} \qquad \begin{array}{rcr} A & \rightarrow & 6x^2 - 4x + 1 \\ -B & \rightarrow & -x^3 - 2x^2 \qquad + 11 \\ \hline A - B & \rightarrow & -x^3 + 4x^2 - 4x + 12 \end{array}$$

Producto de un monomio por un polinomio

Para multiplicar un monomio por un polinomio, se multiplica el monomio por cada término del polinomio y se suman los resultados. Por ejemplo:

$(3x^2) \cdot (x^3 - 2x^2 - 1) = 3x^2 \cdot x^3 - 3x^2 \cdot 2x^2 - 3x^2 \cdot 1 = 3x^5 - 6x^4 - 3x^2$

Entrénate

1 Dados $A = 2x^3 - 7x^2 + 1$
$B = 5x^2 - 4x + 2$
$C = 4x^3 + 2x^2 - 5x$, halla:

a) $A + B$

$$\begin{array}{r} 2x^3 - 7x^2 \qquad + 1 \\ 5x^2 - 4x + 2 \\ \hline \square x^3 - \square x^2 - \square x + \square \end{array}$$

b) $B - C$

$$\begin{array}{r} 5x^2 - 4x + 2 \\ -4x^3 - 2x^2 + 5x \quad \\ \hline \end{array}$$

c) $3C - 2A$

$$\begin{array}{r} 12x^3 + 6x^2 - 15x \quad \\ -4x^3 + 14x^2 \qquad - 2 \\ \hline \end{array}$$

Actividades

1 Di el grado de cada uno de estos polinomios:

a) $x^6 - 3x^4 + 2x^2 + 3$

b) $5x^2 + x^4 - 3x^2 - 2x^4 + x^3$

2 Considera los polinomios $P = 5x^3 - x^2 - 2x + 1$ y $Q = x^4 - 2x^2 + 2x - 2$.

Halla $P + Q$ y $P - Q$.

3 Dados los polinomios $A = 2x^3 - 7x^2 + 4x + 1$; $B = 2x^2 - x + 3$ y $C = 4x^3 + 2x^2 - x$, halla $A - B + C$.

4 Halla los productos siguientes y di de qué grado son:

a) $2x(x^2 + 3x - 1)$

b) $2x^2(3x^2 - 4x + 6)$

c) $-2(-3x^3 - x)$

d) $5(x^2 + x - 1)$

e) $-7x^5(2x^2 - 3x - 1)$

f) $-7x(2x^3 - 3x^2 + x)$

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.° ESO. Material fotocopiable autorizado.

Ten en cuenta

La forma que ves aquí de disponer los cálculos, permite multiplicar polinomios de manera ordenada y segura. Cuando falta algún término, hay que dejar un hueco en el lugar correspondiente.

Producto de dos polinomios

Para multiplicar dos polinomios, se multiplica cada monomio de uno de los factores por todos y cada uno de los monomios del otro factor y, después, se suman los monomios semejantes obtenidos.

Por ejemplo: $P = 5x^3 - 2x^2 - 1, \quad Q = 6x - 3$

$$\begin{array}{rrrrrl}
 & 5x^3 & -\,2x^2 & & -\,1 & \longleftarrow P \\
 & & & & 6x - 3 & \longleftarrow Q \\
\hline
 & -\,15x^3 & +\,6x^2 & & +\,3 & \longleftarrow \text{producto de } -3 \text{ por } P \\
30x^4 & -\,12x^3 & & -\,6x & & \longleftarrow \text{producto de } 6x \text{ por } P \\
\hline
30x^4 & -\,27x^3 & +\,6x^2 & -\,6x & +\,3 & \longleftarrow P \cdot Q
\end{array}$$

Cuando hay pocos términos, no hace falta utilizar el método anterior, podemos realizar el producto directamente:

$$(2x^2 - 1)\,(3x + 4) = 6x^3 + 8x^2 - 3x - 4$$

Entrénate

1 Copia y completa en tu cuaderno:

$$\begin{array}{r}
x^2 - 5x + 2 \\
\times\ x^2 + 1 \\
\hline
\square x^2 - \square x + \square \\
\square x^4 - \square x^3 + \square x^2 \\
\hline
x^4 - \square x^3 + \square x^2 - \square x + \square
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
x^2 + 1 \\
\times\ x^2 + 1 \\
\hline
\square x^2 + \square \\
\square x^4 + \square x^2 \\
\hline
\square x^4 + \square x^2 + \square
\end{array}$$

2 Copia y completa:

a) $x \cdot (x + 3) = \square x^2 + \square x$

b) $4a \cdot (2a + 5) = \square a^2 + \square a$

c) $x^2 \cdot (\square + \square) = x^3 + 5x^2$

d) $\square \cdot (3a + 5) = 3a^2 + 5a$

e) $9x^2 + 6x + 3 = \square \cdot (3x^2 + 2x + 1)$

Sacar factor común

En la expresión $3xy + 6x^2z + 9xyz$ la x y el 3 están multiplicando en todos los sumandos. Son factores comunes a todos ellos. Podemos sacarlos fuera, así:

$$3xy + 6x^2z + 9xyz = 3x \cdot y + 3x \cdot 2xz + 3x \cdot 3yz = 3x(y + 2xz + 3yz)$$

A esta transformación se le llama **sacar factor común.** Se utiliza para simplificar expresiones y para resolver algunas ecuaciones que aparecerán más adelante.

Comprueba que si quitaras el paréntesis en la expresión final, volverías a obtener la inicial.

Cuando un sumando coincide con el factor común, ten en cuenta que está multiplicado por 1. Por ejemplo: $xy + x^2 + x = x(y + x + 1)$.

Actividades

5 Siendo $P = 4x^2 + 3$, $Q = 5x^2 - 3x + 7$ y $R = 5x - 8$, calcula:

a) $P \cdot Q$ b) $P \cdot R$ c) $Q \cdot R$

6 Opera y simplifica la expresión resultante:

a) $x(5x^2 + 3x - 1) - 2x^2(x - 2) + 12x^2$

b) $5(x - 3) + 2(y + 4) - \dfrac{7}{3}(y - 2x + 3) - 8$

c) $15 \cdot \left[\dfrac{2(x-3)}{3} - \dfrac{4(y-x)}{5} + \dfrac{x+2}{15} - 7\right]$

7 Extrae factor común en cada expresión:

a) $5x^2 - 15x^3 + 25x^4$

b) $\dfrac{x^4}{3} - \dfrac{x}{9} - \dfrac{1}{15}$

c) $2x^3y^5 - 3x^3y^4 + 2x^3y^2 + 7x^3y^3$

d) $2x^2y - 5x^3y$

e) $2(x - 3) + 3(x - 3) - 5(x - 3)$

f) $2xy^2 - 6x^2y^3 + 4xy^3$

4 Identidades

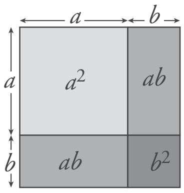
La igualdad $2x + 5x = 7x$ es una identidad porque es cierta cualquiera que sea el valor de x.

Conoces muchas identidades. Aquí tienes algunas:

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $\qquad a \cdot (x + y) = a \cdot x + a \cdot y$ $\qquad a - (b + c) = a - b - c$

Todas ellas son consecuencia de propiedades aritméticas o simples traducciones de estas.

Una **identidad** es una **igualdad algebraica** que es cierta para valores cualesquiera de las letras que intervienen.



JUSTIFICACIÓN GRÁFICA DEL CUADRADO DE UNA SUMA

Identidades notables

Se suelen llamar así a las tres igualdades siguientes:

I. $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$	CUADRADO DE UNA SUMA
II. $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$	CUADRADO DE UNA DIFERENCIA
III. $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$	SUMA POR DIFERENCIA

Estas igualdades ya las conocías, pero las seguirás utilizando con frecuencia, por lo que es necesario que las manejes con soltura.

Entrénate

1 Desarrolla aplicando las identidades notables.

a) $(x + 3)^2 = \square x^2 + \square x + \square$

b) $(5 + x)^2 = \square + \square x + \square x^2$

c) $(3x + 1)^2 = \square x^2 + \square x + \square$

d) $(x - 7)^2 = \square x^2 - \square x + \square$

e) $(2x - 3)^2 = \square x^2 - \square x + \square$

f) $(3x - a)^2 = \square x^2 - \square x + \square$

g) $(4x + 3y)^2 = \square x^2 + \square xy + \square y^2$

h) $(x + 2)(x - 2) = \square x^2 - \square$

i) $(5x + 2y)(5x - 2y) = \square x^2 - \square y^2$

j) $(x^2 + 2x)(x^2 - 2x) = \square x^4 - \square x^2$

Ejercicios resueltos

1. Desarrollar: a) $(5x - 3)^2$ b) $(4x - 3)(4x + 3)$

a) Es el cuadrado de una diferencia:

$$(5x - 3)^2 = (5x)^2 + 3^2 - 2 \cdot 5x \cdot 3 = 25x^2 + 9 - 30x$$

b) Es el producto de una suma por la diferencia de los mismos términos:

$$(4x - 3) \cdot (4x + 3) = (4x)^2 - 3^2 = 16x^2 - 9$$

2. Simplificar $(3x + 5)^2 - (3x - 5)^2$

$$(3x + 5)^2 - (3x - 5)^2 = \cancel{9x^2} + \cancel{25} + 30x - (\cancel{9x^2} + \cancel{25} - 30x) =$$
$$= 30x - (-30x) = 60x$$

Actividades

1 Desarrolla los siguientes cuadrados:

a) $(x + 4)^2$ b) $(2x - 5)^2$ c) $(1 - 6x)^2$

d) $\left(\frac{x}{2} + 6\right)^2$ e) $\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2$ f) $(ax + b)^2$

2 Efectúa los siguientes productos:

a) $(x + 1)(x - 1)$ b) $(2x + 3)(2x - 3)$

c) $\left(\frac{x}{3} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{x}{3} + \frac{1}{2}\right)$ d) $(ax + b)(ax - b)$

Utilidad de las identidades

Las identidades sirven para transformar una expresión algebraica en otra más cómoda de manejar. Por ejemplo:

$$(x+5)^2-(x-3)^2 \overset{(1)}{=} (x^2+25+10x)-(x^2+9-6x) \overset{(2)}{=}$$
$$= x^2+25+10x-x^2-9+6x \overset{(3)}{=}$$
$$= 16x+16 \overset{(4)}{=} 16(x+1)$$

Cada una de las cuatro igualdades es una identidad.

La expresión final, $16(x+1)$, es más sencilla y cómoda de manejar que la inicial, pero es **idéntica** a ella. Por eso, podemos sustituir la primera expresión por la última, y el cambio es ventajoso.

Aclaraciones

(1) Se han desarrollado el cuadrado de una suma y el de una diferencia.

(2) Un paréntesis precedido del signo menos obliga a cambiar de signo a todos sus términos.

(3) Se reducen términos semejantes.

(4) Se saca 16 como factor común.

Ejercicios resueltos

1. **Simplificar: $(2x-4)^2-(2x+4)(2x-4)$**

$$(2x-4)^2-(2x+4)(2x-4) = 4x^2-16x+16-(4x^2-16) =$$
$$= 4x^2-16x+16-4x^2+16 = -16x+32$$

2. **Multiplicar por 12 y simplificar: $\frac{3(x+2)}{4}+\frac{3x+5}{2}-\frac{5(4x+1)}{6}+\frac{25}{12}$**

Observa que 12 es el mínimo común múltiplo de 4, 2, 6 y 12.

$$\left[\frac{3(x+2)}{4}+\frac{3x+5}{2}-\frac{5(4x+1)}{6}+\frac{25}{12}\right]\cdot 12 =$$
$$= 3\cdot 3(x+2)+6(3x+5)-2\cdot 5(4x+1)+25 =$$
$$= 9x+18+18x+30-40x-10+25 = -13x+63$$

Entrénate

1 Transforma estas sumas en productos:

a) $x^2-9 = x^2-3^2 =$
$= (x+\square)\cdot(x-\square)$

b) $4x^2-9 = (2x)^2-3^2 =$
$= (2x+\square)\cdot(\square-\square)$

c) $x^2+4+4x = x^2+2^2+2(x\cdot 2) =$
$= (x+\square)^2$

d) $x^2-6x+9 = x^2+3^2-2(x\cdot 3) =$
$= (\square-\square)^2$

Actividades

3 Expresa en forma de producto.

a) $4x^2-25$
b) $x^2+16+8x$
c) x^2+2x+1
d) $x^2+18x+81$
e) $9x^2+6x+1$
f) $4x^2+25-20x$

4 Simplifica las expresiones siguientes:

a) $(x-2)(x+2)-(x^2+4)$
b) $(3x-1)^2-(3x+1)^2$
c) $2(x-5)^2-(2x^2+3x+50)$
d) $(5x-4)(2x+3)-5$
e) $3(x^2+5)-(x^2+40)$
f) $(x+3)^2-[x^2+(x-3)^2]$

5 Multiplica y simplifica el resultado:

a) $\frac{x}{2}+\frac{x}{4}+\frac{x}{8}-\frac{3x}{4}-\frac{1}{4}$ por 8

b) $x+\frac{2x-3}{9}+\frac{x-1}{3}-\frac{12x+4}{9}$ por 9

c) $\frac{(2x-4)^2}{8}-\frac{x(x+1)}{2}-5$ por 8

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

Expresa y calcula

Traducción a lenguaje algebraico

1 ▼▽▽ Asocia a cada enunciado una de las expresiones algebraicas que aparecen debajo:

a) El cuadrado de un número menos su doble.

b) El 80% de un número.

c) Un número impar.

d) Los dos tercios de un número más cinco unidades.

$\frac{2}{3}x + 5$; $x^2 - 2x$; $0{,}8x$; $2x + 1$

2 ▼▽▽ Expresa en lenguaje algebraico empleando una sola incógnita.

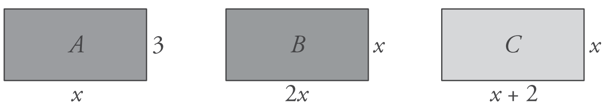
a) El triple de un número menos dos.

b) El producto de dos números consecutivos.

c) El cuadrado de un número más su mitad.

d) La suma de un número con otro diez unidades mayor.

3 ▼▽▽ Expresa algebraicamente el perímetro y el área de estos rectángulos:



4 ▼▽▽ Traduce a lenguaje algebraico utilizando dos incógnitas.

a) La suma de los cuadrados de dos números.

b) El cuadrado de la diferencia de dos números.

c) La mitad del producto de dos números.

d) La semisuma de dos números.

5 ▼▽▽ Si x e y son las edades actuales de dos hermanos, expresa los siguientes enunciados utilizando ambas incógnitas:

a) La suma de las edades que tenían hace 5 años.

b) El producto de las edades que tendrán dentro de 6 años.

c) La diferencia entre la edad del mayor y la mitad de la del menor.

Monomios

6 ▼▽▽ Indica el grado de cada uno de los siguientes monomios y di cuáles son semejantes:

a) $-5xy$ b) $(-7x)^3$ c) $8x$ d) $(xy)^2$

e) $\frac{2}{3}x^2y^2$ f) $\frac{4}{5}x^3$ g) $\frac{-3yx}{5}$ h) $\frac{1}{2}x^2$

7 ▼▽▽ Calcula el valor numérico de los monomios del ejercicio anterior para $x = -1$ e $y = 3$.

8 ▼▽▽ Efectúa.

a) $5x - x^2 + 7x^2 - 9x + 2$

b) $2x + 7y - 3x + y - x^2$

c) $x^2y^2 - 3x^2y - 5xy^2 + x^2y + xy^2$

9 ▼▽▽ Efectúa estos productos de monomios:

a) $(6x^2)(-3x)$ b) $(-x)(5xy)$ c) $(2xy^2)(4x^2y)$

Polinomios

10 ▼▽▽ Simplifica las siguientes expresiones:

a) $(2x^3 - 5x + 3) - (2x^3 - x^2 + 1)$

b) $5x - (3x + 8) - (2x^2 - 3x)$

¿Cuál es el grado de cada polinomio?

11 ▼▽▽ Considera estos polinomios:

$A = 3x^3 - 5x^2 + x - 1$

$B = 2x^4 + x^3 - 2x + 4$

$C = -x^3 + 3x^2 - 7x$

Halla: $A + B$; $A - C$; $A - B + C$

12 ▼▽▽ Efectúa, reduce y di cuál es el grado del polinomio resultante.

a) $x(x^2 - 5) - 3x^2(x + 2) - 7(x^2 + 1)$

b) $5x^2(-3x + 1) - x(2x - 3x^2) - 2 \cdot 3x$

c) $\frac{1}{3}x^2\left(-\frac{3}{2}x^2 + 6x - 9\right)$

13 ▼▽▽ Opera y simplifica el resultado.

$$\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{3}x + \frac{1}{6}\right)(6x - 12)$$

14 ▼▽▽ Extrae factor común.

a) $12x^3 - 8x^2 - 4x$

b) $-3x^3 + x - x^2$

c) $2xy^2 - 4x^2y + x^2y^2$

d) $\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{3}x$

Identidades notables

15 ▼▽▽ Desarrolla estas expresiones:

a) $(x + 6)^2$ b) $(7 - x)^2$

c) $(3x - 2)^2$ d) $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$

e) $(x - 2y)^2$ f) $\left(\frac{2}{5}x - \frac{1}{3}y\right)^2$

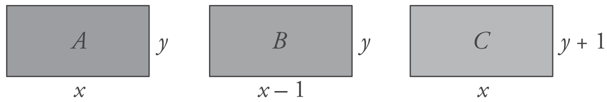
16 ▼▽▽ Efectúa estos productos:

a) $(x + 7)(x - 7)$ b) $(3 + x)(3 - x)$

c) $(3 + 4x)(3 - 4x)$ d) $(x^2 + 1)(x^2 - 1)$

Aplica lo aprendido

17 ▼▼▽ Expresa algebraicamente el perímetro y el área de estos rectángulos:



18 ▼▼▽ Traduce a lenguaje algebraico utilizando dos incógnitas:

a) La cantidad de agua que queda en un depósito del que se saca 2/5 de su contenido y 20 litros.

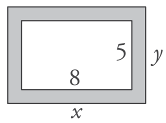
b) Lo que tengo que pagar por dos camisetas que tenían el mismo precio, pero una está rebajada un 15% y la otra, un 20%.

19 ▼▼▽ Expresa algebraicamente utilizando dos incógnitas:

a) El área de un rectángulo de 24 m^2 en el que uno de sus lados mide 5 cm más que el otro.

b) Gasté en un traje 3/5 de lo que tenía y 60 € en dos camisas. Me queda la mitad de lo que tenía.

20 ▼▼▽ Expresa algebraicamente el área de la parte coloreada de la figura.



Autoevaluación

1 Escribe en lenguaje algebraico:

a) Si gasto los $\frac{2}{5}$ de lo que tengo, me quedan 12 €.

b) La mitad del resultado de sumar 5 unidades a un número.

2 Extrae factor común:

a) $x^3 - x^2 + x$ b) $4x^3 - 6x^2 + 2x$

3 Desarrolla:

a) $(x - 5)^2$ b) $(3x + 5)^2$

c) $(3x - 5)^2$ d) $(3x + 5)(3x - 5)$

4 ¿Cuál de las siguientes expresiones es una identidad? Explica por qué.

a) $(2x - 1)(2x + 1) = 4x^2 - 1$ b) $8x - 5 = 3x$

5 Efectúa y reduce:

a) $x(3x - 2) - (x - 3)(2x - 1)$

b) $(x - 2)^2 - 2(x^2 - 4)$

6 Multiplica por el mínimo común múltiplo de los denominadores y simplifica:

$$\frac{5(x-1)}{9} + \frac{7x-2}{12} - \frac{x(x+1)}{2}$$

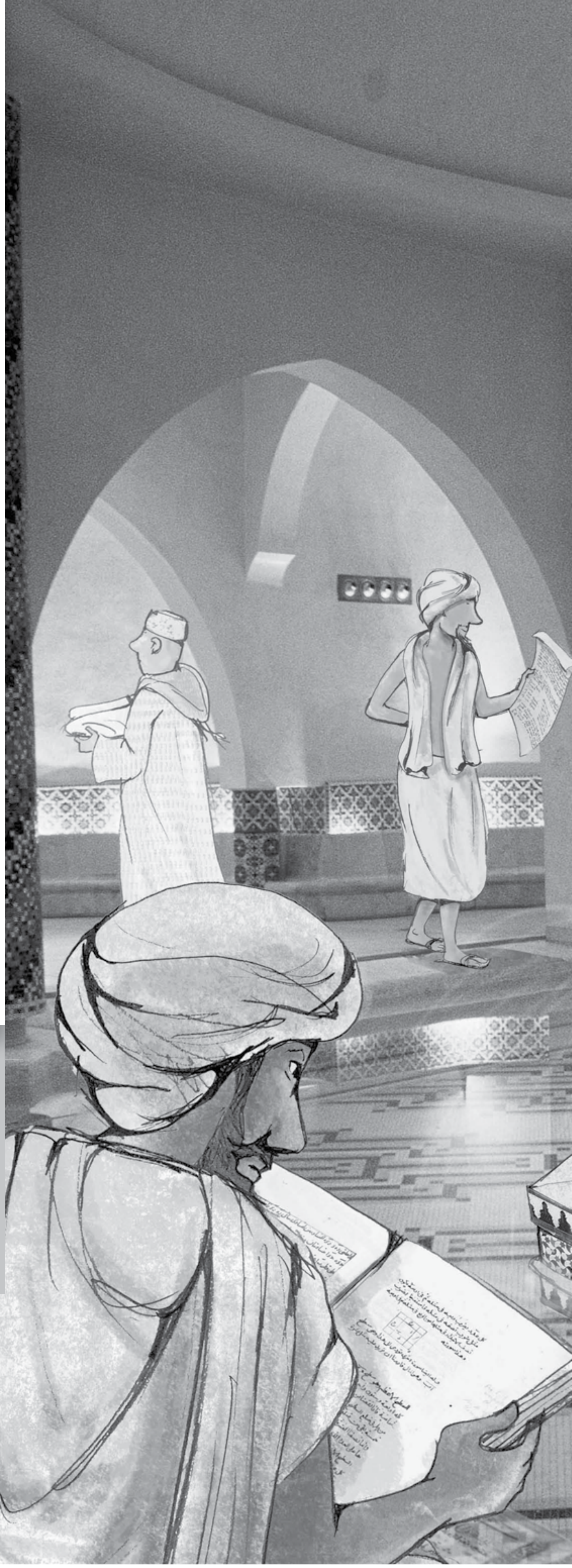
5 Ecuaciones

La búsqueda de métodos para resolver ecuaciones fue un empeño de los matemáticos de la Antigüedad. Los primeros intentos, como es natural, fueron titubeantes, poco sólidos: resoluciones por tanteo o mediante procedimientos solo válidos para casos particulares, pero no generalizables.

El primero que lo afrontó de forma rigurosa fue el griego **Diofanto,** en el siglo III. En su libro *Aritmética* trató las resoluciones de ecuaciones de primer grado y algunas de segundo grado. Además, los problemas que propuso prepararon el terreno para consolidar la teoría de ecuaciones, que se desarrolló siglos más tarde.

En Bagdad aparece un personaje clave, el árabe **Al-Jwarizmi**. Su libro *Al-jabr wa-l-muqabala* es un referente fundamental en la historia del álgebra. Fue estudiado y traducido a todos los idiomas en siglos posteriores. El título viene a ser "transposición y cancelación" y alude a los trasiegos que se realizan con los coeficientes para despejar la incógnita. El libro acabó siendo denominado, simplemente, *Al-jabr*, y este nombre finalmente designó la ciencia que contenía (*al-jabr* ~ álgebra).

Los algebristas árabes también ingeniaron curiosos métodos para resolver geométricamente algunos tipos de ecuaciones de segundo grado.



DEBERÁS RECORDAR

- Qué es una ecuación. Solución de una ecuación.
- El manejo de la calculadora para comprobar si un número es o no solución de una ecuación.
- Algunas peculiaridades de las raíces cuadradas de un número.

1 Ecuaciones. Solución de una ecuación

Nomenclatura

Las expresiones que hay a ambos lados del signo = se llaman **miembros.** En la ecuación que ves a la derecha:

$2x^2 - \frac{10}{x}$ es el **primer miembro** y

3 es el **segundo miembro.**

Las ecuaciones y sus soluciones

Una **ecuación** es una igualdad en la que interviene alguna letra (**incógnita**) cuyo valor queremos conocer.

Solución de la ecuación es el valor de la incógnita que hace cierta la igualdad.

Por ejemplo, $2x^2 - \frac{10}{x} = 3$ es una ecuación.

El valor $x = 2$ es solución, porque $2 \cdot 2^2 - \frac{10}{2} = 3$.

Qué es resolver una ecuación

Resolver una ecuación es encontrar su solución (o sus soluciones) o averiguar que no tiene solución. Seguramente, conoces procedimientos para resolver metódicamente algunos tipos de ecuaciones. Pero si llegamos a la solución mediante cualquier otro camino, también es válida la resolución.

Por ejemplo, vamos a buscar, por tanteo, alguna solución de $x^2 - 5x + 6 = 0$:

- ¿Será $x = 0$ solución? $0^2 - 5 \cdot 0 + 6 = 6 \neq 0 \rightarrow$ NO
- ¿Y $x = 2$? $2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 0 \rightarrow$ SÍ

Entrénate

1 Comprueba si alguno de los valores dados es solución de la ecuación correspondiente:

a) $3x + 11 = 38$; $x = 5$, $x = 9$

b) $5(x - 3) = 15$; $x = 6$, $x = -6$

c) $\sqrt{5x + 1} = 6$; $x = 1$, $x = 7$

2 Halla, tanteando, alguna solución (busca números enteros) de estas ecuaciones:

a) $5(x^2 + 1) = 50$ b) $(x + 1)^2 = 9$

Ejercicio resuelto

Resolver por tanteo estas ecuaciones: a) $x^x = 3\,125$ b) $x^6 = 1\,200$

a) Tanteando con enteros, encontramos la solución $x = 5$, pues $5^5 = 3\,125$.

b) Dando valores enteros a x, observamos que:

$\left.\begin{array}{l} 3^6 = 729 \\ 4^6 = 4\,096 \end{array}\right\}$ x está entre 3 y 4. Es decir, $x = 3,...$ Damos a x los valores 3,1; 3,2; 3,3; ... y observamos que:

$\left.\begin{array}{l} 3{,}2^6 = 1\,073{,}\ldots < 1\,200 \\ 3{,}3^6 = 1\,291{,}\ldots > 1\,200 \end{array}\right\}$ $x = 3,2...$ Podemos decir que, aproximando hasta las décimas, la solución es $x = 3,2$.

Actividades

1 Comprueba, en cada caso, si cada uno de los dos valores es o no solución de la ecuación:

a) $x^3 - 20x = -16$; $x = 5$, $x = 4$

b) $\frac{12}{x} - \frac{x}{2} = 1$; $x = 4$, $x = 6$

c) $2^{x-1} = 512$; $x = 9$, $x = 10$

d) $x^x + 1 = 28$; $x = 3$, $x = 1$

e) $\sqrt{x + 3} - \sqrt{x - 2} = 1$; $x = 1$, $x = 6$

2 Tantea para hallar alguna solución de estas ecuaciones (todas ellas tienen solución entera):

a) $x^3 + x = 10$ b) $(x - 5)(x + 2) = 0$

c) $3^{x+1} = 81$ d) $x^x = 3\,125$

3 Tanteando con ayuda de la calculadora, encuentra una solución (aproximada hasta las décimas) de cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $x^3 + 1 = 100$ b) $3^x = 1\,000$ c) $\sqrt{8x - 40} = 5$

2 Ecuaciones de primer grado

A las ecuaciones polinómicas de primer grado se las llama, simplemente, **ecuaciones de primer grado.** En ellas, la x solo aparece elevada a 1 $(x^1 = x)$.

- Son de primer grado: $4x + 7 = 8$; $\frac{2}{3}x - 2{,}5 = 9$; $\sqrt{3}x + 17 = 4 - 2x$
- No son de primer grado: $(6x + 5)^2 = 8$; $\frac{8}{x} = 5x + 3$; $\sqrt{6x} + 1 = 5x$

Una **ecuación de primer grado** es una expresión que se puede reducir a la forma $ax + b = 0$, siendo $a \neq 0$. Tiene una única solución: $x = -\frac{b}{a}$

Ecuaciones anómalas

Existen expresiones que parecen ecuaciones de primer grado y que, sin embargo, no tienen solución o tienen infinitas soluciones. Por ejemplo:

- $4x - 6 = 4(x + 3) \rightarrow 4x - 6 = 4x + 12 \rightarrow 0 \cdot x = 18$

  No puede ser $0 \cdot x = 18$. Por tanto, la ecuación **no tiene solución.**
- $4x - 6 = 4(x - 2) + 2 \rightarrow 4x - 6 = 4x - 6 \rightarrow 0 \cdot x = 0$

  $0 \cdot x = 0$ es cierto cualquiera que sea x, pues $0 = 0$. Por tanto, la ecuación **tiene infinitas soluciones.**

Realmente, estas igualdades no son ecuaciones, pues carecen del término en x. Sin embargo, puesto que antes de simplificar no sabemos en qué van a quedar, las trataremos como ecuaciones de primer grado.

Ecuaciones equivalentes

Dos ecuaciones son equivalentes si tienen la misma solución o ambas carecen de solución. Así, las ecuaciones $5x - 9 = 51$ y $3x - 7 = 89 - 5x$ son equivalentes porque la solución de ambas es $x = 12$.

Transformaciones que mantienen la equivalencia de ecuaciones

Para resolver una ecuación, hemos de despejar la x mediante una serie de *pasos*. Cada *paso* consiste en transformar la ecuación en otra equivalente, en la que la x esté más próxima a ser despejada. Recordemos algunas reglas:

TRANSFORMACIÓN	REGLA PRÁCTICA
Sumar o restar la misma expresión en los dos miembros de la igualdad.	Lo que está sumando en un miembro pasa restando al otro miembro, y viceversa.
Multiplicar o dividir los dos miembros por el mismo número distinto de cero.	Lo que está multiplicando a todo lo demás de un miembro pasa dividiendo al otro, y viceversa.

Entrénate

1 Resuelve estas ecuaciones y comprueba la solución de cada una:

a) $3x - 2(x + 3) = x - 3(x + 1)$

b) $4 + x - 4(1 - x) + 5(2 + x) = 0$

c) $2x + 7 - 2(x - 1) = 3(x + 3)$

d) $4(2x - 7) - 3(3x + 1) = -5 + x$

2 Comprueba si estas dos ecuaciones son o no equivalentes:

$2(x - 1) + x + 1 = 2x + 1$

$2x - 1 - (x - 1) = 2(3x - 5)$

Pasos para resolver ecuaciones de primer grado

Seguramente aprendiste a resolver ecuaciones de primer grado sencillas el curso pasado. Ahora vamos a entrenarnos para resolver ecuaciones de primer grado algo más complejas.

Con frecuencia, las ecuaciones que tendremos que resolver presentan un aspecto complicado.

Por ejemplo: $\frac{3x-1}{20} - \frac{2(x+3)}{5} = \frac{4x+2}{15} - 5$

Veamos qué pasos conviene dar para, poco a poco, ir despejando la x (en el margen puedes ver cómo hemos resuelto la ecuación del ejemplo siguiendo los pasos que ahora describimos):

1. Quitar denominadores, si los hay. Para ello, se multiplican los dos miembros de la ecuación por un múltiplo común de los denominadores; preferiblemente, su mínimo común múltiplo.
2. Quitar paréntesis, si los hay.
3. Pasar los términos en x a un miembro y los números al otro miembro.
4. Simplificar cada miembro.
5. Despejar la x. Se obtiene, así, la solución.
6. Comprobación: sustituir la solución en cada miembro de la ecuación inicial para comprobar que coinciden los resultados.

Esta secuencia no hay que tomarla como algo rígido, pues habrá ocasiones en que convenga empezar quitando paréntesis, simplificando… El entrenamiento y el sentido común te orientarán sobre cuándo conviene hacer una cosa u otra.

Ejemplo

Resolvamos la ecuación:

$$\frac{3x-1}{20} - \frac{2(x+3)}{5} = \frac{4x+2}{15} - 5$$

$\boxed{1}$ mín.c.m. (20, 5, 15) = 60

Se multiplican por 60 los dos miembros.

$$3(3x-1) - 24(x+3) =$$
$$= 4(4x+2) - 60 \cdot 5$$

$\boxed{2} \downarrow$

$$9x - 3 - 24x - 72 = 16x + 8 - 300$$

$\boxed{3} \downarrow$

$$9x - 24x - 16x = 8 - 300 + 3 + 72$$

$\boxed{4} \downarrow$

$$-31x = -217$$

$\boxed{5} \downarrow$

$$x = \frac{-217}{-31}. \quad \textit{Solución: } x = 7$$

$\boxed{6} \downarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{3 \cdot 7 - 1}{20} - \frac{2(7+3)}{5} = -3 \\ \frac{4 \cdot 7 + 2}{15} - 5 = 2 - 5 = -3 \end{array}\right\}$$

Coinciden. La solución es correcta.

Actividades

1 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $1 + \frac{x}{2} = x$

b) $\frac{1}{3} + x = \frac{x}{3} - 1$

c) $4 - \frac{3x}{5} = \frac{2}{5} + 3x$

d) $\frac{x}{2} + \frac{1}{3} = x$

e) $\frac{1}{3} - \frac{x}{9} = 1$

f) $\frac{2x}{4} - 1 = \frac{x}{6}$

g) $4 = \frac{3x}{2} + \frac{2x}{5} + \frac{1}{5}$

h) $1 - \frac{x}{12} + \frac{x}{3} = \frac{5}{8} - \frac{x}{6}$

i) $\frac{2}{3} - \left(x - \frac{1}{2}\right) = \frac{3x}{4} + 1$

j) $\frac{3x}{15} - x = -\frac{3x}{3} + \frac{9}{5}$

k) $\frac{x}{3} + \frac{x}{9} - \frac{4x}{27} = \frac{11}{27} - \frac{x}{9}$

l) $\frac{x}{2} + \frac{x-3}{8} + \frac{2x+2}{16} = \frac{x-2}{2}$

m) $\frac{13+x}{20} - \frac{5x}{2} = \frac{10+x}{5} + \frac{1-12x}{10}$

n) $3x - \frac{x+3}{4} = 13$

o) $4 - \frac{x+2}{4} = x - 4$

3 Ecuaciones de segundo grado

Una ecuación de segundo grado es de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ con } a \neq 0$$

Para despejar la x, se sigue un largo y complicado proceso que no vamos a ver aquí. El resultado final es la fórmula siguiente:

SOLUCIONES DE UNA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

El doble signo (±) quiere decir que puede haber dos soluciones:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Estas dos soluciones pueden reducirse a una o a ninguna, según los casos.

Ejemplo

$$3x^2 - 5x - 2 = 0$$

es una ecuación de segundo grado, donde:

$$a = 3, \; b = -5, \; c = -2$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2)}}{2 \cdot 3} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{6} = \frac{5 \pm 7}{6} = \begin{cases} 2 \\ -\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2) = 49 > 0$$

Por eso, esta ecuación tiene dos soluciones.

Número de soluciones

La expresión $\Delta = b^2 - 4ac$ se llama **discriminante** de la ecuación. El número de soluciones depende del signo de Δ:

- Si $\Delta > 0$, la ecuación tiene **dos soluciones:**

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Si $\Delta = 0$, solo hay **una solución:** $x = \dfrac{-b}{2a}$. Se llama **solución doble.**
- Si $\Delta < 0$, $\sqrt{\Delta}$ carece de sentido. La ecuación **no tiene solución.**

Actividades

1 Para cada una de estas ecuaciones, indica cuánto valen a, b y c. Resuélvelas aplicando la fórmula:

a) $x^2 - 4x - 5 = 0$ b) $2x^2 - 7x + 3 = 0$

c) $-x^2 + x + 6 = 0$ d) $2x^2 - 7x - 4 = 0$

e) $x^2 - 10x + 25 = 0$ f) $x^2 - x + 2 = 0$

2 Completa esta tabla:

	a	b	c	¿TIENE SOLUCIÓN?	x_1	x_2
$5x^2 - 8x = 0$						
$x^2 - 64 = 0$						
$x^2 - 3x + 4 = 0$						
$4x^2 + x - 3 = 0$						

3 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$ b) $9x^2 + 6x + 1 = 0$

c) $9x^2 - 6x + 1 = 0$ d) $5x^2 - 7x + 3 = 0$

e) $2x^2 + 5x - 3 = 0$ f) $6x^2 - 5x + 1 = 0$

g) $x^2 - 3x + 15 = 0$ h) $x^2 - 0{,}1x + 0{,}2 = 0$

4 Resuelve estas ecuaciones:

a) $x^2 + 4x - 21 = 0$ b) $x^2 + 9x + 20 = 0$

c) $9x^2 - 12x + 4 = 0$ d) $x^2 + x + 3 = 0$

e) $4x^2 + 28x + 49 = 0$ f) $x^2 - 2x + 3 = 0$

g) $4x^2 - 20x + 25 = 0$ h) $-2x^2 + 3x + 2 = 0$

Ecuaciones incompletas

Las ecuaciones de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$ en las que los coeficientes b o c son cero se llaman **incompletas:** $ax^2 + c = 0$ y $ax^2 + bx = 0$.

Aunque pueden resolverse aplicando la fórmula general, es posible encontrar sus soluciones de forma mucho más sencilla. Por ejemplo:

- $3x^2 - 75 = 0 \;\rightarrow\; x^2 = \dfrac{75}{3} = 25 \;\rightarrow\; x = \pm\sqrt{25} = \pm 5$
- $7x^2 + 14x = 0 \;\rightarrow\; x(7x + 14) = 0 \;\rightarrow\; \begin{cases} x = 0 \\ 7x + 14 = 0 \;\rightarrow\; x = -\dfrac{14}{7} = -2 \end{cases}$

Ten en cuenta

- Si $x^2 = 25$, entonces $x = \pm 5$, pues 25 tiene dos raíces cuadradas, 5 y -5.
- Para que un producto de dos factores sea igual a cero, es necesario que sea 0 alguno de ellos:

$$x \cdot (7x + 14) = 0$$

$x = 0$ o bien $7x + 14 = 0$

Ecuaciones sin término en x, $ax^2 + c = 0$

Para resolver las ecuaciones del tipo $ax^2 + c = 0$ no es necesario aplicar la fórmula general, pues se puede despejar x con toda sencillez:

$$x^2 = -\frac{c}{a} \;\rightarrow\; x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Ecuaciones sin término independiente, $ax^2 + bx = 0$

Para resolver las ecuaciones del tipo $ax^2 + bx = 0$ no es necesario aplicar la fórmula general, pues se puede sacar factor común la x e igualar a cero cada uno de los dos factores:

$$(ax + b) \cdot x = 0 \;\rightarrow\; \text{Soluciones: } x_1 = -\frac{b}{a},\; x_2 = 0$$

Ejercicio resuelto

Resolver:

a) $2x^2 - 98 = 0$

b) $2x^2 + 98 = 0$

c) $5x^2 + 95x = 0$

a) $2x^2 - 98 = 0 \;\rightarrow\; 2x^2 = 98 \;\rightarrow\; x^2 = \dfrac{98}{2} = 49 \;\rightarrow\; x = \pm\sqrt{49} = \pm 7$

Las soluciones son $x_1 = 7$, $x_2 = -7$.

b) $2x^2 + 98 = 0 \;\rightarrow\; 2x^2 = -98 \;\rightarrow\; x^2 = -\dfrac{98}{2} = -49$

No tiene solución, porque el cuadrado de un número no puede ser negativo. Es decir, $\sqrt{-49}$ no tiene sentido.

c) $5x^2 + 95x = 0 \;\rightarrow\; x(5x + 95) = 0 \;\rightarrow\; \begin{cases} x_1 = 0 \\ 5x + 95 = 0 \;\rightarrow\; x_2 = -95/5 = -19 \end{cases}$

Actividades

5 Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado sin utilizar la fórmula de resolución:

a) $3x^2 - 12x = 0$	b) $x - 3x^2 = 0$	c) $2x^2 - 5x = 0$	d) $2x^2 - 8 = 0$
e) $9x^2 - 25 = 0$	f) $4x^2 + 100 = 0$	g) $16x^2 = 100$	h) $3x^2 - 6 = 0$

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.° ESO. Material fotocopiable autorizado.

Reglas para resolver ecuaciones de segundo grado

Ten en cuenta

- $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0)$ $\rightarrow$ Aplica la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- $ax^2 + c = 0$ $\rightarrow$ Despeja x^2…
- $ax^2 + bx = 0$ $\rightarrow$ Saca la x como factor común…

- Si la ecuación de segundo grado está completa (tiene todos sus términos), aplica la fórmula.
- Si es una ecuación incompleta, tal como hemos visto en el apartado anterior, podrás resolverla con facilidad sin aplicar la fórmula.
- Si tiene una fisonomía complicada, arréglala: quita denominadores, suprime paréntesis, agrupa términos y pásalos todos al primer miembro.

  Solo cuando esté simplificada, aplica uno de los consejos anteriores.
- Comprueba las soluciones. Si la ecuación proviene de un problema con enunciado, haz la comprobación sobre él, pues es posible que alguna de las soluciones carezca de sentido real.

Ejercicio resuelto

Resolver la ecuación siguiente: $\dfrac{x(x-1)}{3} = \dfrac{x(x+1)}{4} - \dfrac{3x+4}{12}$

- Quitamos denominadores multiplicando por el mínimo común múltiplo de ellos: mín.c.m. (3, 4, 12) = 12

$$4x(x-1) = 3x(x+1) - (3x+4)$$

- Quitamos paréntesis:

$$4x^2 - 4x = 3x^2 + 3x - 3x - 4$$

- Agrupamos los términos, pasándolos todos al primer miembro:

$$4x^2 - 3x^2 - 4x - 3x + 3x + 4 = 0$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

- Aplicamos la fórmula, teniendo en cuenta que $a = 1$, $b = -4$, $c = 4$:

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{16-16}}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

- Comprobamos que para $x = 2$, el valor que toma el primer miembro de la ecuación inicial coincide con el valor que toma el segundo miembro.

Actividades

6 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $(3x+4)(5x-7) = (2x+7)^2 + 53$

b) $(2x+1)(x-3) = (x+1)(x-1) - 8$

c) $(2x-3)(2x+3) - x(x+1) - 5 = 0$

d) $(2x+1)^2 = 4 + (x+2)(x-2)$

7 Resuelve:

a) $\dfrac{x^2-3x}{2} + 2 = \dfrac{x+12}{6}$

b) $\dfrac{(5x-4)(5x+4)}{4} = \dfrac{(3x-1)^2-9}{2}$

c) $\dfrac{(x-1)^2-3x+1}{15} + \dfrac{x+1}{5} = 0$

4 Resolución de problemas con ecuaciones

Plantear una ecuación a partir de un problema es traducir a lenguaje algebraico las condiciones que ligan lo que se sabe con lo que se desea conocer. Conviene proceder de forma organizada, por lo que es útil dar estos pasos:

Observación

En la próxima unidad, al estudiar sistemas de ecuaciones, podrás utilizar más de una incógnita. Verás que así se simplifica la tarea de traducir un enunciado a ecuaciones.

1. Identificar los datos conocidos y lo que deseamos conocer. Dar nombre a la incógnita.
2. Relacionar mediante una igualdad (ecuación) lo conocido con lo desconocido.
3. Resolver la ecuación.
4. Interpretar la solución ajustándola al enunciado.

Problema resuelto

1. El precio de unos zapatos ha subido un 15% en diciembre y ha bajado un 20% en enero. De esta forma, el precio inicial ha disminuido en 6,96 €. ¿Cuál era el precio inicial?

1. Precio de los zapatos $\rightarrow x$

Con un aumento del 15% $\rightarrow 1{,}15x$

Con una rebaja del 20% $\rightarrow 0{,}8 \cdot 1{,}15x$

El que la diferencia entre los precios inicial y final es de 6,96 €, se traduce en la siguiente ecuación: $x - 0{,}92x = 6{,}96$

Resolvemos la ecuación: $0{,}08x = 6{,}96 \rightarrow x = 87$ €

El precio inicial de los zapatos era de 87 €.

Actividades

1 Si a un número se le quita su mitad y luego su tercera parte se obtiene 9. ¿Cuál es ese número?

☞ *La mitad de un número desconocido, x, es $x/2$ y su tercera parte, $x/3$.*

2 La base de un rectángulo es igual al doble de la altura disminuida en 4 cm y su perímetro es 100 cm. Halla la longitud de sus lados.

☞ *Si la altura es x, la base es $2x - 4$.*

3 Divide 1 600 € en tres partes de modo que la segunda parte supere a la primera en 100 € y la tercera parte supere a la segunda en 200 €.

☞ *Completa esta tabla para organizar los datos:*

PRIMERA PARTE	SEGUNDA PARTE	TERCERA PARTE
x	$x + 100$	$x + 100 + \ldots$

4 Un padre de 37 años tiene dos hijos de 8 y 5 años. ¿Cuántos años tienen que pasar para que la suma de las edades de los hijos sea igual a la edad del padre?

☞ *Completa esta tabla para organizar los datos:*

	PADRE	HIJO 1	HIJO 2
EDAD HOY	37	8	5
EDAD DENTRO DE x AÑOS	$37 + x$	$8 + x$	…

5 Una madre tiene 42 años y su hijo, 15. ¿Cuántos años hace que la edad de la madre era cuatro veces la del hijo?

☞ *Completa esta tabla para organizar los datos:*

	MADRE	HIJO
EDAD HOY	42	15
EDAD HACE x AÑOS	$42 - x$	…

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

Opera y calcula

Ecuaciones de primer grado

1 ▼▽▽ Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2(2-3x)-3(3-2x)=4(x+1)+3(4-5x)$

b) $\dfrac{x-3}{5}=\dfrac{x+1}{3}-2$

c) $1=\dfrac{x+3}{3}-\dfrac{x}{2}$

d) $\dfrac{3x+4}{5}=\dfrac{x+2}{2}$

e) $\dfrac{5x-16}{6}=-\dfrac{x+8}{12}+\dfrac{x+1}{3}$

f) $\dfrac{2x-4}{3}=3-\dfrac{4+x}{2}$

2 ▼▼▽ Comprueba que las siguientes ecuaciones son de primer grado y halla sus soluciones:

a) $(4x-3)(4x+3)-4(3-2x)^2=3x$

b) $2x(x+3)+(3-x)^2=3x(x+1)$

c) $(2x-3)^2+(x-2)^2=3(x+1)+5x(x-1)$

d) $\dfrac{x(x+1)}{2}-\dfrac{(2x-1)^2}{8}=\dfrac{3x+1}{4}-\dfrac{1}{8}$

Ecuaciones de segundo grado

3 ▼▽▽ Resuelve:

a) $7x^2-28=0$ b) $7x^2+28=0$

c) $4x^2-9=0$ d) $3x^2+42x=0$

e) $3x^2=42x$ f) $11x^2-37x=0$

g) $2(x+5)^2+(x-3)^2=14(x+4)$

h) $7x^2+5=68$

4 ▼▼▽ Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $\dfrac{x}{3}(x-1)-\dfrac{x}{4}(x+1)+\dfrac{3x+4}{12}=0$

b) $\dfrac{(x-1)(x+2)}{12}-\dfrac{(x+1)(x-2)}{6}-1=\dfrac{x-3}{3}$

c) $\dfrac{x+1}{2}-\dfrac{(x-1)^2}{4}-\dfrac{x+2}{3}+\dfrac{(x-2)^2}{6}=\dfrac{1}{6}$

Aplica lo aprendido

5 ▼▽▽ He pagado 14,30 € por un bolígrafo, un cuaderno y una carpeta. Si el precio de la carpeta es 5 veces el del cuaderno y este cuesta el doble que el bolígrafo, ¿cuál es el precio de cada artículo?

6 ▼▽▽ Álvaro y Yago han comprado dos videojuegos que tenían el mismo precio, pero han conseguido una rebaja del 16% y del 19%, respectivamente.

Si Álvaro pagó 1,26 € más que Yago, ¿cuál era el precio que tenía el videojuego?

7 ▼▽▽ Con 3,5 € más del dinero que tengo, podría comprar la camiseta de mi equipo. Si tuviera el doble, me sobrarían 7,25 €.

¿Cuánto dinero tengo?

8 ▼▽▽ Si al cuadrado de un número le restamos su triple, obtenemos 130.

¿Cuál es el número?

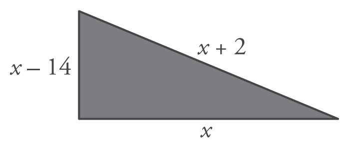
9 ▼▽▽ Halla dos números enteros consecutivos tales que la suma de sus cuadrados es 145.

10 ▼▽▽ Halla tres números enteros consecutivos tales que la diferencia entre el cuadrado del mayor y el menor sea igual al producto del menor por el intermedio aumentado en cuatro unidades.

11 ▼▽▽ La tercera parte del cuadrado de un número entero, sumado a la quinta parte del mismo número, da como resultado 78. Halla dicho número.

12 ▼▽▽ La superficie de un rectángulo es 494 cm^2. Halla sus dimensiones sabiendo que una es 7 cm más larga que la otra.

13 ▼▽▽ En un triángulo rectángulo, un cateto mide 2 cm menos que la hipotenusa y 14 cm más que el otro cateto. Calcula la longitud de los tres lados.



Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

Resuelve problemas

14 ▼▼▽ **Ejercicio resuelto**

De los socios de un club deportivo:

- **Los 2/5 juegan al fútbol.**
- **1/3 de los que quedan juega al baloncesto.**
- **28 se dedican al balonmano.**
- **Y aún queda 1/6 que hacen atletismo.**

¿Cuántos socios son?

Llamamos x al número de socios del club.

- $\frac{2}{5}x$ juegan al fútbol $\to$ quedan $\frac{3}{5}x$
- $\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5}x = \frac{1}{5}x$ juega a baloncesto $\to$ quedan $\frac{2}{5}x$
- $\frac{2}{5}x - 28$ son los que hacen atletismo.

Por tanto, $\frac{2}{5}x - 28 = \frac{1}{6}x$. Resolvemos:

$12x - 840 = 5x \longrightarrow x = 120$ son los socios del club.

15 ▼▽▽ Del dinero de una cuenta bancaria retiramos 1/7; ingresamos después 2/15 de lo que quedó y aún faltan 12 € para tener la cantidad inicial.

¿Cuánto dinero había en la cuenta?

16 ▼▼▽ Dos hermanas se llevan 3 años y su padre tiene 45. Hace 7 años, la suma de las edades de las hijas era la mitad que la del padre. ¿Qué edad tiene cada hija?

EDAD	HOY	HACE 7 AÑOS
HIJA MENOR	x	$x - 7$
HIJA MAYOR	$x + 3$	$x + 3 - 7$
PADRE	45	38

17 ▼▼▽ Un padre de 43 años tiene dos hijos de 9 y 11 años. ¿Cuántos años han de transcurrir para que entre los dos hijos igualen la edad del padre?

18 ▼▼▽ La edad actual de un padre es el triple que la de su hijo y dentro de 14 años será el doble. ¿Qué edad tiene cada uno?

19 ▼▼▽ Un repostero ha mezclado 12 kg de azúcar de 1,10 €/kg con cierta cantidad de miel de 4,20 € el kilo. La mezcla sale a 2,34 €/kg. ¿Cuánta miel puso?

	CANTIDAD (kg)	PRECIO (€/kg)	COSTE (€)
AZÚCAR	12	1,10	$1{,}10 \cdot 12 = 13{,}20$
MIEL	x	4,20	$4{,}20x$
MEZCLA	$12 + x$	2,34	$2{,}34(12 + x)$

COSTE DEL AZÚCAR + COSTE DE LA MIEL = COSTE DE LA MEZCLA

20 ▼▼▽ ¿Cuántos litros de aceite de orujo de 1,6 €/*l* tenemos que añadir a 60 *l* de aceite de oliva de 2,8 €/*l* para obtener una mezcla de 2,5 €/*l*?

Autoevaluación

1 Busca por tanteo una solución exacta de cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $(x + 1)^3 = 64$

b) $\sqrt{x + 80} = 11$

2 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $3x - 2(x + 3) = x - 3(x + 1)$

b) $\frac{x - 3}{5} = \frac{x + 1}{3} - 2$

3 Resuelve estas ecuaciones: a) $x^2 - 5x = 0$

b) $2x^2 - 50 = 0$ c) $2x^2 - 3x - 2 = 0$

4 Juan tiene 5 años más que Sandra. Dentro de 3 años, la edad de Juan será el doble de la de Sandra. ¿Qué edad tiene cada uno?

5 La altura de un rectángulo mide 5 m menos que su base, y su área es igual a 40 m^2. Calcula la medida de los lados del rectángulo.

6 Sistemas de ecuaciones

El desarrollo de la resolución de sistemas de ecuaciones se hizo a la par que el de las ecuaciones.

Los babilonios plantearon y resolvieron, entre otras cosas, sistemas de ecuaciones lineales con varias incógnitas a las que llamaban *longitud*, *anchura*, *área*, *volumen*..., aunque el problema no tuviera nada que ver con cuestiones geométricas. En una de sus tablillas aparece el siguiente problema:

1/4 *anchura* + *longitud* = 7 *manos*

anchura + *longitud* = 10 *manos*

El método de resolución de los babilonios era por puro tanteo: probaban con distintas cantidades hasta que daban con la que resolvía su problema.

En el siglo I a.C. apareció en China el *Libro de los nueve capítulos*, en el que se incluyen 246 problemas sobre agrimensura, ingeniería, repartos, fiscalidad, etc. No era un tratado sistemático, sino que en él se iban resolviendo problemas de la vida cotidiana. En su capítulo octavo se proponen problemas que dan lugar a sistemas de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas. Y se resuelven mediante métodos muy avanzados.

Cuatro siglos más tarde, en Grecia, **Diofanto** planteó problemas algebraicos que respondían a sistemas de ecuaciones. Pero él los resolvía designando una incógnita, hábilmente escogida, de modo que le permitía entrar, directamente, en una única ecuación.

DEBERÁS RECORDAR

- Cómo se representa una recta a partir de su ecuación.

1 Ecuaciones con dos incógnitas. Soluciones

En esta unidad vamos a tratar con ecuaciones lineales con dos incógnitas. Por ejemplo, $2x - 3y = 3$ es una ecuación lineal con dos incógnitas, x e y. El par de valores $x = 6$, $y = 3$ es solución de esta ecuación porque $2 \cdot 6 - 3 \cdot 3$ es igual a 3. También son soluciones $x = 3$, $y = 1$ o $x = 9$, $y = 5$.

Nomenclatura

A las incógnitas se las suele designar con las letras x, y. Sin embargo, pueden usarse otras, como t y v (para *tiempo* y *velocidad*).

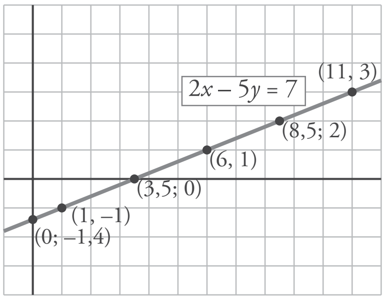
Solución de una ecuación con dos incógnitas es todo par de valores que hacen cierta la igualdad. Una ecuación lineal con dos incógnitas tiene infinitas soluciones.

Representación gráfica

Para obtener soluciones de una ecuación lineal con dos incógnitas, se despeja una de ellas y se le dan valores a la otra:

$$2x - 5y = 7 \rightarrow y = \frac{2x - 7}{5} \rightarrow$$

x	1	3,5	6	8,5	11	0
y	–1	0	1	2	3	–1,4



Si las soluciones se interpretan como puntos del plano, entonces **la ecuación se representa mediante una recta** y sus soluciones son los puntos de esta. Por eso, una solución como $x = 6$, $y = 1$ se designa también así: (6, 1).

Entrénate

1 ¿Es $x = 5$, $y = 1$ solución de la ecuación lineal $3x - 5y = 10$? ¿Y $x = 0$, $y = -2$?

¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $3x - 5y = 10$?

2 Representa las siguientes ecuaciones en los mismos ejes:

$5x - 2y = 0 \qquad 8x - 3y = 1$

Para ello:

- Despeja y.
- Da valores a x para obtener los correspondientes de y.

3 ¿Tienen algún punto en común las dos ecuaciones del ejercicio anterior? ¿Cuál?

Ejercicio resuelto

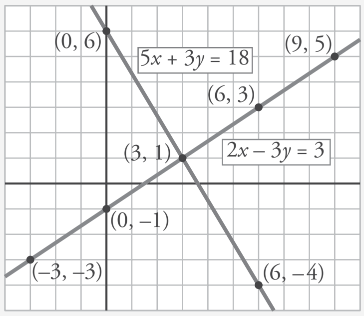
Representar las rectas siguientes: $2x - 3y = 3 \qquad 5x + 3y = 18$

$$2x - 3y = 3 \rightarrow y = \frac{2x - 3}{3}$$

x	–3	0	3	6	9	…
y	–3	–1	1	3	5	…

$$5x + 3y = 18 \rightarrow y = \frac{18 - 5x}{3}$$

x	0	1	2	3	6	…
y	6	13/3	8/3	1	–4	…



El punto donde se cortan las rectas, (3, 1), es la solución común de ambas ecuaciones: $x = 3$, $y = 1$.

Actividades

1 Comprueba si cada uno de los pares de valores siguientes es solución de la ecuación $4x - 3y = 12$:

a) $x = 6$, $y = 4$ b) $x = 6$, $y = 12$ c) $x = 0$, $y = -4$

2 Representa las rectas de ecuaciones:

$2x - y = 6 \qquad x + y = 0$

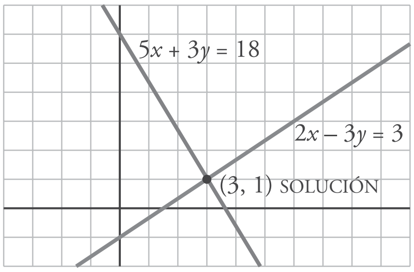
¿Cuál es la solución común a ambas ecuaciones?

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.° ESO. Material fotocopiable autorizado.

2 Sistemas de ecuaciones

Dos ecuaciones forman un **sistema de ecuaciones** cuando lo que pretendemos de ellas es encontrar su solución común.

Se llama **solución** de un sistema de ecuaciones a la solución común a ambas.



La solución de un sistema de ecuaciones lineales es el punto donde se cortan las dos rectas.

Si las dos ecuaciones del ejercicio resuelto de la página anterior las tomamos como sistema de ecuaciones, las pondremos del siguiente modo:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ 5x + 3y = 18 \end{cases}$$

La solución del sistema es $x = 3$, $y = 1$, porque es solución de ambas ecuaciones.

A veces, en lugar de decir **sistema de ecuaciones** diremos, simplemente, **sistema.**

Ejercicio resuelto

Estudiar si alguno de los pares $x = -3$, $y = 5$ y $x = 2$, $y = \frac{1}{2}$ es solución de cada uno de los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} \mathbf{5x + 6y = 15} \\ \mathbf{3x + 4y = 8} \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \mathbf{3x - y = -14} \\ \mathbf{9x + 10y = 23} \end{cases}$

Recuerda que un par x e y es solución de un sistema cuando lo es de ambas ecuaciones.

a) $\begin{cases} 5x + 6y = 15 \\ 3x + 4y = 8 \end{cases}$ $\begin{cases} x = -3,\ y = 5 \left\{ \begin{array}{l} -15 + 30 = 15 \ \textbf{SÍ} \\ -9 + 20 = 11 \ \textbf{NO} \end{array} \right\} \text{NO ES SOLUCIÓN.} \\ x = 2,\ y = \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} 10 + 3 = 13 \ \textbf{NO} \\ 6 + 2 = 8 \ \textbf{SÍ} \end{array} \right\} \text{NO ES SOLUCIÓN.} \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - y = -14 \\ 9x + 10y = 23 \end{cases}$ $\begin{cases} x = -3,\ y = 5 \left\{ \begin{array}{l} -9 - 5 = -14 \ \textbf{SÍ} \\ -27 + 50 = 23 \ \textbf{SÍ} \end{array} \right\} \text{SÍ ES SOLUCIÓN.} \\ x = 2,\ y = \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} 6 - 1/2 = 11/2 \ \textbf{NO} \\ 18 + 5 = 23 \ \textbf{SÍ} \end{array} \right\} \text{NO ES SOLUCIÓN.} \end{cases}$

Entrénate

1 ¿Es el par de valores $x = 1$, $y = -1$ solución de este sistema de ecuaciones?

$$\begin{cases} 7x - 20y = 14 \\ 9x + 10y = 18 \end{cases}$$

$7 \cdot 1 - 20 \cdot (-1) = \ldots$

$9 \cdot 1 + 10 \cdot (-1) = \ldots$

2 Comprueba, de igual manera, si el par de valores $x = 2$, $y = 0$ es o no solución del sistema del ejercicio anterior:

$7 \cdot 2 - 20 \cdot 0 = \ldots$

$9 \cdot 2 + 10 \cdot 0 = \ldots$

Actividades

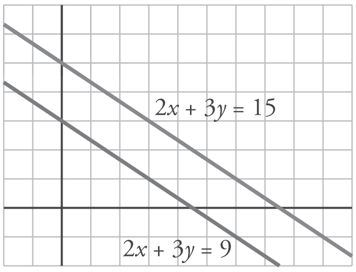
1 Di si alguno de los pares $x = -1$, $y = 4$ y $x = 7$, $y = 8$ es solución de cada uno de los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} -6x + 5y = 26 \\ x - 2y = -9 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -2x + 4y = 18 \\ 3x - 2y = 5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 5x + y = 43 \\ 3x + y = 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + y = 15 \\ x - y = -1 \end{cases}$

3 Número de soluciones de un sistema lineal

En general, un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas tiene una única solución, el punto donde se cortan las dos rectas. Sin embargo, no siempre ocurre esto. Veamos, a continuación, los demás casos que pueden darse.

Sistemas sin solución



Sistema incompatible. Gráficamente, son dos rectas paralelas. No tienen ningún punto común.

Hay sistemas cuyas ecuaciones dicen cosas contradictorias. Por ejemplo:

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 15 \\ 2x + 3y = 9 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + 3y = 15 \\ 4x + 6y = 18 \end{cases}$

En ambos casos es imposible conseguir que las dos igualdades sean ciertas para los mismos valores de x y de y:

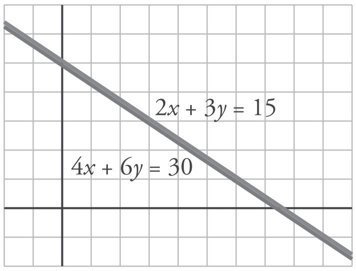
En a), si $2x + 3y$ es igual a 15, no puede ser, a la vez, igual a 9.

En b), como $4x + 6y$ es el doble de $2x + 3y$, debería ser igual a 30 y no a 18.

Se dice que estos sistemas son incompatibles.

Los sistemas que no tienen solución se llaman **incompatibles.** Gráficamente, son dos rectas paralelas: no tienen ningún punto en común.

Sistemas con infinitas soluciones



Sistema indeterminado. Gráficamente, es dos veces la misma recta. Todos sus puntos coinciden.

Hay sistemas cuyas dos ecuaciones dicen lo mismo. Es decir, son dos veces la misma ecuación. Por ejemplo:

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 15 \\ 2x + 3y = 15 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + 3y = 15 \\ 4x + 6y = 30 \end{cases}$

Las soluciones del sistema son las de cualquiera de las dos ecuaciones. Como sabemos, una ecuación con dos incógnitas tiene infinitas soluciones.

Estos sistemas se llaman indeterminados.

Los sistemas que tienen infinitas soluciones se llaman **indeterminados.** Gráficamente, son dos rectas coincidentes: todos sus puntos son comunes.

Actividades

1 Fijándote en sus ecuaciones, di cuál de estos sistemas tiene una solución, cuál es incompatible y cuál indeterminado. Compruébalo representando las rectas:

a) $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ -2x + 5y = 10 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 4x + 2y = 14 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$

2 Completa estos sistemas para que el primero tenga la solución $x = 6$, $y = -1$, el segundo sea incompatible, y el tercero y el cuarto sean indeterminados:

a) $\begin{cases} x - 4y = \dots \\ 2x - y = 13 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + y = 8 \\ 4x + 2y = \dots \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + y = 8 \\ 4x \dots = 16 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 5x + 11y = 3 \\ \dots + 33y = 9 \end{cases}$

4 Resolución de sistemas

Método de sustitución

Este método de resolución de un sistema de ecuaciones consiste en despejar una incógnita en una de las ecuaciones y **sustituirla** en la otra.

En la práctica, al aplicar este método, solo se escribe en cada paso la ecuación que se transforma, en lugar de escribir el sistema completo cada vez. Describamos los pasos que conviene dar para aplicar este método:

① Se despeja una incógnita en una de las ecuaciones.

② Se sustituye la expresión de esta incógnita en la otra ecuación, obteniendo una ecuación con una sola incógnita.

③ Se resuelve esta ecuación.

④ El valor obtenido se sustituye en la ecuación en la que aparecía la incógnita despejada.

⑤ Se ha obtenido, así, la solución.

Ejercicio resuelto

Resolver por el método de sustitución este sistema: $\begin{cases} \mathbf{3x + 2y = 18} \\ \mathbf{x - 3y = -5} \end{cases}$

① Despejamos la x en la 2.ª ecuación: $x = 3y - 5$

② Sustituimos esta expresión de la x en la 1.ª: $3(3y - 5) + 2y = 18$

③ Resolvemos la ecuación resultante:

$9y - 15 + 2y = 18 \;\rightarrow\; 11y = 33 \;\rightarrow\; y = 3$

④ Sustituimos el valor de y en $x = 3y - 5 \;\rightarrow\; x = 3 \cdot 3 - 5 = 4$

⑤ Se ha obtenido la solución: $x = 4$, $y = 3$

Comprueba que la solución es correcta sustituyendo en el sistema original la x y la y por los valores obtenidos.

Entrénate

1 Resuelve este sistema paso a paso:

$$\begin{cases} 2x - 5y = 6 \\ x - 3y = 2 \end{cases}$$

① Despeja x en la 2.ª ecuación (es la más sencilla de despejar):

$x - 3y = 2 \;\rightarrow\; x = \square + \square y$

② Sustituye esta expresión de la x en la 1.ª ecuación:

$2 \cdot (\square + 3y) - 5y = \square$

③ Resuelve la ecuación resultante:

$y = \square$

④ Sustituye el valor de y en la igualdad que obtuviste en el paso ①, y calcula el valor de x:

$x = 2 + 3 \cdot \square \rightarrow x = \square$

⑤ *Solución*: $x = \square$, $y = \square$

2 Resuelve este sistema paso a paso:

$$\begin{cases} 5x + y = 1 \\ 3x - 2y = 11 \end{cases}$$

① Despeja y en la 1.ª ecuación.

② Sustituye el resultado en la 2.ª ecuación.

③ Resuelve: $x = \square$

④ Sustituye el valor de x en la igualdad del paso ①, y calcula el valor de y.

⑤ *Solución*: $x = \square$, $y = \square$

Actividades

1 Resuelve estos sistemas:

a) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - y = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 3y = 0 \\ 2x + y = -5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + y = -4 \\ 4x - 3y = 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$

2 Resuelve:

a) $\begin{cases} 5x + 6y = 2 \\ 4x - y = 19 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 4x - 3y = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + 5y = -1 \\ 4x - 3y = -2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x + 8y = 1 \\ 5x - 2y = -6 \end{cases}$

5 Resolución de problemas mediante sistemas

Al traducir a lenguaje algebraico un problema algo complejo, suele ser más sencillo recurrir a un sistema de ecuaciones que a una única ecuación con una incógnita. Veamos los pasos que conviene dar:

① Identificar los elementos que intervienen y nombrar las incógnitas.

② Expresar mediante ecuaciones las relaciones existentes.

③ Resolver el sistema de ecuaciones resultante.

④ Interpretar la solución ajustándola al enunciado.

Entrénate

1 Un examen tipo test consta de 50 preguntas y hay que contestar a todas. Por cada acierto se obtiene un punto y por cada fallo se restan 0,5 puntos. Si mi nota ha sido 24,5 puntos, ¿cuántos aciertos y cuántos fallos he tenido?

- Identifica los elementos y nombra las incógnitas:

  Aciertos: x Fallos: y

  Puntos obtenidos por aciertos: x

  Punto restados por fallos: $0{,}5y$

- Expresa mediante ecuaciones la información del problema:

$$\begin{cases} x + y = \square \\ x - 0{,}5y = \square \end{cases}$$

Resuelve el sistema e interpreta la solución.

2 La suma de dos números es 31 y su diferencia es 5. ¿Cuáles son esos números?

$$\begin{cases} x + y = \square \\ x - y = \square \end{cases}$$

Ejercicio resuelto

He pagado 55,72 € por una camiseta y un pantalón que costaban 70 € entre los dos. La camiseta tenía un 18% de descuento y el pantalón, un 22%. ¿Cuál era el precio original de cada artículo?

① Identificamos los elementos y nombramos las incógnitas.

Con un 18% de descuento, pagamos 100 – 18 = 82%.

Con un 22% de descuento, pagamos 100 – 22 = 78%.

Por tanto:

	CAMISETA	PANTALÓN
PRECIO ORIGINAL	x	y
PRECIO CON REBAJA	$0{,}82x$	$0{,}78y$

② Expresamos mediante ecuaciones la información del problema. $\begin{cases} x + y = 70 \\ 0{,}82x + 0{,}78y = 55{,}72 \end{cases}$

③ Resolvemos el sistema de ecuaciones: $x = 70 - y$

$0{,}82(70 - y) + 0{,}78y = 55{,}72 \rightarrow 57{,}4 - 0{,}82y + 0{,}78y = 55{,}72 \rightarrow -0{,}04y = -1{,}68 \rightarrow y = 42;\ x = 70 - 42 = 28$

④ Interpretamos la *solución:* el precio original de la camiseta era de 28 € y el del pantalón, de 42 €.

Actividades

1 Daniel pagó un día por 3 hamburguesas y 2 refrescos 6,3 €. Otro día, por 2 hamburguesas y 4 refrescos pagó 6,6 €. ¿Cuál es el precio de una hamburguesa? ¿Y el de un refresco?

☞ *Si x es el precio de una hamburguesa e y el de un refresco, 3 hamburguesas y 2 refrescos costarán $3x + 2y$.*

2 En un test de 50 preguntas, dan 0,8 puntos por cada acierto y quitan 0,4 puntos por cada error. Si Ana ha obtenido 22 puntos contestando a todas las preguntas, ¿cuántas ha contestado bien y cuántas mal?

3 Por un pantalón y unos zapatos, que costaban 70 € entre los dos, he pagado 50,8 €. Halla el precio inicial de cada artículo sabiendo que en el pantalón me han rebajado un 20% y en los zapatos un 30%.

4 En una fábrica de chocolate han empaquetado los 1200 bombones en cajas de 1 docena y de 2 docenas. En total se han utilizado 60 cajas. Calcula cuántas han sido de 1 docena y cuántas de 2 docenas.

☞ *En x cajas de 1 docena entran $12x$ bombones. ¿Cuántos bombones entran en y cajas de 2 docenas?*

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.° ESO. Material fotocopiable autorizado.

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

Practica

Solución de un sistema de ecuaciones

1 ▼▽▽ Comprueba si $x = 2,\ y = -1$ es solución de los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} 2x - y = -4 \\ 5x + y = -10 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - 4y = 10 \\ 4x + 3y = 5 \end{cases}$

2 ▼▽▽ Completa los dos sistemas de ecuaciones para que ambos tengan como solución el par de valores $x = 3,\ y = -1/2$:

a) $\begin{cases} 3x + 2y = \dots \\ x - 4y = \dots \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{x}{2} + y = \dots \\ x - y = \dots \end{cases}$

3 ▼▽▽ a) Busca dos soluciones de la ecuación $3x - y = 1$.

b) Representa gráficamente la recta $3x - y = 1$.

c) Un punto cualquiera de la recta, ¿es solución de la ecuación?

4 ▼▽▽ a) Representa en los mismos ejes dos rectas cuyas ecuaciones son:

$2x + y = 3 \qquad x - y = 3$

b) Di cuál es la solución de este sistema:

$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - y = 3 \end{cases}$

c) ¿Tienen estos sistemas la misma solución?

$S: \begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - y = 3 \end{cases}$ $S': \begin{cases} y + 1 = 0 \\ 3x - 4y = 10 \end{cases}$

Resolución de sistemas de ecuaciones

5 ▼▽▽ Resuelve, por el método de sustitución, los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 5x + 7y = 13 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 6x + 3y = 0 \\ 3x - y = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x + 9y = 4 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x - 4y = 11 \\ 5x + 7y = 1 \end{cases}$

6 ▼▽▽ Resuelve gráficamente los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - y = 0 \\ 3x + y = -6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 3y = -5 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x - 3y = -4 \\ x + 8y = -2 \end{cases}$

7 ▼▽▽ Resuelve por sustitución.

a) $\begin{cases} x + 3y = 0 \\ 2x + y = -5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 8x - 3y = -25 \\ x - 5y = -17 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 7x - y = -6 \\ 4x + 3y = 3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x + 16 = 2y \\ 2y - 3x = 16 \end{cases}$

Aplica lo aprendido

8 ▼▽▽ Halla dos números tales que su suma sea 160, y su diferencia, 34.

9 ▼▽▽ En una granja hay conejos y gallinas. Hemos contado 26 cabezas y 62 patas. ¿Cuántos conejos y cuántas gallinas hay?

☞ *Si hay x conejos habrá $4x$ patas de conejo…*

10 ▼▽▽ Busca una fracción que sea igual a 2 si se le suman 11 unidades al numerador, y que sea igual a 1 si se le restan 4 unidades al denominador.

11 ▼▽▽ María tiene ciruelas en dos fruteros. Si pasa 2 del primero al segundo, ambos tendrán el mismo número de ciruelas; pero si pasa 3 del segundo al primero, el segundo tendrá la mitad de ciruelas que el primero. ¿Cuántas ciruelas hay en cada frutero?

☞

	FRUTERO 1	FRUTERO 2
NÚMERO DE CIRUELAS	x	y
NÚMERO DE CIRUELAS	$x - 2$	$y + 2$
NÚMERO DE CIRUELAS	$x + 3$	$y - 3$

12 ▼▽▽ Halla dos números cuya suma sea 40 y tales que al dividir el mayor entre el menor nos dé 2 de cociente y 1 de resto.

☞ *Sabes que dividendo = divisor · cociente + resto. Escribe esta igualdad llamando x al dividendo e y al divisor.*

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

13 ▼▽▽ El perímetro de un rectángulo es 36 cm. Si al lado mayor le sumamos 2 cm y al menor le restamos 4 cm, el perímetro del nuevo rectángulo es 32 cm. ¿Cuánto miden los lados del rectángulo?

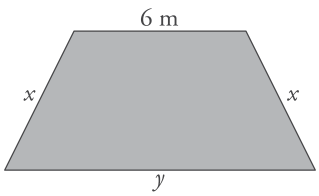
☞ *Si llamamos x e y a los iniciales, los nuevos lados medirán $x + 2$ e $y - 4$.*

14 ▼▽▽ Por dos bolígrafos y tres cuadernos he pagado 7,80 €; por cinco bolígrafos y cuatro cuadernos, pagué 13,20 €. ¿Cuál es el precio de un bolígrafo? ¿Y de un cuaderno?

15 ▼▽▽ Un librero ha vendido 45 libros, unos a 32 € y otros a 28 €. Obtuvo por la venta 1 368 €. ¿Cuántos libros vendió de cada clase?

16 ▼▽▽ Una cooperativa ha envasado 2 000 *l* de aceite en botellas de 1,5 *l* y 2 *l*. Si ha utilizado 1 100 botellas, ¿cuántas se han necesitado de cada clase?

17 ▼▽▽ Si la base mayor es la suma de los lados oblicuos y el perímetro es 38 m, ¿cuánto mide cada lado?



18 ▼▽▽ Los alumnos de un centro escolar son 420 entre ESO y Bachillerato. El 42% de ESO y el 52% de Bachillerato son chicas, lo que supone un total de 196 mujeres. Calcula cuántos estudiantes hay en ESO y cuántos en Bachillerato.

Resuelve problemas

19 ▼▼▽ La suma de las edades de una madre y su hijo es 56 años. Hace 10 años, la edad de la madre era el quíntuple de la edad que tenía el hijo. ¿Cuál es la edad actual de cada uno?

☞

	MADRE	HIJO
EDAD HOY	x	y
EDAD HACE 10 AÑOS	$x - 10$	$y - 10$

20 ▼▼▽ Hace tres años, la edad de Nuria era el doble de la de su hermana Marta. Dentro de 7 años, será los 4/3 de la que entonces tenga Marta. Calcula la edad actual de cada una.

☞

	NURIA	MARTA
EDAD HOY	x	y
EDAD HACE 3 AÑOS	$x - 3$	$y - 3$
EDAD DENTRO DE 7 AÑOS	$x + 7$	$y + 7$

21 ▼▼▽ Hemos mezclado aceite de oliva de 3,5 €/*l* con aceite de girasol de 2 €/*l* para obtener 50 *l* de mezcla a 3,08 €/*l*. Calcula la cantidad de aceite de oliva y de aceite de girasol que hemos mezclado.

☞

	CANTIDAD (*l*)	PRECIO (€/*l*)	COSTE (€)
OLIVA	x	3,5	$3{,}5x$
GIRASOL	y	2	$2y$
MEZCLA	50	3,08	$3{,}08 \cdot 50$

Autoevaluación

1 a) Busca tres soluciones de la ecuación $2x - y = 3$.

b) Dibuja en los mismos ejes estas dos ecuaciones:

$2x - y = 3 \qquad x + y = 0$

¿Cuál es la solución del sistema que forman?

2 ¿Cuál de los sistemas siguientes no tiene solución y cuál tiene infinitas soluciones?

a) $\begin{cases} 6x - 3y = 9 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 4x + 2y = 9 \end{cases}$

3 Resuelve: a) $\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x - 3y = 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 2x + 3y = 12 \end{cases}$

4 Para pagar un bocadillo que costaba 3 €, he utilizado nueve monedas de 20 céntimos y de 50 céntimos. ¿Cuántas monedas de cada clase he utilizado?

5 He pagado 83 € por una cazadora y unos deportivos. En la cazadora me han rebajado el 20%, y en los deportivos, el 10%, y así me he ahorrado 17 €. ¿Cuáles eran los precios sin rebajar?

7 Funciones y gráficas

En la Antigüedad, la explicación de los fenómenos físicos era fruto de la observación y la especulación. Esta actitud se mantuvo durante muchos siglos.

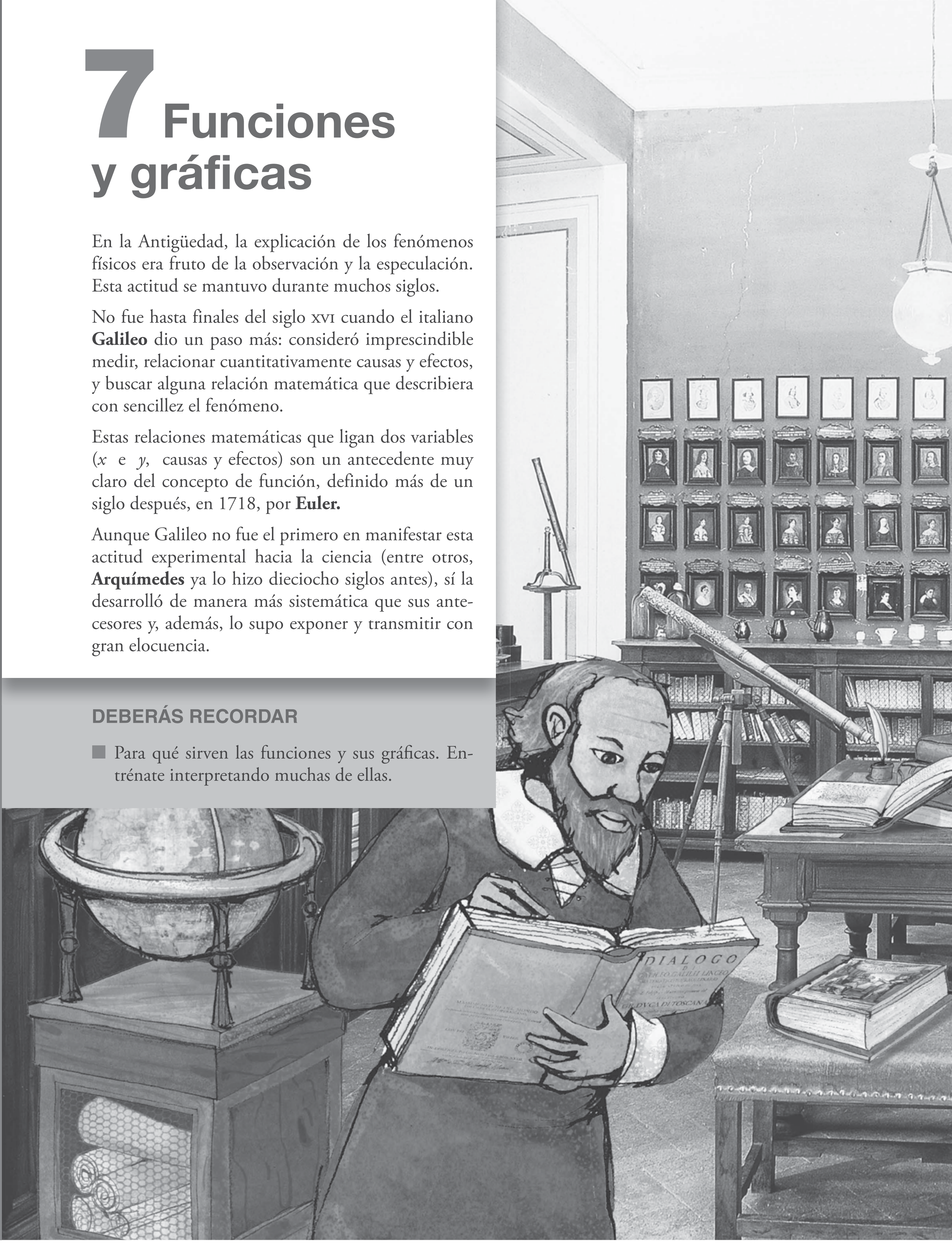
No fue hasta finales del siglo XVI cuando el italiano **Galileo** dio un paso más: consideró imprescindible medir, relacionar cuantitativamente causas y efectos, y buscar alguna relación matemática que describiera con sencillez el fenómeno.

Estas relaciones matemáticas que ligan dos variables (x e y, causas y efectos) son un antecedente muy claro del concepto de función, definido más de un siglo después, en 1718, por **Euler.**

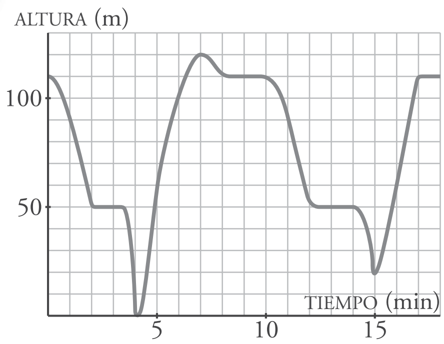
Aunque Galileo no fue el primero en manifestar esta actitud experimental hacia la ciencia (entre otros, **Arquímedes** ya lo hizo dieciocho siglos antes), sí la desarrolló de manera más sistemática que sus antecesores y, además, lo supo exponer y transmitir con gran elocuencia.

DEBERÁS RECORDAR

- Para qué sirven las funciones y sus gráficas. Entrénate interpretando muchas de ellas.



1 Las funciones y sus gráficas



tiempo (*t*) → *altura* (*a*)

Un equipo de naturalistas observa un águila: sale de su nido, caza un conejo, regresa a su nido, vuelve a salir, caza una paloma y, de nuevo, vuelve a su nido.

Observando atentamente la gráfica que han dibujado, se pueden averiguar muchas cosas: altura del nido, altura a la que suele otear para buscar caza, momento en que consigue dar caza a cada una de sus presas…

Dos variables, dos ejes

La gráfica que describe el vuelo del águila relaciona dos variables:

- El tiempo que ha transcurrido desde que comenzó la observación, t. Es la **variable dependiente.**
- La altura a la que se encuentra el águila, a. Es la **variable independiente.**

La representación se ha hecho en un diagrama cartesiano:

- En el **eje horizontal** o **eje de abscisas,** el tiempo, t.
- En el **eje vertical** o **eje de ordenadas,** la altura, a.

Cada punto de la gráfica representa un *tiempo* y una *altura*, y significa que en ese instante el águila está a esa altura.

Analizando la gráfica apreciamos las subidas y bajadas del águila en su vuelo, y podríamos describirlas con cierto detalle.

Escalas

En cada eje hay una **escala:**

- En el eje horizontal, un cuadrito significa 1 minuto.
- En el eje vertical, un cuadrito significa 10 metros.

Las escalas en los ejes nos permiten no solo describir cualitativamente el comportamiento, sino también cuantificarlo. Por ejemplo: la altura máxima alcanzada durante la observación es de 120 m y eso ocurre a los 7 minutos.

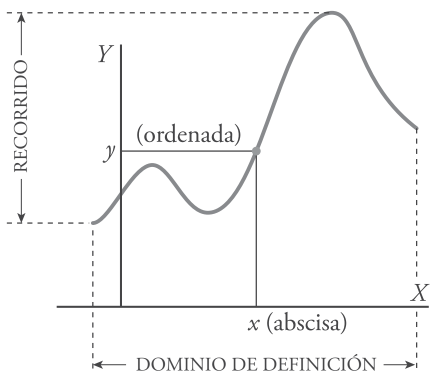
Dominio de definición y recorrido

La gráfica del vuelo del águila se extiende en el tramo 0-18. Solo tenemos información del comportamiento del águila en este intervalo de tiempo.

El intervalo 0-18 se llama **dominio de definición** de la función.

La altura a la que se encuentra el águila oscila entre 0 m y 120 m.

Al tramo 0-120 se le llama **recorrido** de la función.



Función

Una **función** es una relación entre dos variables a las que, en general, llamaremos x e y.

La función asocia a cada valor de x **un único** valor de y.

Actividades

1 Observa la gráfica de la página anterior. Responde:

a) ¿A qué altura se encuentra el nido?

b) ¿A qué altura estaba el águila a los cinco minutos de empezar la observación?

c) ¿Desde qué altura otea para buscar caza?

d) ¿En qué instante caza al conejo?

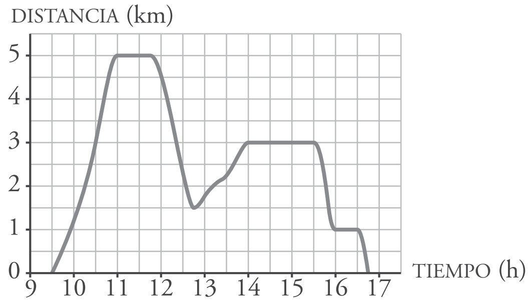
e) ¿Cuánto tiempo pasa en el nido con su pareja y sus polluelos después de cazar al conejo?

f) ¿A qué altura volaba la paloma que caza?

g) Desde que caza a la paloma, ¿cuánto tarda en subir al nido? Halla la velocidad de subida en metros por minuto.

2 En unos ejes cartesianos, describe 10 minutos de un posible vuelo de una cigüeña, desde que sale de su nido en el campanario de una iglesia hasta que vuelve a él, después de haber cazado una rana.

3 Matilde sale de casa y visita al dentista. A continuación recoge un vestido en casa de la modista y come con una amiga en un restaurante. Por último, hace la compra en un supermercado situado camino de casa.



Observa la gráfica y responde:

a) ¿Cuál es la variable independiente?

b) ¿Cuál es la variable dependiente?

c) ¿En qué tramo o tramos está definida la función?

d) ¿Qué representa cada cuadrito del eje de abscisas?

e) ¿Qué representa cada cuadradito del eje de ordenadas?

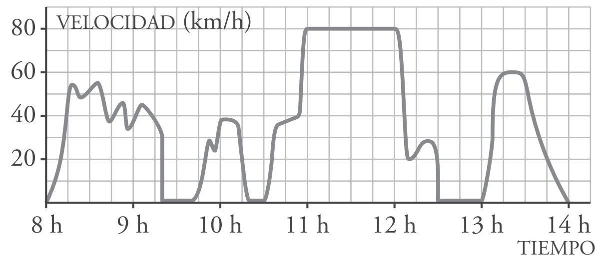
f) ¿A qué distancia de la casa de Matilde está la consulta del dentista?

g) ¿A qué hora llegó Matilde al restaurante?

h) ¿Cuánto duró la comida?

i) ¿Qué le queda a Matilde más lejos de casa, la modista o el supermercado?

4 En la siguiente gráfica se ha representado la velocidad de una furgoneta de reparto a lo largo de una mañana de trabajo, que finaliza cuando el conductor para a la hora de comer.



Observa la gráfica y responde:

a) ¿Qué se ha representado en el eje de abscisas?

b) ¿Qué se ha representado en el eje de ordenadas?

c) ¿Qué intervalo es el dominio de definición?

d) ¿Cuál es la variable independiente?

e) ¿Cuál es la variable dependiente?

f) ¿Cuántas paradas ha hecho antes de comer?

g) ¿A qué hora efectuó la primera parada?

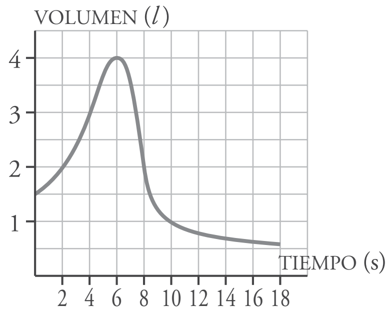
h) ¿Cuánto duró la primera parada?

i) ¿A qué hora entró en la autovía?

j) ¿A qué velocidad circuló por la autovía?

5 Para medir la capacidad espiratoria de los pulmones, se hace una prueba que consiste en inspirar al máximo y, después, espirar tan rápido como se pueda en un aparato llamado espirómetro.

Esta curva indica el volumen de aire que entra y sale de los pulmones.



a) ¿Cuál es el volumen en el momento inicial?

b) ¿Cuánto tiempo duró la observación?

c) ¿Cuál es la capacidad máxima de los pulmones de esta persona?

d) ¿Cuál es el volumen a los 10 segundos de iniciarse la prueba?

¿Y cuándo termina la prueba?

2 Variaciones de una función

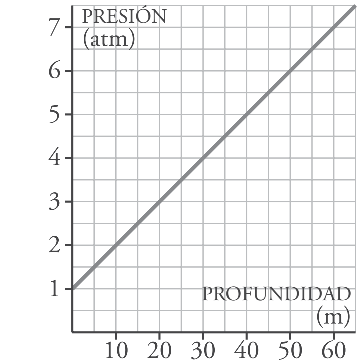
Crecimiento y decrecimiento

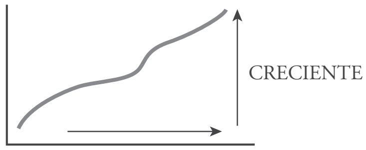
- Al sumergirnos en agua, la presión aumenta de manera uniforme. En la superficie, la presión es la atmosférica (1 atm). Por cada 10 m que profundizamos, la presión aumenta una atmósfera (1 atm).

  Esta gráfica corresponde a la función:

  profundidad dentro del agua $\rightarrow$ *presión*

  Esta función es **creciente,** pues a más profundidad más presión.



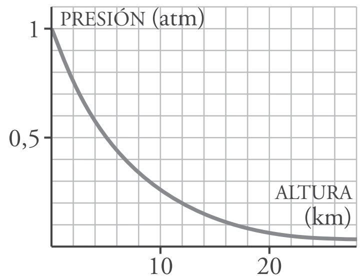


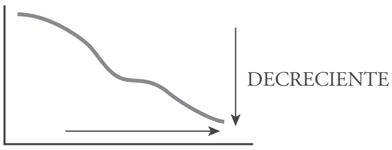
- La presión atmosférica disminuye al aumentar la altura a la que nos encontremos sobre el nivel del mar, aunque no lo hace uniformemente: al principio disminuye más rápidamente que después.

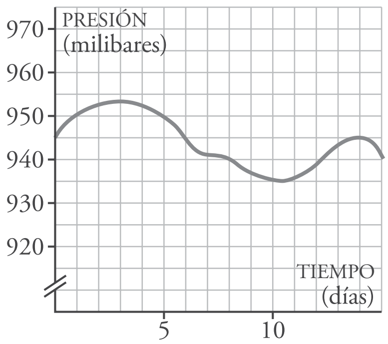
  Esta gráfica corresponde a la función:

  altura sobre el nivel del mar $\rightarrow$ *presión*

  Es una función **decreciente,** pues a más altura menos presión.







- La variación de la presión atmosférica en un lugar es indicio importante de cambios en la meteorología (de ahí lo del *parte meteorológico*, *centro de altas presiones*, *isobaras*, etc.).

  La gráfica de la izquierda nos da la presión atmosférica en un cierto lugar, en cada momento, durante 15 días. Corresponde a la función:

  instante de tiempo $\rightarrow$ *presión*

  La función presenta tramos en los que es **creciente** y tramos en los que es **decreciente.**

Para estudiar las variaciones de una función *hemos de mirar su gráfica de izquierda a derecha*; es decir, hemos de ver cómo varía la y cuando x aumenta.

Una función es **creciente** cuando al aumentar la variable independiente, x, aumenta la variable dependiente, y.

Una función es **decreciente** cuando al aumentar x disminuye y.

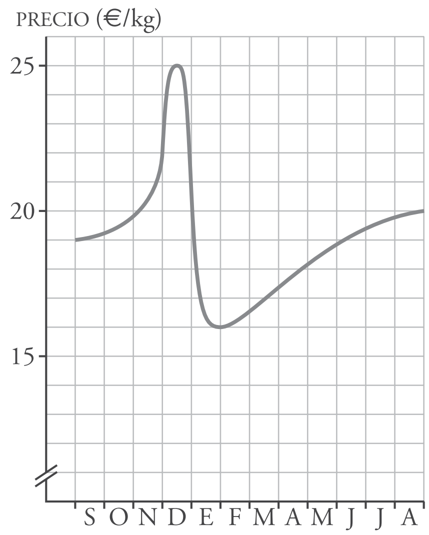
También podemos decir que **un tramo** de una función es **creciente** o **decreciente.**

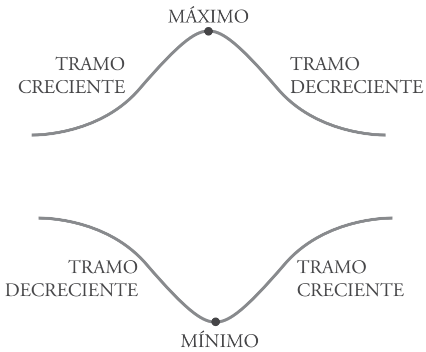
Máximos y mínimos

La gráfica adjunta describe el precio de la carne de cordero lechal a lo largo de un año (de septiembre a final de agosto). Corresponde a la función:

tiempo → *precio*

La gráfica presenta un **tramo creciente** de septiembre a diciembre. A partir de aquí, hay un **tramo decreciente** hasta mediados de enero y vuelve a crecer suavemente hasta el final de agosto. Se aprecian claramente un **máximo** de 25 €/kg a mediados de diciembre y un **mínimo** de 16 €/kg a finales de enero.





Una función tiene un **máximo** en un punto cuando su ordenada es mayor que la ordenada de los puntos que lo rodean.

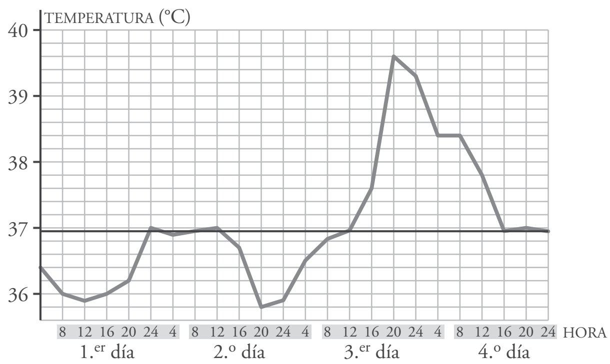
A la izquierda del máximo, la función es creciente, y a su derecha es decreciente.

Una función presenta un **mínimo** en un punto cuando su ordenada es menor que la de los puntos que lo rodean.

A la izquierda del mínimo, la función es decreciente, y a su derecha, creciente.

Actividades

1 La gráfica siguiente refleja la temperatura de un enfermo durante cuatro días:



a) Desde las 12 h a las 24 h del 1.er día hay un *tramo creciente*. Describe otro tramo en el que la función sea creciente.

b) Describe dos tramos en los que la función sea *decreciente*.

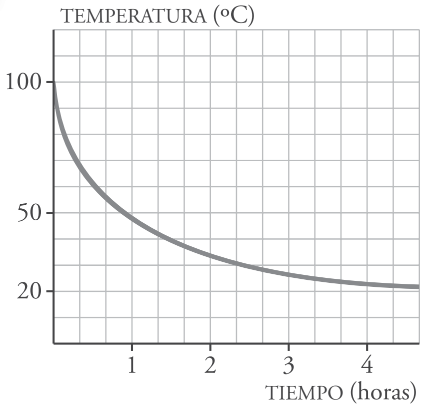
c) Señala el *máximo*, indicando en qué momento se produce y qué temperatura alcanza el enfermo.

d) Señala el *mínimo*, indicando el momento y la temperatura.

2 En unos ejes cartesianos representados sobre papel cuadriculado, representa una función definida en el intervalo 2-10 que sea creciente en todo el tramo.

3 Representa una función definida en el intervalo 0-12 que tenga un mínimo en el punto (3, 2) y un máximo en (7, 8). Describe un tramo creciente y un tramo decreciente.

3 Tendencias de una función



Comportamiento a largo plazo

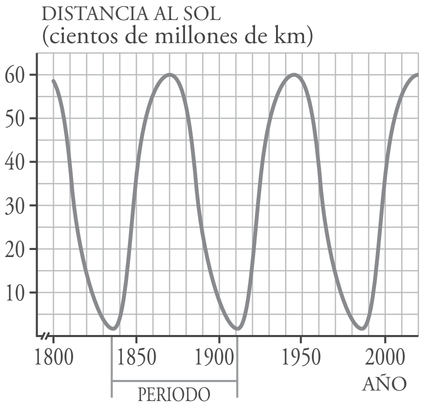
Dejamos enfriar una olla de agua hirviendo en una habitación a 20 °C.

La gráfica de la izquierda representa la función:

tiempo → *temperatura*

Es claro que, al pasar el tiempo, la temperatura del agua se acerca a la temperatura ambiente, 20 °C. Decimos que la temperatura del agua **tiende** a 20 °C con el transcurso del tiempo.

Hay funciones en las que, aunque solo conozcamos un trozo de ellas, podemos predecir cómo se comportarán lejos del intervalo en que han sido estudiadas, porque tienen **ramas** con una **tendencia** muy clara.



Periodicidad

A veces, aunque solo conozcamos un trozo de curva, podemos saber cómo se comporta la función fuera de ese tramo.

La gráfica de la izquierda describe la distancia del cometa *Halley* al Sol a lo largo de los dos últimos siglos.

La función es:

tiempo → *distancia al Sol*

Como la órbita se repite una y otra vez cada 76 años, la función se repite también en ese periodo de tiempo. Es una función **periódica** de **periodo** 76 años.

Funciones periódicas son aquellas cuyo comportamiento se va repitiendo cada vez que la variable independiente recorre un cierto intervalo. A la longitud de ese intervalo se le llama **periodo.**

Una función periódica queda perfectamente determinada conociendo su comportamiento en un tramo correspondiente a un periodo.

Actividades

1 Una madre mira a su hijo dar vueltas en unos caballitos. En cada vuelta, que dura 30 s, se acercan hasta casi tocarse (2 m) y se alejan hasta 24 m.

Representa en unos ejes la función:

tiempo → *distancia*

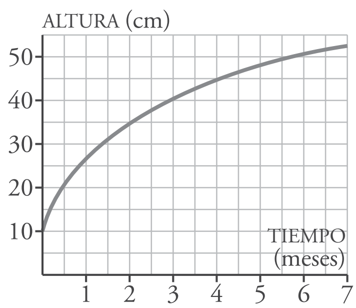
Para ello, toma las escalas siguientes:

— Eje *X*: 1 cuadradito = 5 segundos

— Eje *Y*: 1 cuadradito = 2 metros

Representa un intervalo correspondiente a 4 vueltas.

2 La gráfica representa el tamaño de una planta con el paso del tiempo.

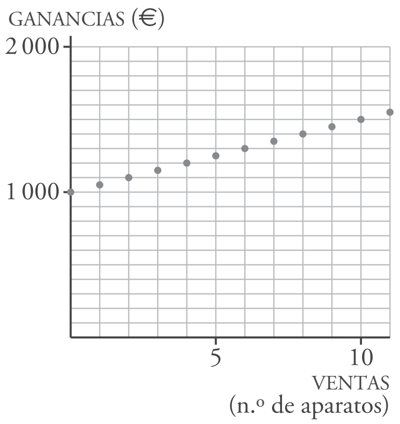


a) ¿Cuánto medía cuando se plantó?

b) ¿Es la función creciente? Explica por qué es lógico que lo sea.

c) ¿Se aprecia alguna tendencia en la función?

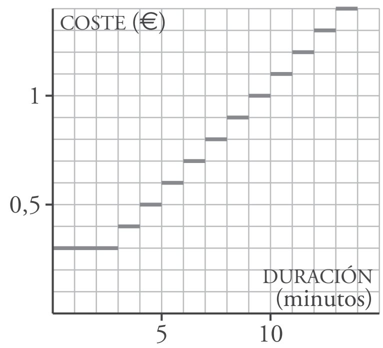
4 Discontinuidades. Continuidad



- Un representante de ordenadores recibe cada mes 1 000 € fijos más 50 € por cada aparato vendido. A la izquierda tienes la gráfica de la función:

aparatos vendidos → *ganancias mensuales*

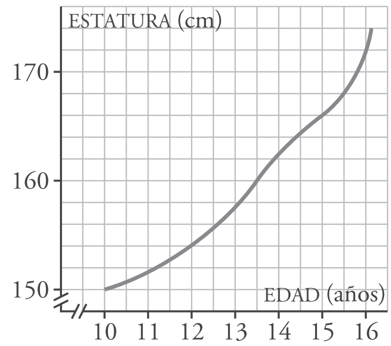
La variable independiente solo tiene sentido para los valores 0, 1, 2, 3, 4, … y no para los intermedios, pues no se puede vender un número fraccionario de ordenadores. La gráfica es **discontinua** porque la variable independiente se mueve a saltos.



- Cierta llamada telefónica cuesta 30 céntimos de euro para comenzar, y con ellos se puede hablar durante 3 minutos. A partir de ese momento, cada minuto o fracción cuesta 10 céntimos. Esta es la función:

duración → *coste*

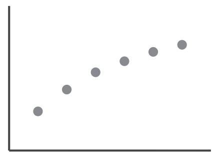
Los saltos bruscos que presenta la gráfica se llaman **discontinuidades** de la función.

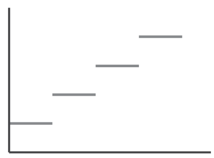


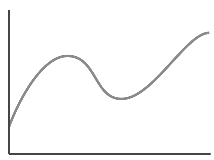
- Esta gráfica describe la estatura de un chico entre los 10 y los 16 años. Se trata de la función:

edad → *estatura*

La variable de la estatura es suave, sin saltos bruscos. Es una función **continua.**


Función discontinua


Función discontinua


Función continua

Una función se llama **continua** cuando no presenta discontinuidad de ningún tipo. Por tanto, su gráfica se puede trazar sin levantar el lápiz del papel (tercera gráfica de la izquierda).

También se puede decir de una función que es **continua en un tramo,** aunque tenga discontinuidades en otros lugares.

Actividades

1 El precio de una fotocopia es 0,10 €. Representa esta función:

número de fotocopias → *coste*

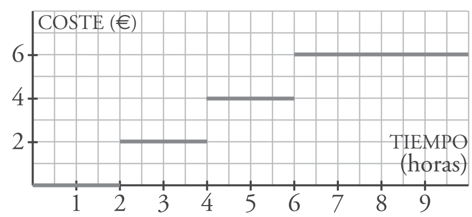
¿Se pueden unir los puntos de la gráfica?

2 La gráfica de la derecha muestra las tarifas del aparcamiento de un centro comercial.

a) ¿Cuánto pagamos si estamos 1 h?

b) ¿Y si estamos 2 h y 30 min? ¿Y si estamos 8 h?

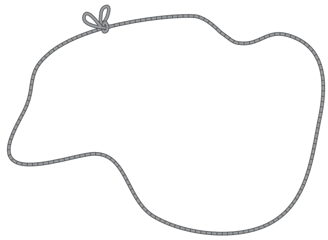
c) ¿Es una función continua?

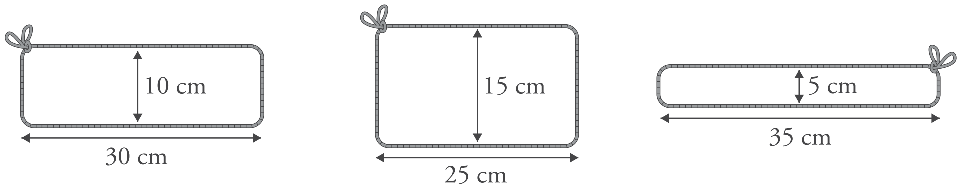


5 Expresión analítica de una función

Casi todas las funciones que hemos visto hasta ahora nos han venido dadas, o bien por su *gráfica*, o bien por un *enunciado* que, de forma aproximada, nos ha permitido conocer algunas características del fenómeno descrito. Hay, sin embargo, una gran cantidad de funciones que pueden darse mediante una *fórmula* con la que se relacionan de forma exacta las dos variables. Veamos un ejemplo.

Disponemos de un hilo de 80 cm unido por sus extremos y deseamos formar con él rectángulos distintos, como se indica en las figuras:

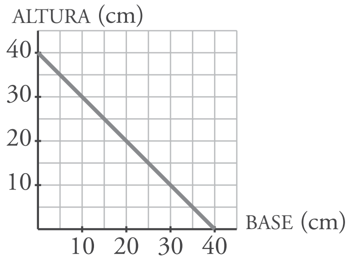




La altura de estos rectángulos dependerá de la medida de su base, x. Por ejemplo, si la base es $x = 30$ cm, la altura será $40 - 30 = 10$ cm.

Esta tabla muestra la altura del rectángulo para distintos valores de la base:

BASE (cm)	10	15	20	35	x
ALTURA (cm)	30	25	20	5	$40 - x$



La función que relaciona la medida de la base, x, con la altura del rectángulo viene dada por la fórmula: $y = 40 - x$, con $0 < x < 40$, que es su **expresión analítica.** Para cada valor de x comprendido entre 0 y 40, obtenemos un valor de y.

La **expresión analítica de una función** es una ecuación que relaciona algebraicamente las dos variables que intervienen.

Actividades

1 Queremos construir rectángulos de área 12 m^2. El área dependerá de las medidas que tengan la base, x, y altura, y. Por ejemplo, si la base es $x = 6$ cm, la altura será $y = \frac{6}{2} = 2$ cm.

a) Completa la tabla que da la medida de la altura, y, para distintos valores de la base, x.

BASE x	1	1,5	2	3	4	5	6
ALTURA y	12	8					

b) ¿Cuál de las tres expresiones siguientes corresponde a esta función?

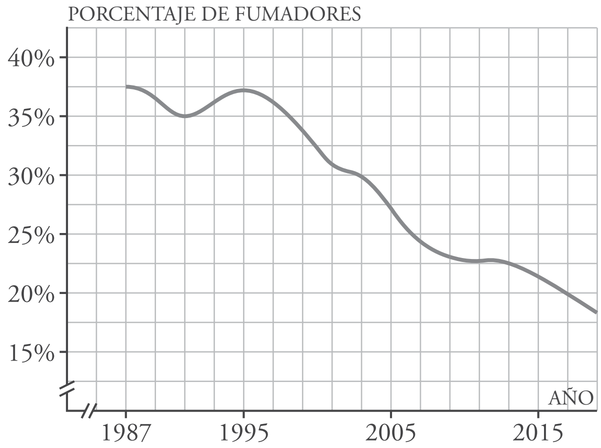
$y = \frac{x}{12}$ $\qquad y = \frac{12}{x}$ $\qquad y = 12x$

Ejercicios y problemas

Practica

Interpretación de gráficas

1 ▼▽▽ En la gráfica siguiente viene representado el porcentaje de fumadores en España en los últimos años (parte roja), así como la previsión de cómo se supone que irá evolucionando dicho porcentaje en los años próximos (parte azul):



a) ¿Cuáles son las dos variables que se relacionan?

b) ¿Entre qué años se ha hecho el estudio? ¿En cuáles hay solamente previsiones y no datos reales?

c) ¿Cuál es la escala que se ha considerado en el eje X? ¿Y en el eje Y?

d) Observa que tanto en el eje X como en el eje Y aparecen dos rayitas señaladas. ¿Cuál crees que es su significado?

e) ¿Cuál era el porcentaje de fumadores en el año 1987? ¿Y en 1991? ¿Y en 1995? ¿Y en 2005?

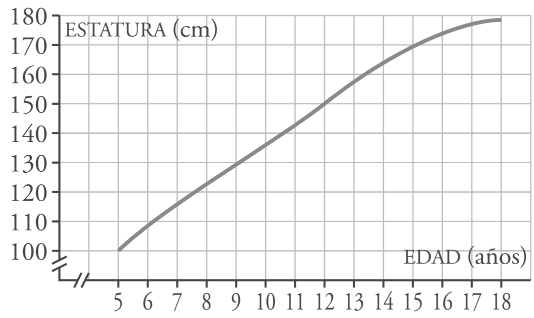
f) ¿En qué años se dio el porcentaje más alto de fumadores?

g) ¿Cuál es el porcentaje de fumadores previsto (aproximadamente) para el año 2015? ¿Y para 2017?

h) Si las previsiones se cumplieran respecto al porcentaje de fumadores, ¿este irá aumentando o disminuyendo en los próximos años?

i) Haz una descripción global de la gráfica, indicando el dominio, el crecimiento y el decrecimiento de la función, y sus máximos y mínimos.

2 ▼▽▽ La estatura de Óscar entre los 5 y los 18 años viene representada en esta gráfica:



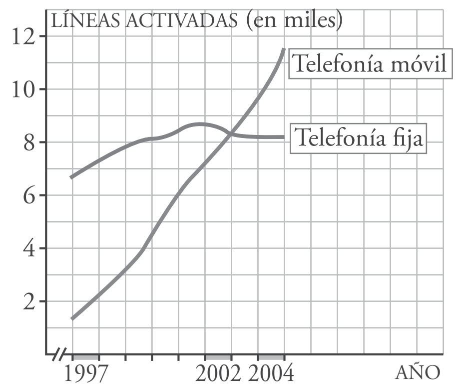
a) ¿Cuáles son las variables que intervienen?

b) ¿Qué escala se utiliza para cada variable?

c) ¿Cuántos centímetros creció entre los 5 y los 8 años? ¿Y entre los 15 y los 18? ¿En cuál de estos dos intervalos el crecimiento fue mayor?

d) Observa que la gráfica al final crece más lentamente. ¿Crees que aumentará mucho más la estatura o que se estabilizará en torno a algún valor?

3 ▼▽▽ El uso de teléfonos móviles ha aumentado mucho en los últimos años. Sin embargo, la telefonía fija no ha sufrido grandes variaciones. En esta gráfica vemos qué ha ocurrido en una gran ciudad:



a) ¿Cuántas líneas de telefonía fija y móvil había activadas, aproximadamente, a principios de 1997? ¿Y a principios de 2002? ¿Y a finales de 2004?

b) ¿En qué momento (aproximado) había igual número de líneas de teléfonos fijos que de móviles?

c) ¿Cuál ha sido el aumento de líneas en la telefonía fija de principios de 1997 a finales de 2004? ¿Y en la móvil? ¿En cuál ha sido mayor el aumento?

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

4 ▼▽▽ Un tiovivo acelera durante 2 minutos hasta alcanzar una velocidad de 10 km/h. Permanece a esta velocidad durante 7 min y decelera hasta parar en 1 minuto. Está parado 5 minutos y comienza otra vuelta. Dibuja la gráfica *tiempo-velocidad*.

5 ▼▼▽ Una libra (unidad de peso) equivale a 0,45 kg.

a) Completa la tabla siguiente:

x (LIBRAS)	0,5	1	1,5	2	3	4	x
y (KILOS)		0,45					

b) Represente la función *libras-kilogramos*.

c) Obtén su expresión analítica.

6 ▼▼▽ Luis ha tardado 2 horas en llegar desde su casa a una ciudad situada a 150 km de distancia, en la que tenía que asistir a una reunión. Ha permanecido 2 horas en la ciudad y ha vuelto a su casa, invirtiendo 2 horas y media en el viaje de vuelta.

a) Representa la gráfica *tiempo-distancia* a su casa.

b) Si suponemos que la velocidad es constante en el viaje de ida, ¿cuál sería esa velocidad?

c) Si también suponemos que la velocidad es constante en el viaje de vuelta, ¿cuál sería esa velocidad?

7 ▼▼▽ La tabla recoge la medida del perímetro del cráneo de un niño en los primeros meses de vida:

TIEMPO (meses)	0	3	9	15	21	27	33
PERÍMETRO (cm)	34	40	44	46	47	48	49

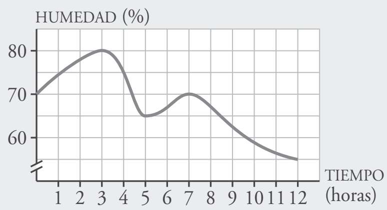
a) Haz una gráfica relacionando estas dos variables. Elige una escala adecuada.

b) ¿Qué tendencia se observa en el crecimiento del cráneo de un niño?

c) ¿Cuánto crees que medirá el perímetro craneal de un niño de 3 años?

Autoevaluación

1 Esta gráfica muestra la humedad relativa del aire en una ciudad.



a) ¿Cuáles son las variables dependiente e independiente? ¿Qué escalas se utilizan?

b) ¿Durante cuánto tiempo se midió la humedad?

c) Indica la humedad relativa a las 2 h, a las 5 h y a las 7 h. ¿Cuándo fue superior al 75%?

d) Indica cuándo crece y cuándo decrece, y los valores máximo y mínimo que alcanza.

2 Desconectamos una plancha que está a 120 °C. Su temperatura desciende hasta 60 °C en los dos primeros minutos, y después lo hace más lentamente hasta alcanzar la temperatura ambiente, 20 °C, en 10 min.

a) Representa la función *tiempo* → *temperatura*.

b) ¿Aprecias alguna tendencia en esa función?

3 Esta tabla indica cómo varía la cantidad de agua de un depósito de 30 litros cuando se abre un grifo:

TIEMPO (min)	0	1	2	3	4
VOLUMEN (l)	0	5	10	15	20

a) Representa la función *tiempo* → *volumen*.

b) ¿Cuál de estas tres expresiones corresponde a esta función?

$y = 2x$ $\qquad$ $y = 5x$ $\qquad$ $y = 5/x$

4 Un depósito de 5 litros de agua se llena en 2 minutos, permanece lleno 1 minuto y se vacía en otro minuto. Sigue vacío durante 2 minutos y vuelve a repetirse el proceso de llenado y vaciado.

a) Representa la función *tiempo* → *cantidad de agua*.

b) Explica si es una función periódica.

c) Durante el primer cuarto de hora, ¿en qué periodos de tiempo está lleno?

8 Funciones lineales

René Descartes (1596-1650), filósofo y matemático francés, influyó notablemente en el pensamiento de su época y en el de siglos posteriores.

Durante toda su vida tuvo una salud delicada. Por eso, en el colegio donde estudió interno se le permitió estudiar acostado. Esto se convirtió en hábito, de modo que una gran parte de su obra la elucubró e incluso la elaboró en la cama. Y en la cama se le ocurrió su sistema de coordenadas: un día se entretuvo siguiendo el vuelo de una mosca e imaginó cómo se designaría su posición en cada instante mediante la distancia a la que se encontrara de cada pared.

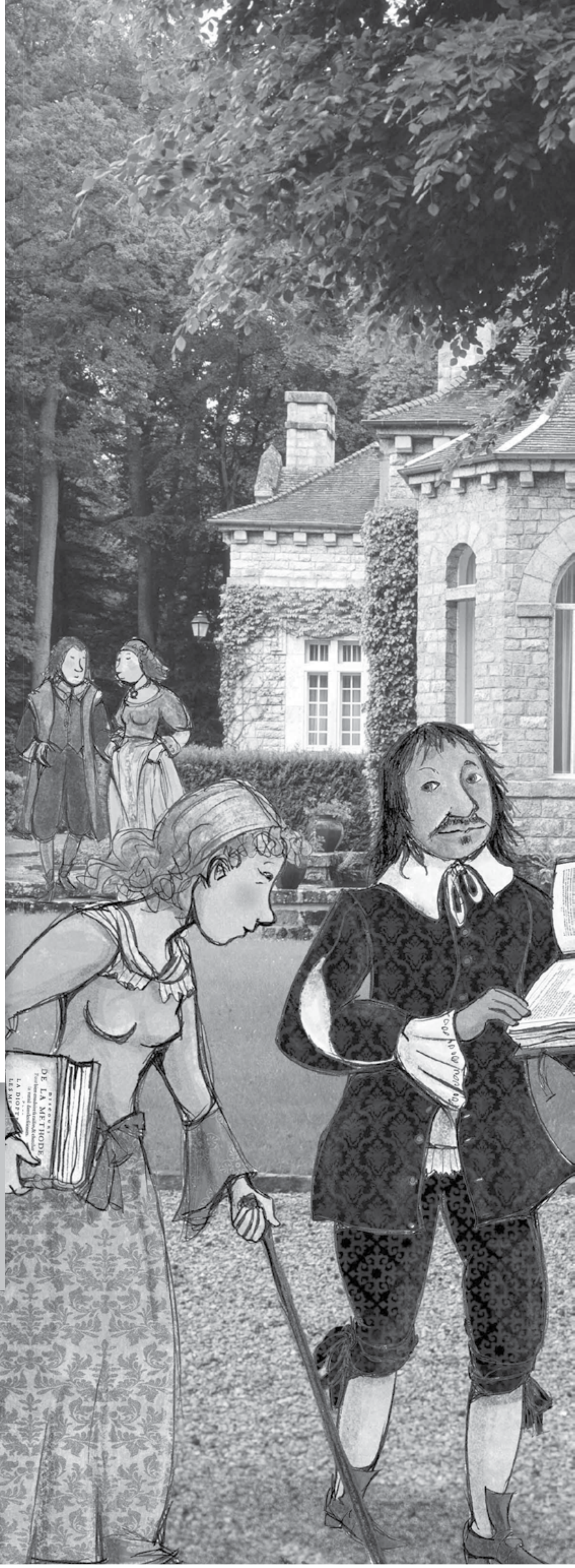
Aunque esta idea no era del todo original, pues ya para entonces se manejaban las coordenadas geográficas, *longitud* y *latitud*, la invención de Descartes le permitió expresar las curvas mediante ecuaciones que ligan sus coordenadas. Esta ha sido una de las mayores aportaciones al mundo de la ciencia.

Como en aquella época los científicos escribían en latín, Descartes era conocido por la forma latina de su nombre: *Cartesius*. De ahí vienen las expresiones *pensamiento cartesiano* o *coordenadas cartesianas*.

Las funciones lineales, que veremos en esta unidad, responden a ecuaciones de primer grado y se representan por una recta.

DEBERÁS RECORDAR

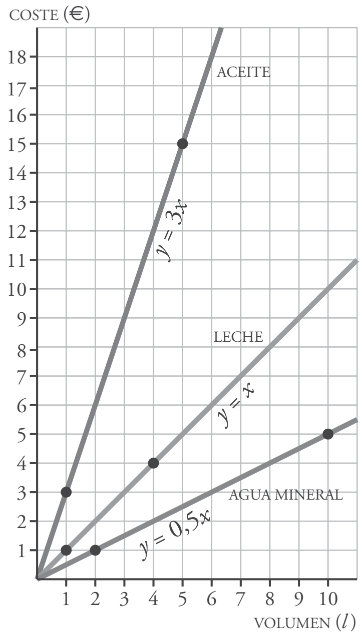
- Cuándo dos magnitudes son proporcionales.
- Cómo se representan las relaciones de proporcionalidad.



1 Función de proporcionalidad $y = mx$

Vamos a estudiar funciones en las que las dos variables son proporcionales. Por ejemplo: *cantidad comprada de un producto* $\rightarrow$ *coste de la compra*

volumen de una sustancia $\rightarrow$ *peso de la sustancia*



Son funciones que se representan mediante rectas y tienen una expresión analítica similar: $y = mx$.

Analicemos tres funciones que responden al modelo: *volumen* $\rightarrow$ *coste*

LECHE: Su precio es de 1 €/*l*.

$1\ l \rightarrow 1$ € Pasa por el punto (1, 1).
$4\ l \rightarrow 4$ € Pasa por el punto (4, 4).
La y (coste en €) es igual a la x (volumen en *l*).

Función: $x \rightarrow x$
Ecuación: $y = x$
Pendiente: $m = 1$

ACEITE: Su precio es de 3 €/*l*.

$1\ l \rightarrow 3$ € Pasa por el punto (1, 3).
$5\ l \rightarrow 15$ € Pasa por el punto (5, 15).
y (coste) es igual al triple de x (volumen).

Función: $x \rightarrow 3x$
Ecuación: $y = 3x$
Pendiente: $m = 3$

AGUA MINERAL: Su precio es de 0,5 €/*l*.

$2\ l \rightarrow 1$ € Pasa por el punto (2, 1).
$10\ l \rightarrow 5$ € Pasa por el punto (10, 5).
y (coste) es igual a la mitad de x (volumen).

Función: $x \rightarrow \frac{1}{2}x$
Ecuación: $y = \frac{1}{2}x$
Pendiente: $m = \frac{1}{2}$

Importante

La pendiente de una recta $y = mx$ es el coeficiente de la x cuando está despejada la y.

La **función de proporcionalidad** tiene por ecuación $y = mx$.

Se representa mediante **una recta** que pasa por (0, 0).

La constante de proporcionalidad, m (que puede ser positiva o negativa), se llama **pendiente** de la recta y tiene que ver con su inclinación.

Actividades

1 El precio de un kilogramo de arroz es de 1,5 €. Representa, como en los ejemplos anteriores, la función *peso* $\rightarrow$ *coste*.

2 Un litro de aceite pesa 0,9 kg. Representa la función *volumen de aceite* $\rightarrow$ *peso del aceite*.

3 ¿Cuál es la pendiente de cada recta?

a) $y = 2x$ b) $y = 1,5x$

c) $y = 0,9x$ d) $y = -\frac{3}{4}x$

e) $y = -4x$ f) $y - 2x = 0$

Representación de la gráfica a partir de su ecuación

Para representar una función de proporcionalidad, $y = mx$, tendremos en cuenta lo siguiente:

— **Es una recta,** pues a variaciones iguales de x corresponden variaciones iguales de y.

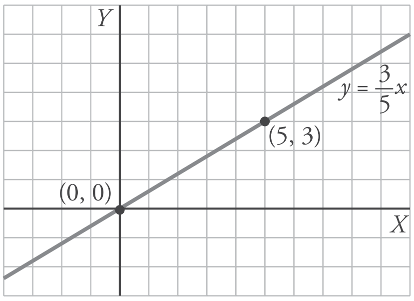
— **Pasa por el punto (0, 0),** pues si $x = 0$, entonces $y = m \cdot 0 = 0$.

Por tanto, para representarla solo falta **obtener otro punto.** Esto se consigue dándole un valor a x y obteniendo el correspondiente valor de y.

Por ejemplo, para representar $y = \frac{3}{5}x$, obtenemos el punto correspondiente a $x = 5$:

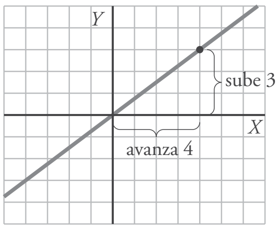
$$\text{Si } x = 5, \text{ entonces } y = \frac{3}{5} \cdot 5 = 3$$

Es una recta que pasa por (0, 0) y (5, 3).

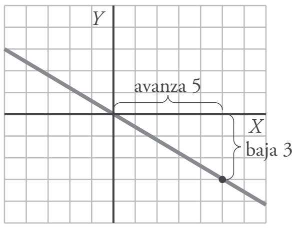


Ecuación a partir de la gráfica. Obtención de la pendiente

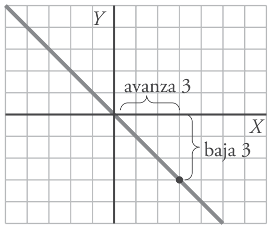
Si la gráfica de una función es una recta que pasa por el origen, entonces es una función de proporcionalidad, $y = mx$. Para determinar su ecuación, solo falta averiguar el valor de m (la pendiente).



Pendiente $m = \frac{3}{4}$



Pendiente $m = -\frac{3}{5}$



Pendiente $m = \frac{-3}{3} = -1$

La **pendiente** (coeficiente de la x) es la variación (positiva o negativa) que experimenta la y cuando la x aumenta una unidad. Para hallarla, se divide la variación de la y por la variación de la x entre dos de sus puntos.

Entrénate

1 Completa las tablas, representa los puntos y traza las rectas que determinan.

a) $y = \frac{1}{2}x$

x	–4	–2	0	4	6
y					

b) $y = \frac{3}{2}x$

x	–4	–2	0	2	4
y					

c) $y = -3x$

x	–2	–1	0	1	2
y					

d) $y = -\frac{2}{3}x$

x	–6	–3	0	3	6
y					

Actividades

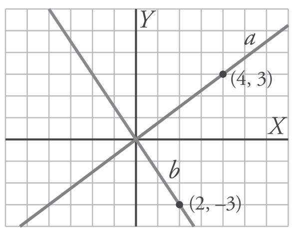
2 Representa las funciones siguientes:

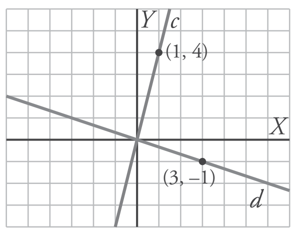
a) $y = x$ b) $y = 2x$ c) $y = -x$

d) $y = -2x$ e) $y = \frac{1}{3}x$ f) $y = -\frac{1}{3}x$

g) $y = \frac{3}{2}x$ h) $y = \frac{-3}{2}x$ i) $y = \frac{2}{3}x$

3 Halla las ecuaciones de las rectas siguientes:





2 La función $y = mx + n$

Ten en cuenta

En lugar de utilizar las variables x e y, podríamos utilizar otras. Por ejemplo:

tiempo: t; coste: c

La ecuación quedaría así:

$$c = 3 + 0{,}5t$$

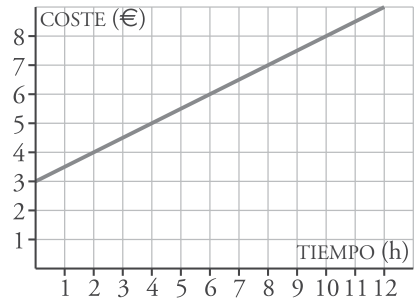
El uso de una pista de patinaje cuesta 3 € de entrada más 0,5 € por cada hora.

En este enunciado vemos que, una vez pagada la cantidad inicial, 3 €, el coste añadido es proporcional al tiempo que estamos sobre la pista.

La función *tiempo* → *coste* tiene por ecuación $y = 3 + 0{,}5x$.

Su gráfica es una recta cuya pendiente es 0,5 (lo que aumenta el coste cuando el tiempo aumenta 1).

La cantidad inicial, 3 €, es el punto del eje Y del cual arranca la función.



La ecuación $y = mx + n$ se representa por una recta con estas características:

— Su **pendiente** es m (la pendiente es el coeficiente de la x en la ecuación $y = mx + n$). Representa la variación de y por cada unidad de x.

— Su **ordenada en el origen** es n. Es decir, si $x = 0$, entonces $y = n$. Por tanto, corta al eje Y en el punto $(0, n)$.

Cuando la pendiente es $m = 0$, la recta $y = n$ es paralela al eje X. Se llama **función constante** porque y siempre vale lo mismo (n) aunque varíe la x.

Todas estas funciones, que se representan mediante rectas, se llaman **funciones lineales.**

Actividades

1 Representa las rectas de ecuaciones:

a) $y = 2x - 3$ b) $y = 7 - 4x$ c) $y = x - 1$

d) $y = -\frac{3}{4}x + 2$ e) $y = 5$ f) $y = -2$

2 Completa las tablas y representa estas rectas. Determina sus pendientes y sus ordenadas en el origen.

a) $y = 3x + 2$

x	–2	–1	0	1	2
y					

b) $y = 2 - 2x$

x	–2	–1	0	1	2
y					

c) $y = \frac{1}{2}x - 1$

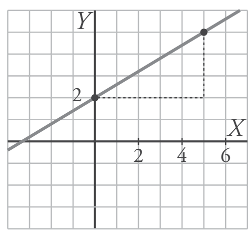
x	–4	–2	0	2	4
y					

d) $y = 1 - \frac{1}{4}x$

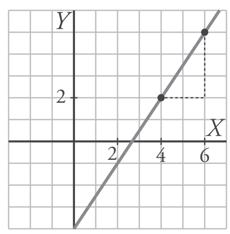
x	–8	–4	0	4	8
y					

3 Escribe la pendiente, la ordenada en el origen y la ecuación de cada una de estas rectas:

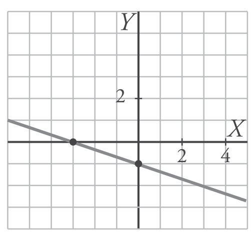
a)



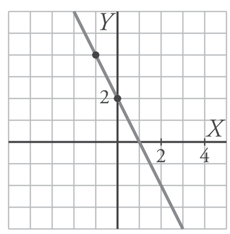
b)



c)



d)



3 Recta de la que se conoce un punto y la pendiente

Supongamos que de una recta conocemos un punto (x_0, y_0) y su pendiente, m. Entonces, su ecuación puede ponerse así:

$$y = y_0 + m(x - x_0) \qquad \text{ECUACIÓN PUNTO-PENDIENTE}$$

- La recta que pasa por $(4, 3)$ y tiene pendiente $m = 2$, se escribe así:

$$y = 3 + 2(x - 4)$$

Esta ecuación puede simplificarse hasta llegar a la forma $y = mx + n$:

$$y = 3 + 2(x - 4) \rightarrow y = 3 + 2x - 8 \rightarrow y = 2x - 5$$

Ejercicios resueltos

1. Escribir las ecuaciones de las rectas siguientes dadas por un punto y su pendiente:

a) $P(3, 7)$ $\quad m = 4$

b) $P(-2, 5)$ $\quad m = -\frac{2}{3}$

c) $P(4, -1)$ $\quad m = 1{,}2$

d) $P(-3, 0)$ $\quad m = \frac{1}{5}$

1. Obtenemos, para cada una de las rectas, su ecuación punto-pendiente.

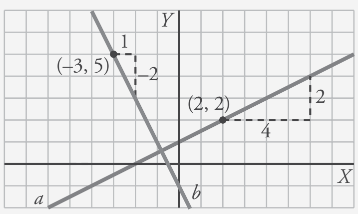
a) ECUACIÓN: $y = 7 + 4(x - 3)$ $\qquad$ Es decir, $y = 4x - 5$

b) ECUACIÓN: $y = 5 - \frac{2}{3}(x + 2)$ $\qquad$ Es decir, $y = -\frac{2}{3}x + \frac{11}{3}$

c) ECUACIÓN: $y = -1 + 1{,}2(x - 4)$ $\qquad$ Es decir, $y = 1{,}2x - 5{,}8$

d) ECUACIÓN: $y = \frac{1}{5}(x + 3)$ $\qquad$ Es decir, $y = \frac{1}{5}x + \frac{3}{5}$

2. Escribir la ecuación de las rectas *a* y *b*.



2. a) La recta a pasa por (2, 2). Su pendiente es $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

ECUACIÓN: $y = 2 + \frac{1}{2}(x - 2)$ $\qquad$ Es decir, $y = \frac{1}{2}x + 1$

b) La recta b pasa por (–3, 5). Su pendiente es $\frac{-2}{1} = -2$.

ECUACIÓN: $y = 5 - 2(x + 3)$ $\qquad$ Es decir, $y = -2x - 1$

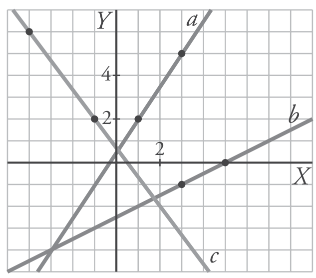
Actividades

1 Escribe, en cada caso, la ecuación de la recta que pasa por P y tiene pendiente m:

a) $P(4, -3)$, $m = 4$ $\qquad$ b) $P(0, 2)$, $m = -\frac{1}{2}$

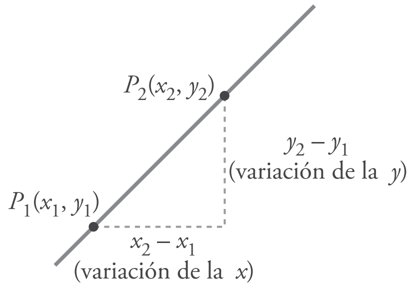
c) $P(-3, 1)$, $m = \frac{5}{4}$ $\qquad$ d) $P(0, 0)$, $m = -1$

2 Determina la ecuación de las siguientes rectas:



4 Ecuación de la recta que pasa por dos puntos

Si de una recta conocemos dos puntos, podemos obtener su pendiente a partir de ellos y, después, con la pendiente y uno de los puntos, hallar su ecuación tal como hemos visto en la página anterior.



Obtención de la pendiente conociendo dos puntos

Para hallar la pendiente de la recta que pasa por dos puntos conocidos, se puede proceder gráficamente, midiendo (o contando cuadraditos) la variación de la x y la variación de la y.

Pero también se obtiene (más rápida y eficazmente) mediante este cálculo:

$$\left.\begin{array}{l} P_1(x_1, y_1) \\ P_2(x_2, y_2) \end{array}\right\} \quad m = \frac{\text{Variación de la } y}{\text{Variación de la } x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

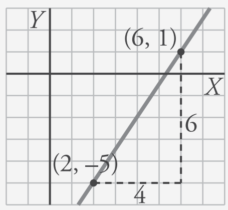
Ejercicios resueltos

1. Hallar las pendientes de las siguientes rectas dadas por dos puntos:

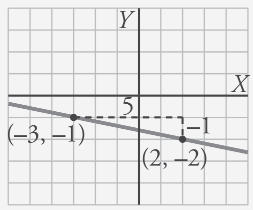
a) (2, –5), (6, 1)

b) (–3, –1), (2, –2)

1. GRÁFICAMENTE:

a) 

$$m = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

b) 

$$m = -\frac{1}{5}$$

OPERANDO:

a) $m = \dfrac{1 - (-5)}{6 - 2} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$

b) $m = \dfrac{-2 - (-1)}{2 - (-3)} = -\dfrac{1}{5}$

2. Obtener la ecuación de la recta que pasa por P y Q:

a) $P(5, 3)$, $Q(-3, 4)$

b) $P(-3, 5)$, $Q(-2, 3)$

2. a) $m = \dfrac{4 - 3}{-3 - 5} = \dfrac{1}{-8} = -\dfrac{1}{8}$ ECUACIÓN: $y = 3 - \dfrac{1}{8}(x - 5)$

b) $m = \dfrac{3 - 5}{-2 - (-3)} = \dfrac{-2}{1} = -2$ ECUACIÓN: $y = 5 - 2(x + 3)$

Actividades

1 Calcula, en cada caso, la pendiente de la recta que pasa por los puntos P y Q, y escribe la ecuación de dicha recta usando el punto P.

a) $P(4, 6)$, $Q(3, 3)$ b) $P(2, 1)$, $Q(-4, 4)$

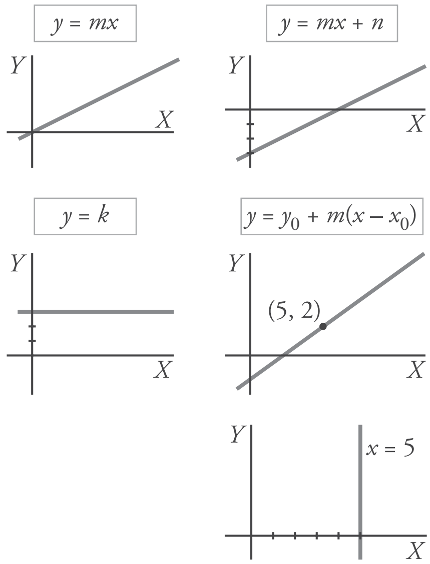
c) $P(2, 4)$, $Q(-3, -1)$ d) $P(-1, -1)$, $Q(2, -3)$

2 Halla, en cada caso, la ecuación de la recta que pasa por los puntos P y Q:

a) $P(2, 5)$, $Q(-3, 6)$ b) $P(3, -4)$, $Q(-2, -1)$

c) $P(-1, 0)$, $Q(5, 5)$ d) $P(-7, 1)$, $Q(3, 4)$

5 Forma general de la ecuación de una recta



Hasta ahora hemos visto varias formas de dar la ecuación de una recta. Veamos que, operando, todas ellas pueden ponerse en la forma $ax + by = c$.

TIPO DE FUNCIÓN	EJEMPLO	TRANSFORMACIÓN $ax + by = c$
$y = mx$	$y = 2x$	$\mathbf{2x - y = 0;}$ $a = 2,\ b = -1,\ c = 0$
$y = mx + n$	$y = 2x - 3$	$\mathbf{2x - y = 3;}$ $a = 2,\ b = -1,\ c = 3$
$y = k$ (paralela al eje X)	$y = 3$	$\mathbf{0x + y = 3;}$ $a = 0,\ b = 1,\ c = 3$
$y = y_0 + m(x - x_0)$	$y = 2 + 3(x - 5)$	$\mathbf{3x - y = 13;}$ $a = 3,\ b = -1,\ c = 13$

También adoptan esta expresión las rectas paralelas al eje Y: $x = k$. Pero **estas rectas no son gráficas de funciones,** pues a un valor de x le corresponden muchos (infinitos) valores de y.

Operando, cualquier ecuación de una recta puede ponerse en la forma $ax + by = c$. Por eso se llama **forma general** de la ecuación de la recta.

Cuando $a \neq 0$ y $b = 0$, la recta es paralela al eje Y y no corresponde a la gráfica de una función.

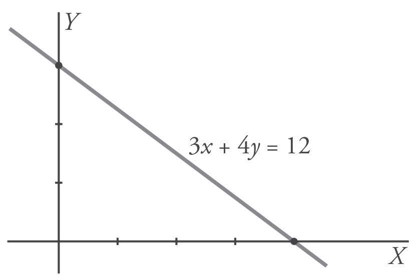
Cuando $b \neq 0$, en todos los casos, la recta corresponde a una función. Todas ellas se llaman **funciones lineales.**

Para representar una recta dada en forma general, podemos:

— Obtener dos puntos suyos, dando valores a las variables.

— Despejar y para obtener una expresión de la forma $y = mx + n$.

Ejercicio resuelto



Representar $3x + 4y = 12$. ¿Cuál es su pendiente?

- Dando valores: $x = 0 \Rightarrow y = 3$. Pasa por $(0, 3)$.
  $x = 4 \Rightarrow y = 0$. Pasa por $(4, 0)$.
- Despejando la y: $y = -\frac{3}{4}x + 3$

Mediante cualquiera de las dos informaciones podemos representar la recta.

La pendiente es $-\frac{3}{4}$. Es el coeficiente de la x teniendo despejada la y.

Actividades

1 Representa estas rectas:

a) $2x + 5y = 0$ b) $x - 3y = 6$ c) $3x = 12$ d) $y = 5 - \frac{5}{6}(x + 4)$

6 Aplicaciones de la función lineal

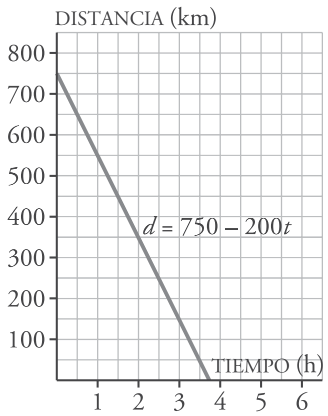
Escalas en los ejes

Las funciones extraídas de situaciones cotidianas requieren la utilización de números grandes o muy pequeños. En tales casos, para que la representación gráfica sea razonable, conviene elegir escalas adecuadas en los ejes coordenados.

Las funciones lineales, como hemos visto, sirven para describir multitud de fenómenos en los que se relacionan dos magnitudes que varían proporcionalmente.

Por ejemplo: *volumen de un alimento* → *coste de este*
volumen de una cierta sustancia → *peso de esta*
tiempo de movimiento uniforme → *distancia recorrida*

Todas ellas se representan mediante rectas sobre las cuales se aprecia cómo varía una magnitud respecto a la otra.



Problemas resueltos

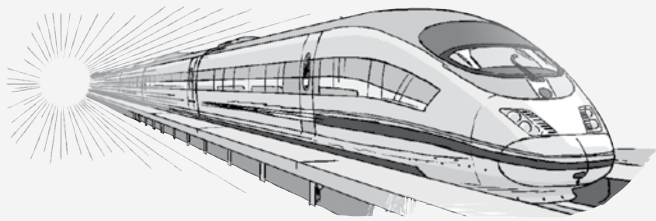
1. Un tren AVE acaba de salir de una ciudad situada a 750 km de la nuestra y viene hacia aquí a 200 km/h. Expresar mediante una ecuación la distancia a la que se encontrará de nosotros dentro de t horas.

El espacio recorrido por el tren en t horas es $200t$. Por tanto, la distancia a la que está de nosotros se va acortando en esa cantidad:

$$d = 750 - 200t$$

Esta es la ecuación de la función que relaciona el tiempo transcurrido con la distancia a la que se encuentra el tren de nosotros.

(Observa que en la representación gráfica del margen hemos tomado en el eje Y la escala siguiente: 1 cuadradito = 50 km).



Actividades

1 El coste de las llamadas provinciales en cierta compañía telefónica es de 0,30 € de establecimiento de llamada más 0,05 €/min.

Dibuja la gráfica de la función que expresa el coste de las llamadas en euros al cabo de x minutos.

2 Sara, vendedora de coches, tiene un sueldo fijo de 1 000 € todos los meses más una comisión por cada coche que venda de 250 €.

Halla la función que expresa el sueldo de Sara un mes que haya vendido x coches y dibuja su gráfica.

3 El coste de las llamadas a móviles en cierta compañía telefónica es de 0,80 € de establecimiento de llamada más 0,50 €/min.

Dibuja la gráfica de la función que expresa el coste de las llamadas en euros al cabo de x minutos.

4 La paga que le dan a Raquel sus padres es de 5 € al mes más 0,50 € cada día que haga la cama.

Halla la función que expresa el dinero que recibe Raquel al final del mes habiendo hecho la cama x días y dibuja su gráfica.

7 Estudio conjunto de dos funciones

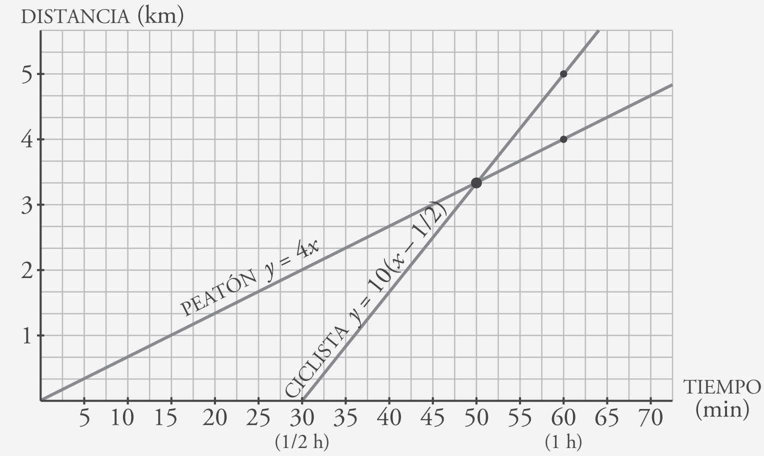
Para estudiar conjuntamente dos funciones lineales, representamos las dos rectas sobre los mismos ejes. Las coordenadas del punto de corte se hallan resolviendo el sistema formado por ambas ecuaciones. Este punto tiene gran importancia en la interpretación simultánea de las dos funciones.

Problema resuelto

Un peatón sale a dar un paseo caminando a 4 km/h. Media hora más tarde sale en su busca un ciclista a 10 km/h. ¿Cuánto tardará en darle alcance?

Espacio recorrido por el peatón (y) en función del tiempo transcurrido (x) en horas. $\Rightarrow y = 4x$

Espacio recorrido por el ciclista (y) en función del tiempo transcurrido (x) en horas. $\Rightarrow y = 10\left(x - \frac{1}{2}\right)$



El encuentro se produce cuando ambos hayan recorrido la misma distancia. Por tanto, el encuentro se produce a los 50 minutos de la salida del peatón.

Para hallar las coordenadas del punto de corte sin recurrir a la representación gráfica, se resuelve el sistema formado por las dos ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} y = 4x \\ y = 10(x - 1/2) \end{array}\right\} \; 4x = 10x - 5 \;\Rightarrow\; 6x = 5 \;\Rightarrow\; x = \frac{5}{6}\text{ h} = 50 \text{ minutos}$$

Actividades

1 Un depósito contiene 240 *l* de agua y recibe el caudal de un grifo que aporta 9 *l* por minuto. Un segundo depósito contiene 300 *l* y recibe un caudal de 4 *l* por minuto. ¿Cuánto tiempo pasará hasta que ambos depósitos tengan la misma cantidad de agua?

2 Un depósito contiene 350 *l* de agua. Se le conecta una bomba que aporta 30 litros de agua cada minuto, a la vez que se abre un desagüe que evacúa 80 litros por minuto. ¿Cuánto tiempo tardará en vaciarse el depósito?

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

Practica

Funciones lineales

1 ▼▽▽ La altura del agua de un depósito varía con el tiempo según la función $a = (5/4)t$ (a en metros, t en segundos).

a) Represéntala. Si la altura del depósito es 5 m, ¿cuál es el dominio de definición de la función?

b) ¿Es una función de proporcionalidad?

c) Di cuál es la pendiente y explica su significado.

2 ▼▽▽ Esta tabla muestra la longitud de la sombra de unos postes en un momento determinado:

ALTURA DEL POSTE (m)	0,5	1	1,5	2	2,5
LONGITUD DE SU SOMBRA (m)	1,25	2,5	3,75	5	6,25

a) Representa la función *longitud del poste* → *longitud de la sombra*.

b) Escribe su ecuación y di cuál es la pendiente.

3 ▼▽▽ Una milla equivale, aproximadamente, a 1,6 km.

a) Haz una tabla para convertir millas en kilómetros.

b) Dibuja la gráfica y escribe su ecuación.

4 ▼▽▽ Una receta para hacer helados recomienda poner 10 g de vainilla por cada 200 cm^3 de leche. Encuentra la relación entre la cantidad de leche y de vainilla, y representa la función.

5 ▼▽▽ El coste de una línea de telefonía móvil para internet es $C = 10 + 1{,}5t$ (C, en €; t, en horas).

a) Representa la función.

b) Di cuál es la pendiente y explica su significado.

6 ▼▽▽ La tarifa de un técnico en reparación de electrodomésticos es de 20 € por desplazamiento y 10 € por hora de trabajo.

a) Representa la función *tiempo* (h) → *importe* (€).

b) Escribe su ecuación.

c) Di cuál es su pendiente y qué significa.

7 ▼▽▽ Esta tabla muestra cómo varía la cantidad de agua de un depósito cuando se abre un desagüe:

t (min)	0	1	2	3	5
V (*l*)	20	18	16	14	10

a) Representa la función *tiempo* → *volumen*.

b) Escribe su ecuación y su dominio de definición.

c) Di cuál es su pendiente y qué significa.

Rectas

8 ▼▽▽ Represente las rectas siguientes:

a) $y = 4x$ b) $y = -\frac{x}{2}$ c) $y = -4$

9 ▼▽▽ Representa las rectas siguientes:

a) $y = -2x + 1$ b) $y = -\frac{x}{2} + 3$ c) $y = -\frac{8}{5}$

10 ▼▽▽ Halla la ecuación de la recta que pasa por el origen de coordenadas y por P en cada caso:

a) $P(12, -3)$ b) $P(-7, -21)$

11 ▼▽▽ Halla la ecuación de la función de proporcionalidad que pasa por el punto $(-5, 25)$.

12 ▼▽▽ Escribe la ecuación de la recta de la que conocemos un punto y la pendiente, en cada caso:

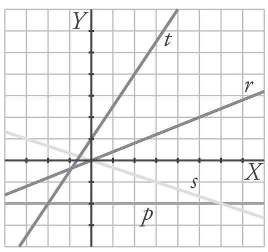
a) $P(-2, 5)$, $m = 3$ b) $P(0, -5)$, $m = -2$

c) $P(0, 0)$, $m = \frac{3}{2}$ d) $P(-2, -4)$, $m = -\frac{2}{3}$

13 ▼▽▽ Halla la pendiente de la recta que pasa por A y B, y escribe su ecuación en cada caso:

a) $A(2, -1)$, $B(3, 4)$ b) $A(-5, 2)$, $B(-3, 1)$

14 ▼▽▽ Asocia cada una de las rectas r, s, t y p a una de las ecuaciones:



a) $y = -\frac{1}{3}x$

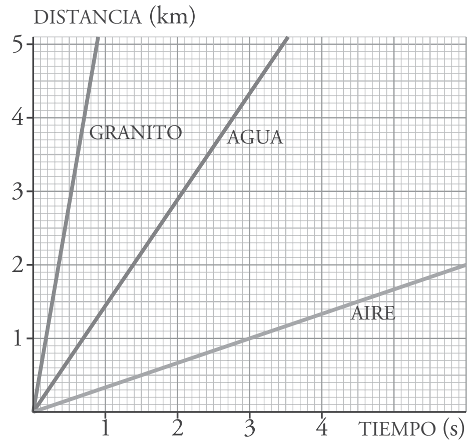
b) $y = \frac{3}{2}x + 1$

c) $y = \frac{2}{5}x$

d) $y = -2$

Aplica lo aprendido

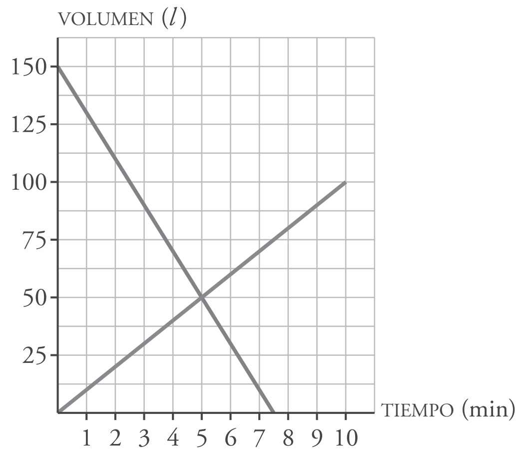
15 ▼▼▽ Las gráficas siguientes muestran la distancia que recorre el sonido en función del tiempo, al propagarse a través de diferentes medios:



a) Halla la pendiente de cada una y explica su significado.

b) Escribe sus ecuaciones.

16 ▼▼▽ Dos depósitos de agua, *A* y *B*, funcionan de la forma siguiente: a medida que *A* se vacía, *B* se va llenando. Estas son las gráficas:

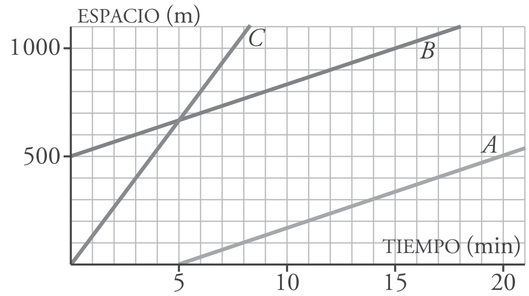


a) Indica cuál es la gráfica de *A*, cuál la de *B* y escribe sus ecuaciones.

b) ¿Cuál es la velocidad de entrada del agua? ¿Y la de salida?

c) ¿En qué momento los dos depósitos tienen igual cantidad de agua?

17 ▼▼▽ Esta es la gráfica del espacio que recorren tres montañeros que van a velocidad constante:



a) ¿Qué velocidad lleva cada uno?

b) Escribe la expresión analítica de estas funciones.

Resuelve problemas

18 ▼▼▽ Israel y Susana, para su próximo viaje a Estados Unidos, han ido a cambiar euros por dólares. A Susana le han cambiado 189 dólares por 150 euros y a Israel le han cambiado 151,2 dólares por 120 euros.

a) Halla la ecuación de la función que nos permite obtener cuántos dólares recibimos según los euros que entreguemos.

b) ¿Cuántos dólares nos darían por 200 euros? ¿Y por 350 euros?

c) ¿Cuántos euros tendríamos si nos hubieran dado 220,5 dólares?

19 ▼▼▽ En una agencia de alquiler de coches cobran, para un modelo concreto, 50 € fijos más 0,20 € por cada kilómetro recorrido.

En otra agencia, por alquilar el mismo modelo, cobran 20 € fijos más 0,30 € por cada kilómetro recorrido.

a) Obtén, en cada uno de los dos casos, la expresión analítica de la función que nos da el gasto total según los kilómetros recorridos.

b) Representa, en los mismos ejes, las dos funciones anteriores. (Elige una escala adecuada, tomando los kilómetros de 100 en 100).

c) Analiza cuál de las dos opciones es más ventajosa, según los kilómetros que vayamos a recorrer.

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

20 ▼▼▽ En el contrato de trabajo, a un vendedor de libros se le ofrecen dos alternativas:

A: Sueldo fijo mensual de 1 000 €.

B: Sueldo fijo mensual de 800 € más el 20% de las ventas que haga.

a) Haz una gráfica que muestre lo que ganaría en un mes según la modalidad del contrato. Toma, como x, las ventas que haga, y como y, el sueldo.

b) Escribe la expresión analítica de cada función.

c) ¿A cuánto tienen que ascender sus ventas mensuales para ganar lo mismo con las dos modalidades del contrato? ¿Qué ganancias obtendrá?

21 ▼▼▽ El precio de un viaje en tren depende de los kilómetros recorridos. Por un trayecto de 140 km pagamos 17 €, y si se recorren 360 km, cuesta 39 €. Escribe y representa la ecuación de la recta que relaciona los kilómetros recorridos, x, con el precio del billete, y.

22 ▼▼▽ En un recibo de la luz aparece la siguiente información:

CONSUMO: 1 400 kWh PRECIO DEL kWh: 0,2 €

a) ¿Cuánto cobrarán por la energía consumida?

b) Haz una gráfica y escribe la ecuación de la relación *consumo-coste*.

Utiliza estas escalas:

Eje horizontal → 1 cuadradito = 100 kWh

Eje vertical → 1 cuadradito = 20 €

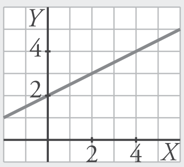
c) Si, además, nos cobran al mes 20 € por el alquiler del equipo, ¿cómo queda la relación *consumo-coste*? Represéntala junto a la anterior y escribe su ecuación.

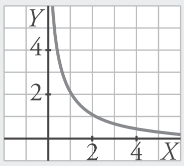
d) ¿Qué transformación sufre el precio si añadimos el 18% de IVA? ¿Cómo se transforma el alquiler del equipo? Representa, junto a las otras, la gráfica de la función resultante y escribe su ecuación.

Autoevaluación

1 Di cuáles de las siguientes fórmulas y gráficas corresponden a funciones lineales:

a) $y = 3 - 2x$ b) $y = \dfrac{x}{5}$ c) $y = 7$ d) $y = x^2 - 1$

e) 

f) 

2 Di cuál es la pendiente de las funciones lineales del ejercicio 1.

3 Halla la ecuación de las siguientes rectas:

r: pasa por $P(-3, 2)$ y su pendiente es 3/2.

s: pasa por los puntos $A(5, 0)$ y $B(2, -3)$.

4 La tarifa de los taxis de una ciudad se calcula mediante la fórmula $C = 2 + 1{,}8x$ (C, en €; x, en km).

a) ¿Cuánto pagaremos por un recorrido de 5 km?

b) ¿Cuál es la pendiente de esa función? Explica su significado.

c) Represéntala gráficamente.

5 La temperatura de hoy es de 20 ºC, y vamos a hacer una excursión en globo. Sabemos que la temperatura del aire desciende, aproximadamente, 6 ºC por cada kilómetro de ascensión.

a) ¿Qué temperatura habrá si ascendemos 3 km?

b) Representa la función *altura* → *temperatura* y escribe su expresión analítica.

6 El recibo de la luz de un mes en el que consumimos 120 kWh fue de 34 €. Otro mes, el consumo fue 250 kWh, y el importe de 60 €.

a) Escribe la ecuación de la función que relaciona los kWh consumidos con el importe que habría que pagar.

b) ¿Cuánto pagaremos si consumimos 400 kWh?

9 Problemas métricos en el plano

Los griegos recogieron el saber matemático (práctico, utilitario, pero muy extenso) acumulado durante milenios por egipcios y babilonios. Y le dieron un impulso y una calidad extraordinarios, muy especialmente a la geometría. Cultivaron el conocimiento por sí mismo (*filosofía* significa *amor a la sabiduría*), sin buscar ninguna utilidad práctica. Y la geometría fue una bella ocupación en la que llegaron muy lejos.

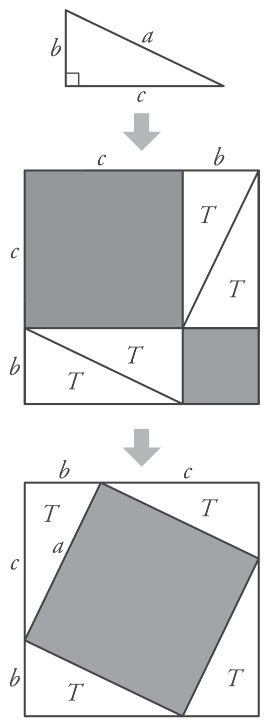
Tales de Mileto (640 a.C.-546 a.C.), gran filósofo, el primero de "los siete sabios de Grecia", marcó la pauta de todo el pensamiento griego posterior. Además de asimilar y mejorar lo que aprendió de los egipcios, inventó y cultivó la matemática deductiva. Su estilo fue sistematizado y mejorado por **Euclides,** dos siglos y medio después.

Posterior a Pitágoras y contemporáneo de Arquímedes, el último gran geómetra griego fue **Apolonio** (siglo III a.C.). Con un estilo pulido y sistemático, escribió un tratado dedicado a las cónicas (circunferencia, elipse, parábola e hipérbola). Siguiendo el espíritu de los griegos, su estudio sobre estas curvas, completísimo, fue meramente especulativo. Le hubiera causado asombro saber que dieciocho siglos después se demostraría que planetas y cometas describen alrededor del Sol órbitas elípticas y, algunos de ellos, hiperbólicas. Y que, posteriormente, las cónicas han sido referentes habituales en la tecnología y en el arte.

DEBERÁS RECORDAR

- Propiedades de los ángulos en los polígonos.
- La importancia de los triángulos rectángulos en las figuras planas.

1 Teorema de Pitágoras. Aplicaciones



Teorema de Pitágoras

En un triángulo rectángulo cualquiera, la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.

$$b^2 + c^2 = a^2$$

En el margen hay una bonita demostración de este teorema:

- Los dos cuadrados grandes son iguales. Su lado es $c + b$.
- En el primero, hay dos cuadrados de áreas c^2 y b^2 y cuatro triángulos T.
- En el segundo, hay un cuadrado de área a^2 y cuatro triángulos T.
- Por tanto, al suprimir los cuatro triángulos de cada uno, las áreas de lo que queda coinciden: $b^2 + c^2 = a^2$.

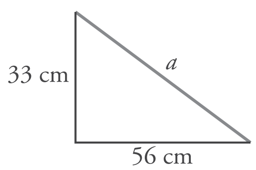
Veamos algunas **aplicaciones del teorema de Pitágoras.**

Cálculo del lado desconocido en un triángulo rectángulo

Aunque el teorema de Pitágoras es una igualdad entre áreas, se utiliza sobre todo para relacionar los lados de un triángulo rectángulo:

$$a = \sqrt{b^2 + c^2} \qquad b = \sqrt{a^2 - c^2} \qquad c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

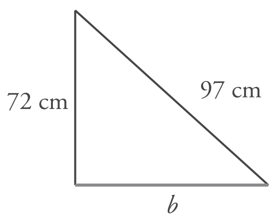
Ejercicios resueltos



1. Calcular la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo sabiendo que los catetos miden 33 cm y 56 cm, respectivamente.

$a^2 = b^2 + c^2 \quad \rightarrow \quad a = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{33^2 + 56^2} = \sqrt{4\,225} = 65$

La hipotenusa mide 65 cm.



2. En un triángulo rectángulo, la hipotenusa mide 97 cm, y uno de los catetos, 72 cm. Calcular la longitud del otro cateto.

$b = \sqrt{97^2 - 72^2} = \sqrt{4\,225} = 65$

El cateto desconocido mide 65 cm.

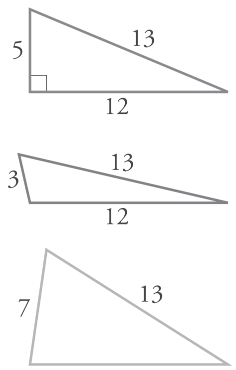
Actividades

1 En los siguientes triángulos rectángulos, se dan dos catetos y se pide la hipotenusa (si su medida no es exacta, dala con una cifra decimal):

a) 37 cm y 45 cm b) 16 cm y 30 cm

2 En los siguientes triángulos rectángulos, se da la hipotenusa y un cateto, y se pide el otro cateto (exactamente o con una cifra decimal):

a) 45 cm y 37 cm b) 39 cm y 15 cm



$5^2 + 12^2 = 13^2$

$3^2 + 12^2 < 13^2$

$7^2 + 12^2 > 13^2$

Cómo saber si un triángulo es rectángulo

a, b, c son los lados de un triángulo, y a es el mayor.

— Si $b^2 + c^2 = a^2$, el triángulo es rectángulo.

— Si $b^2 + c^2 < a^2$, el triángulo es obtusángulo.

— Si $b^2 + c^2 > a^2$, el triángulo es acutángulo.

Obtención de un segmento en una figura

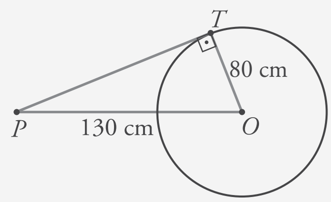
Hay muchas figuras en las que algunos de sus elementos son los lados de un triángulo rectángulo. Esto permite relacionarlos mediante el teorema de Pitágoras. Veamos algunos ejemplos.

Ejercicios resueltos

1. Una circunferencia de centro O tiene un radio de 80 cm. Desde un punto P que dista 130 cm de O trazamos una tangente. ¿Cuál es la longitud del segmento de tangente, PT?

2. Dos circunferencias de centros O y O' y radios 9 cm y 5 cm tienen sus centros a 20 cm. Hallar la longitud del segmento tangente exterior común.

1.

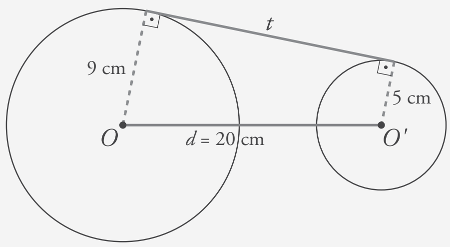


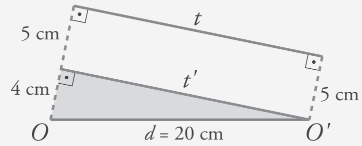
El segmento tangente, PT, es perpendicular al radio, OT.

PT y OT son catetos del triángulo PTO. PO es la hipotenusa. Por tanto:

$\overline{PT} = \sqrt{130^2 - 80^2} = \sqrt{10\,500} = 102{,}47$ cm

2.





$t' = \sqrt{20^2 - 4^2} = 19{,}6$ cm

El trozo de tangente común mide 19,6 cm.

Actividades

3 De un rombo conocemos una diagonal, 24 cm, y el lado, 13 cm. Halla la otra diagonal.

4 Una circunferencia tiene un radio de 15 cm. Una recta, r, corta a la circunferencia en dos puntos, A y B. La distancia entre A y B es de 18 cm. ¿Cuál es la distancia del centro de la circunferencia a la recta?

5 Averigua cómo son los triángulos de lados:

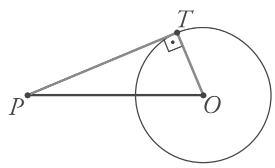
a) 7 cm, 8 cm, 11 cm b) 11 cm, 17 cm, 15 cm

c) 34 m, 16 m, 30 m d) 65 m, 72 m, 97 m

6 Halla el radio de la circunferencia sabiendo que:

$\overline{OP} = 39$ cm

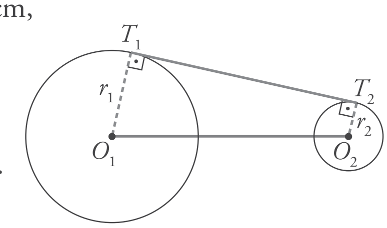
$\overline{PT} = 36$ cm



7 $r_1 = 15$ cm, $r_2 = 6$ cm,

$\overline{O_1O_2} = 41$ cm

Halla la longitud del segmento T_1T_2.

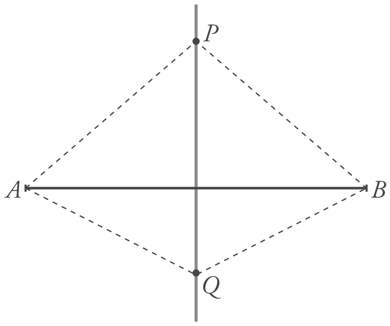


2 Lugares geométricos

Se llama **lugar geométrico** a un conjunto de puntos que cumplen una cierta propiedad.

Veamos algunos lugares geométricos conocidos.

Mediatriz de un segmento

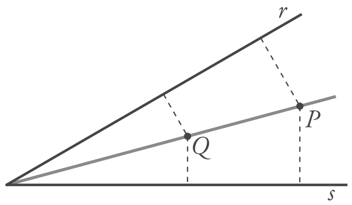


Recuerda que la **mediatriz** de un segmento es la recta perpendicular al segmento en su punto medio.

Los puntos de la mediatriz **equidistan** de los extremos del segmento. Es decir, si P es un punto cualquiera de la mediatriz de AB, se cumple que $\overline{PA} = \overline{PB}$. Además, los puntos de la mediatriz son los únicos que cumplen esta propiedad.

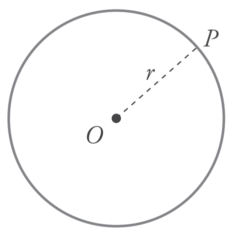
La **mediatriz** de un segmento es el **lugar geométrico** de los puntos que equidistan de los extremos del segmento.

Bisectriz de un ángulo



La **bisectriz** de un ángulo es el **lugar geométrico** de los puntos que equidistan de los lados del ángulo, pues los puntos P de la bisectriz cumplen que $dist(P, r) = dist(P, s)$.

Circunferencia

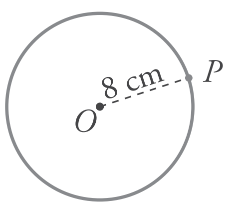


Los puntos P de la circunferencia cumplen la propiedad de que su distancia a O es igual a r. Por tanto:

La circunferencia de centro O y radio r es el lugar geométrico de los puntos P cuya distancia a O es r: $\overline{OP} = r$.

Actividades

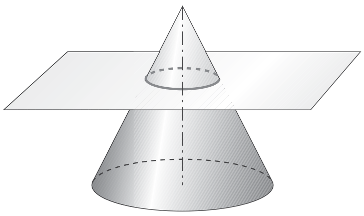
1 Define como lugar geométrico una circunferencia de centro C y radio 8 cm.



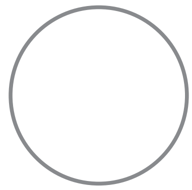
2 Dadas dos rectas paralelas, r y s, ¿cuál es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de ambas? Dibújalo.

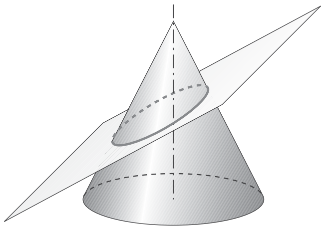
3 Dibuja en negro una recta r. Dibuja en rojo el lugar geométrico de los puntos cuya distancia a r es 1 cm. (ATENCIÓN: son dos rectas).

3 Las cónicas como lugares geométricos

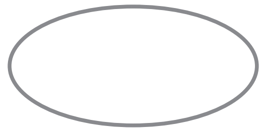


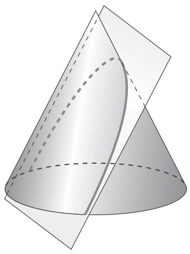
Si cortamos un cono por un plano perpendicular a su eje, la línea de corte es una **circunferencia.**



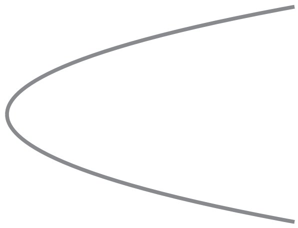


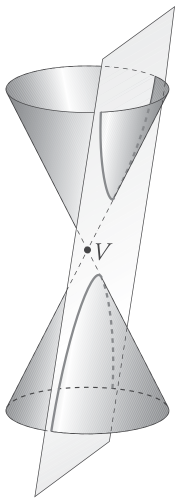
Si el plano que corta al cono tiene una cierta inclinación respecto a su eje, la línea de corte es una **elipse.**



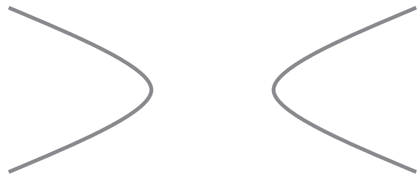


Si el plano que corta al cono es paralelo a una de sus generatrices, se obtiene una curva abierta llamada **parábola.**





Si tomamos dos conos "opuestos por el vértice" y los cortamos por un plano, la línea de corte es una curva con dos ramas llamada **hipérbola.**

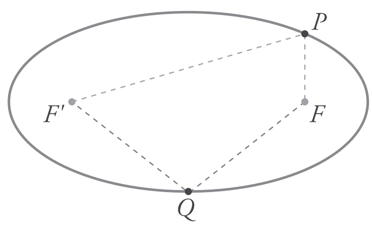


Estas cuatro curvas se llaman **cónicas.** Todas ellas pueden definirse como lugares geométricos. Ya hemos visto cómo se hace con la circunferencia. Veámoslo con las demás.

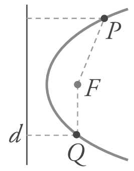
Elipse

Tenemos dos puntos fijos, llamados **focos,** F y F', y una distancia constante, d. La **elipse** es el lugar geométrico de los puntos P cuya suma de distancias a F y a F' es igual a d:

$$\overline{PF} + \overline{PF'} = d$$

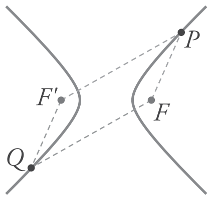


Observa cómo dibuja elipses un jardinero: clava dos estacas en el suelo y ata a ellas una cuerda suficientemente larga. Luego, marca con un punzón sobre la tierra la línea que resulta de moverse manteniendo la cuerda tensa. Esto podrías hacerlo tú con dos chinchetas, un hilo y un lápiz en un papel sobre una madera.



Parábola

Tenemos un punto, F, llamado foco, y una recta, d, directriz. **Parábola** es el lugar geométrico de los puntos, P, que equidistan de F y de d: $\overline{PF} = dist(P, d)$.



Hipérbola

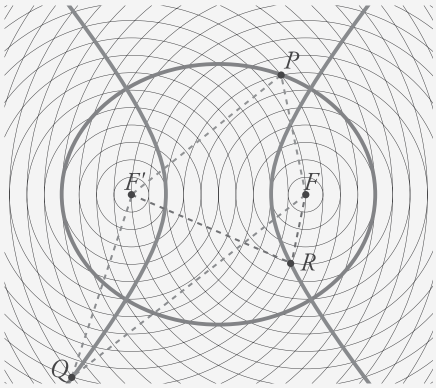
Tenemos dos puntos fijos, llamados focos, F y F', y una distancia constante, d. La **hipérbola** es el lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancias a los focos es d: $|\overline{PF} - \overline{PF'}| = d$.

Ejercicios resueltos

1. Utilizar la trama adjunta para dibujar:

a) Una elipse de focos F y F' y constante $d = 18$ (tomamos como unidad la distancia entre dos circunferencias consecutivas).

b) Una hipérbola de focos F y F' y constante $d = 6$.

1\. 

a) $\left.\begin{array}{l}\overline{PF} = 7\\ \overline{PF'} = 11\end{array}\right\}\ \overline{PF} + \overline{PF'} = 7 + 11 = 18$

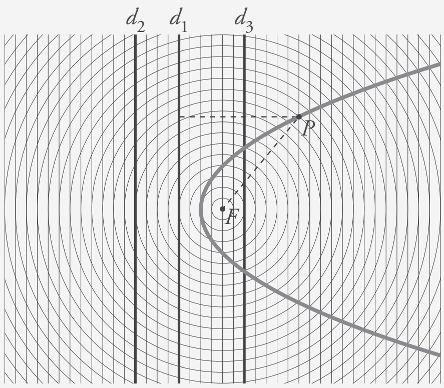
Podemos comprobar que cualquier punto de la elipse dibujada cumple esa condición.

b) $\left.\begin{array}{l}\overline{QF} = 17\\ \overline{QF'} = 11\end{array}\right\}\ \overline{QF} - \overline{QF'} = 17 - 11 = 6$

$\left.\begin{array}{l}\overline{RF'} = 10\\ \overline{RF} = 4\end{array}\right\}\ \overline{RF'} - \overline{RF} = 10 - 4 = 6$

Podemos comprobar que los puntos P de la rama izquierda de la hipérbola cumplen que $\overline{PF} - \overline{PF'} = 6$ y los de la rama derecha $\overline{PF'} - \overline{PF} = 6$. Por tanto, cualquier punto de la hipérbola cumple $|\overline{PF} - \overline{PF'}| = 6$.

2. Utilizar la trama adjunta para dibujar una parábola de foco F y directriz d_1.

2\. 

$\left.\begin{array}{l}dist(P, d_1) = 11\\ \overline{PF} = 11\end{array}\right\}\ \overline{PF} = dist(P, d_1)$

Podemos comprobar que cualquier punto de la parábola dibujada está a la misma distancia del foco F que de la directriz d_1.

WWW **6.** Tramas de circunferencias.

Actividades

1 Toma una trama como la del ejercicio resuelto 1 y dibuja en ella:

a) Dos elipses con $d = 14$ y $d = 24$.

b) Dos hipérbolas con $d = 8$ y $d = 4$.

2 Toma una trama como la del ejercicio resuelto 2 y dibuja en ella:

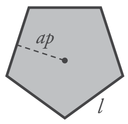
a) Una parábola de foco F y directriz d_2.

b) Una parábola de foco F y direcctriz d_3.

4 Áreas de los polígonos

Apotema del pentágono regular

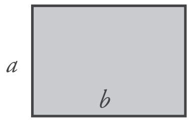
Calcular el área de un polígono regular del que solo conocemos el lado es tarea fácil en algunos casos (triángulo, cuadrado, hexágono, octógono). Pero en el pentágono es difícil obtener la apotema conociendo el lado. Por eso, te damos aquí, sin más, el resultado:



$$ap = l \cdot \frac{\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}}{10} \approx 0{,}6882\, l$$

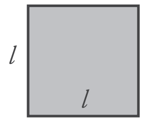
Áreas conocidas

RECTÁNGULO



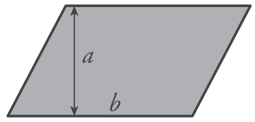
$A = b \cdot a$

CUADRADO



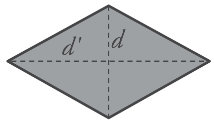
$A = l^2$

PARALELOGRAMO



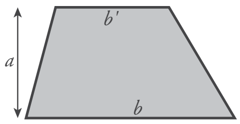
$A = b \cdot a$

ROMBO



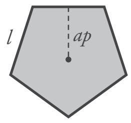
$A = \dfrac{d \cdot d'}{2}$

TRAPECIO



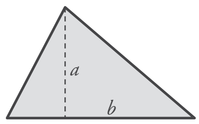
$A = \dfrac{b + b'}{2} \cdot a$

POLÍGONO REGULAR



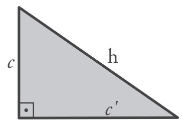
$A = \dfrac{\text{perímetro} \cdot ap}{2}$

TRIÁNGULO



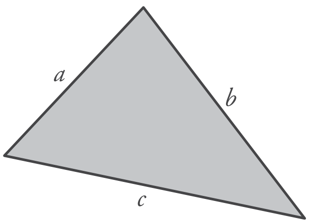
$A = \dfrac{b \cdot a}{2}$

TRIÁNGULO RECTÁNGULO



$A = \dfrac{c \cdot c'}{2}$

Área de un triángulo en función de sus lados



La fórmula siguiente es muy útil, pues para aplicarla basta con conocer la longitud de los lados del triángulo.

$$\left.\begin{aligned} &\text{Perímetro: } p = a + b + c \\ &\text{Semiperímetro: } s = \frac{p}{2} \end{aligned}\right\} \rightarrow$$

$A_{\text{TRIÁNGULO}} = \sqrt{s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)}$

Se llama FÓRMULA DE HERÓN.

Ejercicios resueltos

1. Calcular el área del triángulo de lados 11 cm, 13 cm y 20 cm.

1. Aplicaremos la fórmula de Herón:

Perímetro: $p = 11 + 13 + 20 = 44$ cm $\rightarrow$ $s = 22$ cm

$$A = \sqrt{s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)} = \sqrt{22 \cdot 11 \cdot 9 \cdot 2} = \sqrt{4\,356} = 66 \text{ cm}^2$$

2. Hallar el área de un trapecio isósceles cuyas bases miden 37 cm y 55 cm, y el lado oblicuo, 14 cm.

2.

$(55 - 37) : 2 = 9$ cm

$a = \sqrt{14^2 - 9^2} = \sqrt{115} = 10{,}7$ cm

$A = \dfrac{37 + 55}{2} \cdot 10{,}7 = 492{,}2 \text{ cm}^2$

Actividades

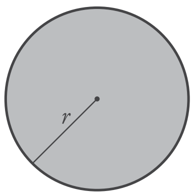
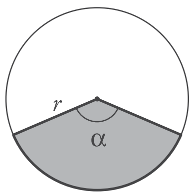
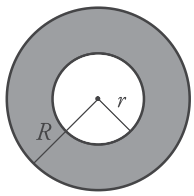
1 Halla el área de un triángulo cuyos lados miden 10 m, 17 m y 21 m.

2 Halla el área del hexágono regular en el que cada uno de sus lados mide 10 cm.

3 Halla el área de un rombo de lado 3 dm, sabiendo que una diagonal mide 46 cm.

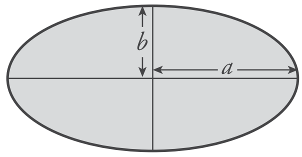
4 Dos de los lados de un triángulo isósceles miden 30 cm y 13 cm. Halla su área.

5 Áreas de figuras curvas

CÍRCULO	SECTOR CIRCULAR	CORONA CIRCULAR
		
$A = \pi r^2$	$A = \pi r^2 \cdot \dfrac{\alpha}{360}$	$A = \pi(R^2 - r^2)$

Área de la elipse

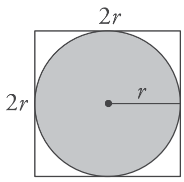
La **elipse** queda caracterizada por sus ejes, cuyas longitudes llamamos $2a$ y $2b$.



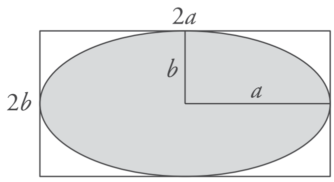
$$A_{\text{ELIPSE}} = \pi ab$$

Observa:

El círculo ocupa $\pi/4$ del cuadrado que lo contiene. La misma proporción que la elipse respecto al rectángulo que la circunscribe:



$$A_{\text{CÍRC.}} = \pi r^2 \qquad A_{\text{CUAD.}} = 4r^2 \qquad \frac{A_{\text{CÍRC.}}}{A_{\text{CUAD.}}} = \frac{\pi}{4}$$



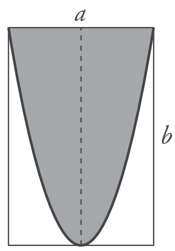
$$A_{\text{ELIPSE}} = \pi ab \qquad A_{\text{RECT.}} = 4ab \qquad \frac{A_{\text{ELIPSE}}}{A_{\text{RECT.}}} = \frac{\pi}{4}$$

Es como si, al estirar el cuadrado para que se convierta en rectángulo, el círculo se convirtiera en elipse.

Área de un segmento de parábola

El área de un **segmento de parábola** es igual a 2/3 del rectángulo que lo contiene.

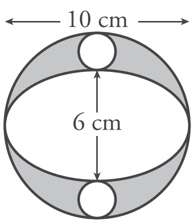
$$A_{\text{SEGM. DE PARÁBOLA}} = \frac{2}{3}a\,b$$

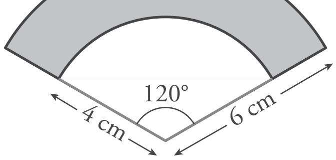


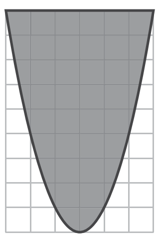
SEGMENTO DE PARÁBOLA

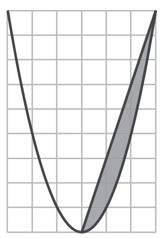
Actividades

1 Halla el área de la parte coloreada en las figuras siguientes:

a) 

b) 

c) 

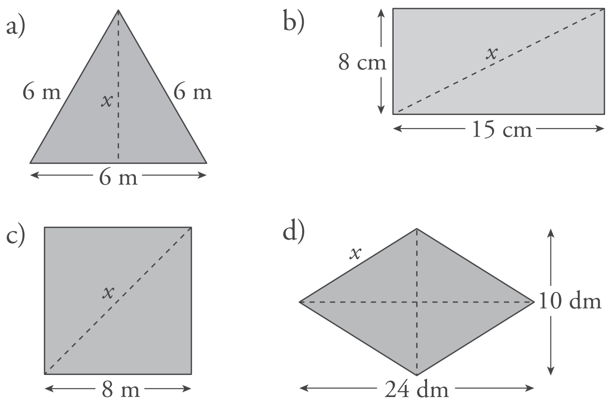
d) 

Ejercicios y problemas

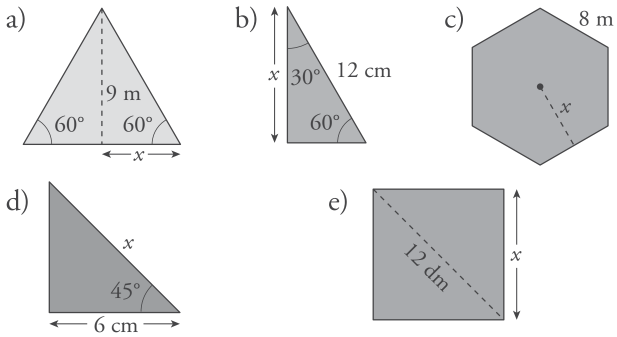
Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

Teorema de Pitágoras

1 ▼▽▽ Calcula el valor de x en estos polígonos:



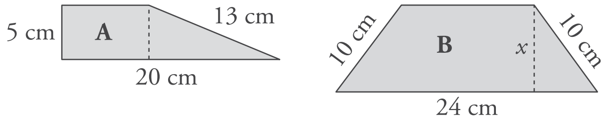
2 ▼▽▽ Calcula x en cada caso:



3 ▼▼▽ La diagonal de un rectángulo mide 37 cm, y uno de sus lados, 12 cm. Calcula su perímetro y su área.

4 ▼▼▽ La diagonal de un rectángulo de lados 7 cm y 24 cm mide igual que el lado de un cuadrado. Halla la diagonal de ese cuadrado.

5 ▼▼▽ Calcula x en estos trapecios y halla su área:



6 ▼▽▽ Clasifica en rectángulos, acutángulos u obtusángulos los triángulos de lados:

a) 11 m, 13 m, 20 m. b) 20 m, 21 m, 29 m.

c) 25 m, 29 m, 36 m. d) 7 m, 24 m, 25 m.

Lugares geométricos y cónicas

7 ▼▽▽ ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos cuya distancia a una recta r es de 2 cm? Dibújalo.

8 ▼▽▽ Define como lugar geométrico una circunferencia de centro O y radio 5 cm.

9 ▼▽▽ ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a dos puntos fijos es 26 cm? ¿Cómo se llaman los dos puntos fijos?

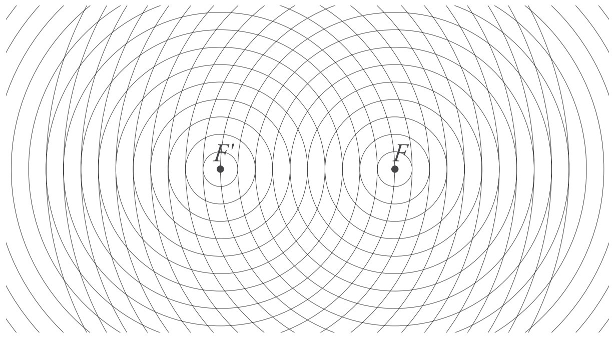
10 ▼▽▽ ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancias a otros dos puntos fijos es 4 cm? ¿Cómo se llaman los dos puntos fijos?

11 ▼▽▽ ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de un punto fijo y de una recta dada? ¿Cómo se llaman el punto fijo y la recta?

12 ▼▼▽ Utiliza una trama como esta para dibujar:

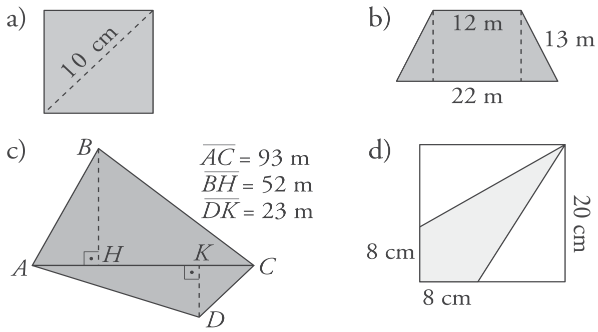
a) Dos elipses de focos F y F' y constantes $d = 16$ y $d = 20$, respectivamente (toma como unidad la distancia entre dos circunferencias consecutivas).

b) Dos hipérbolas de focos F y F' y constantes $d = 2$ y $d = 7$.



Áreas

13 ▼▼▽ Halla el área de las figuras coloreadas.

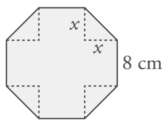


Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

14 ▼▼▽ Calcula la longitud de la apotema y el área de un pentágono regular de 10 cm de lado.

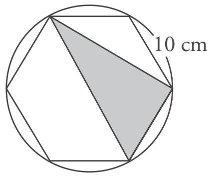
15 ▼▼▽ Observa el octógono regular de la figura, que tiene 8 cm de lado, y calcula su área:



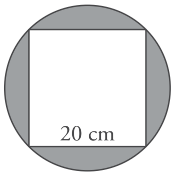
16 ▼▼▽ El lado de un octógono regular mide 6 cm. Calcula la longitud de su apotema y su área.

17 ▼▼▽ Calcula el área de las figuras coloreadas:

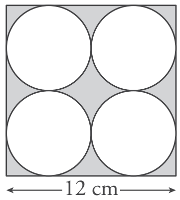
a)



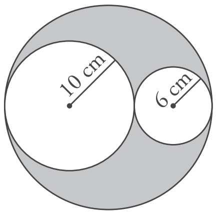
b)



c)



d)

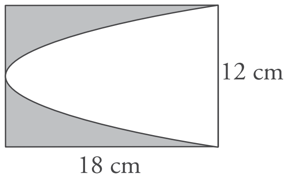


18 ▼▼▽ Halla, en cada caso, el área y el perímetro de un sector circular de 15 cm de radio y de amplitud:

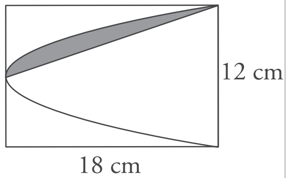
a) 90° b) 120° c) 65° d) 140°

19 ▼▽▽ Halla el área de la zona coloreada en cada figura:

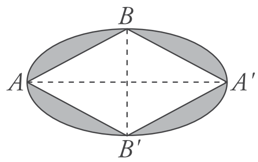
a)



b)



20 ▼▼▽ Las diagonales del rombo inscrito en la elipse miden 16 cm y 30 cm. Halla el área de la parte coloreada.



21 ▼▽▽ Comprueba que los siguientes triángulos son rectángulos y calcula sus áreas de dos formas: a partir de sus catetos y aplicando la fórmula de Herón.

a) 51 cm, 68 cm y 85 cm.

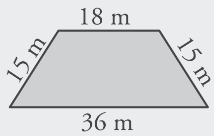
b) 110 m, 264 m y 286 m.

c) 72 dam, 135 dam y 153 dam.

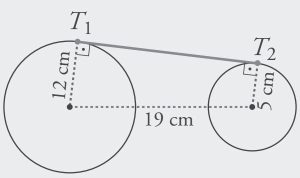
d) 48 m, 140 m y 148 m.

Autoevaluación

1 Halla la altura de esta figura:



2 Halla la longitud del segmento T_1T_2 aproximando hasta los milímetros.

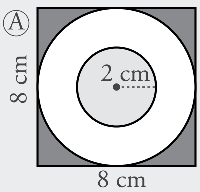


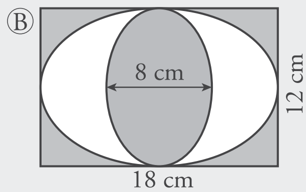
3 Completa:

a) El lugar geométrico de los puntos que equidistan de los extremos de un segmento es…

b) Una elipse es el lugar geométrico de los puntos tales que…

4 Calcula el área de la zona coloreada en cada caso:



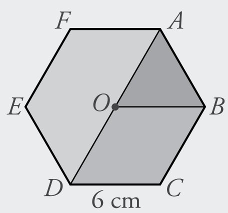


5 En el hexágono regular de lado 6 cm, calcula:

a) El área del triángulo *OAB*.

b) El área del trapecio *ADEF*.

c) El área del rombo *OBCD*.



10 Cuerpos geométricos

Entre las formas poliédricas que vamos a ver en esta unidad están los sólidos platónicos y los arquimedianos. Platón y Arquímedes: ¿qué papel desempeñaron estos dos genios en la historia de la matemática?

Platón (427 a.C.-347 a.C.) fue un filósofo ateniense que se interesó, sobre todo, por la filosofía moral, y consideraba la ciencia como una clase de conocimiento inferior. Le gustaban las matemáticas por sus abstracciones idealizadas y su separación de lo meramente material. Aunque su especialidad no fueron las matemáticas, impulsó su estudio hasta el punto de que, en la entrada de la Academia (especie de universidad ateniense que él fundó) había un letrero que decía "No entre aquí quien no sepa matemáticas".

Atribuyó a los poliedros regulares una estrecha relación con el universo: los cielos debían reflejar la perfección de la matemática abstracta en su forma más sencilla.

Platón ejerció una gran influencia en el pensamiento posterior.

Arquímedes (287 a.C.-212 a.C.) fue ingeniero, matemático e inventor. A lo largo de su vida diseñó y construyó multitud de ingenios mecánicos. Y se valió de la experimentación para descubrir propiedades físicas o matemáticas que, después, se esmeraba en probar con rigor.

Gran calculista, dedujo las fórmulas para la obtención de áreas y volúmenes de figuras geométricas. Y estudió los 13 sólidos que llevan su nombre.

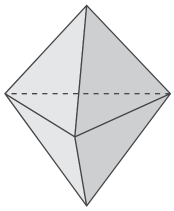
Aunque, posiblemente, su manera de enfocar las matemáticas habría horrorizado a Platón, Arquímedes fue el más grande matemático de la Antigüedad.

DEBERÁS RECORDAR

- Poliedros. Características.
- Cuerpos de revolución. Características.

1 Poliedros regulares (sólidos platónicos)

Los sólidos platónicos

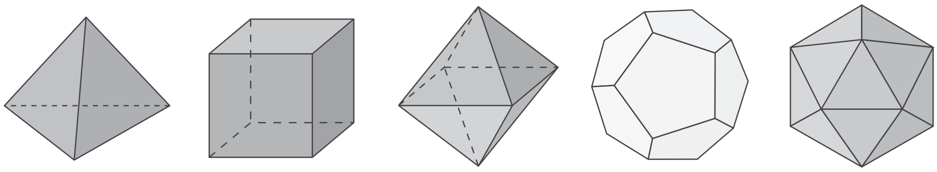


Aunque sus seis caras son triángulos equiláteros idénticos, este poliedro **no es regular,** porque en unos vértices concurren tres caras y en otros, cuatro.

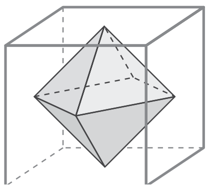
Un **poliedro** se llama **regular** cuando cumple las dos condiciones siguientes:

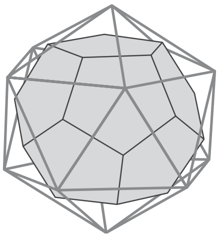
1. Sus caras son polígonos regulares idénticos.
2. En cada vértice del poliedro concurre el mismo número de caras.

Solo hay cinco poliedros regulares:



TETRAEDRO 4 caras, triángulos — CUBO o HEXAEDRO 6 caras, cuadrados — OCTAEDRO 8 caras, triángulos — DODECAEDRO 12 caras, pentágonos — ICOSAEDRO 20 caras, triángulos





Poliedros duales

Al unir mediante segmentos los centros de cada dos caras contiguas de un cubo, se forma un octaedro.

Si hiciéramos lo mismo con un octaedro, se formaría un cubo. Por eso decimos que el octaedro y el cubo son **poliedros duales.**

El número de caras de un poliedro coincide con el número de vértices de su dual. Y ambos tienen el mismo número de aristas.

	CUBO	OCTAEDRO
CARAS	6	8
VÉRTICES	8	6
ARISTAS	12	12

Actividades

1 Haz una tabla con el número de caras, vértices y aristas de los cinco poliedros regulares.

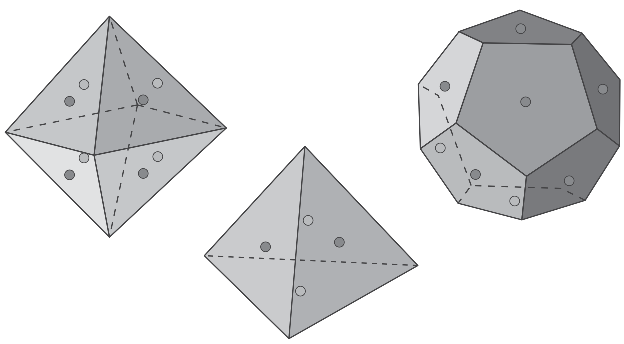
	TETR.	CUBO	OCT.	DODEC.	ICOS.
CARAS					
VÉRTICES					
ARISTAS					

a) Comprueba que los cinco cumplen la fórmula de Euler. [Recuerda: $c + v = a + 2$].

b) Comprueba que el dodecaedro y el icosaedro cumplen las condiciones necesarias para ser duales.

c) Comprueba que el tetraedro cumple las condiciones para ser dual de sí mismo.

2 Hemos señalado en rojo los centros de las caras "frontales" de estos poliedros, y más claro, los centros de algunas caras "ocultas". Uniéndolos convenientemente se obtienen los poliedros duales. Hazlo en tu cuaderno.



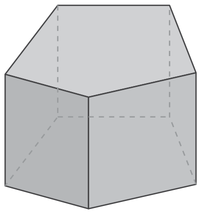
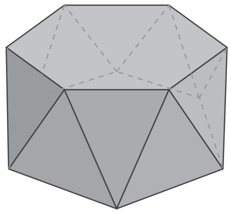
2 Poliedros semirregulares

Se llama **poliedro semirregular** a aquel cuyas caras son polígonos regulares de dos o más tipos y tal que en todos los vértices concurren los mismos polígonos.

Interesante

Un poliedro semirregular tiene, necesariamente, todas sus aristas iguales. No es difícil razonar por qué. Inténtalo.

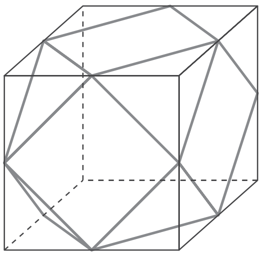
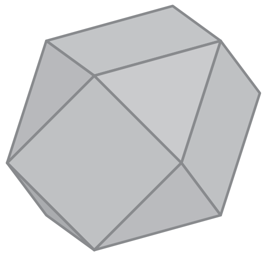
Por ejemplo, estos dos poliedros son semirregulares:

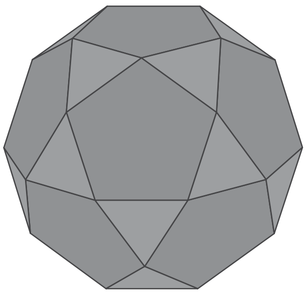
El de la izquierda es un prisma pentagonal regular con caras laterales cuadradas. El de la derecha se llama **antiprisma.** Este, en concreto, es hexagonal regular y en cada vértice concurren un hexágono y tres triángulos equiláteros.

Truncando poliedros regulares

Truncar es, mediante un corte plano, suprimir un vértice de un poliedro. Analicemos la figura que se obtiene al truncar todos los vértices de un cubo mediante *planos que pasan por los puntos medios de las aristas* adyacentes.

La figura resultante, llamada **cuboctaedro,** tiene 6 caras cuadradas (una por cada cara del cubo) y 8 caras triangulares (una por cada vértice truncado). En cada vértice de la nueva figura concurren dos cuadrados y dos triángulos equiláteros. Es, pues, un poliedro semirregular.



ICOSIDODECAEDRO

En las actividades que se proponen a continuación se reflexiona sobre el nombre de esta figura, **cuboctaedro,** y de la que se obtiene de forma similar a partir del dodecaedro o del icosaedro: el **icosidodecaedro.**

Actividades

1 Vamos a truncar, dando cortes que pasen por los puntos medios de las aristas, los restantes poliedros regulares.

a) Al truncar de este modo un tetraedro, se obtiene una figura conocida. ¿Cuál?

b) El resultado de truncar el octaedro también es conocido. ¿Comprendes, ahora, por qué a esta figura se la llama cuboctaedro?

c) Describe la figura que resulta de truncar (puntos medios de las aristas) un dodecaedro y explica por qué es un poliedro semirregular (se llama icosidodecaedro).

d) Describe la figura que resulta de truncar (puntos medios de las aristas) un icosaedro.

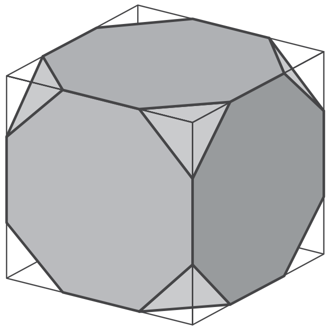
e) Relaciona los resultados anteriores con la dualidad de poliedros estudiada en la página anterior.

Otro tipo de truncamiento

Sólidos arquimedianos

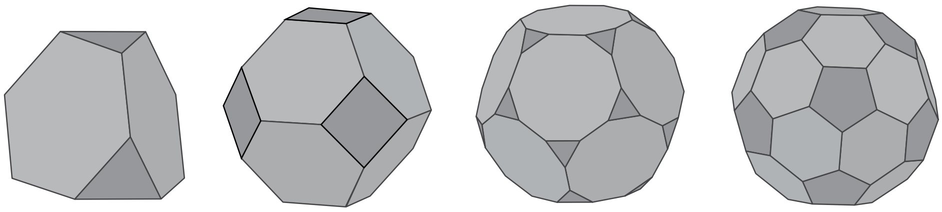
Arquímedes estudió un tipo de poliedros semirregulares que se conocen como *sólidos arquimedianos*. Son un total de 13: los 5 estudiados en esta página, los 2 truncados de la página de la izquierda y otros 6 más complicados.

Si truncamos los vértices de un cubo dejando parte de las aristas, las caras se tornan en octógonos. Cortando a distancias adecuadas, los octógonos serán regulares y, así, el cuerpo obtenido, **cubo truncado,** es un poliedro semirregular.



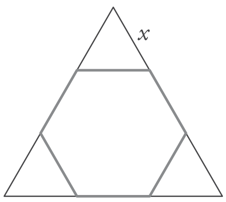
Truncando los vértices de un cubo a distancias adecuadas de los vértices se obtiene un poliedro semirregular (llamado **cubo truncado**), en cada uno de cuyos vértices concurren dos octógonos y un triángulo.

Análogamente, el tetraedro truncado, el octaedro truncado, el dodecaedro truncado y el icosaedro truncado son poliedros semirregulares.



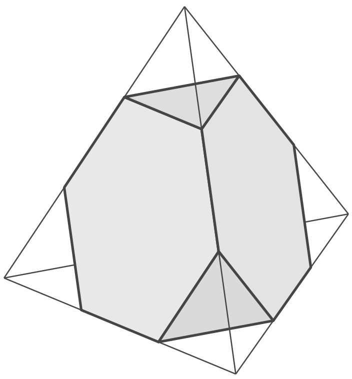
TETRAEDRO TRUNCADO | OCTAEDRO TRUNCADO | DODECAEDRO TRUNCADO | ICOSAEDRO TRUNCADO

Actividades

2 

¿A qué distancia del vértice hemos de cortar los triángulos pequeños para que el hexágono resultante sea regular?

3 Describe el tetraedro truncado.



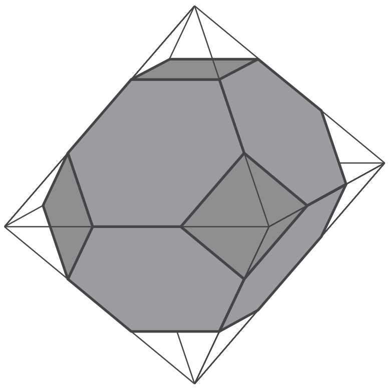
¿Cuántas caras tiene?

¿Cuántas son de cada tipo?

¿Cuántos vértices? ¿Cuántas aristas?

¿Cuánto mide la arista del tetraedro truncado con relación a la del tetraedro original?

4 Describe el octaedro truncado.



Caras, tipos.

Vértices.

Aristas.

5 Conociendo las características de un dodecaedro (caras, vértices), describe cómo será el dodecaedro truncado.

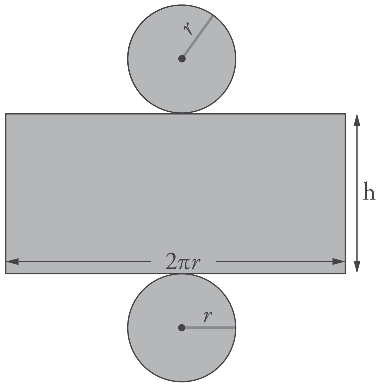
6 Conocidas las características de un icosaedro, describe cómo será el icosaedro truncado.

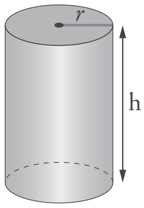
3 Superficie de los cuerpos geométricos

Área de un poliedro

El área de un poliedro se obtiene sumando el área de todas sus caras. El proceso se facilita partiendo del desarrollo del poliedro.

Área de un cilindro

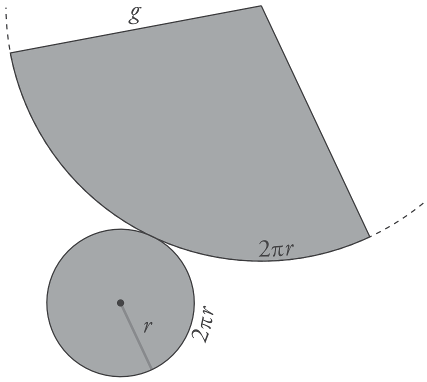


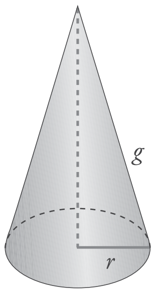


La superficie lateral de un cilindro es un rectángulo cuya base es igual al perímetro del círculo, $2\pi r$, y cuya altura, h, es la del cilindro.

$$\left.\begin{array}{l} A_{\text{LATERAL}} = 2\pi r \cdot \text{h} \\ A_{\text{BASE}} = \pi r^2 \end{array}\right\} A_{\text{TOTAL}} = 2\pi r\text{h} + 2\pi r^2$$

Área de un cono



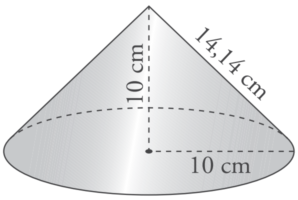


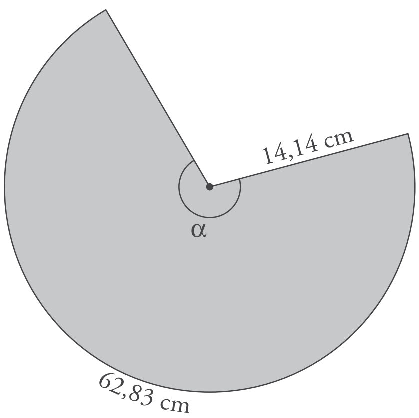
El desarrollo lateral de un cono es un sector circular de un círculo de radio g, y abarca un arco cuya longitud coincide con la de la circunferencia base del cono $(2\pi r)$.

$$A_{\text{LATERAL}} = \pi r g$$

$$A_{\text{TOTAL}} = \pi r g + \pi r^2$$

Ejercicio resuelto





Hallar el área total de un cono rectángulo (altura = radio) de radio 10 cm. ¿Qué ángulo tiene el sector circular con el cual se construye?

La generatriz mide $g = \sqrt{10^2 + 10^2} = 14{,}14$ cm

$$A_{\text{LATERAL}} = \pi r g = \pi \cdot 10 \cdot 14{,}14 = 444 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{TOTAL}} = 444 + \pi \cdot 10^2 = 758 \text{ cm}^2$$

Perímetro de la base del cono = $2\pi \cdot 10 = 62{,}83$ cm

El sector circular está dibujado con un radio de 14,14 cm.

Con ese radio, la circunferencia completa mide:

$$l = 2 \cdot \pi \cdot 14{,}14 = 88{,}84 \text{ cm}$$

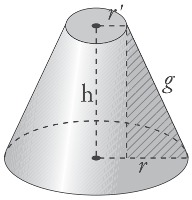
Por tanto, podemos establecer la siguiente proporción:

$$\frac{\alpha}{62{,}83} = \frac{360°}{88{,}84} \rightarrow \alpha = 254{,}60° = 254°\ 36'$$

CON CALCULADORA:

62,83 ⊠ 360 ⊡ 88,84 ⊟ 254.60... °'" 254°36'5.51"

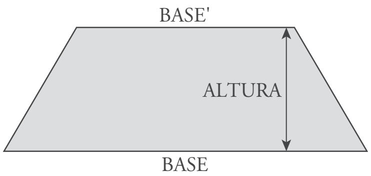
Área de un tronco de cono



En un tronco de cono, la altura, h, la diferencia de los radios, $r - r'$, y la generatriz, g, forman un triángulo rectángulo. Por tanto:

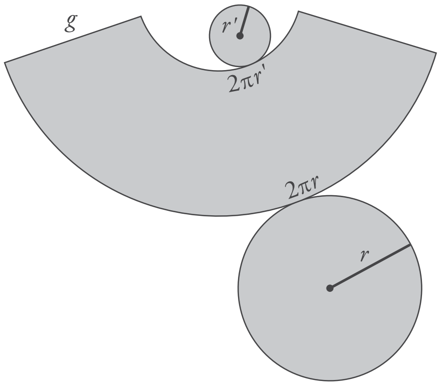
$$g^2 = \mathrm{h}^2 + (r - r')^2$$

Recuerda: área de un trapecio



$$\text{ÁREA} = \frac{\text{BASE} + \text{BASE}'}{2} \cdot \text{ALTURA}$$

La fórmula para el cálculo del área lateral de un tronco de cono recuerda la del área de un trapecio. Observa:



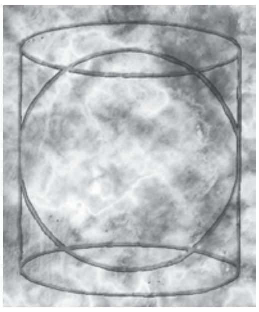
$$A_{\text{LATERAL}} = \frac{2\pi r + 2\pi r'}{2} \cdot g = \pi(r + r')g$$

$$A_{\text{TOTAL}} = \pi(r + r')g + \pi r^2 + \pi r'^2$$

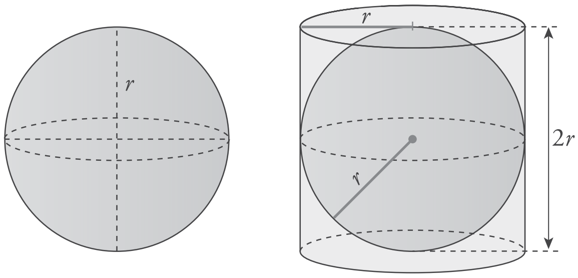
Áreas en la esfera

Arquímedes. Esfera y cilindro

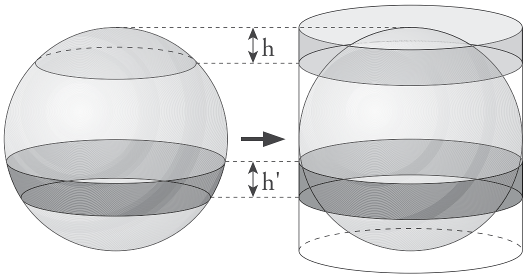
Arquímedes se sentía especialmente orgulloso de las relaciones que encontró entre las áreas de la esfera y el cilindro, así como entre los volúmenes de los mismos cuerpos. Hasta el punto de que pidió que en su tumba se grabara esta figura:



El área de la superficie esférica es igual al área lateral del cilindro que envuelve a la esfera. Y lo mismo ocurre con las superficies de ambos cuerpos comprendidas entre secciones planas paralelas.



$$A_{\text{ESFERA}} = 2\pi r \cdot 2r = 4\pi r^2$$

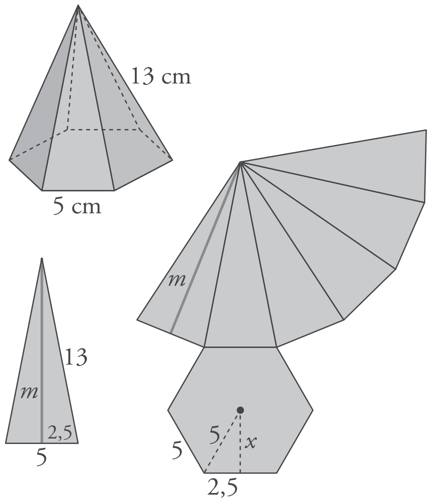


$$A_{\text{CASQUETE ESFÉRICO}} = 2\pi r \cdot \mathrm{h}$$

$$A_{\text{ZONA ESFÉRICA}} = 2\pi r \cdot \mathrm{h}'$$

Estas relaciones entre esfera y cilindro son muy interesantes. Pero más aún es lo siguiente: cualquier figura que dibujemos en la esfera, al proyectarla sobre el cilindro, da lugar a otra figura que puede ser muy distinta pero tiene la misma superficie.

Ejercicios resueltos



1. Calcular el área total de una pirámide recta hexagonal regular, sabiendo que la arista de la base mide 5 cm, y la arista lateral, 13 cm.

- Cálculo de la apotema de la pirámide (m) y de la apotema de la base (x):

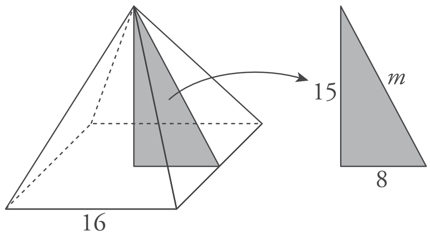
$$m = \sqrt{13^2 - 2{,}5^2} \approx 12{,}76 \text{ cm} \qquad x = \sqrt{5^2 - 2{,}5^2} \approx 4{,}33 \text{ cm}$$

- Cálculo del área:

$$A_{\text{LATERAL}} = 6 \cdot \frac{5 \cdot m}{2} = 6 \cdot \frac{5 \cdot 12{,}76}{2} = 191{,}4 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{BASE}} = \frac{6 \cdot 5 \cdot x}{2} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4{,}33}{2} = 64{,}95 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{TOTAL}} = A_{\text{LATERAL}} + A_{\text{BASE}} = 191{,}4 + 64{,}95 = 256{,}35 \text{ cm}^2$$

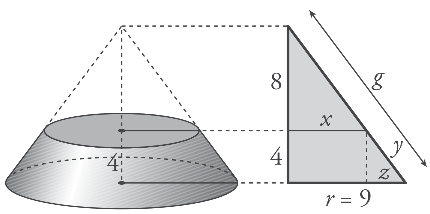


2. Calcular el área total de una pirámide recta de 15 cm de altura, cuya base es un cuadrado de 16 cm de lado.

$$m = \sqrt{15^2 + 8^2} = 17$$

$$A_{\text{CARA LATERAL}} = \frac{16 \cdot 17}{2} = 136 \text{ cm}^2 \qquad A_{\text{BASE}} = 16^2 = 256 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{TOTAL}} = 4 \cdot A_{\text{CARA LATERAL}} + A_{\text{BASE}} = 4 \cdot 136 + 256 = 800 \text{ cm}^2$$



3. Un cono tiene 12 cm de altura y 9 cm de radio en la base. Calcular el área lateral y el área total del tronco de cono que se obtiene al cortar el cono por un plano paralelo a la base a 4 cm de altura.

- Primero es necesario conocer la generatriz: $g = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15$ cm
- Necesitamos calcular el radio de la base menor (x) y la generatriz del tronco (y). Recurriendo a la semejanza y al teorema de Pitágoras:

$$\frac{12}{9} = \frac{8}{x} \;\rightarrow\; x = 6 \text{ cm} \qquad z = 9 - x \;\rightarrow\; z = 9 - 6 = 3 \text{ cm}$$

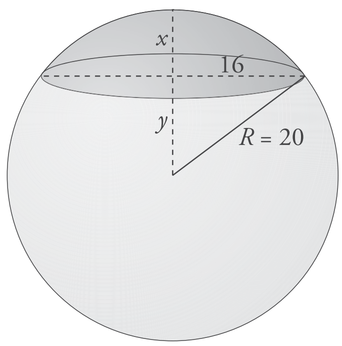
$$y = \sqrt{4^2 + z^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \text{ cm}$$

- Cálculo del área:

$$A_{\text{LATERAL}} = \pi(r + x)y = 3{,}14 \cdot (9 + 6) \cdot 5 = 235{,}5 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{BASES}} = \pi r^2 + \pi x^2 = 3{,}14 \cdot 9^2 + 3{,}14 \cdot 6^2 = 367{,}38 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{TOTAL}} = A_{\text{LATERAL}} + A_{\text{BASES}} = 235{,}5 + 367{,}38 = 602{,}88 \text{ cm}^2$$



4. Cortamos una esfera de 20 cm de radio obteniendo, en la sección, un círculo de 16 cm de radio. ¿Cuál es el área del casquete esférico que hemos separado de la esfera?

- Calculamos la altura, x, del casquete:

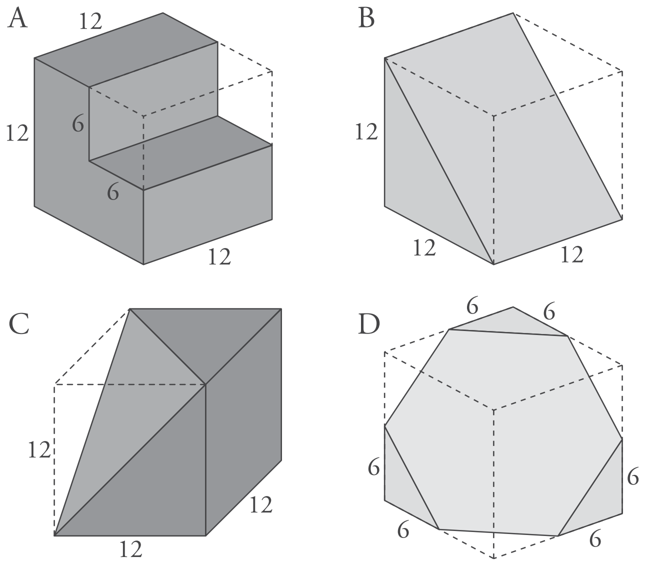
$$y = \sqrt{20^2 - 16^2} = 12 \text{ cm} \qquad x = 20 - y = 20 - 12 = 8 \text{ cm}$$

- Calculamos el área del casquete:

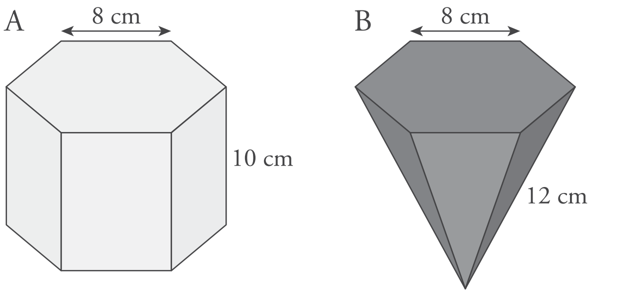
$$A = 2\pi R x = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 20 \cdot 8 = 1\,004{,}8 \text{ cm}^2$$

Actividades

1 Calcula el área de estos poliedros obtenidos a partir de un cubo de 12 cm de arista:

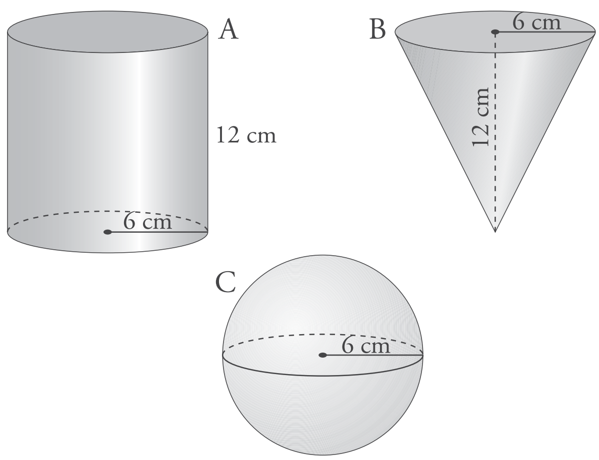


2 Obtén la medida de la superficie del prisma y de la pirámide. La base de ambos es un hexágono regular.

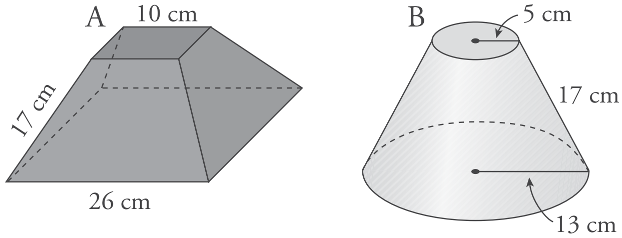


ARISTA BASE → 8 cm	ARISTA BASE → 8 cm
ALTURA PRISMA → 10 cm	ARISTA LATERAL → 12 cm

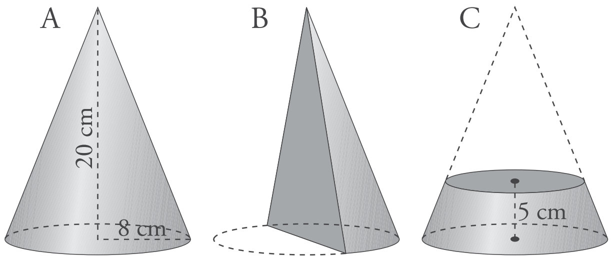
3 Calcula el área de estos cuerpos:



4 Calcula el área de los siguientes cuerpos:



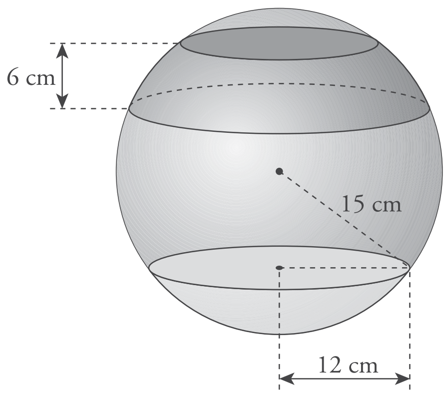
5 Calcula el área total del cono, del cuerpo que resulta de partirlo por la mitad y del tronco de cono obtenido al cortar por una sección paralela a la base, a 5 cm de la misma.



6 En una esfera de 30 cm de diámetro, calcula:

a) El área de una zona esférica de 6 cm de altura.

b) El área de un casquete esférico cuya base tiene un radio de 12 cm.



7 Halla el área de:

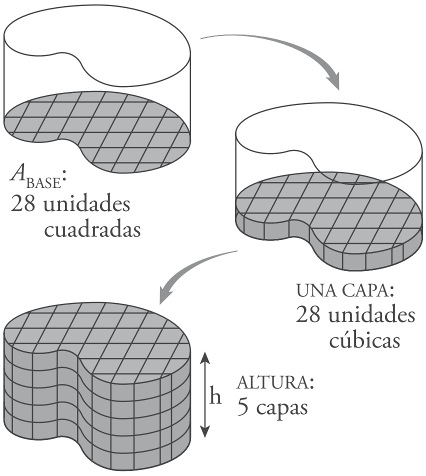
a) Un prisma recto cuya base es un rombo de diagonales 12 cm y 20 cm, sabiendo que su arista lateral mide 24 cm.

b) Una pirámide recta con la misma base y la misma arista lateral que el prisma anterior.

c) Un cuboctaedro de 10 cm de arista.

d) Un dodecaedro truncado de 10 cm de arista.

4 Medida del volumen de los cuerpos geométricos

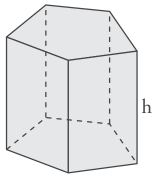


VOLUMEN = $A_{BASE} \cdot h$

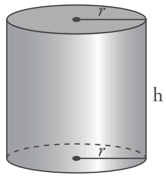
$V = 28 \cdot 5 = 140$ unidades cúbicas

Volumen de prismas y cilindros

El volumen de cualquier figura con dos bases iguales y paralelas entre sí (figura prismática) se obtiene multiplicando el área de la base por la altura.



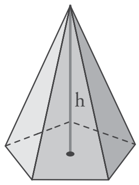
$V = A_{BASE} \cdot h$



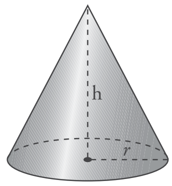
$V = \underbrace{\pi \cdot r^2}_{A_{BASE}} \cdot h$

Volumen de pirámides y conos

El volumen de una pirámide o de un cono es igual a un tercio del área de la base por la altura.



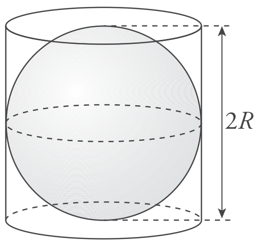
$V = \dfrac{1}{3} A_{BASE} \cdot h$



$V = \dfrac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot h$

Volumen de la esfera

El volumen de la esfera de radio R es: $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$

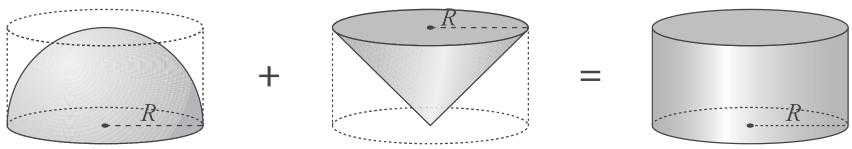


$V_{CILINDRO} = \pi R^2 \cdot 2R = 2\pi R^3$

- Observa que el volumen de la esfera es igual a dos tercios del volumen del cilindro que la envuelve.

$$V_{ESFERA} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{2}{3}(2\pi R^3) = \frac{2}{3} V_{CILINDRO}$$

- Una relación interesante:

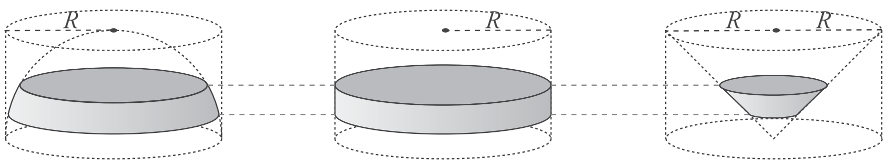


$$V_{SEMIESFERA} + V_{CONO} = V_{CILINDRO}$$

$$\left(\frac{2}{3} V_{CILINDRO}\right) \qquad \left(\frac{1}{3} V_{CILINDRO}\right)$$

Volumen de una zona esférica

La relación anterior, entre los volúmenes de la semiesfera, el cono y el cilindro, se cumple también para las correspondientes porciones determinadas por planos paralelos.

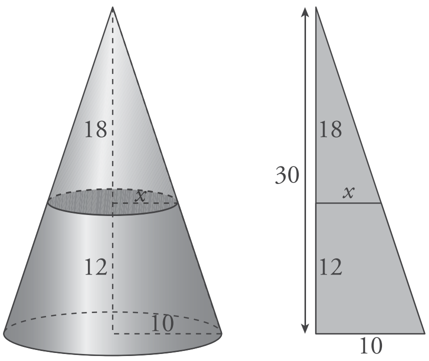


$$V_{PORCIÓN\ DE\ ESFERA} = V_{PORCIÓN\ DE\ CILINDRO} - V_{TRONCO\ DE\ CONO}$$

No lo olvides

La relación de la derecha permite calcular el volumen de una zona esférica restando al volumen de un cilindro el volumen de un tronco de cono.

Ejercicios resueltos

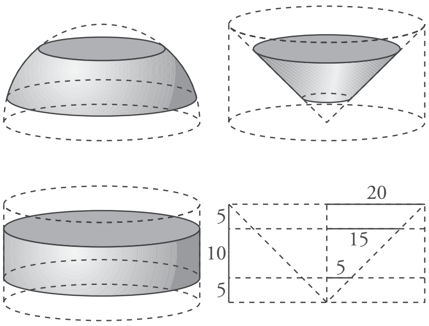


1. Un cono de 10 cm de radio en la base y 30 cm de altura se corta por un plano paralelo a la base a 12 cm de ella. Calcular el volumen del tronco de cono obtenido.

- Calculamos el radio de la base menor (x): $\left.\right\} \dfrac{18}{x} = \dfrac{30}{10} \rightarrow x = \dfrac{18 \cdot 10}{30} = 6$ cm
- Calculamos el volumen:

$$V_{\text{TRONCO DE CONO}} = V_{\text{CONO MAYOR}} - V_{\text{CONO MENOR}} =$$

$$= \frac{1}{3}\pi \cdot 10^2 \cdot 30 - \frac{1}{3}\pi \cdot 6^2 \cdot 18 = 3\,140 - 678{,}24 = 2\,461{,}76 \text{ cm}^3$$



2. Una esfera de 20 cm de radio se corta por dos planos paralelos que distan del centro 5 cm y 15 cm, respectivamente. Calcular el volumen de la porción de esfera comprendida entre ambos planos.

$$V_{\text{PORCIÓN DE CILINDRO}} = \pi \cdot 20^2 \cdot 10 = 4\,000\pi \text{ cm}^3$$

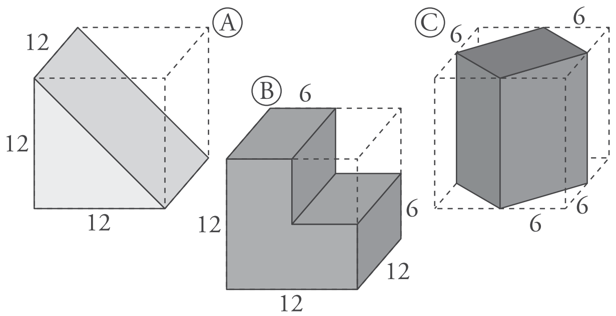
$$V_{\text{TRONCO DE CONO}} = \frac{1}{3}\pi \cdot 15^2 \cdot 15 - \frac{1}{3}\pi \cdot 5^2 \cdot 5 = 1\,083{,}33\pi \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{PORCIÓN DE ESFERA}} = V_{\text{PORCIÓN DE CILINDRO}} - V_{\text{TRONCO DE CONO}} =$$

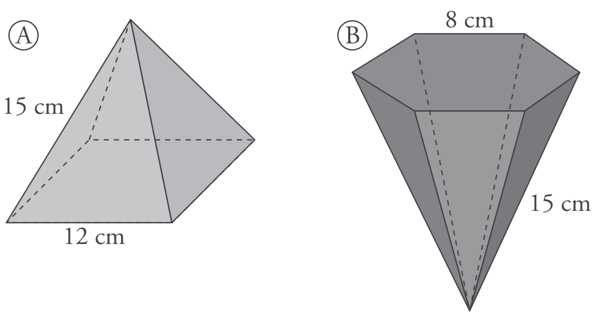
$$= 4\,000\pi - 1\,083{,}33\pi = 9\,158{,}34 \text{ cm}^3$$

Actividades

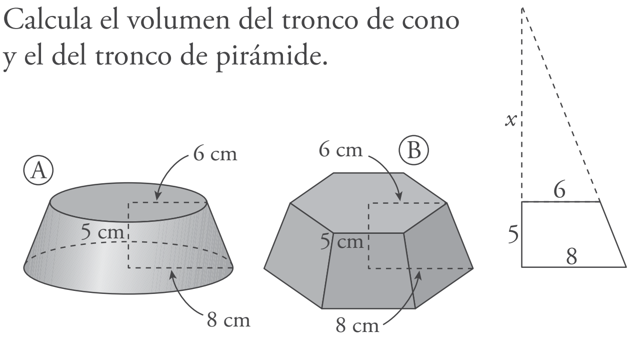
1 Calcula el volumen de estos prismas, obtenidos cortando un cubo de 12 cm de arista:



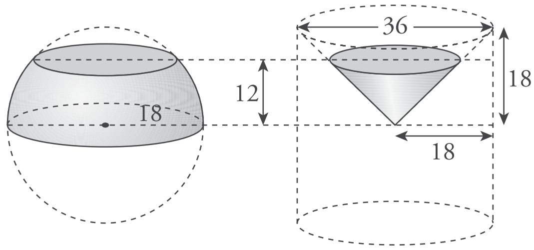
2 Calcula el volumen de estas pirámides cuyas bases son polígonos regulares:



3 Calcula el volumen del tronco de cono y el del tronco de pirámide.



4 Se corta una esfera de 36 cm de diámetro por dos planos paralelos: uno pasa por el centro y el otro dista 12 cm del centro.



Calcula el volumen de cada una de las tres porciones en las que ha quedado dividida la esfera.

5 Coordenadas geográficas

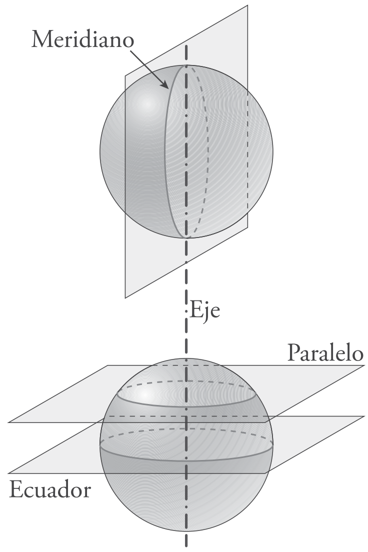
La esfera terrestre

La Tierra es una esfera que gira como una peonza. Al arrastrarnos en su giro, nos permite contemplar todos los cuerpos celestes que nos rodean. De ellos, el más importante es el Sol. Nuestro ritmo de vida está regido por sus apariciones y desapariciones en el horizonte: los días y las noches.

El **giro de la Tierra** se produce alrededor de un **eje,** línea imaginaria que pasa por su centro y la corta en dos puntos: los **polos.**

Los planos que contienen el eje cortan a la superficie de la Tierra en unos círculos máximos llamados **meridianos.** Todos ellos pasan por los polos.

Los planos perpendiculares al eje de la Tierra la cortan en circunferencias llamadas **paralelos.** De ellas, la que tiene su centro en el centro de la esfera se llama **ecuador.** Es una circunferencia máxima que divide la superficie de la Tierra en dos mitades: los hemisferios norte y sur.



Coordenadas geográficas

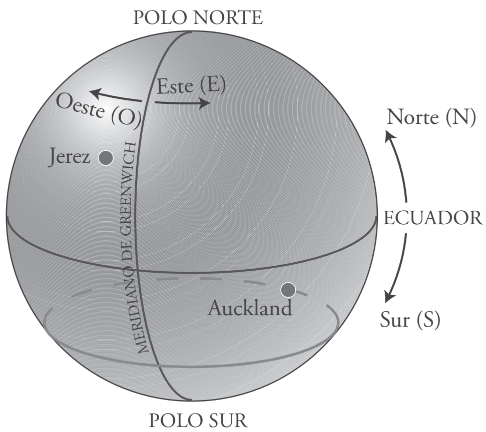
Etimología

Ecuador: De *aequus*, "igual". El ecuador es un plano "equitativo" que deja la misma cantidad de esfera arriba que abajo.

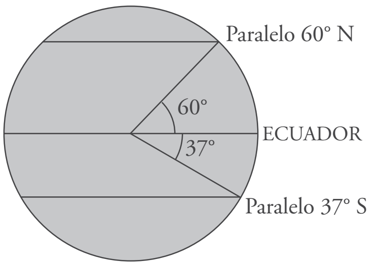
Meridiano: De *meridies*, "mediodía". Porque el Sol pasa por el meridiano de un lugar al mediodía.

Por cada punto de la Tierra (por ejemplo, Auckland, Nueva Zelanda) pasan un paralelo y un meridiano. Se designan por la posición que ocupan respecto a dos círculos máximos:

- El ecuador.
- Un cierto meridiano. Concretamente el que pasa por Greenwich, localidad próxima a Londres en la cual hay un importante observatorio astronómico.



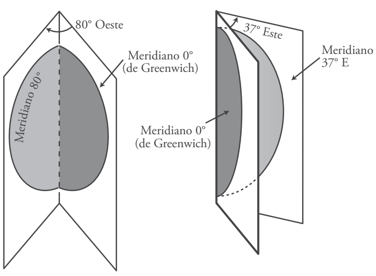
Latitud



La latitud de un punto de la Tierra es la medida angular del arco de meridiano que va de dicho punto al ecuador. Hay que añadir si está al norte (N) o al sur (S). Auckland está en el paralelo 37° S.

Todos los puntos de un paralelo tienen la misma latitud.

Longitud

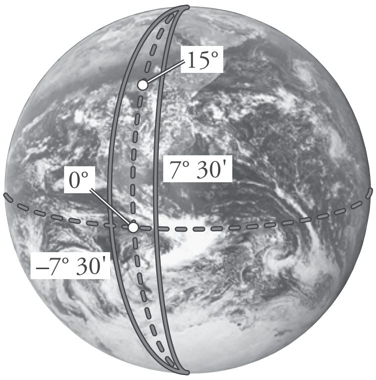


La longitud de un punto de la Tierra es el ángulo que forma el plano que determina el meridiano del lugar con el plano que determina el meridiano de Greenwich. Auckland está en el meridiano 174° E.

Las **coordenadas geográficas** de un lugar son su **longitud** y su **latitud.** Las coordenadas geográficas de Auckland son 174° E 37° S, que está en las antípodas de Jerez de la Frontera, de coordenadas geográficas 6° O 37° N.

Husos horarios

Ten en cuenta



La superficie terrestre se ha dividido en 24 husos horarios.

El meridiano de Jerez es el antimeridiano de Auckland. Por eso, en todo momento, difieren 12 horas.

El tiempo que tarda el Sol en *dar una vuelta* en su movimiento aparente alrededor de la Tierra (es decir, el tiempo que media entre dos pasos consecutivos por el meridiano de un lugar) se llama día. Cuando el Sol pasa por el meridiano de un lugar, se dice que es mediodía. Cuando pasa por su antimeridiano, medianoche.

Según eso, en cada longitud será mediodía en un momento distinto y, por tanto, si los relojes se ajustasen a ese hecho, lugares próximos tendrían horas parecidas pero no iguales, lo cual supondría un caos horario. Por ello se establecen saltos que van de hora en hora, del siguiente modo:

Centrado en el meridiano 0°, se forma un huso esférico de 15° (360° : 24 h = 15° cada hora). En ese huso, serán las 12 h cuando el Sol pase por el meridiano 0°. Este es el huso horario que corresponde a España, salvo a la Comunidad Autónoma de Canarias. A partir de él se forman los otros 23 husos.

Los distintos países se amoldan más o menos a esta regla, con algunos reajustes para evitar, por ejemplo, que un país pequeño tenga dos horas distintas en su territorio.

Problema resuelto

En Bilbao son las 12 h. ¿Qué hora es en Estambul? ¿Y cuál es en Monterrey?

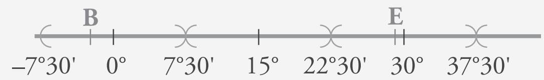
Latitudes:

Bilbao → 3° Oeste

Estambul → 29° Este

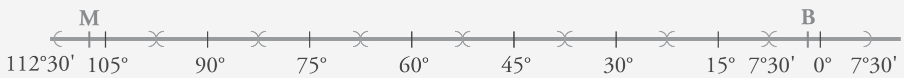
Monterrey → 100° Oeste

- Bilbao está en el huso horario cero. Estambul está dos husos horarios al este.



En Estambul serán 2 h más que en Bilbao: las 14 h.

- Monterrey: 100° = 15° · 6 + 10°. Monterrey está 7 husos horarios al oeste de Bilbao. Por tanto, son 7 horas menos: las 5 h.



Actividades

1 El metro, unidad de medida de longitud, se definía antiguamente como *la diezmillonésima parte de un cuadrante de meridiano terrestre*. Es decir, un meridiano terrestre tiene 40 000 000 de metros. Según esto:

a) Calcula el radio de la Tierra en kilómetros.

b) Su superficie en kilómetros cuadrados.

c) Su volumen en kilómetros cúbicos.

d) Calcula el área de un huso horario.

2 Los paralelos son circunferencias menores. Calcula lo que mide el perímetro de los siguientes paralelos:

a) 60° b) 30° c) 45°

3 Un barco va de un punto *A*, situado en las costas de África de 30° latitud norte y 10° longitud oeste, a otro *B*, en las costas de América de 30° latitud norte y 80° longitud oeste, siguiendo el paralelo común.

a) ¿Qué distancia ha recorrido?

b) ¿Qué distancia recorrería si la diferencia de longitudes de los dos puntos fuera de 180°?

c) ¿Qué distancia recorrería en este último caso si pudiera navegar de un punto a otro siguiendo un arco de círculo máximo?

4 En Río de Janeiro (43° O) son las 7 de la mañana. ¿Qué hora es en Hiroshima (132° E)?

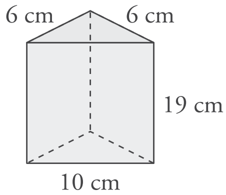
Ejercicios y problemas

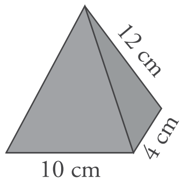
Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

Practica

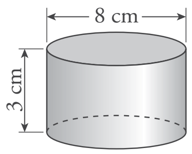
Desarrollos y áreas

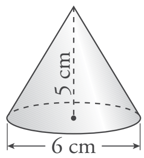
1 ▼▽▽ Dibuja el desarrollo plano y calcula el área total de los siguientes cuerpos geométricos:

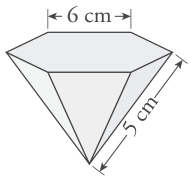
a) 

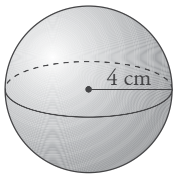
b) 

2 ▼▽▽ Calcula la superficie total de cada cuerpo:

a) 

b) 

c) 

d) 

3 ▼▽▽ Dibuja estos cuerpos y calcula su área:

a) Prisma de altura 20 cm y cuya base es un rombo de diagonales 18 cm y 12 cm.

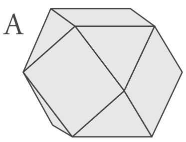
b) Pirámide hexagonal regular de arista lateral 18 cm y arista básica 6 cm.

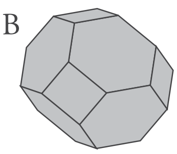
4 ▼▽▽ Dibuja estos cuerpos y calcula su área:

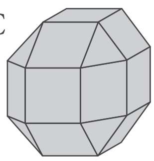
a) Cilindro de altura 27 cm y cuya circunferencia básica mide 44 cm.

b) Tronco de cono generado al girar, alrededor de su altura, un trapecio rectángulo de bases 10 cm y 12 cm y altura 5 cm.

5 ▼▽▽ Calcula el área total de los siguientes poliedros semirregulares de arista 8 cm:

A 

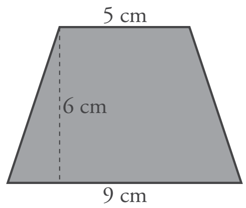
B 

C 

6 ▼▽▽ Halla el área total de un tronco de pirámide cuadrangular regular cuyas bases tienen de lado 30 cm y 14 cm y cuya arista lateral mide 17 cm.

7 ▼▽▽ Haciendo girar un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 9 cm y 12 cm alrededor de cada uno de ellos, se obtienen dos conos. Dibújalos y halla el área total de cada uno de ellos.

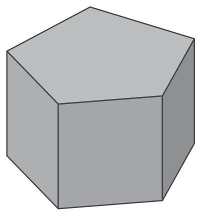
8 ▼▽▽ Calcula el área total del tronco de cono generado al girar este trapecio isósceles alrededor de una recta perpendicular a sus bases en su punto medio:

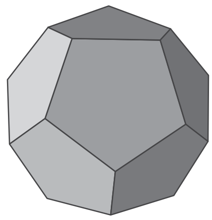


9 ▼▽▽ Calcula la superficie de:

a) Un prisma recto pentagonal regular cuyas aristas miden, todas, 10 cm.

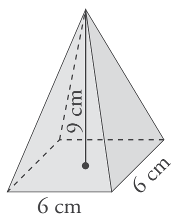
b) Un dodecaedro regular de arista 10 cm.

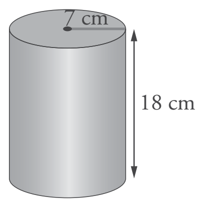


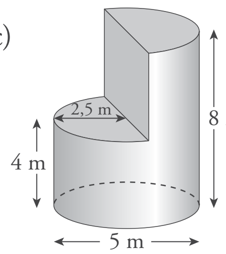


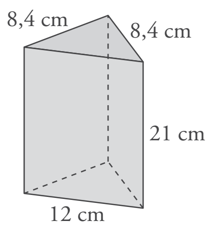
Volúmenes

10 ▼▽▽ Calcula el volumen de estos cuerpos:

a) 

b) 

c) 

d) 

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

11 ▼▽▽ Calcula el volumen de los siguientes cuerpos geométricos:

a) Octaedro regular de arista 10 cm.

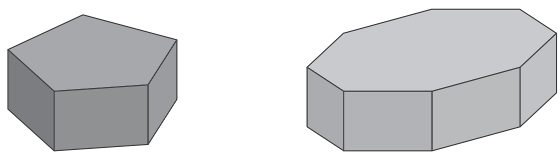
b) Pirámide hexagonal regular cuya arista lateral mide 15 cm y la arista de la base 8 cm.

c) Cono de radio 9 cm y generatriz 15 cm.

d) Semiesfera de radio 10 cm.

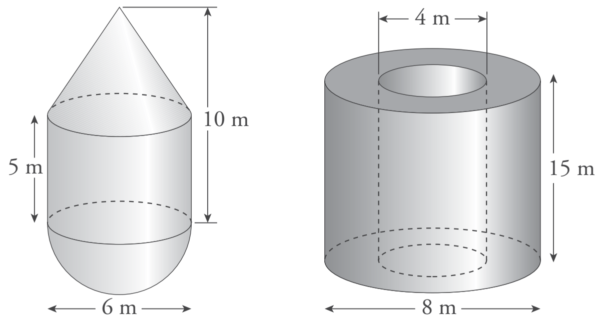
e) Cilindro inscrito en un prisma recto de base cuadrada de lado 6 cm y altura 18 cm.

12 ▼▽▽ Calcula el volumen de estos dos prismas regulares. En ambos, la arista de la base mide 10 cm y la altura, 8 cm.



P. PENTAGONAL　　　P. OCTOGONAL

13 ▼▽▽ Calcula el volumen de estos cuerpos:



Coordenadas geográficas

14 ▼▽▽ Dos ciudades tienen la misma longitud, 15° E, y sus latitudes son 37° 25' N y 22° 35' S. ¿Cuál es la distancia entre ellas?

15 ▼▽▽ Cuando en el huso 0 son las 8 a.m., ¿qué hora es en el tercer huso al E? ¿Y en el quinto al O?

Autoevaluación

1 Describe el poliedro que se obtiene truncando un octaedro regular mediante planos que cortan las aristas a un tercio del vértice. ¿Se trata de un poliedro semirregular? Explica por qué.

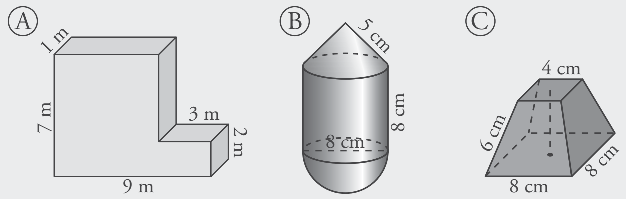
2 Calcula la superficie total de:

a) Una pirámide de base cuadrada en la que la arista lateral y la arista de la base son iguales y miden 10 cm.

b) Un tronco de cono cuyas bases tienen radios de 9 m y 6 m, y la generatriz, 5 m.

3 En una esfera de 8 cm de radio se dan dos cortes paralelos a distinto lado del centro, alejados de él 2 cm y 3 cm respectivamente. Calcula la superficie de la zona esférica comprendida entre ambos cortes.

4 Calcula el volumen de estos cuerpos:



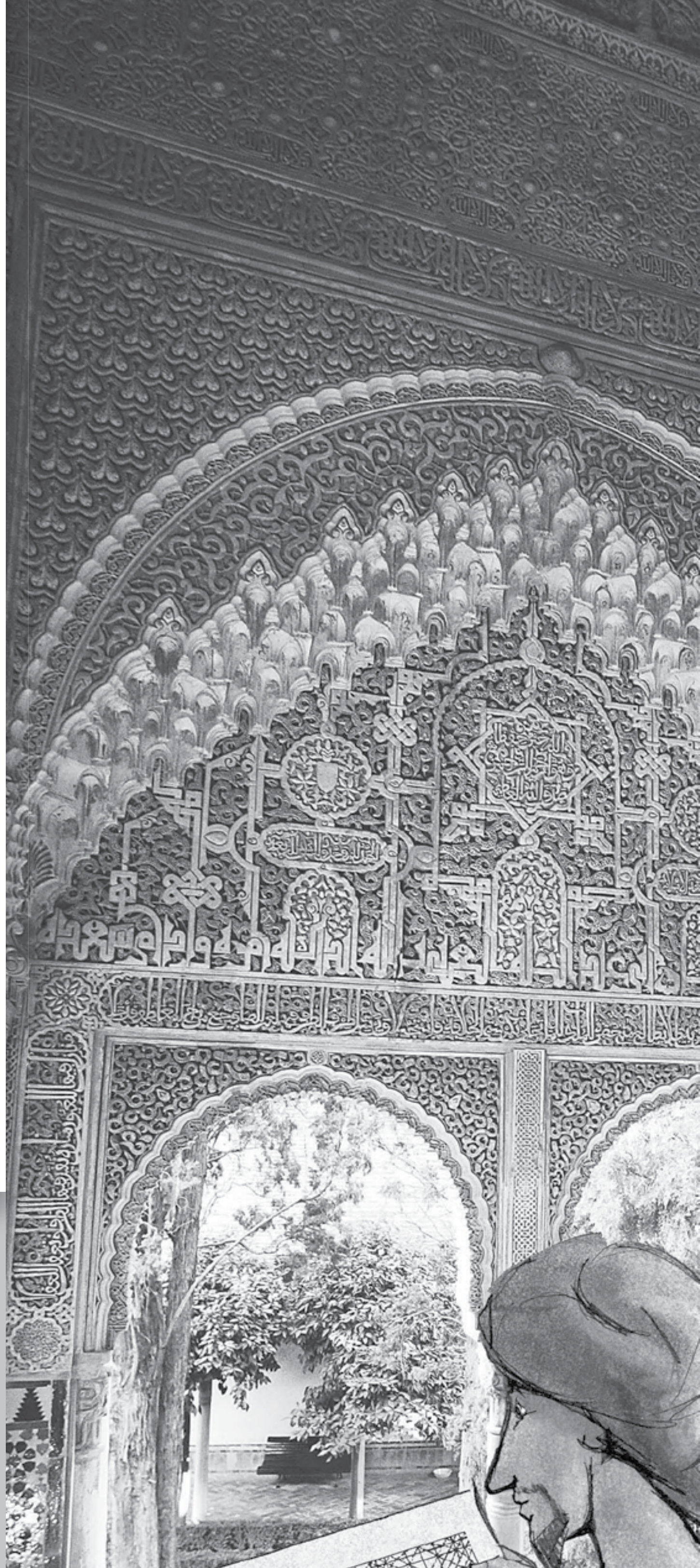
5 Dos ciudades están en el ecuador y sus longitudes se diferencian en 10°. ¿Cuál es la distancia entre ellas?

6 Las coordenadas geográficas de Melilla son 35° 17' N 2° 56' O, y las de Tokio, 35° 42' N 139° 46' E.

a) ¿Cuál es el uso horario de cada una?

b) ¿Qué hora es en Tokio cuando en Melilla son las 8 de la mañana?

11 Trans-formaciones geométricas



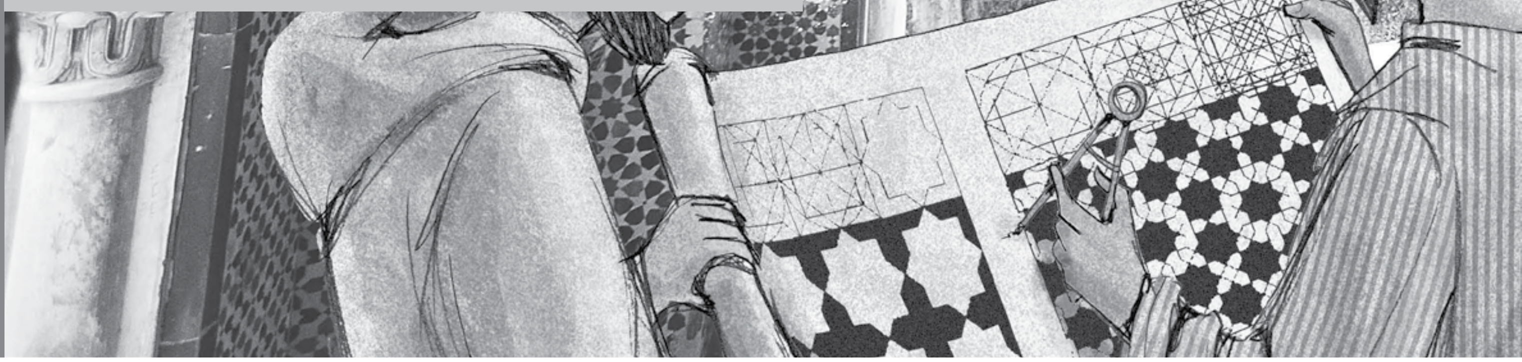
Cuando visitamos la Alhambra de Granada, quedamos fascinados por sus jardines, patios, fuentes, arcos, estancias... Y, sin duda, también nos llama poderosamente la atención la gran variedad de mosaicos que adornan paredes y techos.

¿Por qué los árabes fueron tan aficionados a este tipo de ornamentos? La religión musulmana recomendaba no representar seres vivos: no solo personas, sino también animales o plantas. Por eso, los artesanos musulmanes de los siglos XIII y XIV se volcaron en la expresión de formas geométricas para decorar los palacios.

Sin embargo, los mosaicos árabes son mucho más que hermosas filigranas. Los artistas que los diseñaron poseían una sólida formación geométrica, como quedó demostrado hace unas décadas: se comprobó que con unos pocos elementos geométricos y algunas transformaciones se pueden diseñar diecisiete tipos de mosaicos, exactamente los que se encuentran en las paredes de la Alhambra.

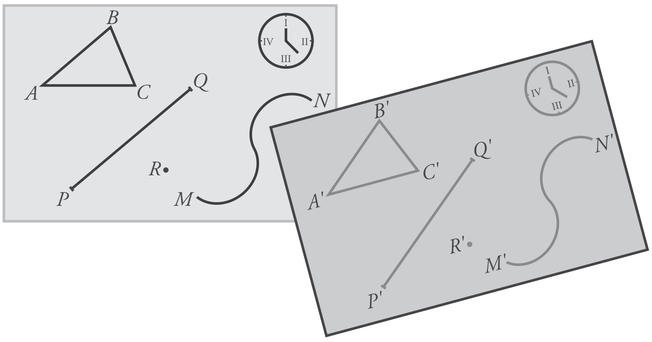
DEBERÁS RECORDAR

- Cómo dibujar ángulos de 60° con regla y compás. Cómo trazar ángulos rectos sobre papel cuadriculado (con los lados no paralelos a las líneas de la cuadrícula).
- Cómo representar puntos y rectas.
- Figuras simétricas. Ejes de simetría.



1 Movimientos en el plano

Sobre una tarjeta hemos dibujado varias figuras. Arrastramos la tarjeta sobre la mesa haciendo que ocupe otra posición.

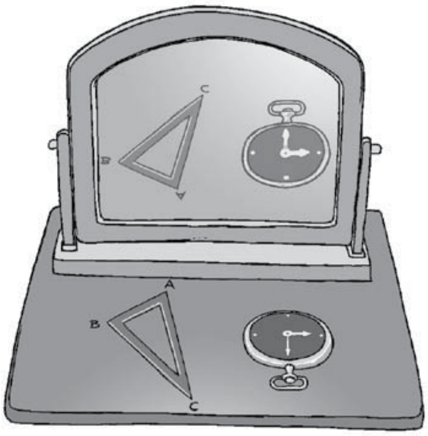


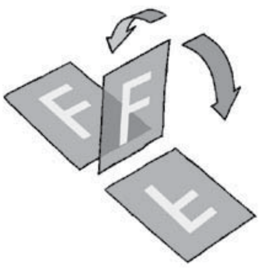
Las figuras que hay en la tarjeta se han limitado a moverse. Mantienen su forma y su tamaño. Esta transformación se llama movimiento.

Un **movimiento** es una transformación del plano en la cual todas las figuras mantienen su forma y su tamaño.

En un movimiento, la distancia entre dos puntos cualesquiera se mantiene invariable.

Movimientos directos y movimientos inversos





Si miramos una serie de figuras y sus imágenes en un espejo, observamos que las figuras reflejadas tienen la misma forma y el mismo tamaño que la original. La transformación producida por el espejo es, pues, un movimiento.

Sin embargo, las agujas del reloj reflejado giran en sentido contrario a las del reloj original. Este movimiento que cambia el sentido de giro de las agujas del reloj se llama movimiento inverso.

El movimiento descrito arriba mediante una tarjeta que se deslizaba mantiene el sentido de giro. Era un movimiento directo.

Hay dos tipos de movimientos:

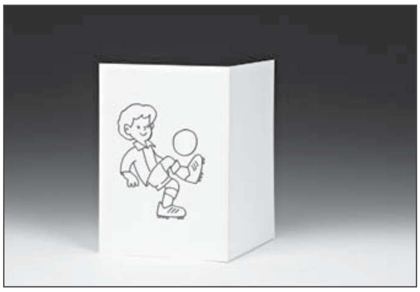
Movimientos directos, que mantienen el sentido de giro.

Movimientos inversos, que cambian el sentido de giro.

Los **movimientos directos** se llaman también **deslizamientos,** pues, como hemos hecho con la tarjeta de arriba, las figuras *se deslizan* hasta su nueva posición. Sin embargo, en los **movimientos inversos** hay que *sacar del plano* cada figura para llevarla a su posición final.

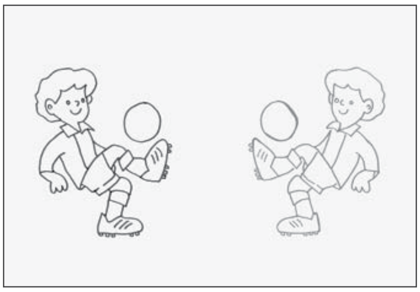
Actividades

1



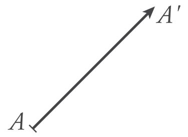
Toma una hoja y dibuja una figura en la mitad izquierda.

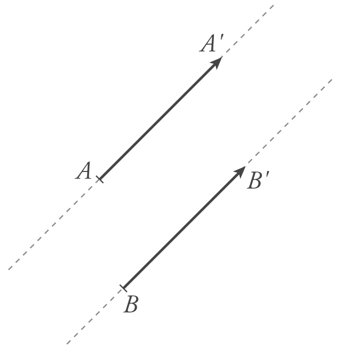
Pliégala por la mitad y cálcala (apóyate en una ventana).



Despliega. Observa que has efectuado un movimiento inverso.

2 Estudio de las traslaciones





Estas dos flechas son el mismo vector.

Vectores

Una flecha $\overrightarrow{AA'}$ se llama **vector.** A es el **origen** y A' el **extremo.** La longitud del vector, $\overline{AA'}$, es su **módulo.**

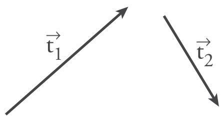
Las flechas $\overrightarrow{AA'}$ y $\overrightarrow{BB'}$ son el mismo vector si tienen:

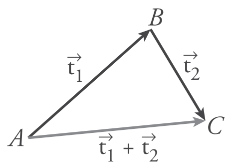
— El mismo módulo (es decir, si $\overline{AA'} = \overline{BB'}$).

— La misma dirección (son paralelas o están sobre la misma recta).

— El mismo sentido (las puntas de las flechas van hacia el mismo lado).

Para **sumar dos vectores,** $\vec{t}_1$ y $\vec{t}_2$, situamos el origen del segundo coincidiendo con el extremo del primero.



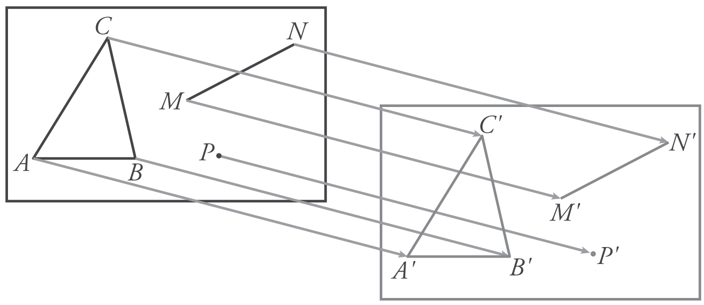


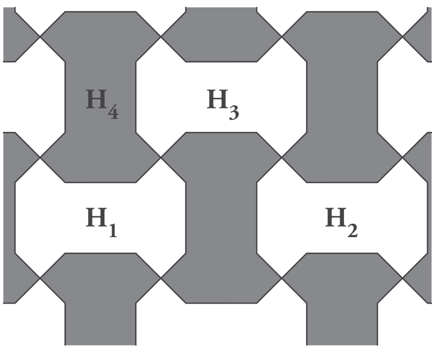
$\overrightarrow{AC}$ es el vector suma:

$\overrightarrow{AC} = \vec{t}_1 + \vec{t}_2$

Concepto de traslación

Sobre una tarjeta hemos dibujado varias figuras geométricas. Si deslizamos la tarjeta de modo que sus bordes se mantengan paralelos a sus posiciones iniciales, diremos que la hemos sometido a una **traslación.**





Si unimos cada punto con su homólogo mediante una flecha, $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{CC'}$, todas ellas tienen la misma longitud y la misma dirección. Es decir, son el mismo vector.

> Se llama **traslación T,** según un vector $\vec{t}$, a una transformación que asocia a cada punto P otro punto P' tal que $\overrightarrow{PP'} = \vec{t}$.

Actividades

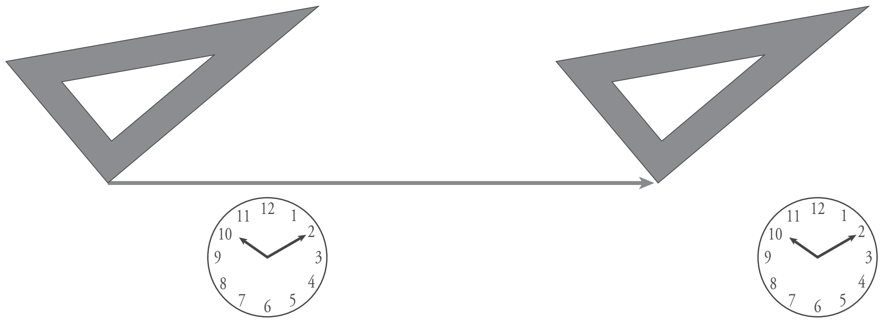
1 Observa el mosaico de arriba, al que se le llama multihueso. De las transformaciones que llevan $\mathbf{H_1}$ a $\mathbf{H_2}$, $\mathbf{H_3}$ y $\mathbf{H_4}$:

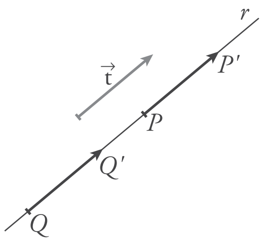
a) ¿Cuál o cuáles de ellas son traslaciones?

b) ¿Cuál es el vector que caracteriza la traslación que transforma $\mathbf{H_1}$ en $\mathbf{H_2}$? ¿Y el que transforma $\mathbf{H_2}$ en $\mathbf{H_3}$? ¿Y el que transforma $\mathbf{H_3}$ en $\mathbf{H_1}$?

Las traslaciones son movimientos directos

Las traslaciones son, evidentemente, deslizamientos, es decir, movimientos directos: mantienen la forma y el tamaño de las figuras y, además, conservan el giro de las agujas de un reloj.





Las rectas paralelas al vector traslación son invariantes, pues un punto de r se transforma en otro punto de r.

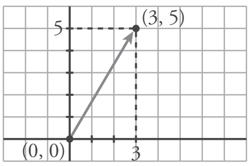
Elementos dobles (invariantes) en una traslación

En una traslación **no hay puntos dobles** (es decir, **puntos que se transformen en sí mismos**), pues todos los puntos se desplazan.

Cualquier recta paralela al vector traslación es doble (se transforma en sí misma), pues cada punto P de la recta se transforma en otro punto P' de la recta.

Actividades

2 En unos ejes coordenados considera el vector $\vec{t}$ de origen (0, 0) y extremo (3, 5).

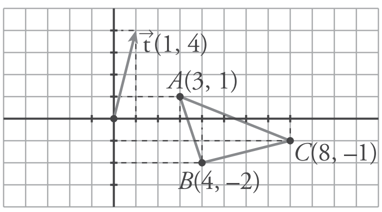


Lo designaremos, simplemente, $\vec{t}(3, 5)$.

a) Traslada los puntos $A(0, -4)$, $B(-3, -5)$, $C(0, 0)$ y $D(5, -1)$ mediante este vector.

b) Comprueba que los puntos $M(1, 3)$, $N(7, -1)$ y $X(4, 1)$ están alineados. Trasládalos mediante el vector $\vec{t}$ y comprueba que sus correspondientes también están alineados.

3 a) Traslada el triángulo de vértices $A(3, 1)$, $B(4, -2)$ y $C(8, -1)$ según el vector $\vec{t}(1, 4)$.

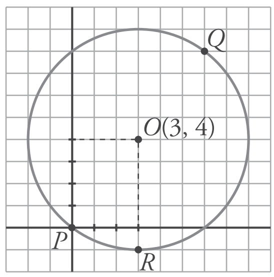


Comprueba que los triángulos ABC y $A'B'C'$ son iguales.

b) Comprueba que la recta $r: y = -3 + 4x$ se transforma en sí misma (es doble) según la traslación descrita en el apartado a).

Para ello, toma varios puntos de r [por ejemplo, (0, –3), (1, 1), (2, 5)] y comprueba que sus transformados están también en r.

4 Dibuja unos ejes coordenados sobre papel cuadriculado. Traza con compás la circunferencia de centro $O(3, 4)$ y radio 5.



a) Comprueba que la circunferencia pasa por $P(0, 0)$, $Q(6, 8)$ y $R(3, -1)$.

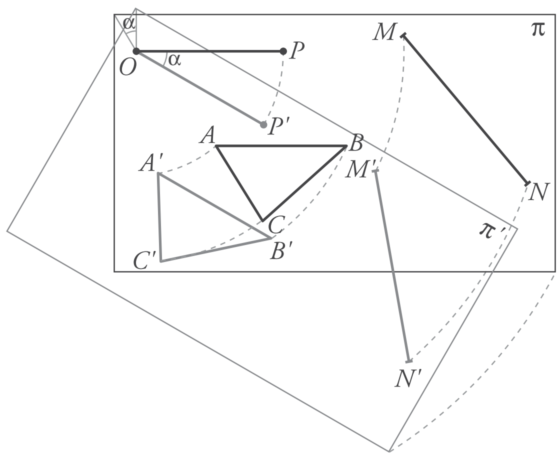
b) Traslada los puntos O, P, Q y R mediante la traslación $\mathbf{T}$ de vector $\vec{t}(6, -2)$.

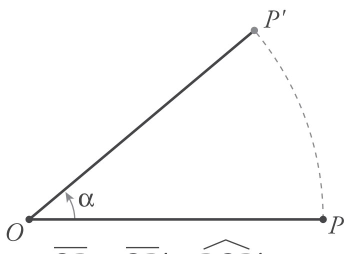
c) Comprueba que la circunferencia cuyo centro es $O' = \mathbf{T}(O)$ y radio 5 pasa por P', Q' y R'.

d) Trasladando algunos de sus puntos, averigua en qué rectas se transforman el eje X y el eje Y.

3 Estudio de los giros

El plano π, representado por un rectángulo, aparece girado sobre sí mismo un ángulo α alrededor del punto O. En el movimiento arrastra a todas las figuras situadas sobre él.



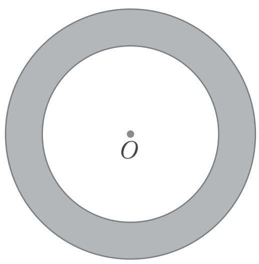


$\overline{OP} = \overline{OP'}$, $\widehat{POP'} = \alpha$

Dados un punto O y un ángulo α, se llama **giro de centro O y ángulo α** a una transformación **G** que hace corresponder a cada punto P otro punto $P' = \mathbf{G}(P)$ de modo que:

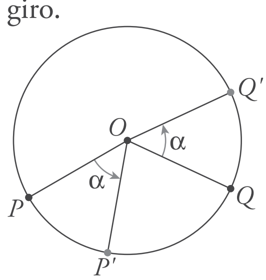
$$\overline{OP} = \overline{OP'} \quad \text{y} \quad \widehat{POP'} = \alpha$$

α debe ser un ángulo orientado. Consideramos sentido de giro positivo al contrario al movimiento de las agujas del reloj. El giro del ejemplo de más arriba es de ángulo negativo.



Una corona circular con centro en el centro de giro es invariante.

- Los giros son movimientos directos (deslizamientos): mantienen la forma y el tamaño de las figuras y, además, conservan el sentido de giro.
- El centro de giro es el único **punto doble**.
- Las circunferencias de centro O son **figuras dobles**.



Actividades

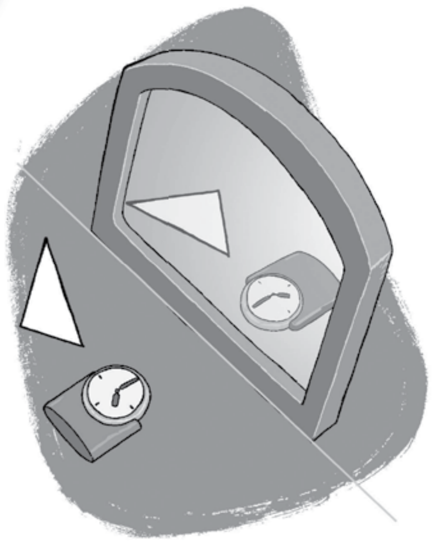
1 Dibuja unos ejes coordenados en una hoja de papel cuadriculado. Considera el giro **G** de centro $O(0, 0)$ y ángulo $\alpha = 90°$.

a) Transforma mediante **G** los puntos $A(-5, 0)$, $B(0, 5)$, $C(4, 3)$ y señala el triángulo $A'B'C'$ transformado del triángulo ABC.

b) ¿En qué se transforma la recta r que pasa por A y por B?

c) ¿En qué se transforma la circunferencia de centro O y radio 7?

4 Simetrías axiales

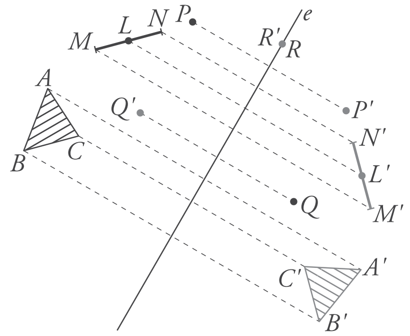


En una simetría, las figuras "se reflejan" en e como si fuera un espejo.

Dada una recta e, a cada punto, P, le hacemos corresponder otro punto, P', de modo que:

- El segmento PP' sea perpendicular a e.
- La distancia de P a e es igual a la distancia de P' a e.

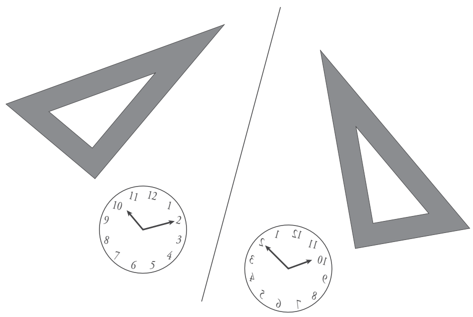
Es decir, e es mediatriz del segmento PP'.



Se llama **simetría de eje e** a una transformación, **S,** que hace corresponder a cada punto P del plano otro punto $\mathbf{S}(P) = P'$ tal que la recta e es mediatriz del segmento PP'.

Las simetrías son movimientos inversos

Las simetrías son **movimientos,** pues conservan la forma y el tamaño de las figuras. Pero son movimientos **inversos,** porque cambian el sentido de giro de las agujas de un reloj.



Elementos dobles en una simetría

En una simetría de eje e, todos los puntos de e son dobles. Por tanto, e es una recta invariante.

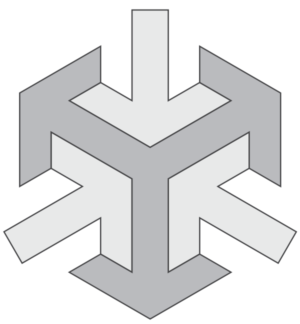
También son invariantes las rectas perpendiculares a e.

Figuras simétricas

Si una figura es invariante respecto a una simetría axial, se dice que es una **figura simétrica** y al eje se le llama **eje de simetría** de la figura.

Actividades

1 Señala los ejes de simetría de esta figura.



2 Consideramos la simetría **S** de eje la recta $y = x$. Dibuja los transformados mediante **S** de:

a) Los puntos $A(3, 1)$, $B(4, 0)$, $C(0, 4)$, $D(5, 5)$.

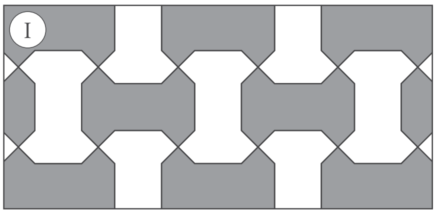
b) El eje X.

c) El eje Y.

d) La circunferencia C_1 de centro (1, 4) y radio 2.

e) La circunferencia C_2 de centro (3, 3) y radio 5.

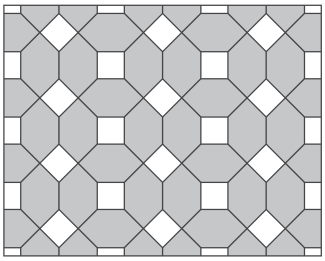
5 Estudio de los mosaicos

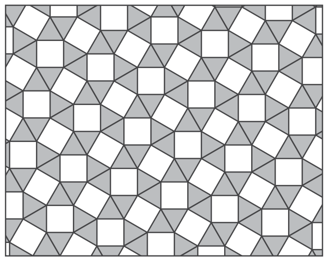


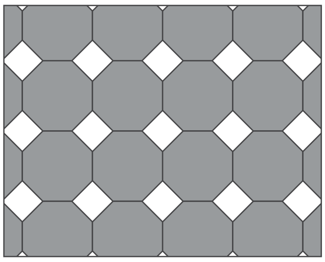
Mosaicos

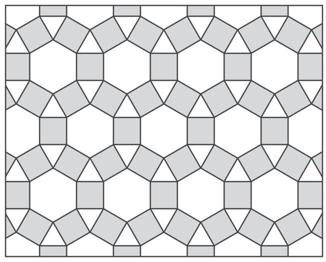
El *multihueso* que viste al inicio de la unidad es un **mosaico:** una configuración geométrica con la que se puede llenar el plano.

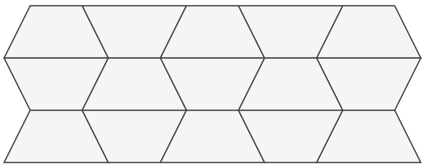
Hay mosaicos formados con una sola pieza y otros formados con dos o más piezas. Observa los siguientes:

II


III


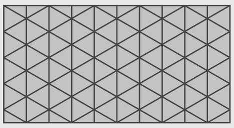
IV


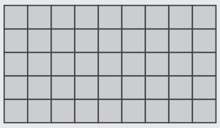
V


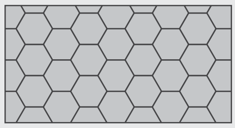


Este mosaico está formado por un único tipo de piezas. Pero no es regular porque los trapecios no son polígonos regulares.

Mosaicos regulares son los formados por un único tipo de **polígono regular.** Solo hay tres: con triángulos, con cuadrados y con hexágonos.

VI


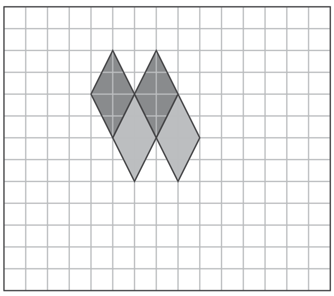
VII


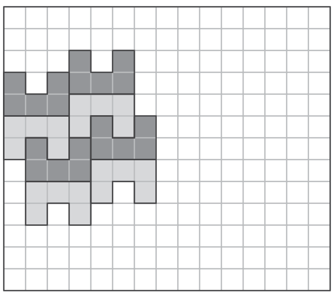
VIII


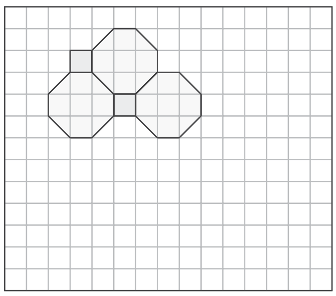
Mosaicos semirregulares son los formados por dos o más tipos de polígonos regulares. Por ejemplo, los mosaicos III, IV y V de arriba.

Actividades

1 Completa, en tu cuaderno, los siguientes mosaicos:

a)


b)


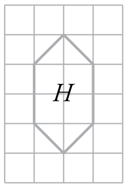
c)


Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

Practica

1 ▼▽▽ a) Represente en papel cuadriculado la figura H_1 obtenida a partir de H mediante la traslación del vector $\vec{t}_1(3, 2)$.

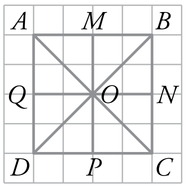


b) Dibuja la figura H_2 transformada de H_1 mediante la traslación $\vec{t}_2(2, -6)$.

c) Di cuál es el vector de la traslación que permite obtener H_2 a partir de H.

d) ¿Qué traslación habría que aplicar a H_2 para que se transformase en H?

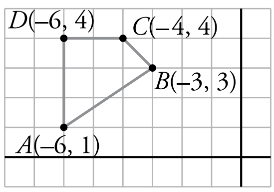
2 ▼▽▽ Hacemos un giro de centro O que transforma M en N.



a) Indica en qué puntos se transforman los puntos O, A, B, N y P.

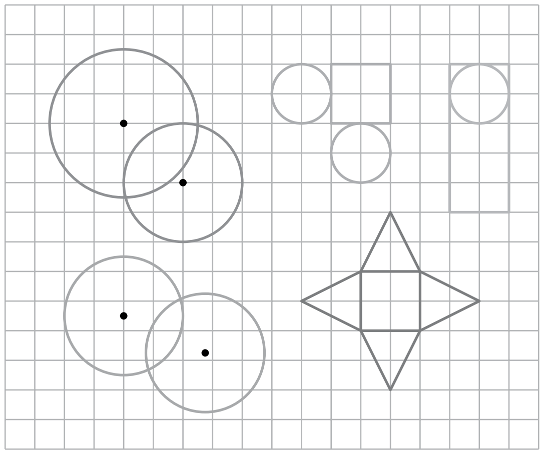
b) ¿En qué se transforma la recta que pasa por A y C? ¿Y el triángulo OPD?

3 ▼▼▽ Halla las coordenadas de los vértices del cuadrilátero $ABCD$, transformado mediante:

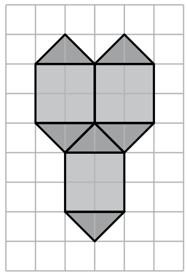


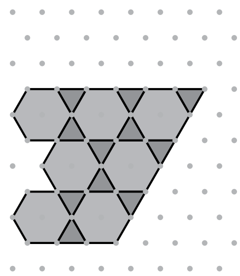
a) La simetría de eje X.
b) La simetría de eje Y.

4 ▼▼▽ ¿Cuáles son los ejes de simetría de las siguientes figuras?



5 ▼▽▽ a) Completa en tu cuaderno estos mosaicos:

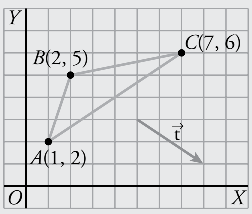




b) Identifica, en cada uno de ellos, algunos movimientos que lo transformen en sí mismo.

Autoevaluación

1 Averigua las coordenadas de los vértices del triángulo transformado del ABC mediante cada uno de los siguientes movimientos:



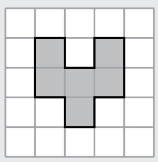
a) La traslación de vector $\vec{t}$.

b) La simetría de eje X.

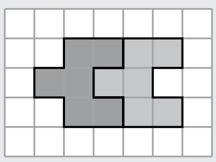
c) La simetría de eje Y.

d) El giro de centro O y ángulo –90° (90° en el sentido de las agujas del reloj).

2 Dibuja en papel cuadriculado un mosaico a partir de esta pieza:



Busca una forma de engranarlas distinta de esta:



12
Estadística

En todas las épocas, los gobernantes han querido tener controladas sus posesiones, ya fueran bienes o personas.

Existen testimonios escritos de que, ya hacia el año 3000 a.C., los babilonios y los egipcios disponían de inventarios sobre recolecciones agrícolas, ventas o trueques, rentas, censos de población… Algo parecido ocurrió en otros pueblos de la Antigüedad: en Israel (1300 a.C.), en China (2200 a.C.), en Grecia y en Roma (500 a.C.), y en Europa desde la Edad Media.

Hasta el siglo XVI, la estadística consistió en la recogida de datos relevantes y en su exposición ordenada y clara.

A mediados del siglo XVII, **John Graunt,** un comerciante londinense, realizó en sus horas libres un laborioso y profundo estudio sobre los nacimientos y las defunciones en Londres, entre 1604 y 1611. En este estudio analizaba cómo influían en ellos las causas naturales, sociales y políticas. Puede considerarse el primer trabajo estadístico serio sobre la población.

Sin embargo, la utilización de la palabra *estadística* para designar *la obtención, el estudio y la interpretación de grandes masas de datos*, parece que se dio por primera vez, un siglo más tarde, en Alemania. Su nombre viene del interés que este estudio tiene para *los asuntos de estado*.

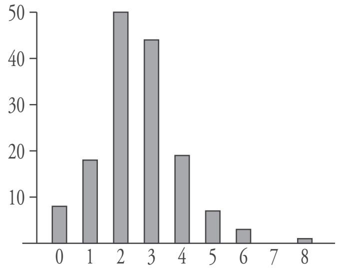
DEBERÁS RECORDAR

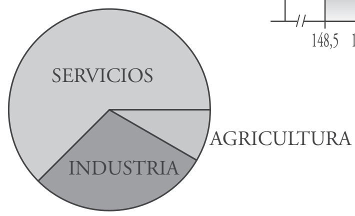
- Qué es una tabla de frecuencias.
- Cuáles son los parámetros estadísticos y cómo se calculan para valores aislados.

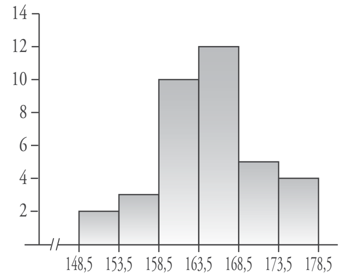
1 Población y muestra

En la página anterior hemos visto tres distribuciones. Cada una de ellas se refiere a un colectivo:

- 150 *familias* de una ciudad.
- Los 36 *alumnos y alumnas* de una clase.
- Los 600 000 *trabajadores* de una cierta comarca.







El colectivo objeto de un estudio estadístico se llama **población.**

A veces, el conjunto que interesa es demasiado numeroso para poder analizar cada uno de sus elementos; entonces se extrae una **muestra.** Por ejemplo, es posible que las 150 familias estudiadas sean una muestra extraída de una población más numerosa: todas las familias de esa ciudad.

De modo que un colectivo es población o muestra según nos interese por sí mismo, o bien sea un medio para inferir información sobre un colectivo más extenso.

Población es el conjunto de todos los elementos objeto de nuestro estudio.

Muestra es un subconjunto, extraído de la población, cuyo estudio sirve para inferir características de toda la población.

Individuo es cada uno de los elementos que forman la población o la muestra.

Por ejemplo: en una gasolinera se pretende hacer un estudio de su clientela. Para ello, se observan y se anotan ciertas características de algunos de los coches que repostan, elegidos al azar.

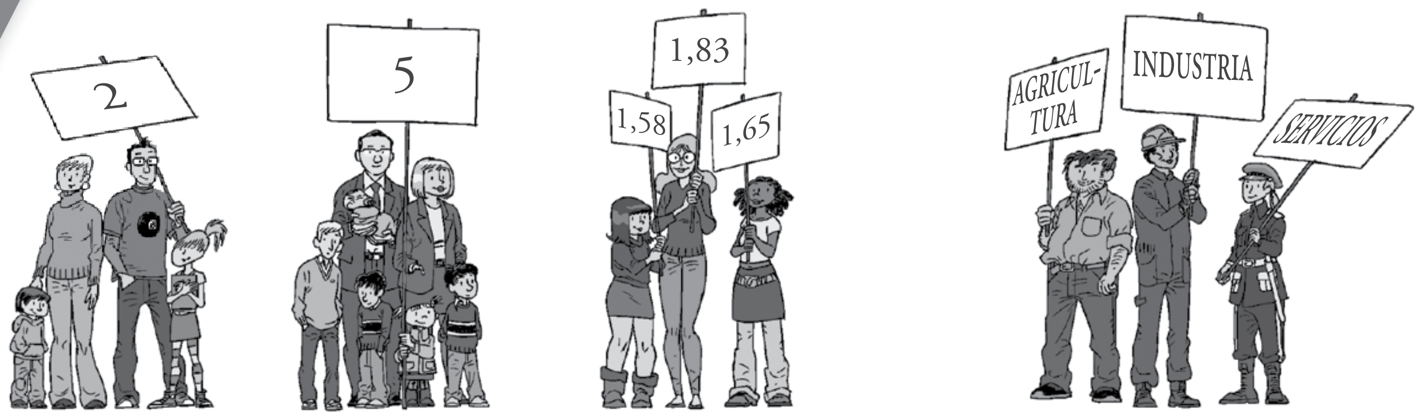
El conjunto de todos los coches que forman su clientela es la *población*. Los coches seleccionados para ser analizados forman la *muestra*. Cada coche es un *individuo*.

Actividades

1 Un fabricante de tornillos desea hacer un control de calidad. Para ello, recoge 1 de cada 100 tornillos producidos y lo analiza.

a) ¿Cuál es la población?
b) ¿Cuál es la muestra?
c) ¿Cuáles son los individuos?

2 Variables estadísticas



NÚMERO DE HIJOS ESTATURA SECTOR DE PRODUCCIÓN

El *número de hijos*, la *estatura* y el *sector de producción* son las variables que hemos estudiado en las distribuciones anteriores.

Las dos primeras **variables** son **cuantitativas,** porque sus valores se expresan con números (cantidades).

La tercera **variable** es **cualitativa,** porque el sector de producción al que pertenece un trabajador no se expresa mediante un número, sino mediante una cualidad.

Una **variable cuantitativa** es **discreta** cuando solo admite valores aislados (el número de hijos puede ser 2 ó 3, pero no una cantidad intermedia).

Una **variable cuantitativa** es **continua** cuando entre cada dos valores pueden darse todos los intermedios (una persona puede medir 172,4 cm, aunque habitualmente se redondea y se da un número entero de centímetros).

TIPOS DE VARIABLES ESTADÍSTICAS

- **Cuantitativa:** Numérica.

  Discreta: Solo puede tomar valores aislados.

  Continua: Podría tomar todos los valores de un intervalo.
- **Cualitativa:** No numérica.

En el ejemplo de la página anterior, supongamos que en cada coche se observa el *número de ocupantes*, el *tipo de carburante* y el *coste* del producto repostado. Estas tres variables son:

— Número de ocupantes (1, 2, 3, …): cuantitativa discreta.

— Tipo de carburante (gasóleo, súper, …): cualitativa.

— Coste (37,42 €): cuantitativa continua.

Actividades

1 El fabricante de tornillos descrito en la página anterior estudia en cada tornillo si es *correcto* o *defectuoso*, su *longitud* y el *número de pasos de rosca*. Di de qué tipo es cada una de estas variables.

3 Confección de una tabla de frecuencias

DATOS DESORDENADOS

↓

TABLA CON LOS DATOS ORGANIZADOS

Recuento

Para hacer el recuento, se leen las notas una a una y se hace una señal donde corresponda.

Si las señales se agrupan de cinco en cinco, se cuentan mejor. (La quinta es la horizontal y sirve para cerrar el manojo).

Notación

En las tablas de frecuencias se suele designar:

$x_i \rightarrow$ valores de la variable

$f_i \rightarrow$ frecuencia de cada valor

Una vez recogidos los datos, hay que **tabularlos;** es decir, hay que confeccionar una tabla para organizarlos. Esto se consigue con una **tabla de frecuencias.**

Confección de una tabla con datos aislados

Si la variable toma un número reducido de valores, se procede como en el ejemplo siguiente. En él, la variable, x_i, toma los valores 1, 2, 3, …, 10.

NOTAS OBTENIDAS POR UN GRUPO DE ALUMNAS				
9	4	8	5	5
4	1	7	2	2
3	9	6	4	10
8	2	1	6	7
6	10	10	8	8
4	6	5	5	10
6	7	2	5	5
3	5	3	6	8

<table>
<tr><th colspan="2">RECUENTO</th></tr>
<tr><td>1</td><td>||</td></tr>
<tr><td>2</td><td>||||</td></tr>
<tr><td>3</td><td>|||</td></tr>
<tr><td>4</td><td>||||</td></tr>
<tr><td>5</td><td>~~||||~~ ||</td></tr>
<tr><td>6</td><td>~~||||~~ |</td></tr>
<tr><td>7</td><td>|||</td></tr>
<tr><td>8</td><td>~~||||~~</td></tr>
<tr><td>9</td><td>||</td></tr>
<tr><td>10</td><td>||||</td></tr>
</table>

TABLA DE FRECUENCIAS	
x_i	f_i
1	2
2	4
3	3
4	4
5	7
6	6
7	3
8	5
9	2
10	4

Confección de una tabla con datos agrupados en intervalos

Si la variable toma muchos valores, conviene agruparlos en intervalos.

ALTURA DE 30 ALUMNAS Y ALUMNOS DE UNA CLASE				
168	160	168	175	168
168	158	149	160	178
158	163	171	162	163
156	154	160	165	165
161	162	166	163	170
164	165	173	172	168

<table>
<tr><th colspan="2">RECUENTO</th></tr>
<tr><td>Entre 148,5 y 153,5</td><td>|</td></tr>
<tr><td>Entre 153,5 y 158,5</td><td>||||</td></tr>
<tr><td>Entre 158,5 y 163,5</td><td>~~||||~~ ||||</td></tr>
<tr><td>Entre 163,5 y 168,5</td><td>~~||||~~ ~~||||~~</td></tr>
<tr><td>Entre 168,5 y 173,5</td><td>||||</td></tr>
<tr><td>Entre 173,5 y 178,5</td><td>||</td></tr>
</table>

TABLA DE FRECUENCIAS	
INTERVALO	f_i
148,5 y 153,5	1
153,5 y 158,5	4
158,5 y 163,5	9
163,5 y 168,5	10
168,5 y 173,5	4
173,5 y 178,5	2

Actividades

1 Lanzamos dos dados, sumamos las puntuaciones y anotamos los resultados. Repetimos la experiencia 30 veces:

11, 8, 9, 9, 3   4, 11, 7, 7, 8   7, 5, 6, 4, 4

7, 10, 2, 6, 10   7, 7, 6, 2, 8   7, 5, 8, 6, 9

Confecciona una tabla de frecuencias.

2 Con los datos del ejemplo anterior (altura de 30 alumnas y alumnos), efectúa una tabla de frecuencias con los datos agrupados en los intervalos siguientes:

147,5 - 151,5 - 155,5 - 159,5 - 163,5 -

167,5 - 171,5 - 175,5 - 179,5

4 Gráfico adecuado al tipo de información

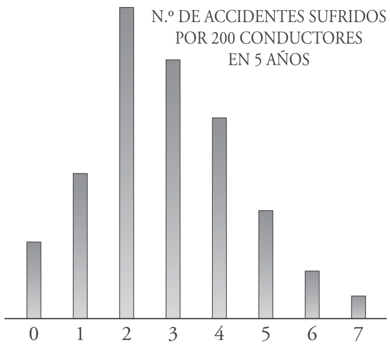
La elaboración de gráficos estadísticos es un arte. En los medios de comunicación encontramos espléndidas representaciones que nos permiten, con un solo golpe de vista, entender de qué se nos habla y asimilar la información que se nos da.

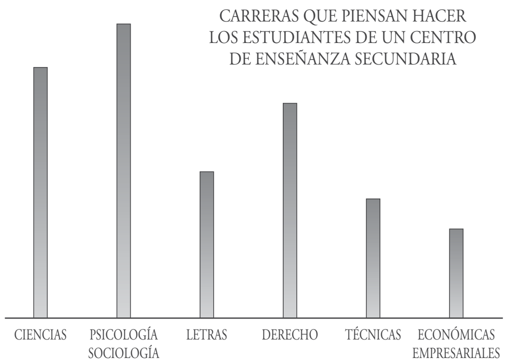
Sin pretender llegar a ese grado de virtuosismo, podemos reflexionar sobre algunas de las claves para utilizar con corrección los tipos de gráficos de uso más frecuente.

Diagrama de barras

El **diagrama de barras** se utiliza para representar tablas de frecuencias correspondientes a **variables cuantitativas discretas.** Por eso, las barras son estrechas y se sitúan sobre los valores puntuales de la variable.

También se utiliza para representar distribuciones de **variables cualitativas.**



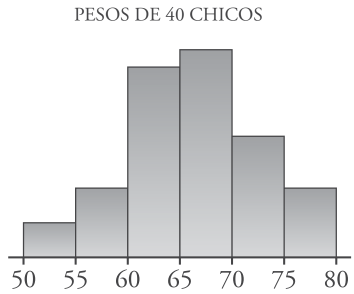


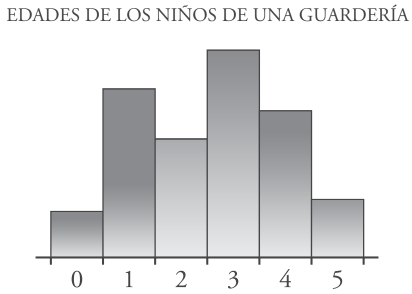
Histograma de frecuencias

El **histograma** se utiliza para distribuciones de **variable continua.** Por eso se usan rectángulos tan anchos como los intervalos.

Etimología

Histograma: Viene del griego *histos*, que significa “barra” y también “mástil de barco”.





Aunque los datos no vengan dados por intervalos (como en el caso de las edades de los niños de una guardería), cuando se trata de una variable continua (1 año significa que aún no ha cumplido 2) es razonable usar el histograma y no el diagrama de barras.

Polígono de frecuencias

El **polígono de frecuencias** se utiliza en los mismos casos que el histograma. Se construye uniendo los puntos medios de los lados superiores de los rectángulos y prolongando, al principio y al final, hasta llegar al eje.

Su sentido es suavizar los escalones que se producen en el histograma.

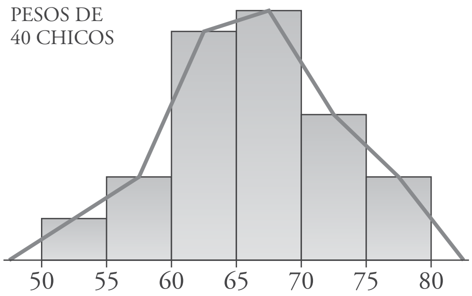
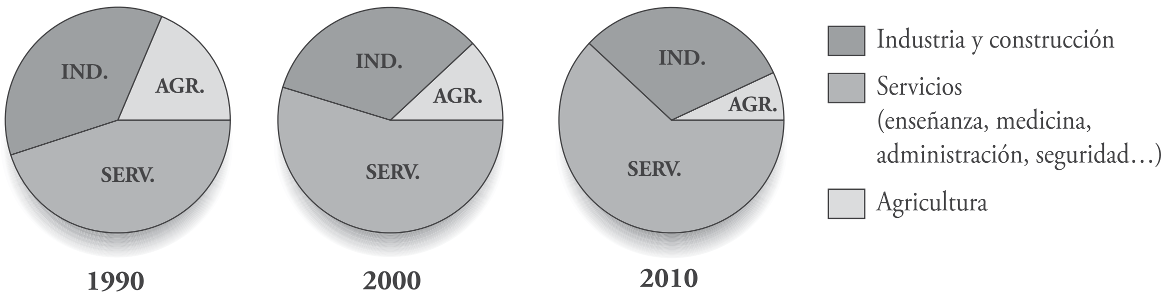


Diagrama de sectores

En un **diagrama de sectores,** el ángulo de cada sector es proporcional a la frecuencia correspondiente.

Se puede utilizar para todo tipo de variables, pero se usa muy frecuentemente para las variables cualitativas.

Este tipo de diagrama es especialmente adecuado para representar, en varios de ellos, diversas situaciones similares y poder establecer comparaciones. Por ejemplo, podemos comparar el reparto de la población laboral de una cierta comunidad autónoma, según el tipo de trabajo, en los años 1990, 2000 y 2010: observamos que la proporción de trabajadores en el sector de agricultura disminuye, mientras que en el sector de servicios, aumenta.



Actividades

1 Representa, mediante el gráfico adecuado, las tablas estadísticas siguientes:

a) Tiempo que emplean los alumnos y las alumnas de un curso en ir desde su casa al colegio.

TIEMPO (min)	N.° DE ALUMNOS
0 – 5	2
5 – 10	11
10 – 15	13
15 – 20	6
20 – 25	3
25 – 30	1

b) Número de alumnos y alumnas en el curso 2009/10 en una cierta comunidad autónoma, según la etapa de estudios en la que estaban.

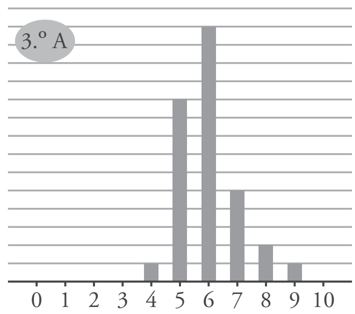
INFANTIL	55 000
PRIMARIA	125 000
SECUNDARIA OBLIGATORIA	100 000
BACHILLERATO Y FORMACIÓN PROFESIONAL	60 000
UNIVERSIDAD	80 000
TOTAL	420 000

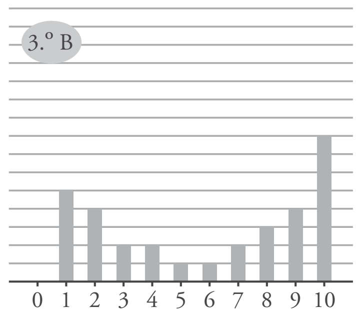
5 Parámetros estadísticos

Los parámetros estadísticos sirven para sintetizar la información dada por una tabla o por una gráfica. Los hay de dos tipos: de **centralización** y de **dispersión.**

Los parámetros de centralización nos indican en torno a qué valor (centro) se distribuyen los datos.

Los parámetros de dispersión nos informan sobre cuánto se alejan del centro los valores de la distribución.





La media no es suficiente

Las gráficas de la derecha corresponden a las notas de dos clases. En ambas, la nota media es, aproximadamente, 6. La **media** es un parámetro que nos informa sobre el centro alrededor del cual se distribuyen los valores. Pero observa que, aun teniendo la misma media, estas distribuciones son muy distintas. Necesitamos otros parámetros que señalen esas diferencias.

Medidas de centralización

Media

Si llamamos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a los valores que toma una distribución estadística, la **media,** o promedio, se designa por $\bar{x}$ y se calcula así:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \qquad \text{Abreviadamente,} \quad \bar{x} = \frac{\Sigma x_i}{n}$$

Notación

$\sum$ El signo Σ se utiliza para indicar sumas de varios sumandos.

Σx_i se lee:

"suma de los x_i"

Mediana

Si ordenamos los datos de menor a mayor, la **mediana,** *Me*, es el valor que está en medio; es decir, tiene tantos individuos por debajo como por encima.

Si el número de datos fuera par, a la mediana se le asigna el valor medio de los dos términos centrales.

Moda

La **moda,** *Mo*, es el valor con mayor frecuencia.

Los parámetros media, mediana y moda se llaman **medidas de centralización,** porque alrededor de ellos se distribuyen los valores de la distribución.

Actividades

1 Nos dan la distribución de notas siguiente:

2, 4, 4, 4, 5, 7, 9, 9, 10

a) Comprueba, calculándola, que la nota media es $\bar{x} = 6$.

b) Comprueba que la mediana es $Me = 5$.

c) ¿Cuál es la mediana si suprimimos el 10?

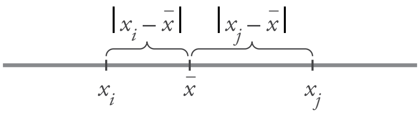
d) ¿Cuál es la moda?

Medidas de dispersión

Vamos a estudiar ahora parámetros que sirven para medir cómo de dispersos están los datos. En todos ellos, la idea clave es medir el grado de separación de los datos a la media.

Recorrido o rango

Es la diferencia entre el dato mayor y el menor. Es decir, es la longitud del tramo dentro del cual están los datos.



Desviación media

Es el promedio de las distancias de los datos a la media:

$$DM = \frac{|x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + \ldots + |x_n - \bar{x}|}{n} = \frac{\Sigma |x_i - \bar{x}|}{n}$$

Varianza

Es el promedio de los cuadrados de las distancias de los datos a la media:

$$\text{Varianza} = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2}{n} = \frac{\Sigma (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

Esta fórmula es equivalente a la siguiente:

$$\text{Varianza} = \frac{x_1{}^2 + x_2{}^2 + \ldots + x_n{}^2}{n} - \bar{x}^2 = \frac{\Sigma x_i{}^2}{n} - \bar{x}^2$$

Desviación típica, σ

Es la raíz cuadrada de la varianza: $\sigma = \sqrt{\text{varianza}}$

A partir de ahora prestaremos especial atención a los parámetros media ($\bar{x}$) y desviación típica (σ). La información que da cada uno de ellos complementa a la del otro.

¿Por qué la desviación típica?

La varianza tiene un grave inconveniente. Imagina que estamos tratando con una distribución de estaturas dadas en cm. La media vendría dada en cm, pero la varianza vendría en cm^2 (es decir, una superficie en lugar de una longitud). Por eso, extraemos su raíz cuadrada, obteniendo la desviación típica que, en nuestro ejemplo, sí sería una longitud dada en cm.

Ejercicio resuelto

Obtener las medidas de dispersión de la siguiente distribución de notas:

2, 4, 4, 4, 5, 7, 9, 9, 10

RECORRIDO: $10 - 2 = 8$ MEDIA: $\bar{x} = 6$

DESVIACIÓN MEDIA: $DM = \frac{|2-6| + |4-6| + |4-6| + \ldots}{9} = \frac{22}{9} = 2{,}44$

VARIANZA: $Var = \frac{(2-6)^2 + (4-6)^2 + (4-6)^2 + \ldots}{9} = \frac{64}{9} = 7{,}11$

o bien: $Var = \frac{2^2 + 4^2 + 4^2 + 4^2 + 5^2 + \ldots}{9} - 6^2 = \frac{388}{9} - 36 = 7{,}11$

DESVIACIÓN TÍPICA: $\sigma = \sqrt{\text{varianza}} = \sqrt{7{,}11} = 2{,}67$

Actividades

2 Halla las medidas de dispersión de esta distribución de pesos:

83, 65, 75, 72, 70, 80, 75, 90, 68, 72

3 Halla la varianza de la distribución siguiente:

8, 7, 11, 15, 9, 7, 13, 15

Calcúlala utilizando las dos fórmulas de la varianza. Comprueba que es mucho más cómoda la segunda.

6 Obtención de $\bar{x}$ y σ con calculadora

x_i	f_i
151	1
156	4
161	9
166	10
171	4
176	2

Calculadora

Casi todas las calculadoras científicas están preparadas para el cálculo de los parámetros $\bar{x}$ y σ.

Las orientaciones que aquí se ofrecen son generales, ya que cada modelo de calculadora tiene una nomenclatura y unos procedimientos propios. Por tanto, **investiga en tu calculadora** y consulta su manual de instrucciones.

Ayuda

Si en el teclado de tu calculadora no aparecen explícitamente las teclas de resultados:

n, Σx y Σx^2

búscalos mediante las secuencias

RCL 3, RCL 2, RCL 1

Estudiemos con un ejemplo (observa la tabla de la izquierda) los pasos que hay que dar para introducir eficazmente unos datos en la calculadora y conseguir los correspondientes resultados.

PASOS QUE SE DEBEN DAR	EJEMPLO
① **Preparación.** Pon el aparato en disposición de realizar cálculos estadísticos: * MODO SD. Analiza en tu calculadora cómo se consigue este modo.	MODE * → SD
② **Borra** los datos que puedan haberse quedado acumulados de un trabajo anterior. (En algunas calculadoras, aunque se apaguen, estos datos no se borran).	INV AC
③ **Introduce** los datos. Cada dato se introduce poniéndolo en la pantalla y pulsando la tecla DATA. Si el dato está n veces, se pulsará n veces la tecla DATA; o bien se hará: dato × n DATA Sigue hasta cargar todos los datos.	151 × 1 DATA → 151 156 × 4 DATA → 156 161 × 9 DATA → 161 166 × 10 DATA → 166 171 × 4 DATA → 171 176 × 2 DATA → 176
④ **Corrige.** Posibilidad de borrar. Si has introducido un dato erróneamente, puedes eliminarlo escribiéndolo en pantalla y pulsando INV DATA.	Dato erróneo: 181 × 6 DATA Bórralo: 181 × 6 INV DATA
⑤ **Resultados.** Pulsa las teclas:	
n → número de individuos → $n = \sum f_i$	n → 30
Σx → suma de todos los valores → $\to \sum x = \sum f_i x_i$	Σx → 4920
Σx^2 → suma de los cuadrados de los valores $\to \sum x^2 = \sum f_i x_i^2$	Σx^2 → 807910
$\bar{x}$ → media	$\bar{x}$ → 164
σ_n → desviación típica	σ_n → 5.859465

Esta consulta la puedes hacer en cualquier momento del proceso. Después, si lo deseas, puedes seguir introduciendo datos.

Actividades

1 Sigue el proceso anterior para calcular $\bar{x}$ y σ en cada una de las distribuciones siguientes:

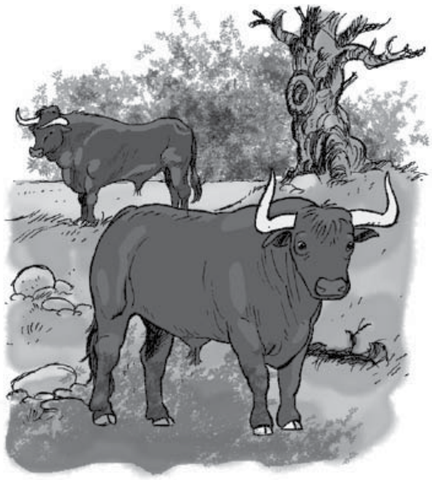
a) NOTAS (corresponde a la gráfica de 3.º B, página 125):

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f_i	0	5	4	2	2	1	1	2	3	4	8

b) ESTATURAS (en cm):

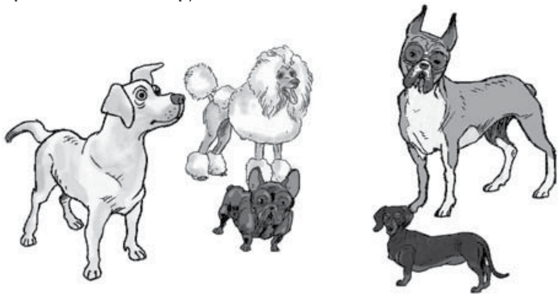
x_i	151	156	161	166	171	176
f_i	2	5	11	14	5	3

7 Coeficiente de variación



Los pesos de los toros de lidia de una ganadería se distribuyen con una media $\bar{x} = 500$ kg y una desviación típica $\sigma = 40$ kg.

Los pesos de los perros de una exposición canina tienen una media $\bar{x} = 20$ kg y una desviación típica $\sigma = 10$ kg.



La desviación típica de los pesos de la manada de toros bravos (40 kg) es superior a la de los perros (10 kg). Sin embargo, los 40 kg son poca cosa para el enorme tamaño de los toros (es decir, los toros de esa manada son *muy parecidos* en peso), mientras que 10 kg es mucho en relación con el peso de un perro. En casos como este, la desviación típica no es una medida adecuada para comparar dispersiones. Por ello, definimos un nuevo parámetro estadístico.

	$\bar{x}$	σ
TOROS	500	40
PERROS	20	10

40 con relación a 500 es menor que 10 con relación a 20.

Para comparar la dispersión de dos poblaciones heterogéneas, se define el **coeficiente de variación** así:

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}$$

Al dividir σ entre $\bar{x}$ estamos relativizando la dispersión.

El resultado se da, a veces, en tantos por ciento.

En el ejemplo de los toros y los perros, obtenemos:

- Para los toros: $CV = \dfrac{40}{500} = 0{,}08$ Es decir, el 8%.
- Para los perros: $CV = \dfrac{10}{20} = 0{,}50$ Es decir, el 50%.

	$\bar{x}$	σ	CV
TOROS	500	40	8%
PERROS	20	10	50%

De este modo sí se aprecia claramente que la variación de los pesos de los perros (50%) es mucho mayor que la de los pesos de los toros (8%).

Actividades

1 En distintas tiendas de instrumentos musicales preguntamos el precio de ciertos modelos concretos de piano, flauta travesera y armónica. Los resultados obtenidos tienen las siguientes medias y desviaciones típicas:

	PIANOS	FLAUTAS	ARMÓNICAS
MEDIA	943 €	132 €	37 €
DESV. TÍPICA	148 €	22 €	12 €

Compara la dispersión relativa de los precios de estos tres productos.

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

Practica

Población y muestra. Variables

1 ▼▽▽ Indica, para cada caso propuesto:

- Cuál es la población.
- Cuál es la variable.
- Tipo de variable: cualitativa, cuantitativa discreta o cuantitativa continua.

a) Peso de los recién nacidos en Murcia a lo largo del año pasado.

b) Profesiones que quieren tener los estudiantes de un centro escolar.

c) Número de animales de compañía que hay en los hogares españoles.

d) Partido al que los electores pueden votar en las próximas elecciones generales.

e) Tiempo semanal que dedican a la lectura los estudiantes de la ESO en España.

f) Número de tarjetas amarillas mostradas en los partidos de fútbol de 1.ª división en la temporada pasada.

2 ▼▽▽ Se ha hecho una encuesta para saber con qué regularidad se lee el periódico en una ciudad. Las respuestas fueron:

RESPUESTA	%
TODOS LOS DÍAS	37,2
UNA VEZ A LA SEMANA	29,2
UNA VEZ AL MES	10,4
ALGUNA VEZ AL AÑO	11,2
NUNCA	…
NO CONTESTA	0,4

a) Completa la tabla calculando el porcentaje de personas que respondieron "nunca".

b) Si hubo 145 personas que respondieron "nunca", ¿a cuántas personas se encuestó?

c) Di cuántas personas dieron cada una de las respuestas.

d) Las personas encuestadas, ¿son población o muestra?

Elaboración de tablas y gráficas

3 ▼▽▽ Al preguntar a los estudiantes de un grupo de 3.º de ESO por el número de libros que han leído en el último mes, hemos obtenido estos datos:

2	1	3	1	1	5	1	2	4	3
1	0	2	4	1	0	2	1	2	1
3	2	2	1	2	3	1	2	0	2

a) Haz la tabla de frecuencias absolutas.

b) Realiza el diagrama de barras que corresponde a estos datos.

4 ▼▽▽ Al preguntar a un grupo de alumnos por el número de horas que suele estudiar cada semana, sus respuestas fueron:

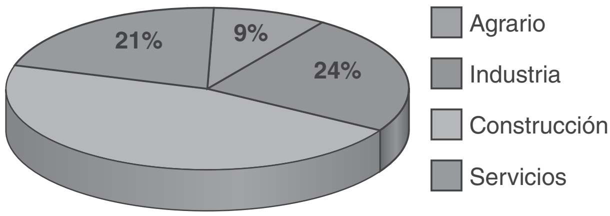
14	9	9	20	18	12	14	6	14	8
15	10	18	20	2	7	18	8	12	10
20	16	18	15	24	10	12	25	24	17
10	4	8	20	10	12	16	5	4	13

a) Reparte estos datos en los intervalos cuyos extremos son: 0 - 4,5 - 9 - 13,5 - 18 - 22,5 - 27

b) Haz la tabla de frecuencias y el histograma correspondiente.

Interpretación gráfica

5 ▼▽▽ En una cierta región se han estudiado los accidentes mortales producidos en el trabajo, según el sector de actividad. Estos han sido los resultados:



a) ¿Cuál es el porcentaje de accidentes mortales producidos en el sector de la construcción?

b) Si hubo 135 accidentes mortales en el sector agrario, ¿cuál fue el número total de accidentes mortales en la región?

c) ¿Cuántos accidentes mortales hubo en cada uno de los sectores?

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

Parámetros estadísticos. Cálculo

6 ▼▽▽ Calcula los parámetros media, mediana, moda, recorrido, desviación media, varianza y desviación típica de cada una de las distribuciones siguientes:

a) 3, 5, 5, 5, 6, 8, 10, 10, 11

b) 3, 3, 4, 5, 5, 5, 6, 8, 10, 10, 11, 14

c) 183, 172, 168, 190, 175, 180, 170, 172, 175, 165

7 ▼▼▽ Contando el número de erratas por página en un libro concreto, David ha obtenido los datos siguientes:

N.º DE ERRATAS (x_i)	0	1	2	3	4	5
N.º DE PÁGINAS (f_i)	50	40	16	9	3	2

a) Halla la media y la desviación típica.

b) ¿Cuál es la moda?

8 ▼▼▽ En un control de velocidad en carretera se obtuvieron los siguientes datos:

VELOCIDAD (km/h)	60-70	70-80	80-90	90-100	100-110	110-120
N.º DE COCHES	5	15	27	38	23	17

a) Haz una tabla reflejando las marcas de clase y las frecuencias.

b) Calcula la media y la desviación típica.

c) ¿Qué porcentaje circula a más de 90 km/h?

9 ▼▼▽ Los puntos conseguidos por Teresa y por Rosa en una semana de entrenamiento, jugando al baloncesto, han sido los siguientes:

TERESA	16	25	20	24	22	29	18
ROSA	23	24	22	25	21	20	19

a) Halla la media de cada una de las dos.

b) Calcula la desviación típica y el coeficiente de variación. ¿Cuál de las dos es más regular?

Autoevaluación

1 Indica, para cada caso, cuáles son los individuos, cuál la población, cuál la variable y de qué tipo es:

- Número de almendras que hay en cada tableta de chocolate de una producción.
- Tiempo de espera de cada paciente en una consulta de un centro de salud.
- Tipo de especialista al que acuden los pacientes a un centro de salud.

2 Para estudiar el "número de almendras que hay en cada tableta de chocolate" de una cierta producción, se analiza una de cada 200 producidas un cierto día. Las tabletas analizadas, ¿son población o muestra?

3 Tiempo, en minutos, que pasaron en la sala de espera los pacientes de un médico cierto día:

28	4	12	35	2	26	45	22	6	23
27	16	18	32	8	47	8	12	34	15
28	37	7	39	15	25	18	17	27	15

Haz una tabla, repartiéndolos en intervalos de extremos 0 - 10 - 20 - 30 - 40 - 50.

Representa los resultados mediante un gráfico adecuado (diagrama de barras o histograma).

4 Número de días que han ido a la biblioteca del Centro los alumnos de un curso:

3 1 2 4 0 2 1 3 1 0 2 0 3 5 2

0 2 4 1 2 1 2 0 5 3 3 1 2 1 0

Haz una tabla de frecuencias y representa los resultados mediante un gráfico adecuado (diagrama de barras o histograma).

5 Halla media, mediana, desviación media, desviación típica y coeficiente de variación de esta distribución:

6 9 1 4 8 2 3 4 4 9

6 Calcula $\bar{x}$, σ y C.V. de las distribuciones…

a) …del ejercicio 4. b) …del ejercicio 3.

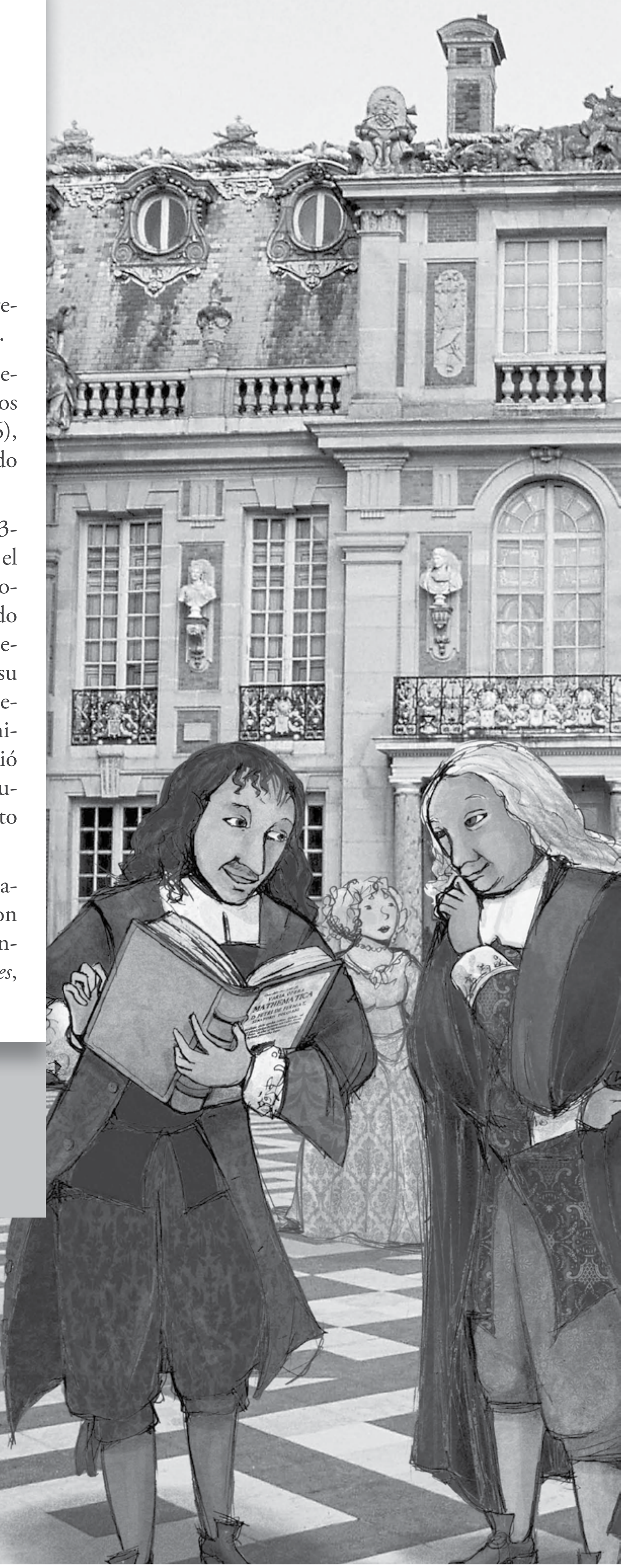
13 Azar y probabilidad

Al principio, la teoría de la probabilidad estuvo estrechamente relacionada con los juegos y las apuestas.

Los primeros estudios matemáticos relativos a juegos de azar se deben a algunos algebristas italianos del siglo XVI. Uno de ellos, **Cardano** (1501-1576), escribió el primer tratado medianamente organizado sobre este tema: *El libro de los juegos de azar*.

En 1654, el matemático francés **Blaise Pascal** (1623-1662) realizó un viaje en compañía de su amigo el caballero de Meré, un jugador habitual. Este le propuso una serie de problemas que se había encontrado como jugador y que interesaron vivamente al matemático. Unos días después, Pascal se los expuso a su amigo **Pierre Fermat** (1601-1665), también matemático, y ambos los resolvieron, aunque por caminos distintos. La correspondencia que se estableció entre ellos intercambiando ideas, métodos, resoluciones y nuevos problemas dio lugar al nacimiento de la teoría de la probabilidad.

A partir de entonces, otros matemáticos profundizaron en este nuevo campo. Los más destacados fueron el suizo **Bernouilli** (*Ars Conjectandi*, 1713) y el francés **Laplace** (*Teoría analítica de las probabilidades*, 1812).



DEBERÁS RECORDAR

- Cuándo un suceso depende del azar.
- Qué es la frecuencia relativa de un suceso.

1 Sucesos aleatorios

Etimología

Aleatorio: Relativo al azar.

En latín, *alea* significa "dado" y también "suerte", "azar".

En nuestras vivencias de cada día nos encontramos con muchos acontecimientos de los que no podríamos predecir si ocurrirán o no. Dependen del azar. Se llaman, pues, **sucesos aleatorios**. Por ejemplo:

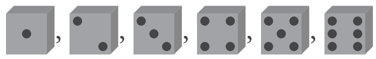
DEPENDEN DEL AZAR	NO DEPENDEN DEL AZAR
Nevará mañana.	Amanecerá mañana.
Ganará mi equipo de baloncesto.	Jugará mi equipo de baloncesto.
Al lanzar un dado, saldrá un cinco.	Al soltar el dado, caerá.
Acertaré más de 11 en la quiniela.	Jugaré a la quiniela.

Experiencias aleatorias

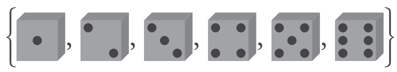
Para estudiar el azar y sus propiedades, podemos realizar **experiencias aleatorias,** es decir, experimentos cuyos resultados dependen del azar. Por ejemplo, estudiemos la *experiencia aleatoria* consistente en *lanzar un dado y observar lo que sale*.

Lanzar un dado y observar el resultado obtenido es una **experiencia aleatoria** porque el resultado depende del azar.

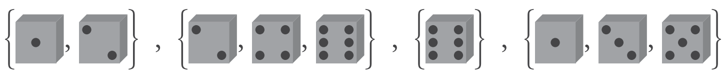
- **Caso.** Cada uno de los resultados que puede obtenerse al realizar una experiencia aleatoria se llama **caso.**

  Los posibles casos al *lanzar un dado* son: 

- **Espacio muestral.** El conjunto de todos los casos posibles se llama **espacio muestral,** al que designamos por E.

  En el dado, el espacio muestral es: E = 

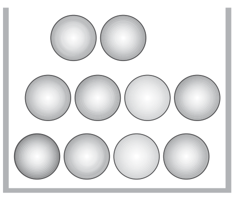
- **Sucesos.** Los subconjuntos del espacio muestral se llaman **sucesos.** Algunos sucesos (hay muchos más) de la experiencia *lanzar un dado* son:



Actividades

1 En una urna hay 10 bolas de cuatro colores.

Sacamos una bola y anotamos su color.



a) ¿Es una experiencia aleatoria?

b) Escribe el espacio muestral y cinco sucesos.

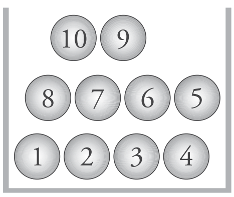
2 *Lanzamos una chincheta y observamos si cae con la punta hacia arriba o no.*

a) ¿Es una experiencia aleatoria?

b) Escribe el espacio muestral.

3 En una urna hay 10 bolas numeradas.

Sacamos una bola y anotamos el número.



a) ¿Es una experiencia aleatoria?

b) Escribe el espacio muestral y seis sucesos.

4 En una bolsa hay 10 bolas, todas rojas.

Sacamos una bola y anotamos su color.

¿Es una experiencia aleatoria?

¿Por qué?

2 Probabilidad de un suceso

La probabilidad de un suceso indica el grado de confianza que podemos tener en que ese suceso ocurra. Se expresa mediante un número comprendido entre 0 y 1.

Para designar la probabilidad de un suceso S ponemos $P[S]$.

Por ejemplo, $P[S] = \frac{1}{5}$ significa que, a grandes rasgos, el suceso ocurre una de cada cinco veces que se realiza la experiencia.

- Si $P[S]$ es un número próximo a cero, el suceso es poco probable.
- Si $P[S]$ es próximo a uno, el suceso es muy probable.

Ley fundamental del azar

Recuerda

f (frecuencia) es el número de veces que ocurre un suceso.

f_r (frecuencia relativa) es la proporción de veces que ocurre el suceso.

Al repetir muchas veces, N, una experiencia aleatoria, la frecuencia relativa de cada suceso, S, toma valores muy parecidos a su probabilidad:

$$f_r(S) \approx P[S]$$

Y cuanto más grande sea N más se parece $f_r(S)$ a $P[S]$.

Cómo se mide la probabilidad de un suceso

- Si el suceso pertenece a una **experiencia regular,** como en el caso de una moneda, se puede evaluar la probabilidad sin necesidad de experimentar. Se hará *asignando la misma probabilidad a todos los casos.*

  Por ejemplo, para asignar probabilidades a cada cara de un dado correcto, tenemos en cuenta que son 6 casos, todos con la misma probabilidad. Por tanto, la probabilidad de cada cara es 1/6.

- Si la **experiencia** es **irregular,** *a priori* (1) desconocemos la probabilidad de cada uno de los casos. La única forma de adquirir información sobre tales probabilidades es *experimentar*.

  Por ejemplo, si un cierto jugador de baloncesto ha encestado 187 tiros libres y ha fallado 85 (su número de intentos ha sido 187 + 85 = 272), razonamos así:

  $f_r[\text{ACIERTO}] = 187/272 = 0{,}6875$. Por tanto, $P[\text{ACIERTO}] \approx 0{,}6875$.

  $f_r[\text{FALLO}] = 85/272 = 0{,}3125$. Por tanto, $P[\text{FALLO}] \approx 0{,}3125$.

(1) *a priori*: antes de empezar.

Actividades

1 En una bolsa hay 90 bolas idénticas, numeradas del 1 al 90. ¿Cuál es la probabilidad de extraer la bola con el número 58? ¿Cuál es la probabilidad de extraer cada una de las bolas?

2 En otra bolsa hay bolas de dos tamaños. Sacamos una, miramos si es grande, G, o chica, CH, y la devolvemos a la bolsa. Así observamos 84 bolas G y 36 bolas CH. ¿Qué valores asignarás a $P[G]$ y a $P[CH]$?

3 Ley de Laplace para experiencias regulares

Ten en cuenta

$P[⚀, ⚁, ⚂] =$

$= P[⚀] + P[⚁] + P[⚂] =$

$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6}$

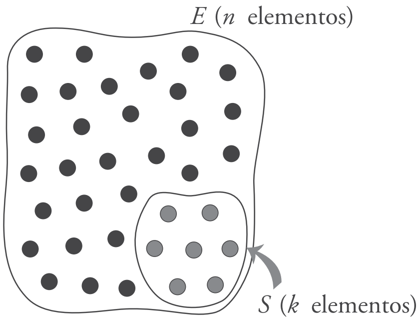
Hemos pintado las caras de un dado de los colores siguientes:

⚀ ⚁ ⚂ de rojo. El rojo saldrá 3 veces de cada 6: $P[\ \ ] = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

⚃ ⚄ de verde. El verde saldrá 2 veces de cada 6: $P[\ \ ] = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

⚅ de amarillo. El amarillo saldrá 1 vez de cada 6: $P[\ \ ] = \frac{1}{6}$

Estos resultados se pueden generalizar para evaluar la probabilidad de un suceso cualquiera relacionado con un instrumento aleatorio regular.



Realizamos una experiencia aleatoria con un instrumento regular.

El espacio muestral tiene n elementos (casos) y, por tanto, la probabilidad de cada caso es $1/n$.

S es un suceso que consta de k elementos.

Entonces, la probabilidad de S es: $P[S] = \frac{k}{n}$

Esto se expresa del modo siguiente:

$$P[S] = \frac{\text{número de casos favorables a } S}{\text{número total de casos posibles}} \qquad \boxed{\text{LEY DE LAPLACE}}$$

Problemas resueltos

ROJAS	40
VERDES	25
AZULES	15
NEGRAS	10

1. En una bolsa tenemos 90 bolas de colores, todas del mismo tamaño, repartidas como indica la tabla del margen. Si sacamos una al azar, calcular las probabilidades de que sea de uno u otro color.

$P[\ \ ] = \frac{\text{n.º de bolas rojas}}{\text{n.º total de bolas}} = \frac{40}{90} = \frac{4}{9}$

$P[\ \ ] = \frac{25}{90} = \frac{5}{18}$ $\qquad P[\ \ ] = \frac{15}{90} = \frac{1}{6}$ $\qquad P[\ \ ] = \frac{10}{90} = \frac{1}{9}$

2. En una baraja de 40 cartas, hallar la probabilidad de obtener REY.

$$P[\text{REY}] = \frac{\text{número de reyes}}{\text{número total de cartas}} = \frac{4}{40} = \frac{1}{10} = 0{,}1$$

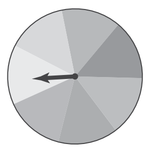
3. En una caja hay 3 586 clavos, de los cuales 311 son defectuosos. Calcular la probabilidad de que, al extraer un clavo, este sea defectuoso.

$$P[\text{DEFECTUOSO}] = \frac{\text{número de clavos defectuosos}}{\text{número total de clavos}} = \frac{311}{3\,586} = 0{,}0867$$

Actividades

1 En un campamento juvenil hay 32 jóvenes europeos, 13 americanos, 15 africanos y 23 asiáticos. Se elige al azar al portavoz de ellos. ¿Qué probabilidad hay de que sea europeo?

2 Al hacer girar la aguja, ¿cuál es la probabilidad de que caiga en alguno de los colores rojo, verde o azul?



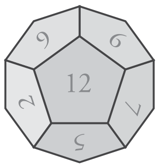
Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

Practica

Espacios muestrales. Sucesos

1 ▼▽▽ Lanzamos un dado con forma de dodecaedro con las caras numeradas del 1 al 12 y anotamos el número obtenido.



a) ¿Cuál es el espacio muestral?

b) Describe los sucesos:

A = "Menos de 5" B = "Más de 4"

C = "Número par" D = "No múltiplo de 3"

2 ▼▽▽ Nos fijamos en la cifra en la que termina el premio gordo de la lotería.

a) Describe el espacio muestral.

b) Describe los sucesos: A = "Menor que 4"

B = "Número impar" C = "Mayor que 5"

3 ▼▽▽ Escribimos cada una de las letras de la palabra JUEGO en un papel diferente y las ponemos en una bolsa. Extraemos una letra al azar.

a) Describe los sucesos elementales de este experimento aleatorio.

b) Describe el suceso "obtener vocal".

c) Si la palabra elegida fuera PROBABILIDAD, ¿cómo responderías a los apartados a) y b)?

4 ▼▼▽ Lanzamos una moneda dos veces y anotamos los resultados ordenadamente.

a) Completa el espacio muestral: E = {CC, C+, …}

b) Describe los sucesos: A = "La primera fue cara"

B = "Ninguna fue cara"

5 ▼▼▽ Lanzamos una moneda tres veces y anotamos los resultados en el orden en que salen.

a) Describe el espacio muestral (hay 8 casos).

b) Describe los sucesos siguientes:

A = "Obtener dos veces cara"

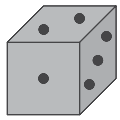
B = "Obtener dos veces cruz"

C = "No obtener ninguna cruz"

Cálculo de probabilidades

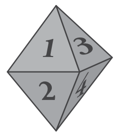
6 ▼▽▽ Halla la probabilidad de obtener un 2 y la probabilidad de obtener un 5, al lanzar un dado correcto en cada uno de estos casos:

a)



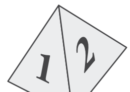
(Cubo numerado del 1 al 6)

b)



(Octaedro numerado del 1 al 8)

c)



(Tetraedro numerado del 1 al 4)

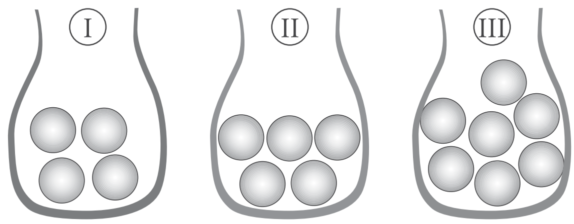
7 ▼▽▽ En una bolsa hay 6 bolas rojas, 4 azules, 7 verdes, 2 amarillas y una negra.

Extraemos una al azar. Halla la probabilidad de que:

a) Sea azul. b) No sea negra.

c) Sea roja o verde. d) No sea amarilla ni negra.

8 ▼▽▽ Razona de cuál de las bolsas siguientes es más probable sacar bola roja:



9 ▼▽▽ Lanzamos un dado correcto. Hallas las probabilidades de que el resultado sea:

a) Múltiplo de 3. b) Múltiplo de 2.

c) Mayor que 1. d) Menor que 5.

e) Menor que 1. f) Potencia de base 2.

10 ▼▽▽ Extraemos una carta de una baraja española de 40 naipes. Halla la probabilidad de que:

a) La carta sea de BASTOS.

b) La carta NO sea ni AS ni FIGURA.

c) La carta sea un número menor que 6.

d) La carta sea de OROS O FIGURA.

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

11 ▼▼▽ En un libro de 120 páginas, hemos contado el número de erratas en cada una de las páginas. Los resultados se resumen en esta tabla:

N.° ERRATAS	N.° PAGINAS
0	58
1	42
2	16
3	3
4	1

Al elegir una página al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga ninguna errata?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que tenga exactamente dos erratas?

c) ¿Y la de que tenga alguna errata? ¿Y la de que tenga más de tres?

12 ▼▽▽ De una bolsa con 7 bolas rojas, 5 verdes, 3 amarillas, 11 negras y 3 azules, sacamos una al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que…

a) … sea roja? b) … no sea negra?

13 ▼▽▽ Extraemos una carta de una baraja española de 40 naipes. Halla la probabilidad de que:

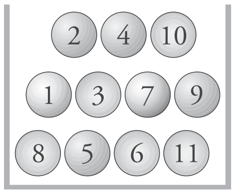
a) Sea un CINCO.

b) No sea un CABALLO.

c) Sea de OROS o de COPAS.

d) No sea de ESPADAS.

14 ▼▼▽ De esta urna extraemos una bola y observamos su número y color.



Halla las probabilidades de cada uno de los siguientes sucesos:

a) Obtener bola verde con número par.

b) Obtener bola roja con número par.

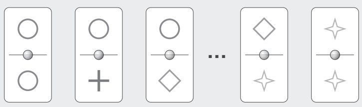
c) Obtener bola amarilla o roja.

d) Obtener una bola con número mayor que 7.

Autoevaluación

1 Describe un dominó con ○ + ◇ ✧.

Las piezas serían como estas:



Dibuja todas.

Deben ser 10 fichas.

Echamos las fichas en una bolsa y extraemos una.

a) ¿Es una experiencia aleatoria?

b) ¿Cuántos elementos tiene el espacio muestral?

c) Describe el suceso "la ficha extraída tiene el símbolo +".

2 Dejamos caer 1 000 chinchetas. Caen 649 así y el resto así.

Halla las frecuencias absoluta y relativa de los sucesos y. Estima las probabilidades de ambos casos.

3 En un equipo de natación hay 3 niñas americanas, 5 europeas, 2 asiáticas y 2 africanas.

Si elegimos una de ellas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea asiática? ¿Y la de que no sea europea?

4 Ana tira un dado y su hermana Eva lo tira después.

¿Cuál es la probabilidad de que la puntuación de Eva sea mayor que la de Ana?

5 De cada una de estas bolsas extraemos una bola. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de las tres cifras sea 5?